ALGORITMO DE DAVIS-PUTNAM-LOGEMANN-LOVELAND (DPLL)
Heurística y optimización

Enrique Benvenutto Navarro

1 Nomenclatura

- $\varnothing$: Conjunto vacío.
- $\{\varnothing\}$: Cláusula vacía
- $\vee$: Operador OR
- $\wedge$: Operador AND
- $\perp$: Falso
- $\top$: Cierto
- X_i : Variable de resolución.
- x_i y $\bar{x}_i$: Literales de X_i
- n : nivel de profundidad en el árbol

2 Teoría

Método que aplica resolución unitaria (Forma de resolución en la que uno de los padres es una cláusula unitaria) sobre una fórmula proposicional F en Forma Normal Conjuntiva (CNF), usando literales que existan en ella, tanto afirmados como negados.
Es un algoritmo de el primero en profundidad (en los ejercicios ignoramos un poco esto cuando queremos hayar todos los modelos que satisfagan una fórmula), con consumo de memoria lineal y tiempo exponencial.
Permite encontrar todos los modelos que satisfagan una fórmula.

3 Descripción

Se construye un árbol en el que se realizan progresivamente asignaciones de verdadero ($\top$) o falso ($\perp$) a cada variable de resolución X_i, y se observa como se evalúan las cláusulas.
El orden de selección de variables X_i puede ser arbitrario, mediante un algoritmo o heurística, o como nos piden en la mayoría de ejercicios de la asignatura, en orden ascendente.
En cada nivel de profundidad n del árbol se resuelve una variable X_i diferente sobre los nodos padre, aplicando la operación de reducción $Red(F, v)$, explicada más adelante.

3.1 Modelo parcial v

Un modelo parcial v es un modelo que asigna valores a algunas de las variables X_i, pero no a todas.

3.2 Operación de reducción $Red(F, v) = F_v$

Definiremos la operación de reducción de una fórmula F por un modelo parcial v ($Red(F, v)$) como la sustitución de valores del modelo parcial v en las variables de F, y la simplificación de F de acuerdo a esas asignaciones.
La fórmula resultante de dicha asignación de valores se denominará F_v

4 Resumen

En cada rama del árbol DPLL se evaluará un modelo parcial v, que será el valor de los literales de X_i que estemos asignando en ese momento (verdadero ($\top$) o falso ($\perp$)).
Una vez sustituidos los valores, se simplificará la fórmula resultando en F_v.
Todos los F_v obtenidos en este nivel del árbol, pasarán a ser los nodos padre del siguiente.

5 Procedimiento

5.1 Para todos los nodos padre

5.1.1 Elegimos la fórmula F_n sobre la que trabajar

- Si $n = 0$, $F_n = F$, es decir, si estamos en el nodo raíz del árbol, trabajaremos con la fórmula original F.
- Si $n > 0$, $F_n = F_{vn-1}$, es decir, si no estamos al comienzo del algoritmo, cogemos uno de los resultados de la reducción de un nodo anterior, es decir, trabajaremos con un nodo padre.

5.1.2 Elegimos X_i

Seleccionamos la X_i a utilizar. Tendrá que ser la misma en cada nivel n del arbol.

5.1.3 Evaluamos tanto verdadero ($\top$) como falso ($\perp$) para todos los literales de X_i

Es decir, aplicamos:

- $Red(F_n, v) = F_{vn}$, donde $v = \{x_i = \top\}$
- $Red(F_n, v) = F_{vn}$, donde $v = \{x_i = \perp\}$

F_{vn} serán nodos hijo.

5.2 Cálculo de $Red(F_n, v) = F_{vn}$

Sustituimos v en F_n, y vemos qué resulta por cada cláusula. No necesitamos hacer más simplificaciones que las mostradas, aunque tengo entendido que no pasa nada si se hacen:

- Si la cláusula se evalua a verdadera, se elimina la cláusula.
  - Si no quedan cláusulas, resultado $F_{vn} = \varnothing$. Solución FACTIBLE. Saltar al paso 5.3 para esta rama.
  - Si quedan cláusulas sin literales de X_i, serán el resultado de F_{vn}. Volver al paso 5.1 para esta rama.
- Si la cláusula sigue evaluando a falso, se elimina X_i de la cláusula.
  - Si al eliminar X_i queda una cláusula vacía $\{\varnothing\}$, Solución NO FACTIBLE. Fin del algoritmo en esta rama.
  - Si al eliminar siguen quedando literales pero no de X_i, la cláusula forma parte de F_{vn}. Volver al paso 5.1 para esta rama.

5.3 Obtención del modelo que satisfaga F en la rama

Cuando se llega aquí, es porque $F_{vn} = \varnothing$ para el nodo en el que estamos. Para encontrar el modelo que satisfaga F en esta rama, escalamos el árbol hasta el nodo inicial, realizando la unión de todos los modelos parciales v del nodo hoja y todos los padres.

$$M = \bigcup_{n}^{1} v_n$$

6 Ejemplo

$F = F_{v0} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

- $v = \{x_1 = \top\}$ $F_{v1} =$ $(x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3)$
  - $v = \{x_2 = \top\}$ $F_{v2} = x_3$
    - $v = \{x_3 = \top\}$ $F_{v3} = \varnothing$
    - $v = \{x_3 = \bot\}$ $F_{v3} = \{\varnothing\}$
  - $v = \{x_2 = \bot\}$ $F_{v2} = \bar{x}_3$
    - $v = \{x_3 = \top\}$ $F_{v3} = \{\varnothing\}$
    - $v = \{x_3 = \bot\}$ $F_{v3} = \varnothing$
- $v = \{x_1 = \bot\}$ $F_{v1} =$ $(x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$
  - $v = \{x_2 = \top\}$ $F_{v2} = \bar{x}_3$
    - $v = \{x_3 = \top\}$ $F_{v3} = \{\varnothing\}$
    - $v = \{x_3 = \bot\}$ $F_{v3} = \varnothing$
  - $v = \{x_2 = \bot\}$ $F_{v2} = x_3$
    - $v = \{x_3 = \top\}$ $F_{v3} = \varnothing$
    - $v = \{x_3 = \bot\}$ $F_{v3} = \{\varnothing\}$

Hay hasta cuatro modelos diferentes que satisfacen la fórmula proposicional F :

$$M_1 = \{x_1 = \top, x_2 = \top, x_3 = \top\}$$
$$M_2 = \{x_1 = \top, x_2 = \bot, x_3 = \bot\}$$
$$M_3 = \{x_1 = \bot, x_2 = \top, x_3 = \bot\}$$
$$M_4 = \{x_1 = \bot, x_2 = \bot, x_3 = \top\}$$