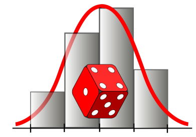
Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur **Classe :** $3^{\text{ème}}$ année



Rappel probabilité

1 Notions de base :

- **Expérience aléatoire** ε **:** Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat.
- **Espace fondamental :** ou Univers, est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On note Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Les éléments de Ω sont souvent notés ω.
- **Evènement :** est une partie de l'ensemble des résultats possibles, c'est un sous ensemble de l'univers Ω.

Définition 1 (évènements incompatibles)

Deux événements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser simultanément c'est-à-dire lorsque l'intersection des évènements A et B est vide tel que :

$$A \cap B = \emptyset$$

- **Notion de probabilité :** Considérons une expérience dont l'ensemble fondamental est Ω. On définit sur l'ensemble des événements une fontion qui à chaque événement associe un poids, appelé probabilité, compris entre 0 et 1 : plus le poids est proche de 0 moins l'événement risque de se réaliser, plus le poids est proche de 1 plus l'événement se réalisera souvent.

Définition 2 (Probabilité)

On appelle une probabilité sur Ω toute fonction $\mathbb{P}$ de Ω à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant :

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

— Pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$ d'évènements deux à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i),$$

Exemple 1 *: Un cas particulier d'une probabilité dite probabilité uniforme définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} P & : & \mathcal{A} & \rightarrow & [0,1] \\ & & A & \mapsto & P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \end{array}$$

On considère l'expérience aléatoire

$$\varepsilon \ = \ \text{"jet d'une pièce de monnaie deux fois"}$$

L'univers de l'expérience est

$$\Omega = \{(P,P)\,;\,(P,F)\,;\,(F,P)\,;\,(F,F)\}$$

Soit l'évènement A="avoir au moins une pile" qui est présenté par :

$$A = \{(P,P)\,;\,(P,F)\,;\,(F,P)\}$$

En particulier on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{4}$$

Définition 3 (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors la probabilité de l'évènemet A sachant B notée $\mathbb{P}(A/B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Définition 4 (événements indépendants)

Deux événements A et B de $\mathcal{A}$ sont dit indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Exemple 2 *: On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes. On considère les évènements :*
A : "obtenir une figure (valet, dame ou roi)" et B : "obtenir un carreau".
On a alors : $A \cap B$ = "obtenir un valet de carreau ou une dame de carreau ou un roi de carreau".
Donc $P(A \cap B) = \frac{3}{32}$. De même $P(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$.

Ceci implique que les évènements A et B sont indépendants, puisque :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Définition 5

L'indépendance est aussi caractérisée par la probabilité conditionnelle. Autrement dit, A et B sont indépendants ssi :

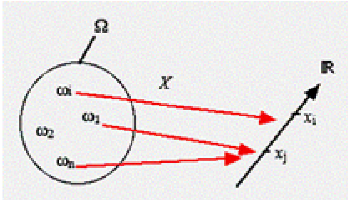
$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

2 Variable aléatoire réelle :

Définition 6 (Variable aléatoire réelle)

Une variable aléatoire (v.a.) X est une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque évènement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$.

$$\begin{array}{rccc} X & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$



Lorsque X est une variable aléatoire discrète, alors elle prend ses valeurs dans un ensemble $\mathbb{E}$ discret de valeurs réelles.

2.1 Loi de probabilité de X :

Définition 7 (Loi de probabilité de X)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle loi de probabilité ou distribution de X l'ensemble des probabilités :

$$\forall i = 1 \ldots n, \ \mathbb{P}(X = x_i)$$

On note que $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

2.2 Fonction de répartition de la loi de X :

Définition 8 (Fonction de répartition de la loi de X)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, telque :

$$\begin{array}{rcll} F & : & \mathbb{R} & \to [0,1] \\ & & x & \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \in X(\Omega) | x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) \end{array}$$

Propriétés

- F est croissante
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a)$

Exemple 3 *: On jette une pièces de monnaie deux fois et on considère la variable aléatoire X représentant le nombre de piles obtenues.*
D'une part, la loi de X est donnée par l'ensemble de ces valeurs possibles ainsi que leurs probabilités :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$$

D'autre part, la fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \;\; x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{4} \; si \;\; x \in [0, 1[\\ \frac{3}{4} \; si \;\; x \in [1, 2[\\ 1 \; si \;\; x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

2.2.1 Espérence mathématique

Définition 9 (Espérence mathématique)

L'espérance ou la moyenne d'une variable aléatoire discrète X est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire discrète, a et b deux constantes réelles.

- $\mathbb{E}[a\ X + Y] = a\ \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[a] = a$

2.2.2 Variance et écart-type

Définition 10 (Variance et écart-type)

- La variance d'une variable aléatoire discrète X est le réel positif

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

- L'écart-type de X est la racine carrée de sa variance.

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire discrète, a et b deux constantes réelles.

- $V[a\ X + b] = a^2\ V[X]$
- $V[a] = 0$

3 Lois usuelles discrètes

3.1 La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Définition 11 (Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$)

La variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli de probabilité p, si X vaut 1 ou 0 avec les probabilités respectives p et $1-p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ on a alors

- $\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad \forall\, x \in \{0; 1\}$
- $\mathbb{E}[X] = p$
- $V[X] = p(1-p)$

3.2 La loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition 12 (Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$)

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, cela veut dire que X est égale au nombre de succès obtenus dans une série de n épreuves de Bernouilli indépendantes de probabilité p.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ on a alors

- $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $V[X] = np(1-p)$

3.3 La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition 13 (Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$)

Si une variable aléatoire X représente le nombre de succès dans un intervalle de temps considéré, alors X obéit à une distribution de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$; λ est le paramètre de la loi qui décrit le nombre moyen de succès dans cet intervalle de temps.

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ on a alors

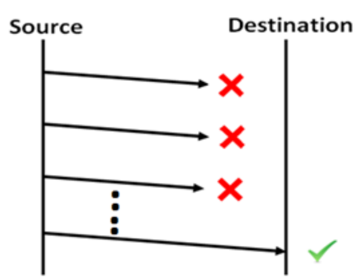
- $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \; \forall \, k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- $V[X] = \lambda$

3.4 Application

Une source veut émettre un message (ou un segment de données) vers une destination. Pour ce faire, elle se connecte à un réseau de communication. Cependant, ce réseau est caractérisé par une probabilité de perte de message q. (Respectivement $p = (1 - q)$ la probabilité de transmission du message).
Vue que la source désire obligatoirement que le message soit livré à la destination, elle sera obligée de retransmettre le message autant de fois qu'il est perdu jusqu'à ce qu'une transmission soit réussite. On suppose que les pertes du message sont indépendantes.
Soit X une variable aléatoire qui représente le nombre de transmissions nécessaires à la réception du message.
Soient les évènements :

E : le message est perdu.

S : le message est transmis



1. Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prise par la v.a. X.
2. Exprimer $\mathbb{P}(X = 4)$ en fonction de **E** et **S**. Puis l'écrire en fonction de p.
3. Déterminer alors $\mathbb{P}(X = k), \quad \forall k \in X(\Omega)$

Vu que le nombre de transmission peut parfois devenir important, on aimerait borner celui-là et considérer qu'une transmission fiable ne réussit pas au-delà d'une limite l et que la connexion à la destination sera perdue en dépassant l.
On aimerait dans ce cas, calculer le nombre de transmission nécessaire pour que la connexion ne soit pas perdue.
On sait par ailleurs que :

L'espérance de X : $\quad \mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$

La fonction de répartition de X : $\quad F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - (1 - p)^k$

4. Exprimer la probabilité de perte de la connexion en fonction de p et l.

Selon des expériences ultérieures, le nombre de transmissions moyen nécessaire à la réception du message est égal à 4 et la probabilité que la connexion soit perdue est égale à 0.1.

5. Déterminer le nombre de transmissions l à partir duquel la connexion serait perdue.