Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп`ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2(в. 9)
із курсу «Моделювання систем»

Виконала
студентка 3 курсу
групи ІПС-33
Постернак Таїсія

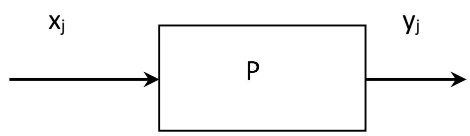
Київ, 2023

Тема.

Побудова лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів.

Постановка задачі.

Будемо вважати, що на вхід системи перетворення, математична модель якої невідома, поступають послідовно дані у вигляді $m-1$ вимірних векторів $\mathbf{x}_j$. На виході системи спостерігається сигнал у вигляді вектора $\mathbf{y}_j$ розмірності p.



Для послідовності вхідних сигналів $\mathbf{x}_j$, $j=1,2,\dots,n$ та вихідних сигналів $\mathbf{y}_j$, $j=1,2,\dots,n$ знайти оператор P перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Теорія.

Будемо шукати математичну модель оператора об'єкту в класі лінійних операторів $\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_j\\1\end{pmatrix}=\mathbf{y}_j$, $j=1,2,\ldots,n$.

(1)

Невідома матриця $\mathbf{A}$ математичної моделі об'єкту розмірності $p\times n$.

Систему (1) запишемо у матричній формі

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n),$$

або $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}$, де $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}$ – матриця вхідних сигналів розмірності $m\times n$, $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n)$ – матриця вихідних сигналів розмірності $p\times n$.

Матрицю $\mathbf{X}$ будемо інтерпретувати як двовимірне вхідне зображення, а матрицю $\mathbf{Y}$ вихідне зображення.

Тоді $\mathbf{A}=\mathbf{YX}^{+}+\mathbf{VZ}^{T}(\mathbf{X}^{T})$, де матриця $\mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_{(1)}^{T}\\ \mathbf{v}_{(2)}^{T}\\ \vdots\\ \mathbf{v}_{(p)}^{T}\end{pmatrix}$, розмірності $p\times m$, $\mathbf{Z}(\mathbf{X}^{T})=\mathbf{I}_m-\mathbf{XX}^{+}$.

Якщо для матриці A відома псевдообернена (обернена) матриця A^{+}, то для розширеної матриці $\begin{pmatrix}A\\a^{T}\end{pmatrix}$ справедлива формула Гревіля для псевдообернення матриці:

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left(A^+ - \dfrac{Z(A)aa^T A^+}{a^T Z(A)a} \vdots \dfrac{Z(A)a}{a^T Z(A)a} \right), if\ a^T Z(A)a > 0 \\ \left(A^+ - \dfrac{R(A)aa^T A^+}{1 + a^T R(A)a} \vdots \dfrac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a} \right), if\ a^T Z(A)a = 0 \end{cases},$$

де $Z(A) = E - A^+ A,\ R(A) = A^+ \left(A^+\right)^T$.

Для першого кроку алгоритму $\left(a_1^T\right)^+ = \dfrac{a_1}{a_1^T a_1}$, де $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$.

Формула Мура-Пенроуза для знаходження оберненої (псевдооберненої) матриці:

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ \left(A^T A + \delta^2 E_n \right)^{-1} A^T \right\} = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ A^T \left(AA^T + \delta^2 E_m \right)^{-1} \right\}.$$

Матриця A розмірності $m \times n$.

Хід роботи.

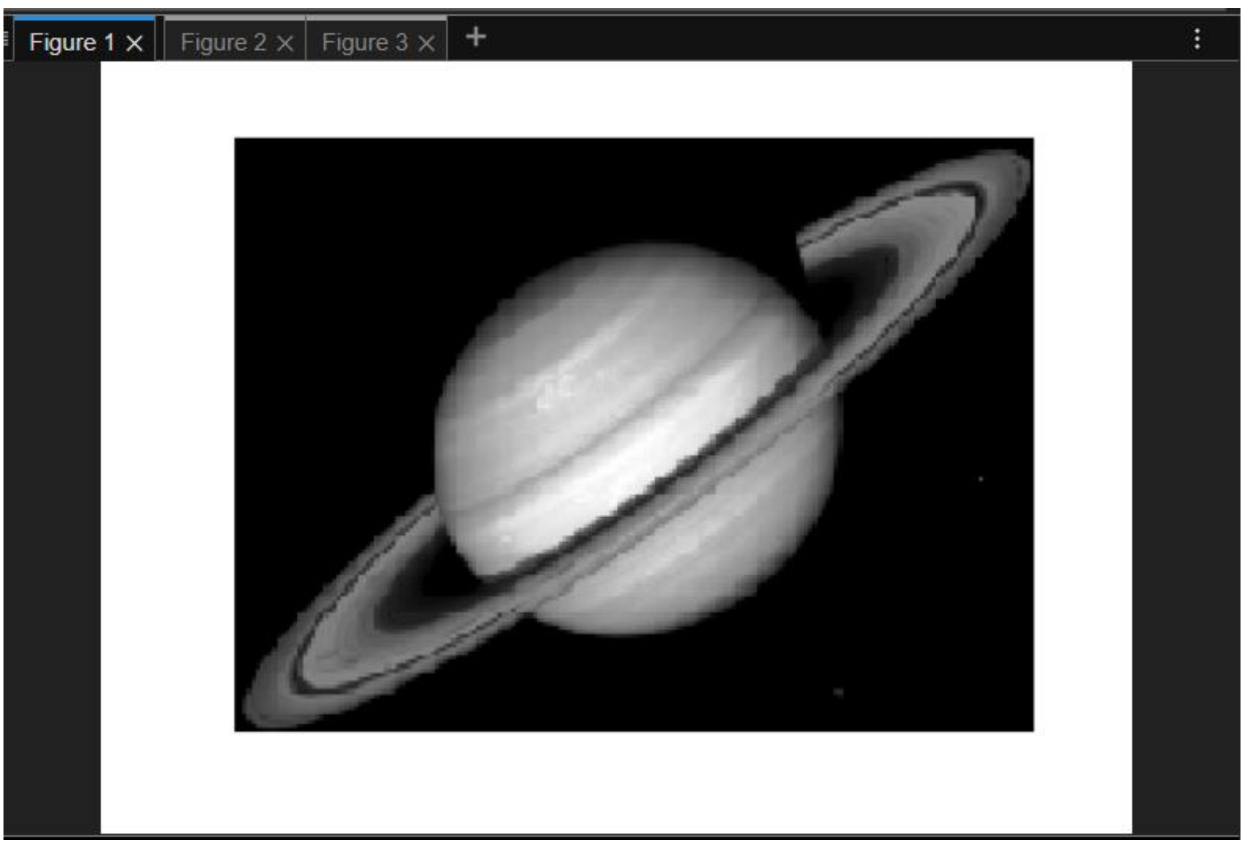
Зчитуємо дані та застосовуємо реалізовану формулу Гревіля. Далі перевіряємо правильність знаходження псевдооберненої матриці за допомогою теореми:

Матриця A+ розмірності n × m є псевдооберненою матрицею до матриці A розмірності m×n тоді і тільки тоді, якщо виконуються такі умови:

- AA+A = A;
- A+AA+ = A+;
- AA+ – симетрична матриця розмірності m × m;
- A+A – симетрична матриця розмірності n × n.

Опісля будуємо лінійний оператор для бажаного перетворення із отриманої псевдооберненої матриці.

Вхідне зображення:

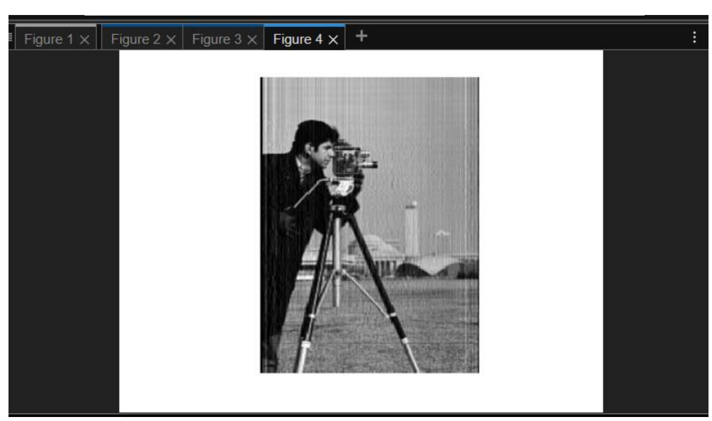


Вихідне зображення:

Отримане зображення:

через формулу Гревіля

через формулу Мура-Пенроуза



Код програми (MATLAB).

```matlab
clear

A = imread("x1.bmp");
B = imread("y9.bmp");
imshow(A)
figure
imshow(B)

A = double(A);
B = double(B);

pseudoinverseG = greville(A);
check(pseudoinverseG, A)
operatorG = B * pseudoinverseG;
resG = uint8(operatorG * A);
figure
imshow(resG)
disp(pseudoinverseG)
resMultG = A * pseudoinverseG;
disp(resMultG)
disp("Error Greville: " + norm(resMultG - eye(size(resMultG,1))))

pseudoinverseMP = MoorePenrose(A, 0.00001);
check(pseudoinverseMP, A)
operatorMP = B * pseudoinverseMP;
resMP = uint8(operatorMP * A);
figure
imshow(resMP)
disp(pseudoinverseMP)
resMultMP = A * pseudoinverseMP;
disp(resMultMP)
disp("Error Moore-Penrose: " + norm(resMultMP - eye(size(resMultMP,1))))

function result = MoorePenrose(A, eps)
    delta = 1;
    curr_eps = eps+1;
    E = eye(size(A, 1));
    curr_a = transpose(A) / (A * transpose(A) + delta * E);

    while curr_eps > eps
        prev_a = curr_a;
        delta = delta/2;
        curr_a = transpose(A) / (A * transpose(A) + delta * E);
        curr_eps = norm(curr_a - prev_a);
    end

    result = curr_a;
end

function result = greville(A)
     curr_a = A(1,:);
     curr = zeros(size(curr_a));
     curr = transpose(curr);
```

```
       if (nnz(curr_a(1) ~= 0))
             curr = transpose(curr_a) / (curr_a * transpose(curr_a));
       end
        n = size(A,1);

      for i = 2:n
         curr_a = A(i,:);
         z = eye(size(curr,1))-(curr*A(1:i-1,:));
         r = curr * transpose(curr);
         condition = (curr_a * z) * transpose(curr_a);
             if (nnz(condition) == 1)
                 row_to_add = (z * transpose(curr_a)) / condition;
             else
                 row_to_add = (r * transpose(curr_a)) / (1 + ((curr_a * r) *
transpose(curr_a)));
             end
         curr = curr -( row_to_add * (curr_a * curr));
         curr = cat(2,curr, row_to_add);
      end
      result = curr;
end

function check(Aplus,A)
    assert(isequal(round(Aplus,4),round(Aplus * A * Aplus,4)));
    assert(isequal(round(A,4),round(A*Aplus*A,4)));
    assert(issymmetric(round(A*Aplus,4)));
    assert(issymmetric(round(Aplus*A,4)));
end

function n = norm(A)
    n = sum(sum(abs(A)));
end
```