Optymalizacja wielokryterialna			
Adrian Jałoszewski	24 V 2017	Środa 14:00	

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się zastosowaniami optymalizacji wielokryterialnej na przykładzie optymalizacji parametrów dwójnika elektrycznego, regulatora proporcjonalnego z inercją oraz dla przypadku, gdzie mamy do czynienia z wysokim kosztem pozyskania danych.

2 Przebieg ćwiczenia

2.1 Zadanie 1

Zadanie polega na optymalizacji dwójnika elektrycznego pod względem sprawności oraz wydzielanej mocy na rezystancji R_a. Równanie napięciowe Kirchhoffa dla tego układu:

$$E - iR_i - iR_a = 0$$

Wynika z tego, że prąd płynący przez obwód jest zadany wzorem:

$$i = \frac{E}{R_i + R_a}$$

Moc wydzielana na rezystancji jest dana zależnością:

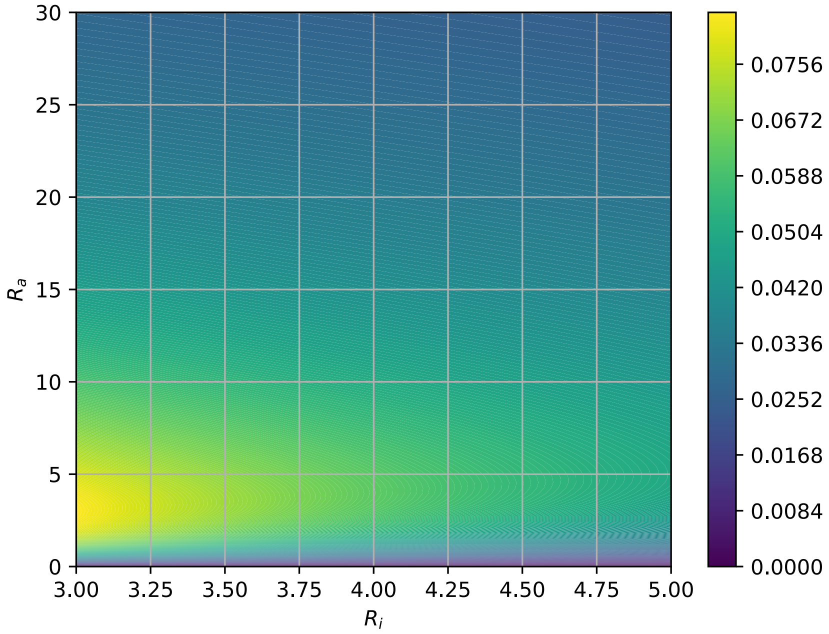
$$P_a = R_a i^2 = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} E^2$$

Ponieważ wartość ta jest zależna od wartości napięcia źródła zasilania, lepiej jest zastąpić te kryterium przy pomocy kryterium równoważnego:

$$\eta = \frac{P_a}{E^2} = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

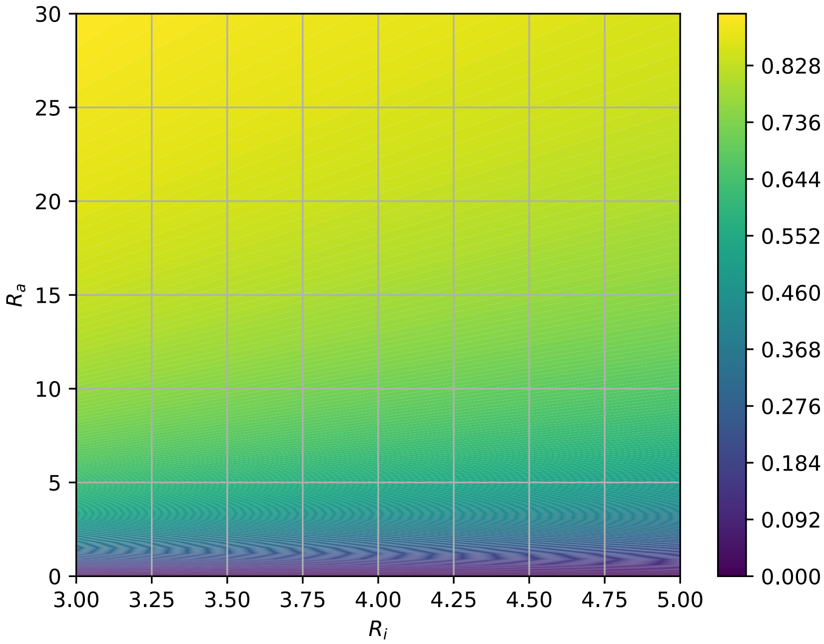
Sprawność jest zadana jako stosunek mocy wydzielanej na rezystancji R_a do mocy wydzielanej na obydwu rezystancjach.

$$\mu = \frac{P_a}{P_a + P_i} = \frac{R_a i^2}{R_a i^2 + R_i i^2} = \frac{R_a}{R_a + R_i}$$



k

Rysunek 1: Moc wydzielana na rezystancji R_a w stosunku do kwadratu napięcia



Rysunek 2: Sprawność układu

Rysunek 3: Zbiór rozwiązań kompromisowych

2.2 Zadanie 2

Zadanie polega na dobraniu tak parametrów układu regulacji aby zminimalizować uchyb statyczny, równocześnie minimalizując przeregulowanie. Zakładam, że zakłócenie jest zerowe. Transmitancja układu otwartego jest wtedy dana jako:

$$G_o(s) = \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1}$$

Transmitancja układu zamkniętego jest wtedy dana jako:

$$G(s) = \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + (K + 1)}$$

Aby można było rozważać ten układ w kategoriach stabilności, musi on być stabilny. Ponieważ parametr odpowiadający za tłumienie w układzie jest dodatni, to układ jest stabilny asymptotycznie pod warunkiem, że wyraz wolny jest dodatni $K > -1$.

Uchyb statyczny jest dany wzorem:

$$e_s = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Gdzie $E(s)$ jest dane wzorem:

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - G_o(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{W(s)}{1 + G_o(s)}$$

Ponieważ jest to układ liniowy, a rozważanie samego uchybu statycznego jest mało miarodajne można przyjąć dowolną wartość dla sygnału skokowego i rozważać względną wartość uchybu:

$$e_w(s) = \frac{\frac{1}{s}}{(1 + \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1})}$$

$$e_{ws} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{(1 + \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1})} = \frac{1}{1 + K}$$

Do wyznaczenia względnego przeregulowania można posłużyć się wzorem:

$$PO = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \tag{1}$$

ζ jest tutaj współczynnikiem tłumienia, który można odczytać z wzoru na transmitancję układu, gdy jest postaci:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

Transmitancję całego układu należy jednak najpierw sprowadzić do tej formy:

$$G(s) = \frac{K}{T_r T_o s^2 + (T_r + T_o)s + K + 1} = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{T_r T_o}{K+1} s^2 + \frac{T_r + T_o}{K+1} s + 1}$$

Można na podstawie tego odczytać, że:

$$T = \sqrt{\frac{T_r T_o}{K + 1}}$$

$$\zeta = \frac{T_r + T_o}{2T(K + 1)}$$

Równanie 1 posiada ograniczenie, że $\zeta < 1$, gdy współczynnik ten jest większy należy przyjąć przeregulowanie jako zerowe, gdyż zjawisko te wtedy nie występuje. Podstawiając do równanania na współczynnik ζ wartość współczynnika T otrzymuje się:

$$\zeta = \frac{T_0 + T_r}{2} \frac{1}{\sqrt{T_r T_o}} \frac{1}{K+1} \tag{2}$$

Aby pozbyć się T_o z zależności 2 można zmienić bez straty zmienić zmienną decyzyjną T_o na zmieną decyzyjną x będącą ilorazem średniej arytmetycznej oraz geometrycznej. Rozwiązanie te ma zaletę uniezależnienia rozważań od wartości parametru T_o, wadą tego rozwiązania jest natomiast, że nie odwzorowanie to nie jest injekcją.

$$x = \frac{T_o + T_r}{2\sqrt{T_r T_o}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T_o}{T_r}} + \sqrt{\frac{T_r}{T_o}}\right)$$

Konieczne jest wyznaczenie pochodnej $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T_r}$ w celu ustalenia zachowania tego odwzorowania.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T_r} = \frac{1}{4}\left(\frac{T_o}{T_r^{3/2}} + \frac{1}{T_o T_r^{1/2}}\right)$$

Z wartości pochodnej wynika, że:

- Dla $T_r > T_o$ odwzorowanie jest rosnące
- Dla $T_r < T_o$ odwzorowanie jest malejące
- Dla $T_r = T_o$ odwzorowanie osiąga minium równe 1

Dla wartości $T_r \to \infty$ oraz $T_r \to 0$ wartość odwzorowania zmierza do nieskończoności. Z tego oraz z wartości pochodnych funkcji wynika, że dla każdej wartości T_r za wyjątkiem $T_r = T_o$ odwzorowanie te posiada przyjmuje tę samą wartość dla dwóch różnych argumentów, a jego przeciwdziedzina należy do $[1, +\infty)$.

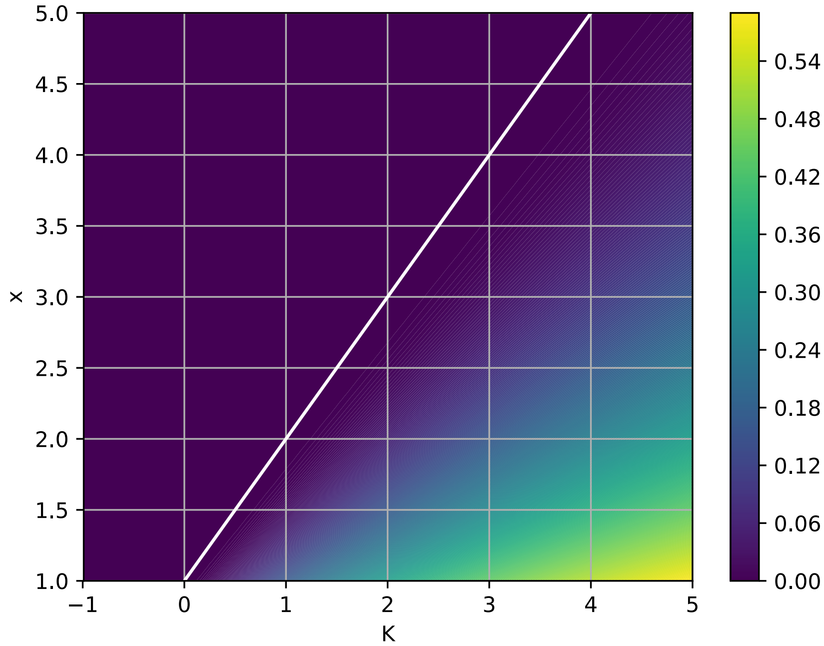
Dokonując zamiany wartości otrzymuję następujący wzór na współczynnik ζ:

$$\zeta = \frac{x}{K+1} \tag{3}$$

Po wprowadzeniu tej zmiany równanie na wartość uchybu statycznego nie ulega zmianom. Zamiana ta ma tylko wpływ na postać równania przeregulowania, które po podstawieniu ma teraz postać:

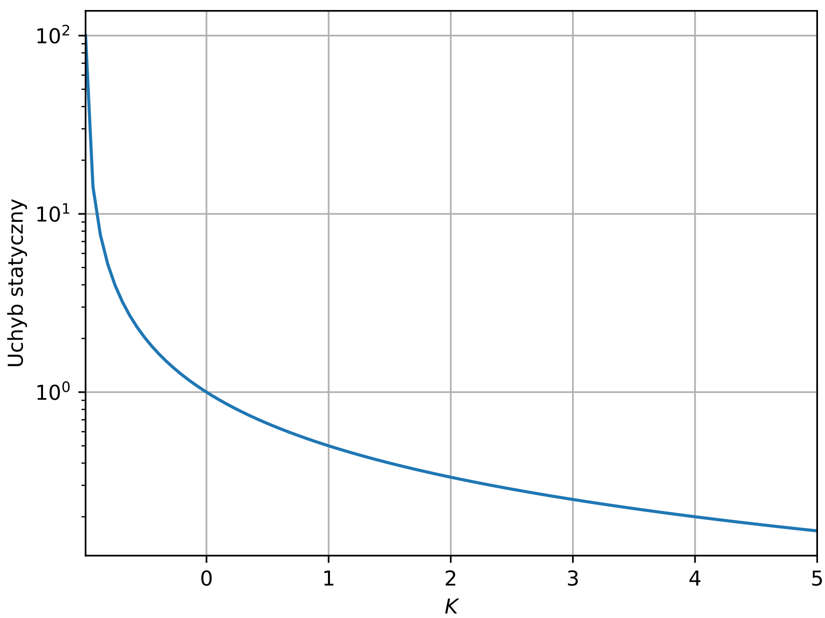
$$PO = \exp\left(-\frac{\frac{x}{K+1}\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{K+1}\right)^2}}\right) \tag{4}$$

Z ograniczenia $\zeta < 1$ wynika ograniczenie $x < K + 1$. Jak to nie jest spełnione, to w układzie nie występuje zjawisko przeregulowania (na wykresie nad białą linią).



Rysunek 4: Wartość przesterowania

Ponieważ wartości uchybu statycznego są zależne tylko od jednej zmiennej można je przedstawić na dwuwymiarowym wykresie.



Rysunek 5: Wartość uchybu statycznego

Rysunek 6: Brak przesterowania i uchyb ustalony

Na podstawie tego można wywnioskować, że najlepszym przypadkiem jest ten dla którego nie ma przeregulowania, a wartość uchybu jest zerowa $K \to \infty$.

Rysunek 7: Przebieg odpowiedzi skokowej dla dobranych parametrów

2.3 Zadanie 3

Zadanie polega na maksymalizacji współczynnika skuteczności leku przy równoczesnej minimalizacji jego nieskuteczności. Wartości są ograniczone poprzez $Q_1 + Q_2 \leqslant 100\%$

Rysunek 8: Porównanie kryteriów

Do rozważań skuteczności leku warto wziąć pod uwagę procent badanych, który doświadczył jakiejkolwiek poprawy zdrowia dany jako $Q_3 = 100\% - Q_2$, do którego należy jednak podejść krytycznie ze względu na możliwość wystąpienia efektu placebo.

Rysunek 9: Porównanie skuteczności

Jest to zdecydowanie lepszy przypadek w rozważaniu, gdyż biorąc w rozważania wskaźniki Q_1 oraz Q_3 mamy do czynienia z zagadnieniem maksymalizacji dwóch wskaźników. Ograniczenia są wtedy nastepujące:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &\leqslant 100\% \\ Q_1 + 100\% - Q_3 &\leqslant 100\% \\ Q_1 &\leqslant Q_3 \end{aligned}$$

Rysunek 10: Porównanie skuteczności oraz braku nieskuteczności

3 Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia

3.1 Zadanie 1

3.2 Zadanie 2

W tym przykładzie bardzo dobrze można uwidocznić jak zmiana zmiennych decyzyjnych może pomóc uogólnić rozważania. Warto zauważyć, że w tym przypadku optymalizacji jest wziętych pod uwagę za mało kryteriów. Przykładowo – rozwiązaniami, które posiadają tę samą wartość funkcji celu jest zarówno przypadek tłumienia krytycznego jak i przypadek, który się zbliży do wartości ustalonej na dzień przed zużyciem wodoru przez Słońce.

3.3 Zadanie 3

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, tak i tutaj zamiana zmiennych decyzyjnych pozwala uprościć rozważania, jednak w tym przypadku upaszczanie polega na zamianie zagadnienia równoczesnej minimalizacji i maksymalizacji wskaźników na maksymalizację obydwu.