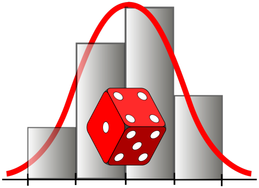
Variables aléatoires continues



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Plan

1. Variable aléatoire continue.
   - Définition
   - Fonction de répartition
   - Densité et loi de probabilité
   - Espérance et variance
2. Lois usuelles continues.
   - Loi uniforme
   - Loi exponentielle
   - Loi normale
   - Loi de Student
   - Loi Khi deux

esprit Se former autrement

Variable aléatoire continue

Notion d'une variable aléatoire continue

Une variable aléatoire continue est une variable qui prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Exemples:

- Taille d'un étudiant, $X(\Omega) = [0, M]$.
- Taux de cholestérol, $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Temps d'attente à une caisse, $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

esprit Se former autrement

Variable aléatoire continue

Plus généralement, X est une v.a continue, lorsqu'elle prend ses valeurs dans un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

On ne peut pas donc définir la loi de X par la donnée des probabilités des évènements élémentaires $P(X = a)$ pour tout a.

Exemple:

- Si X désigne le taux de cholestèrol d'un individu, alors $P(X = 0,128792454 mg|l) = 0$.

On s'intéresse plutôt à la probabilité que X soit dans un intervalle donné [a, b], ou qu'elle soit inférieure à une valeur donnée a, à partir de la fonction de répartition :

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Propriètés

- $F(x) = P(X \in]-\infty, x])$,
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$,
- $P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - F(b)$

Remarques

On admet que pour une variable aléatoire continue on a:

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $P(X = a) = 0$.
- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$.
- $P(a < X) = P(a \leq X)$.
- $P(X > b) = P(X \geq b)$.

Propriètés

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

1. F est une fonction croissante, définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Densité d'une v.a continue

Dans le cas où F est dérivable, la fonction f dérivée de F est appelée densité de probabilité de X et pour tout $x \in R$, $F'(x) = f(x)$, ou encore :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

Toute fonction f qui satisfait :

- $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$,
- $\int_{\mathbb{R}} f(t).dt = 1$.

  est dite densité de probabilité.

Densité d'une v.a continue

Dans le cas où F est dérivable, la fonction f dérivée de F est appelée densité de probabilité de X et pour tout $x \in R$, $F'(x) = f(x)$, ou encore :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

Toute fonction f qui satisfait :

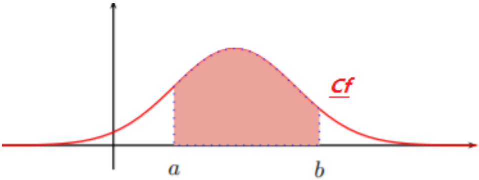
- $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$,
- $\int_{\mathbb{R}} f(t).dt = 1$.

  est dite densité de probabilité.

Loi de probabilité d'une v.a discrète  Densité d'une v.a continue

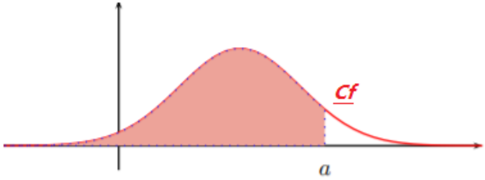
Conséquences :

- F étant une fonction croissante, f est positive.
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

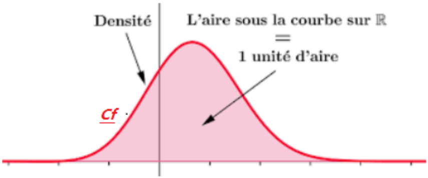


Variable aléatoire continue

- $P(X \leq a) = \lim_{x \to -\infty} [F(a) - F(x)] = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(x)dx.$



- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$



[EXEMPLE]

Voici quelques exemples de densités de probabilités.
Vérifier que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des densités de probabilités et tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé :

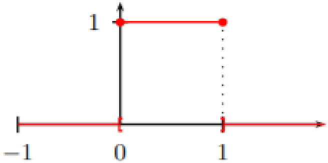
$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & x < 0 \\ 1 \text{ si } & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } & x > 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \text{x+1} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \text{-x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solution

1. $f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
   - f_1 est positive, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - La fonction f_1 est continue par morçeaux sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x).dx = \int_{-\infty}^{0} f_1(x).dx + \int_{0}^{1} f_1(x).dx + \int_{1}^{+\infty} f_1(x).dx$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1 \Longrightarrow \text{Donc } f_1 \text{ est bien une d.d.p.}$$



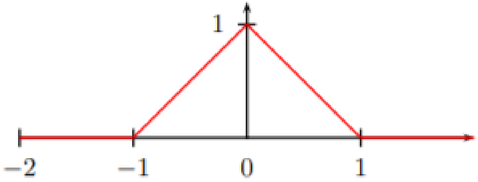
2. $$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \text{x+1} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \text{-x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } \quad x > 1 \end{cases}$$

- f_2 est positive, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- La fonction f_2 est continue par morçeaux sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x).dx &= \int_{-\infty}^{-1} f_2(x).dx + \int_{-1}^{0} f_2(x).dx + \int_{0}^{1} f_2(x).dx \\
&+ \int_{1}^{+\infty} f_2(x).dx \\
&= 0 + \int_{-1}^{0} (x+1).dx + \int_{0}^{1} (-x+1).dx + 0 \\
&= [\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^{0} + [-\frac{x^2}{2} + x]_{0}^{1} \\
&= 1 \Longrightarrow \text{Donc } f_2 \text{ est bien une d.d.p.}
\end{aligned}$$

Variable aléatoire continue

La représentation de f_2 sur un repère orthonormé est donnée par :



Variable aléatoire continue

Espérance et variance d'une v.a continue

Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité.

- On appelle **espérance** de X le réel, noté $\mathbf{E}(X)$, défini par la relation

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

- On appelle variance de X le réel, noté $\mathbf{Var}(X)$, qui, s'il existe, est défini par la relation

$$\mathbf{Var}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^2 f(x)dx.$$

- On appelle **écart-type** de X le réel, noté $\sigma(X)$, défini par la relation

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{Var}(X)}.$$

Exemple:

Calculons l'espérance, la variance et l'écart-type pour la densité f_2:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_2(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} x.f_2(x)dx + \int_{-1}^{0} x.f_2(x)dx \\
&+ \int_{0}^{1} x.f_2(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x.f_2(x)dx. \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} x.{\color{red}0}dx} + \int_{-1}^{0} x.{\color{red}(x+1)}dx \\
&+ \int_{0}^{1} x.{\color{red}(-x+1)}dx + \cancel{\int_{1}^{+\infty} x.{\color{red}0}dx}. \\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+x)dx + \int_{0}^{1} (-x^2+x)dx \\
&= [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_{0}^{1} = 0
\end{aligned}$$

- La variance:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^2 . f_2(x) dx. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \cancel{\mathbf{E}(X)})^2 . f_2(x) dx. \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 . (x+1)(x) dx + \int_{0}^{1} x^2 (-x+1) dx. \\
&= [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

- L'écart-type:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire continue admettant une espérance et une variance, alors pour tous a et $b \in \mathbb{R}$:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$.

Si de plus X et Y sont indépendantes,

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.
- $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$

La loi uniforme est la loi exacte des phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle $[a,b]$.
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a;b]$ avec $a<b$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X\sim\mathcal{U}([a,b])$.

Exemple

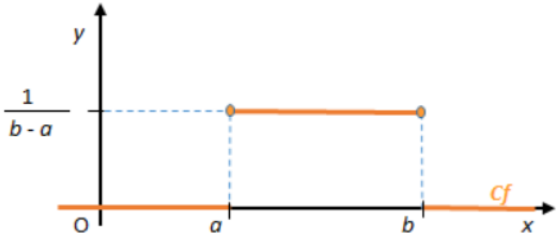
- L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet de modéliser une loi uniforme sur [a,b].

Fonction de répartition de la loi uniforme:

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$. La densité de probabilité est alors:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ci-dessous, la courbe représentative de f,



Lois usuelles continues

Par définition de la fonction de répartition on a:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad ; \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Distinguant 3 cas suivant les valeurs de x :

- Si $x < a$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Si $a \leq x \leq b$:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt \\
&= 0 + \frac{1}{b-a}[t]_a^x \\
&= \frac{x-a}{b-a}
\end{aligned}
$$

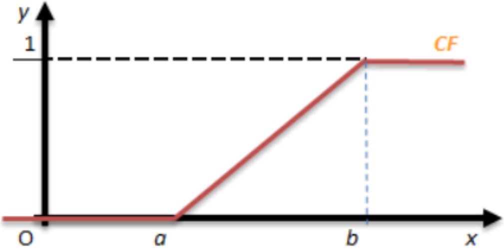
- Si $x > b$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt \\
&= 0 + 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Conclusion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Ci-dessous, la courbe représentative de F,



Espérance et variance de la loi uniforme

L'espérance de la loi uniforme continue vaut :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

La variance de la loi uniforme continue vaut :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Application

Pour générer un nombre aléatoire de l'intervalle $[0, 1]$, Python utilise la commande random().
X est la variable aléatoire égale au nombre affiché avec cette commande.

1. Calculer $P(0,33 \leq X \leq 0,59)$.
2. Quel est le nombre moyen qu'on s'attend à trouver si on repète plusieurs fois cette expérience ?

```python
from random import *

n = random()
print(n)

```

Solution

$\bullet X \sim \mathcal{U}([0,1])$, Par définition :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x-0}{1-0} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(0.33 \leq X \leq 0.59) &= F(0.59) - F(0.33) \\ &= 0.59 - 0.33 = 0.26 \end{aligned}$$

- Le nombre moyen qu'on s'attend à trouver, est égale à $E(X)$:

$$E(X) = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si x <0.} \end{cases}$$

Exemples La loi exponentielle permet de modéliser

- La durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique.
- Le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau.

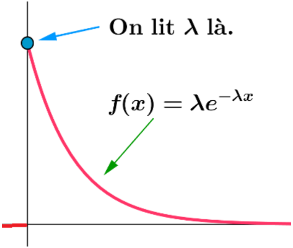
En général, la loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement.

Propriétés

Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de parmètre $\lambda > 0$ on a:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si x <0.} \end{cases}$$

La courbe représentative de f est donnée par :



Calculons alors la fonction de répartition de X:

Fonction de répartition

Par définition la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

On distingue deux cas suivant les valeurs de x:

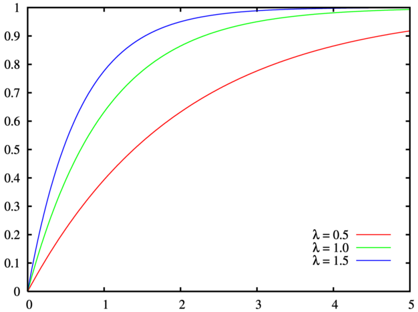
- Si $x < 0, F(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$;

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t).dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t).dt + \int_{0}^{x} f(t).dt \\
&= \int_{0}^{x} \lambda.e^{-\lambda.t}.dt \\
&= \lambda\Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda.t}\Big]_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda.x} \ ; \ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \; ; & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \; ; & \text{si x <0.} \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction de répartition avec des différentes valeurs de λ est donc:



Espérance

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x.f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x.(\lambda e^{-\lambda.x})dx \end{aligned}$$

On effectue une intégration par partie :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & ; \quad u^{'}(x) &= 1 \\ v^{'}(x) &= \lambda.e^{-\lambda.x} & ; \quad v(x) &= -e^{-\lambda.x} \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} E(X) &= \left[-x.e^{-\lambda.x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.x}dx \\ &= \cancel{\left[-x.e^{-\lambda.x}\right]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.x}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.x} dx \\ &= \Big[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big]_0^{+\infty} \\ E(X) &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Variance

Par définition :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^2.f(x)dx - (\frac{1}{\lambda})^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^2.\lambda.e^{-\lambda x} dx - (\frac{1}{\lambda})^2 \end{aligned}$$

I.I.P:

$$u(x) = x^2 \quad ; \quad u^{'}(x) = 2x$$
$$v^{'}(x) = \lambda.e^{-\lambda.x} \quad ; \quad v(x) = -e^{-\lambda.x}$$

$$Var(X) = \cancel{\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}} + 2\int_0^{+\infty} x.e^{-\lambda x}dx - (\frac{1}{\lambda})^2$$

2^{ime} I.I.P

$$u(x) = x \quad ; \quad u^{'}(x) = 1$$
$$v^{'}(x) = e^{-\lambda.x} \quad ; \quad v(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda.x}$$

$$Var(X) = 2\cancel{\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda.x}\right]_0^{+\infty}} + 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda.x}dx - (\frac{1}{\lambda})^2$$

Lois continues usuelles

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{\lambda}\Big[-\frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} - (\frac{1}{\lambda})^2 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Conclusion

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$,
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Se former autrement

Application La durée de vie d'un atome radioactif de carbone14, exprimée en année, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$. Ce paramètre porte le nom de constante de désintégration.

- Calculer la probabilité que la durée de vie d'un tel atome soit supérieure à 3000 ?
- Calculer la probabilité que cet atome ne se soit pas désintégré au bout de 7000 ans sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 4000 ans ?

Solution

Soit T: la variable aléatoire qui représente la durée de vie d'un atome radioactif.

1.

$$\begin{aligned} P(T > 3000) &= 1 - P(T \leq 3000) \\ &= 1 - F(3000) \\ &= 1 - (1 - e^{-0.0005 \times 3000}) \\ &= e^{-1.5} \simeq 0.22 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(T > 7000/T > 4000) &= \frac{P((T > 7000) \cap (T > 4000))}{P(T > 4000)} \\ &= \frac{P(T > 7000)}{P(T > 4000)} \end{aligned}$$

$$P(T > 7000/T > 4000) = \frac{e^{-0.0005\times 7000}}{e^{-0.0005\times 4000}} = e^{-0.0005\times 3000} \simeq 0.22$$
$$= P(T > 3000)$$

On a donc :

$$P(T > 3000 + 4000|T > 4000) = P(T > 3000)$$

la probabilité que le phénomène dure au moins s + t années sachant qu'il a déjà duré t années sera la même que la probabilité de durer s années à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t années ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t. On dit que la loi exponentielle est sans mémoire. Plus formellement, soit T une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène, $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors:

$$P(T > s + t/T > t) = P(T > s),\ \forall (s,t) \in {\mathbb{R}^{+}}^{2}$$

Loi normale

On appelle loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ (la moyenne) et $\sigma > 0$ (l'écart-type) la loi d'une variable aléatoire continue X prenant toutes les valeurs réelles, de densité de probabilité la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

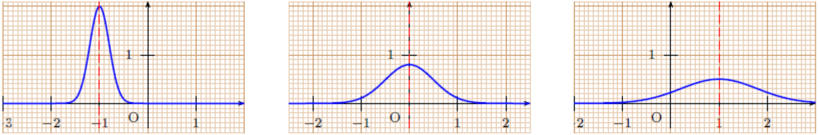
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$.

La loi normale modélise les phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne m, de manière aléatoire, résultante d'un grand nombre de causes indépendantes .

Exemple: la taille d'un individu en cm, influencée par le sexe, la nourriture, l'environnement, l'hérédité, le lieu géographique . . .

Voici des exemples de courbes de la densité pour quelques valeurs de m et σ :



$m=-1$ et $\sigma=0,2$ $\qquad$ $m=0$ et $\sigma=0,5$ $\qquad$ $m=1$ et $\sigma=0,8$

On peut observer que:

- La courbe de la loi normale a la forme d'une cloche,
- La courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $\mathrm{x}=\mathrm{m}$,
- Le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X (ce maximum valant $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- Plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.

Lois usuelles continues

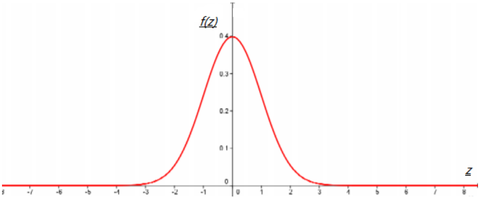
Loi normale centrée réduite (Standard)

La variable aléatoire Z qui suit la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma = 1$ est dite **variable aléatoire centrée réduite**. Sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} z^2}$$

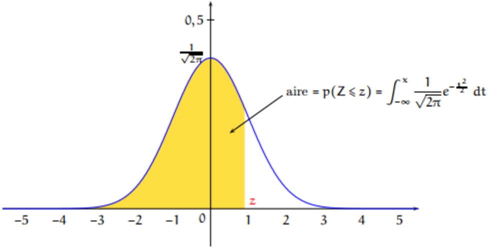
La densité de la loi normale centrée réduite:

$Z \sim \mathcal{N}(m = 0, \sigma = 1)$, la courbe de la densité f , pour tout $z \in \mathbb{R}$ est donnée par:



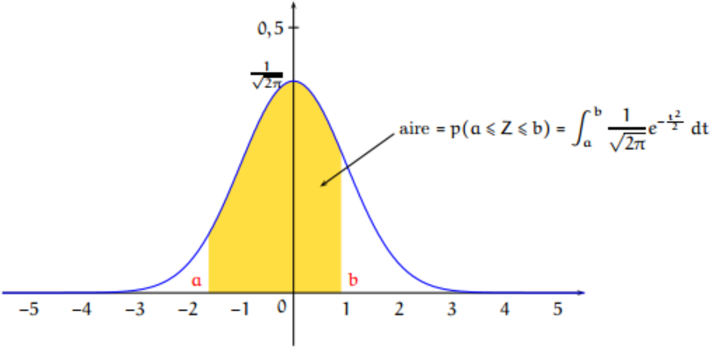
Propriétés et interprétations graphiques

- $F(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$



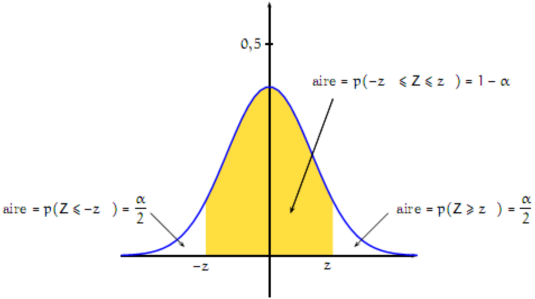
- $P(Z \geq z) = 1 - P(Z < z) = 1 - F(z)$

- $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$.



Lois usuelles continues

- $F(-z) = P(Z < -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - F(z).$
- $P(-z \leq Z \leq z) = F(z) - F(-z) = F(z) - (1 - F(z)) = 2F(z) - 1$



Utilisation de la table de la loi normale

Les probabilités d'évènements de v.a. suivant une loi normale centrée réduite sont répertoriées dans des tables facilement manipulables.
La table de la loi normale ne donne que les valeurs de la loi normale centrée réduite et pour des valeurs positives.
En voici quelques exemples pour comprendre la méthode de lecture :

- Calcul de $P(Z \geq 1.25)$: Le nombre situé à l'intersection de la colonne $0,05$ et de la ligne 1.2 est la valeur de $1 - F(z)$ pour $z = 1.2 + 0.05 = 1.25$. Ainsi $P(Z \geq 1.25) = 0.105$.

1.25=1.2+0.05

Probabilité =0.105

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,10	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,20	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,30	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,40	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,50	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,60	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,70	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,80	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,90	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,00	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,10	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,20	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	$\boxed{0,10565}$	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

esprit Se former autrement

- Calcul de $P(Z \leq 1.36)$:

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1.36) &= 1 - P(Z \geq 1.36) \\ &= 1 - 0.08691 \\ &= 0.9131. \end{aligned}$$

- Calcul de $P(Z \geq -1.17)$:

$$\begin{aligned} P(Z \geq -1.17) &= 1 - P(Z \geq 1.17) \\ &= 1 - 0.121 = 0.879 \end{aligned}$$

- Calcul de $P(1.15 \leq Z \leq 1.37)$:

$$\begin{aligned} P(1.15 \leq Z \leq 1.37) &= F(1.37) - F(1.15) \\ &= P(Z \leq 1.37) - P(Z \leq 1.15) \\ &= 1 - P(Z \geq 1.37) - (1 - P(Z \geq 1.15)) \\ &= 0.0398 \end{aligned}$$

Se former autrement

Lorsque la variable aléatoire X suit une loi normale, on peut se ramener au calcul d'une loi normale centrée réduite. Ceci nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente :

Théorème

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$, avec $E(Z) = 0$ et $\sigma(Z) = 1$.

Ce résultat est très important, puisqu'alors il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale !

Exemple :

On admet que le poids d'une population de garçons de 2 ans est une variable X normalement répartie, de paramètres $m = 12$ et $\sigma = 3$.
Calculons $P(X \leq 16Kg)$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 16) &= P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{16-m}{\sigma}) \\
&= P(Z \leq \frac{16-12}{3}) \qquad \text{où} \qquad Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= P(Z \leq \frac{4}{3}) \\
&= 1 - P(Z > \frac{4}{3}) \quad , \quad \text{(On utilise la table)} \\
&= 1 - 0.091 \\
&= 0.909
\end{aligned}$$

Stabilité de la loi normale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$. Alors, pour tous $a;b \in \mathbb{R}$:

- La variable aléatoire $aX+b$ suit la loi normale $\mathcal{N}(am+b;|a|\sigma)$,

Si de plus Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m';\sigma')$ (X et Y sont indépendantes), alors

- La variable aléatoire $X+Y$ suit une loi normale, $\mathcal{N}(m+m';\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$.
- La variable aléatoire $X-Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m-m';\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$.

Exercice

Si X suit la loi $\mathcal{N}(1;3)$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(-1;1)$, determiner la loi de:

1. $-2X+1$.
2. $X+Y$.
3. $X-Y$.

Solution

On a $X \sim \mathcal{N}(1,3)$ et $Y \sim \mathcal{N}(-1;1)$:

- $-2X+1 \sim \mathcal{N}(-2+1, |-2|.3) = \mathcal{N}(-1,6)$
- $X+Y \sim \mathcal{N}(1+(-1), \sqrt{3^2+1^2}) = \mathcal{N}(0, \sqrt{10})$
- $X-Y \sim \mathcal{N}(1-(-1), \sqrt{3^2+1^2}) = \mathcal{N}(2, \sqrt{10})$

Les lois dérivées de la loi normale

La loi χ^2 :

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites, soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

On dit que Y suit une loi de χ_n^2 à n degrés de liberté (d.d.l.) et on note

$$Y \sim \chi_n^2.$$

Propriétés

- $Y \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- Y admet une densité,
- $E(Y) = n$ et $Var(Y) = 2n$

L'allure de la densité d'une loi χ^2_n avec des différents degrés de liberté n:

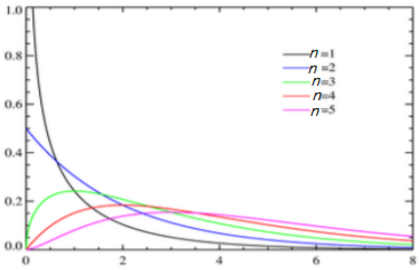


FIGURE: Densité de la loi $\chi^2(n)$.

Propriétés

Si U suit une loi Khi deux à n d.d.l., V suit une loi Khi deux à m d.d.l., et si U et V sont indépendantes alors $U+V$ suit une loi Khi deux à $(n+m)$ ddl.

Calcul des probabilités dans la distribution khi-deux

Définition

Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, le quantile d'ordre $1-\alpha$, noté par $y_{n,\alpha}$, est défini par:

$$P(Y > y_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Lecture de la table Khi deux

Si $Y \sim \chi^2_n$, alors quelle est la valeur de y tel que :

$$P(Y > y) = \alpha$$

Exemple:

Si $Y \sim \chi^2_6$, alors chercher la valeur y telle que $P(Y > y) = 0.05$

À l'aide de la table de la loi du Khi-deux, le nombre situé à l'intersection de la colonne $\alpha = 0,05$ et la ligne des d.d.l ($n = 6$) est la valeur de y.

α

ν	P = 0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00004	0,0002	0,001	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188

d.d.l

y

Appliquer

En utulisant la table de la loi Khi deux (Voir annexe), chercher la valeur de y puis celle de α telle que :

1. Si $Y \sim \chi^2_{20}$ et $P(Y > y) = 0.9$.
2. Si $Y \sim \chi^2_{11}$ et $P(Y > 17.275) = \alpha$.

Loi de Student

Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et V une variable aléatoire suivant une loi du Khi-deux à n degrés de liberté χ^2_n, U et V étant indépendantes, on dit alors que

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$$

suit une loi de Student à n degrés de liberté.On note $T \sim \mathcal{T}_n$.

Propriétés

- L'espérance de la variable de Student est : $E(T) = 0$ si $n > 1$
- La variance de la variable de Student est : $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

Définition

Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, le quantile d'ordre $1 - \alpha$, noté par $t_{n,\alpha}$, est défini par:

$$P(T > t_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Lecture de la table de Student

Si $T \sim \mathcal{T}_n$ alors quelle est la valeur de la probabilité suivante :

$$P(T > t_{n,\alpha}) = \alpha$$

Exemple:

Si $T \sim \mathcal{T}_{10}$, alors chercher la valeur α telle que $P(T > 1.372) = \alpha$

À l'aide de la table de la loi de student , chercher la valeur située à la première ligne dans la colonne qui s' intersecte avec la $10^{\text{iéme}}$ (10=d.l.l) ligne en $t_{n,\alpha} = 1.372$:

La table de La loi de Student:

α

$t_{n\alpha}$

d.d.l

	$P[T \geq t^*] = p$											
dl	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.8165	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.7649	.9785	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.7407	.9410	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.7267	.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.7176	.9057	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.7111	.8960	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.7064	.8889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.7027	.8834	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.6998	.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.6974	.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.6955	.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.6938	.8702	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.6924	.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.6912	.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.6901	.8647	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.6892	.8633	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.6884	.8620	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.6876	.8610	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.6870	.8600	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.6864	.8591	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819

Application

Déterminer les probabilités suivantes:

1. Si $T \sim T_{10}$, chercher $P(T > 1.372)$.
2. Si $T \sim T_{20}$, chercher $P(T > 12.443)$.

Chercher la valeur de t dans chacun des cas suivant:

1. Si $T \sim T_{20}$ et $P(T > t) = 0.005$.
2. Si $T \sim T_{11}$ et $P(T > t) = 0.1$.