

Pierwsza metoda Lapunowa

Adrian Jałoszewski

4 kwietnia 2017, godzina 12:30

1 Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z układami nieliniowymi oraz ich przybliżeniami liniowymi.
//TODO

2 Wykonanie laboratorium

2.1 Układ równań van der Polla

Układ równań Van der Pola jest dany jako:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)\end{aligned}$$

Punkty równowagi wyznaczam podstawiając za pochodne 0:

$$\begin{aligned}0 &= x_2 - x_1^3 - ax_1 \\ 0 &= -x_1\end{aligned}$$

Wynika z tego, że $x_1 = x_2 = 0$. Jakobian tego systemu jest następujący:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

W punkcie równowagi macierz A ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a\lambda + 1$$

Dla poszczególnych wartości współczynnika a własnych:

$a = 0$ – środek

$a \in (0, 2)$ – ognisko asymptotycznie stabilne

$a = 2$ – węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny

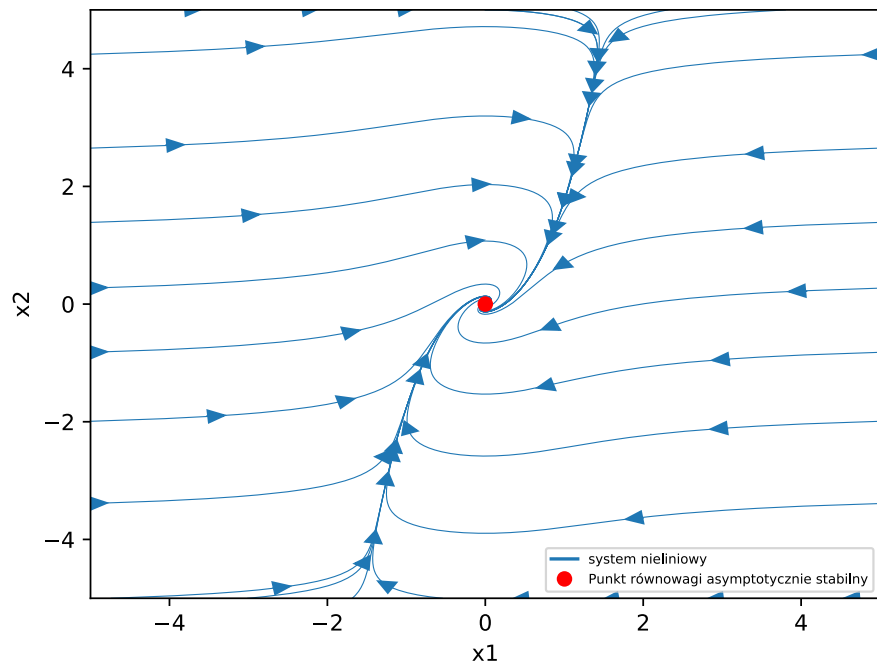
$a > 2$ – węzeł asymptotycznie stabilny

2.1.1 Współczynnik $a = 1$

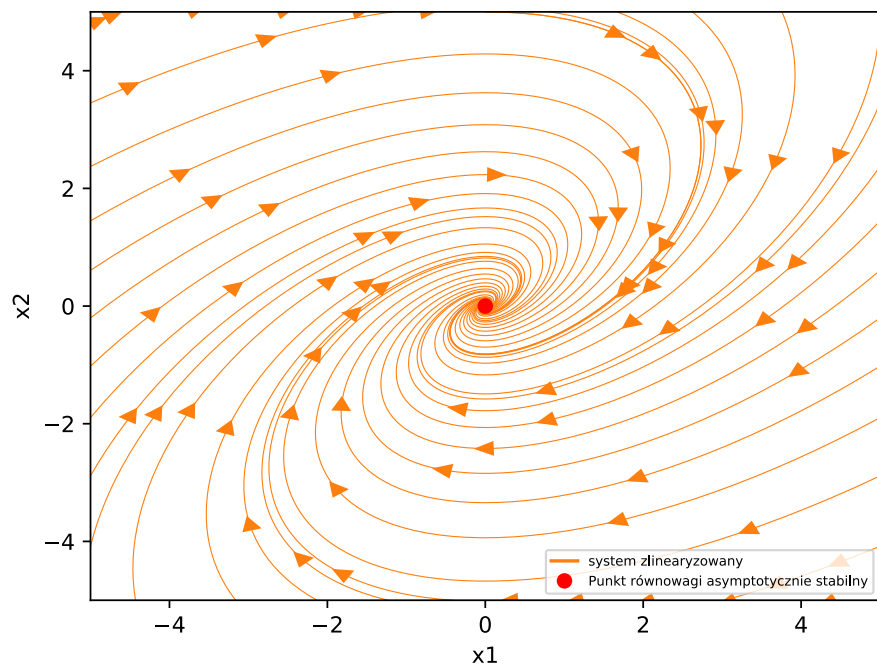
Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu ogniska asymptotycznie stabilnego o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

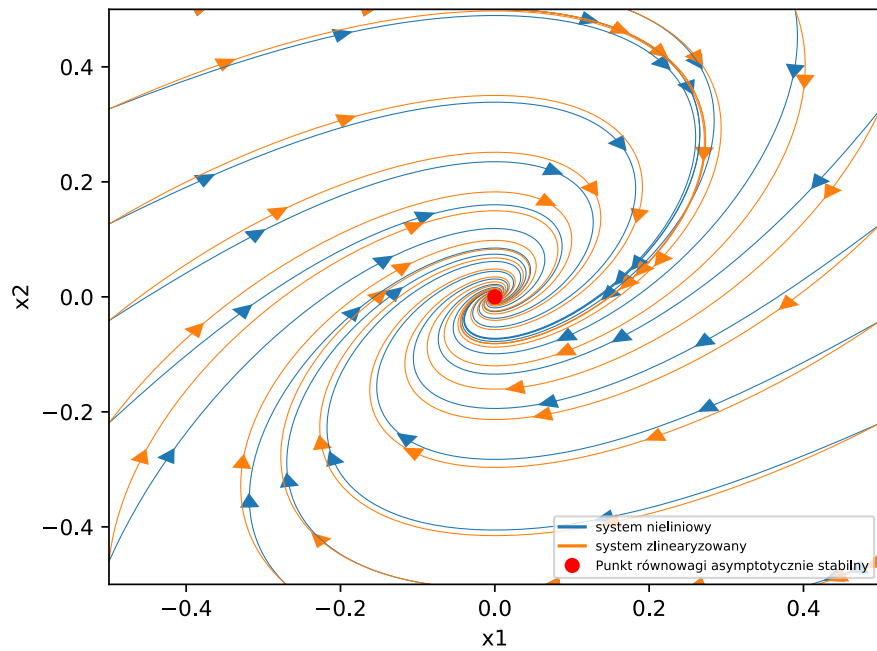
Wartości własne macierzy: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu $(0, 0)$



Rysunek 1: Układ nieliniowy



Rysunek 2: Układ zlinearyzowany



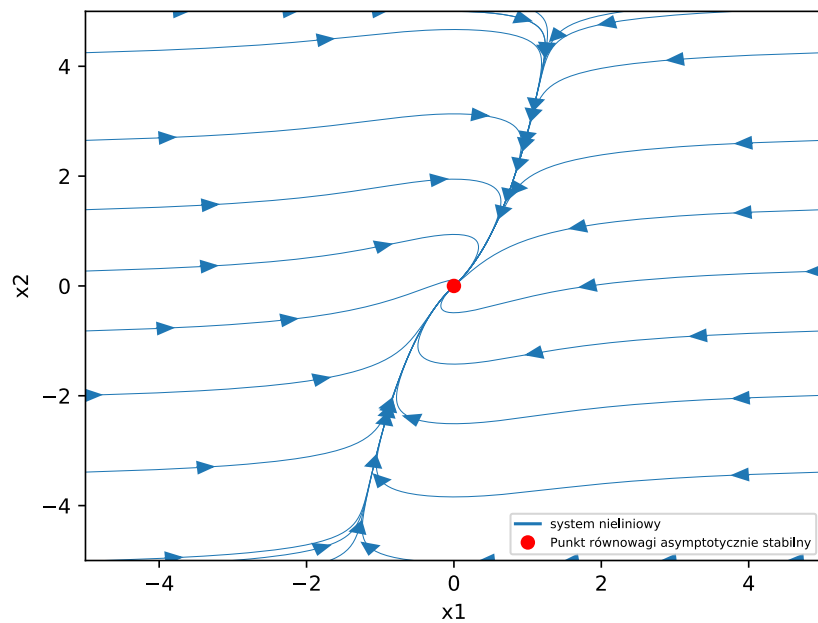
Rysunek 3: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.1.2 Współczynnik $a = 2$

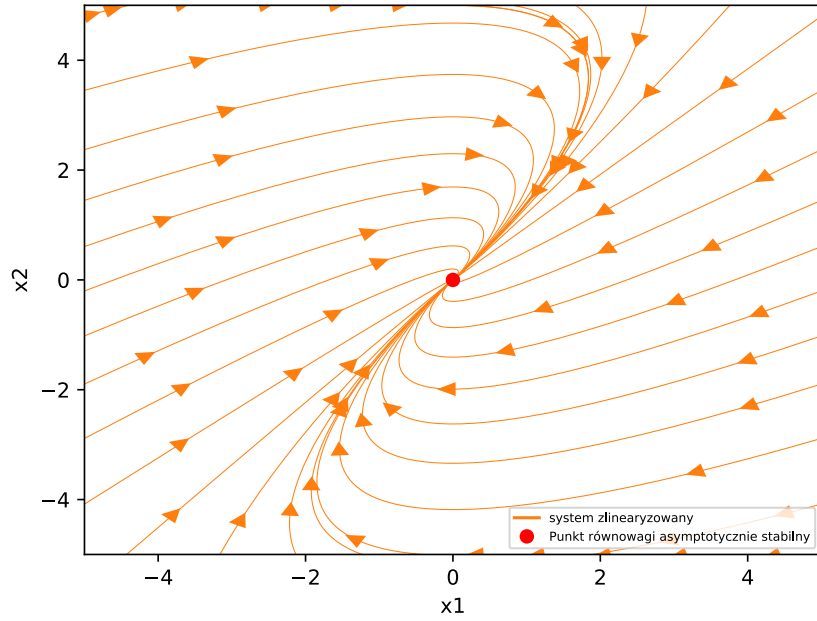
Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu węzła zdegenerowanego asymptotycznie stabilnego o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

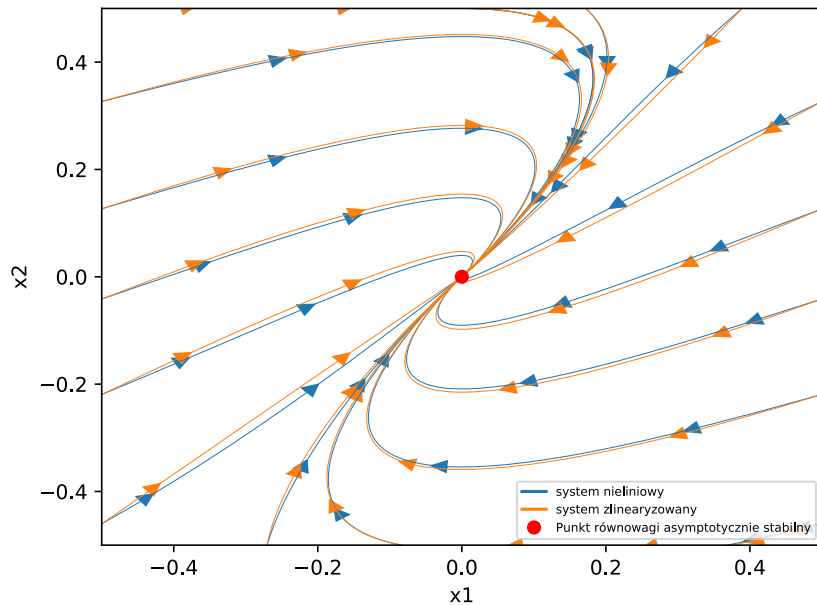
Wartości własne macierzy: $\lambda_{1/2} = -1$, układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu $(0, 0)$



Rysunek 4: Układ nieliniowy



Rysunek 5: Układ zlinearyzowany



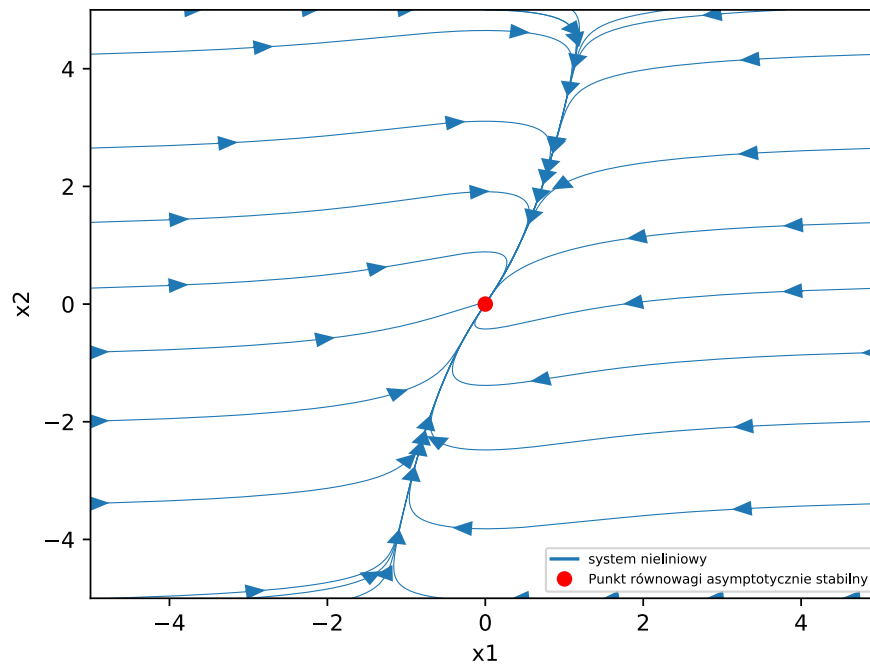
Rysunek 6: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.1.3 Współczynnik $a = \frac{5}{2}$

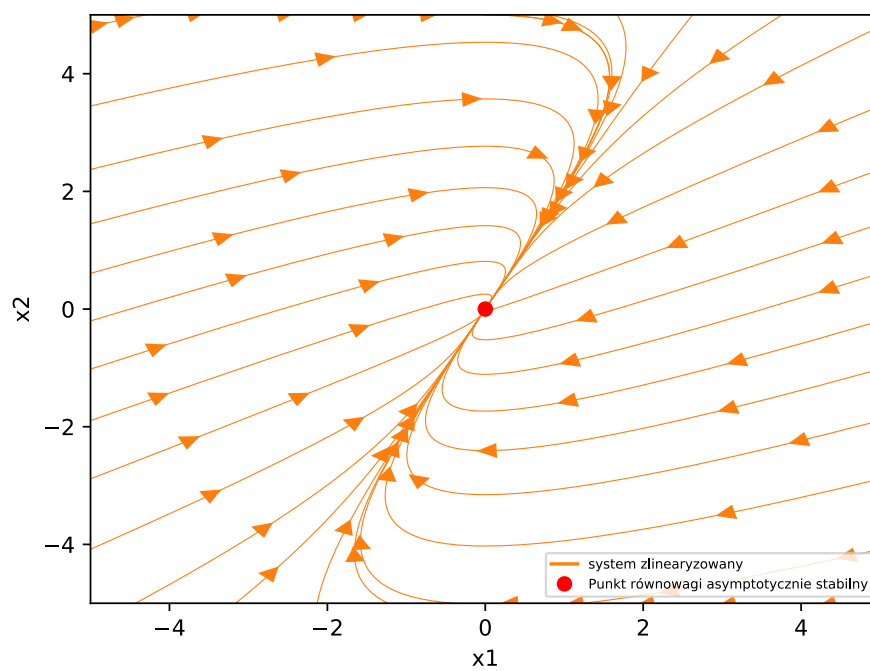
Współczynnik został dobrany tak aby trajektorie układu dla macierzy w postaci kanonicznej były postaci $x_2 = x_1^4$ – stosunek wartości własnych powinien być równy 4. Stopień wielomianu został wybrany w ten sposób aby krzywizna trajektorii była dobrze widoczna na portretach fazowych – (dla wielomianu drugiego stopnia $a = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12$, dla trzeciego stopnia $a = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$ – wartości na tyle bliskie tym z przypadku węzła zdegenerowanego, że trudno było rozróżnić poszczególne przypadki).

$$A = \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

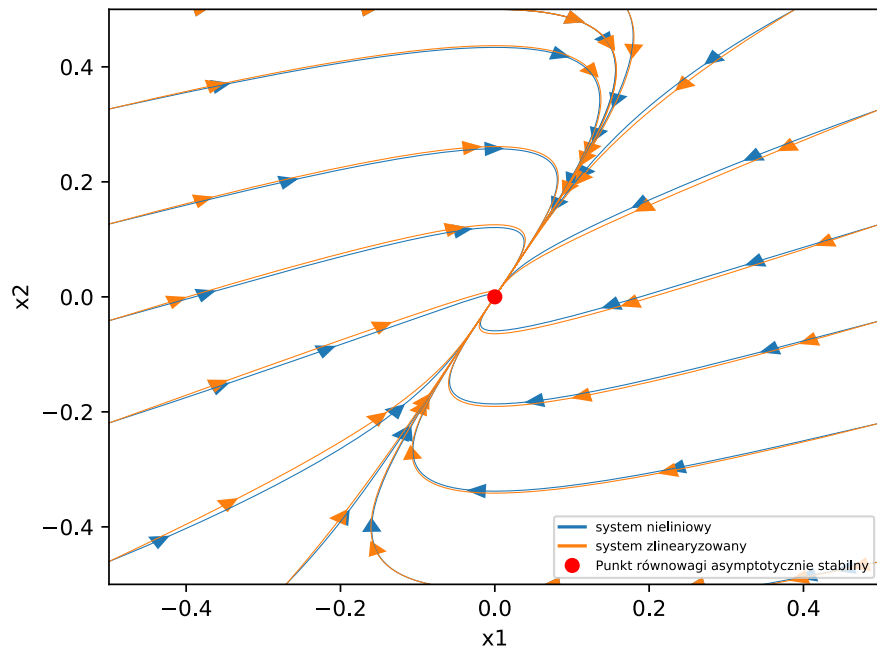
Wartości własne macierzy: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -2$, układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu $(0, 0)$



Rysunek 7: Układ nieliniowy



Rysunek 8: Układ zlinearyzowany



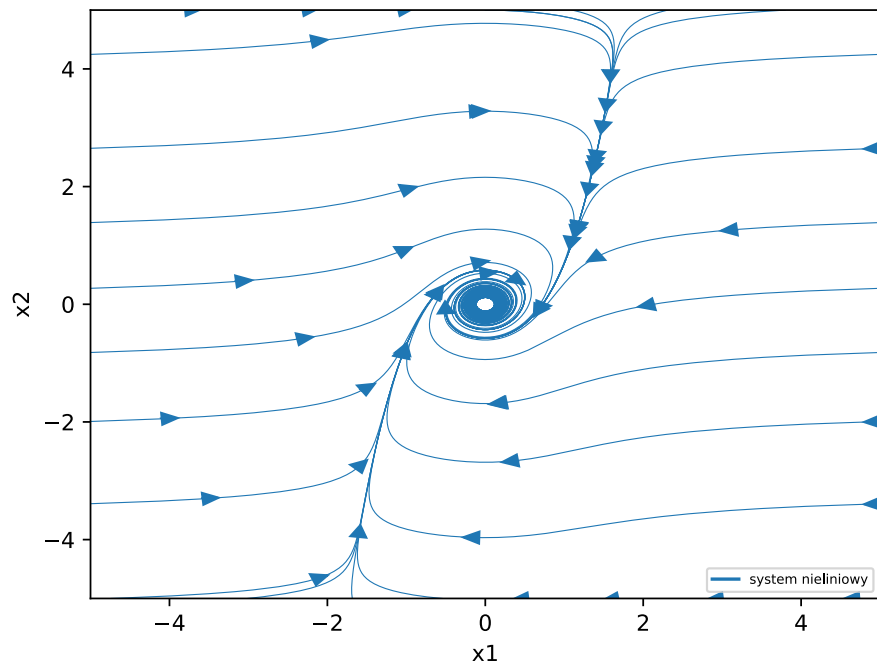
Rysunek 9: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.1.4 Współczynnik $a = 0$

Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu koła o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne $\lambda_1 = -j$, $\lambda_2 = j$ mają zerową część rzeczywistą – o stabilności układu nieliniowego nie można wnioskować. Jest to przypadek niespełniający warunków opisanych w poleceniu, więc nie będzie szczególnie rozważany.



Rysunek 10: Układ nieliniowy

2.2 Wahadło tłumione

Wahadło tłumione jest zadane wzorem:

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l} \sin y(t) + \frac{c}{lm} \dot{y}(t) = 0$$

Dla uproszczenia rozważań podstawiam $a = \frac{g}{l}$, $b = \frac{c}{lm}$, otrzymuję w ten sposób:

$$\ddot{y}(t) + a \sin y(t) + b \dot{y}(t) = 0$$

Ze względu na charakter parametrów g , l , c , m parametry a , b są większe lub równe 0. Układ ten można przedstawić równoważnie:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 - a \sin x_1\end{aligned}$$

Gdzie $x_2 = \dot{y}$ oraz $x_1 = y$. Aby wyznaczyć punkty równowagi podstawiam za pochodne 0.

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -bx_2 - a \sin x_1\end{aligned}$$

Punkty równowagi następują więc dla $(x_1, x_2) = (k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Jakobian dla tego układu jest następujący:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Należy rozważyć dwa przypadki punktów stabilności:

$x_2 = 0$, $x_1 = 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ – wtedy $\cos x_1 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A jest dany jako: $\lambda^2 + b\lambda + a$, jeżeli wartości a , b są dodatnie, to wielomian drugiego rzędu posiada pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zespolonej – są to punkty równowagi asymptotycznie stabilne. Wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest jako $\lambda^2 + \lambda b$

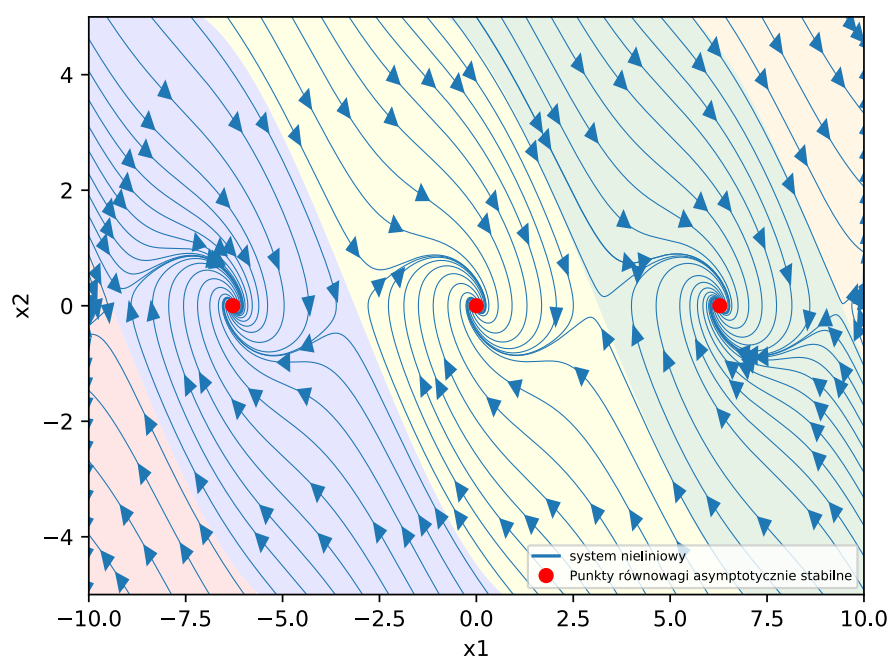
$x_2 = 0$, $x_1 = (2k+1)\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$ – wtedy $\cos x_1 = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

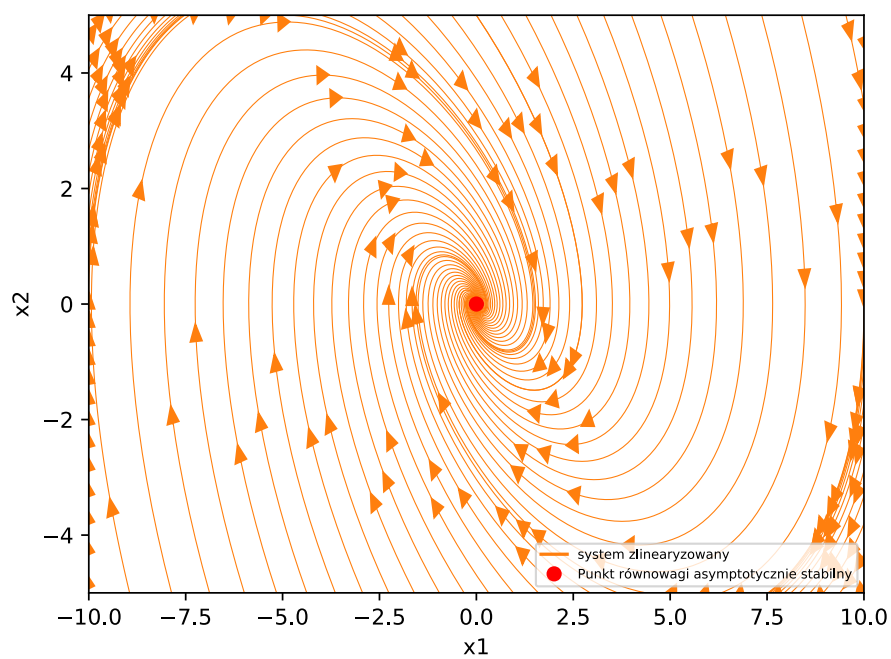
Wielomian charakterystyczny macierzy A jest dany jako: $\lambda^2 + b\lambda - a$, gdy parametry a , b , ponieważ badamy układ nieliniowy, to współczynnik a musi być większy od zera – wyraz wolny wielomianu jest zawsze mniejszy od zera, z czego wynika, że w tych punktach występuje równowaga niestabilna.

Ponieważ układ zachowuje się cyklicznie względem x_1 z okresem 2π , wystarczy w rozważaniach układu zlinearyzowanego wziąć pod uwagę tylko punkt $(0, 0)$.

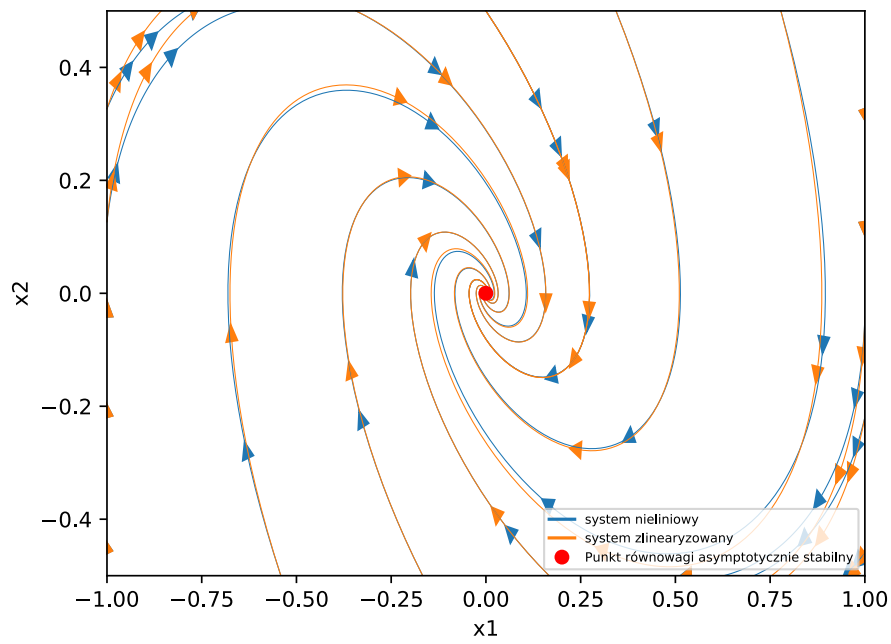
2.2.1 Współczynniki $a=1$, $b=1$



Rysunek 11: Układ nieliniowy

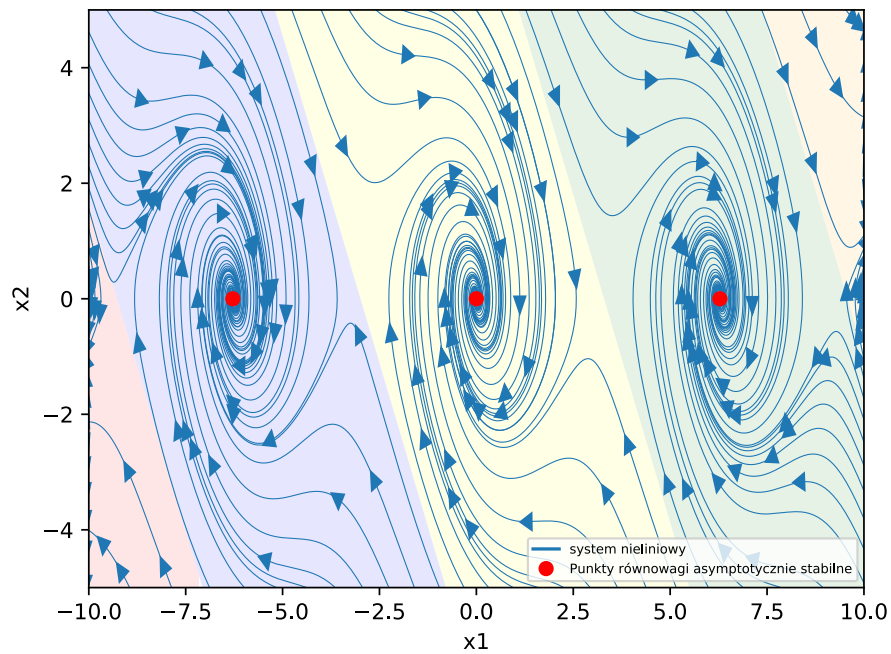


Rysunek 12: Układ zlinearyzowany

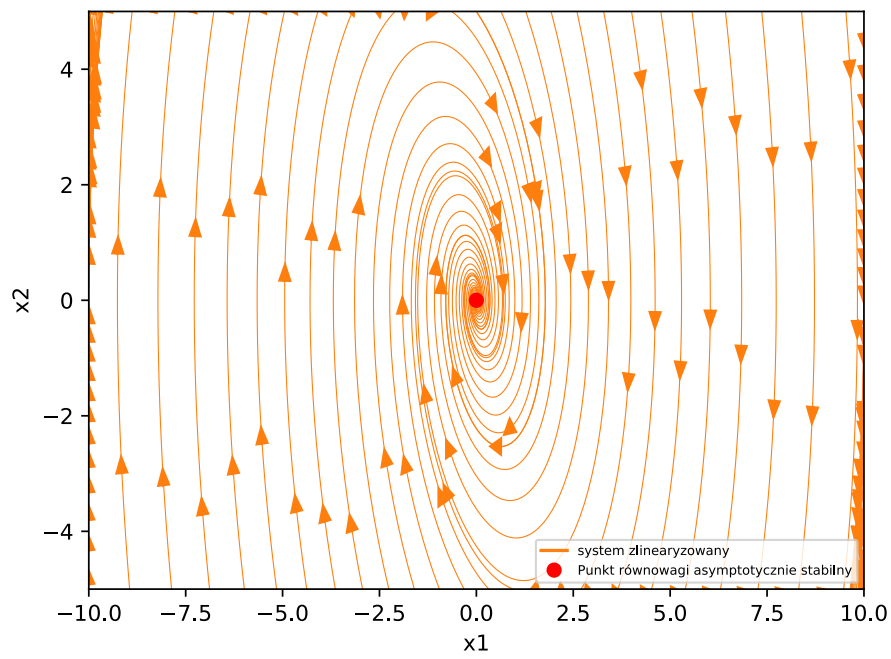


Rysunek 13: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

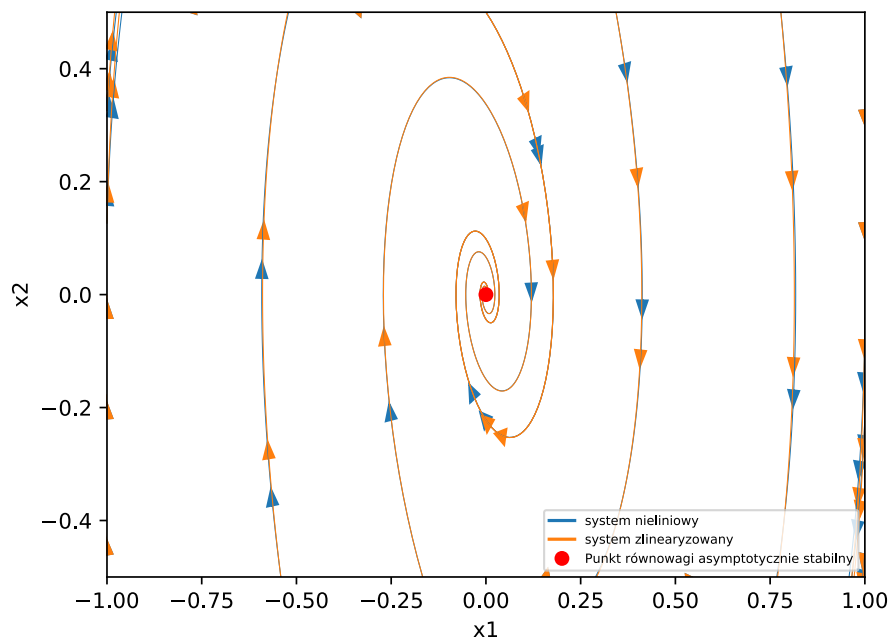
2.2.2 Współczynnik $a = 4$, $b = 1$



Rysunek 14: Układ nieliniowy

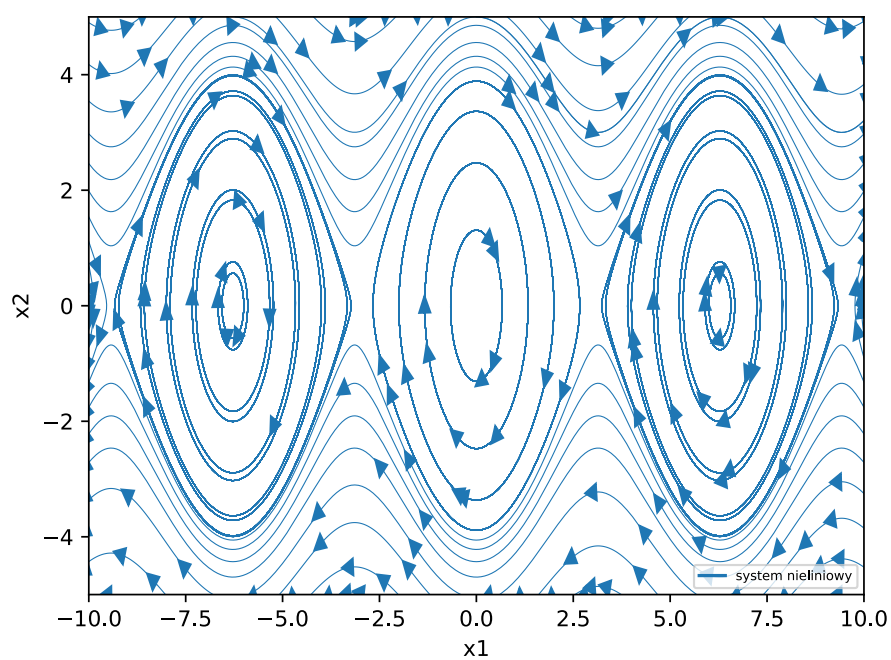


Rysunek 15: Układ zlinearyzowany



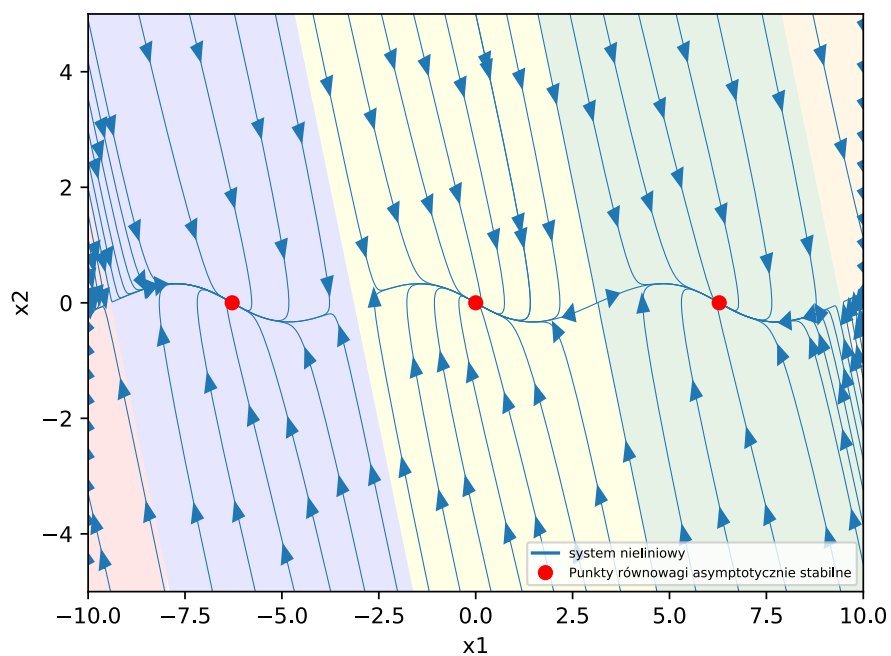
Rysunek 16: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.2.3 Współczynnik $a = 4$, $b = 0$



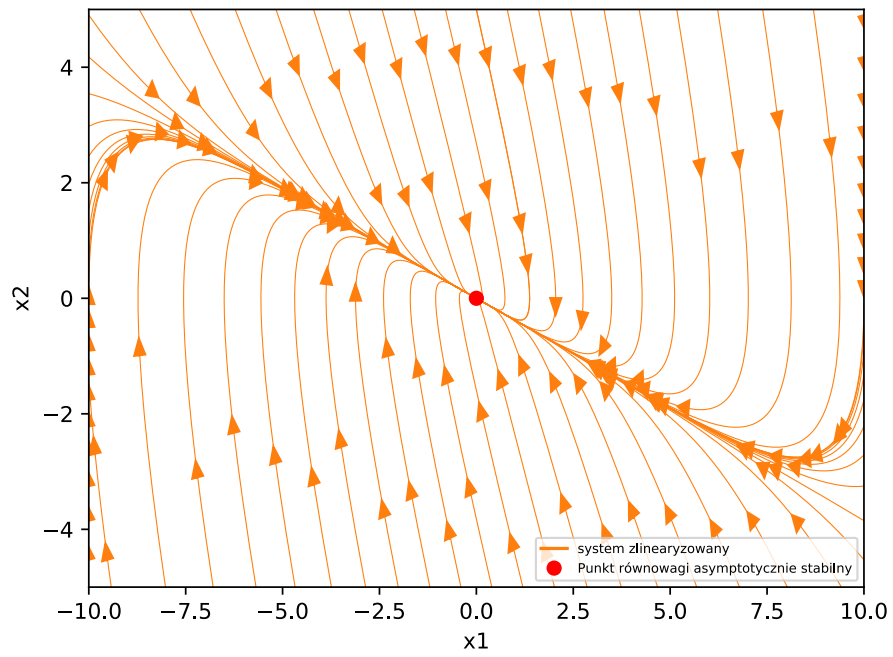
Rysunek 17: Układ nieliniowy

2.3 Współczynnik $a = 1$, $b = 3$

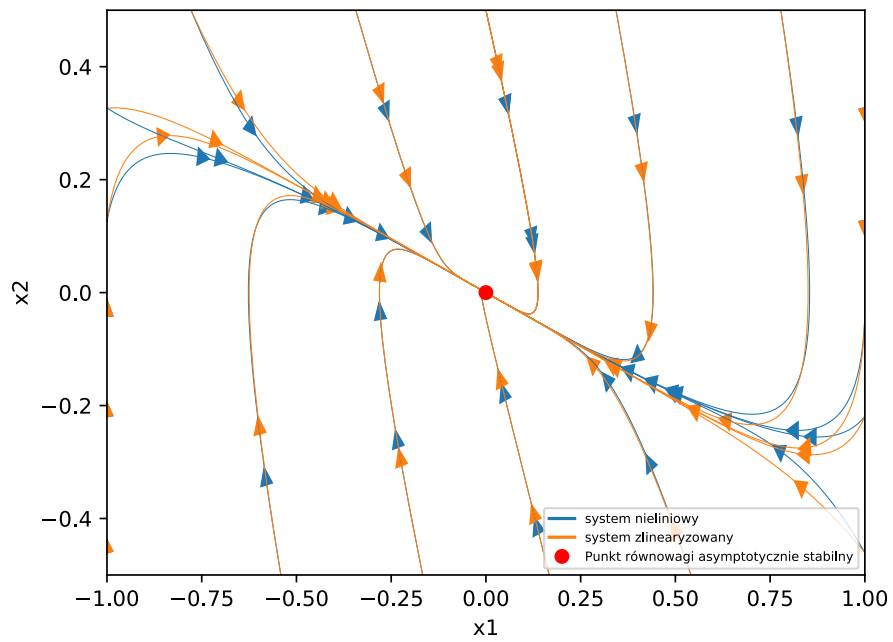


z

Rysunek 18: Układ nieliniowy



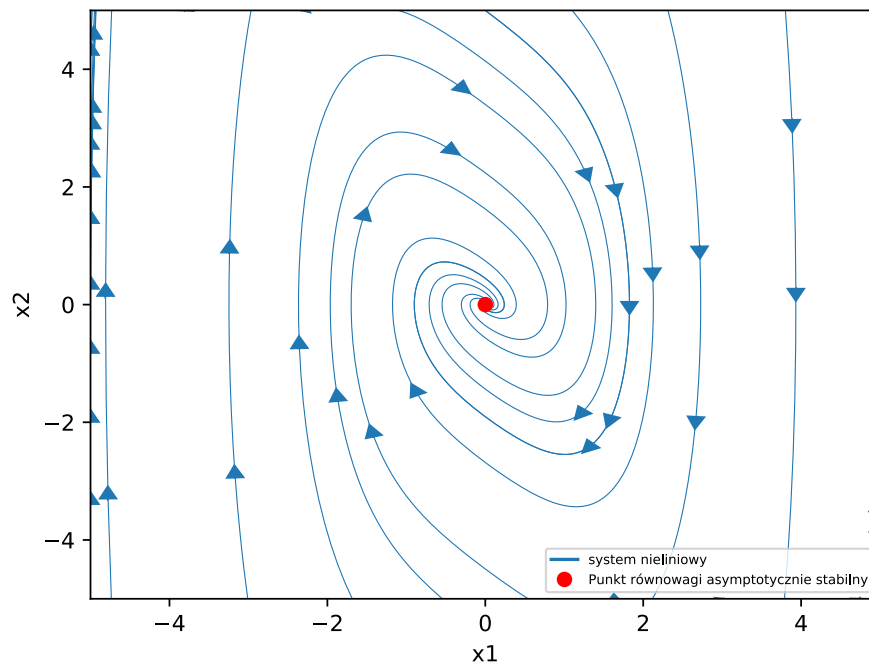
Rysunek 19: Układ zlinearyzowany



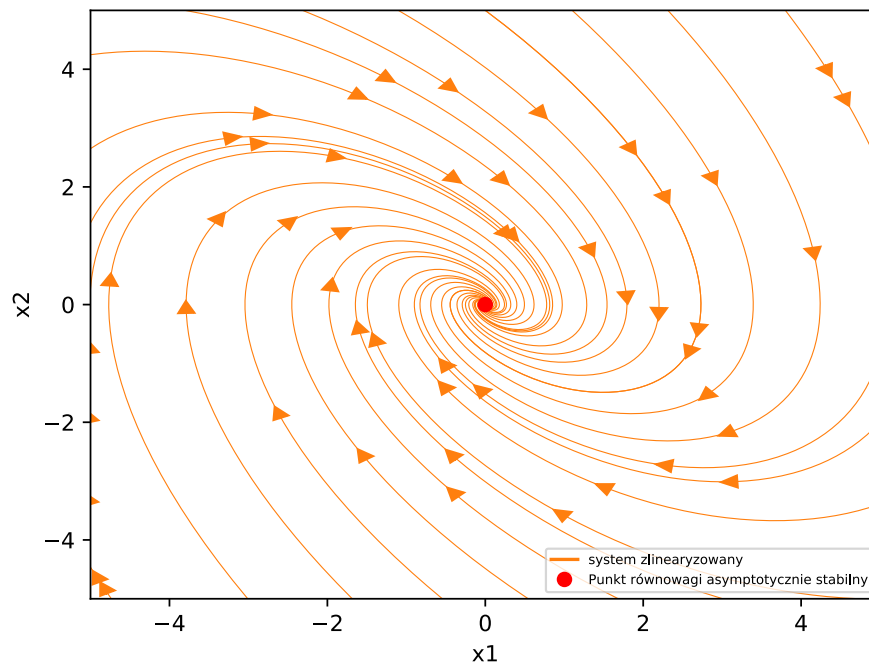
Rysunek 20: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.4 Układ mechaniczny

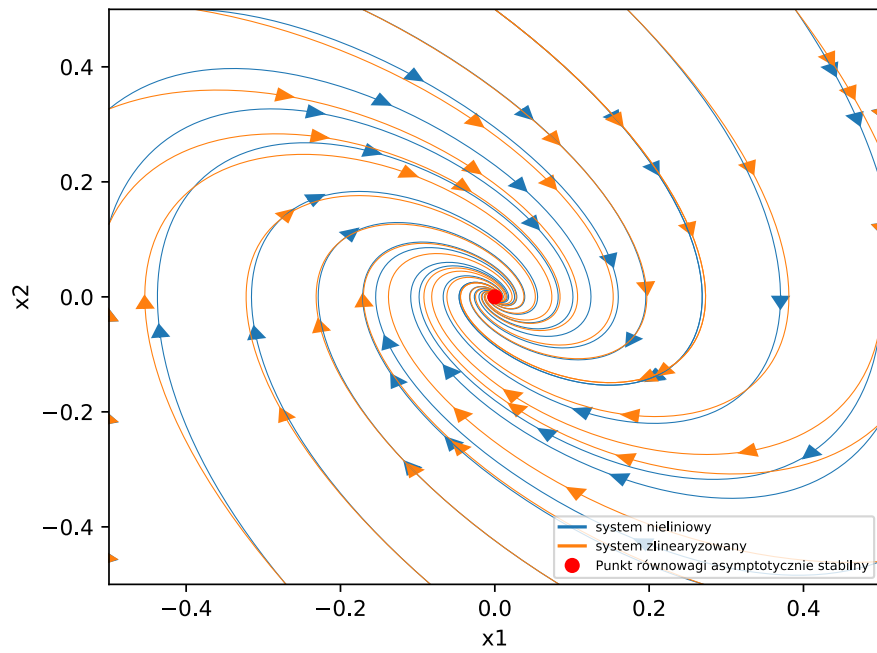
2.4.1 Sprężyna twarda



Rysunek 21: Układ nieliniowy

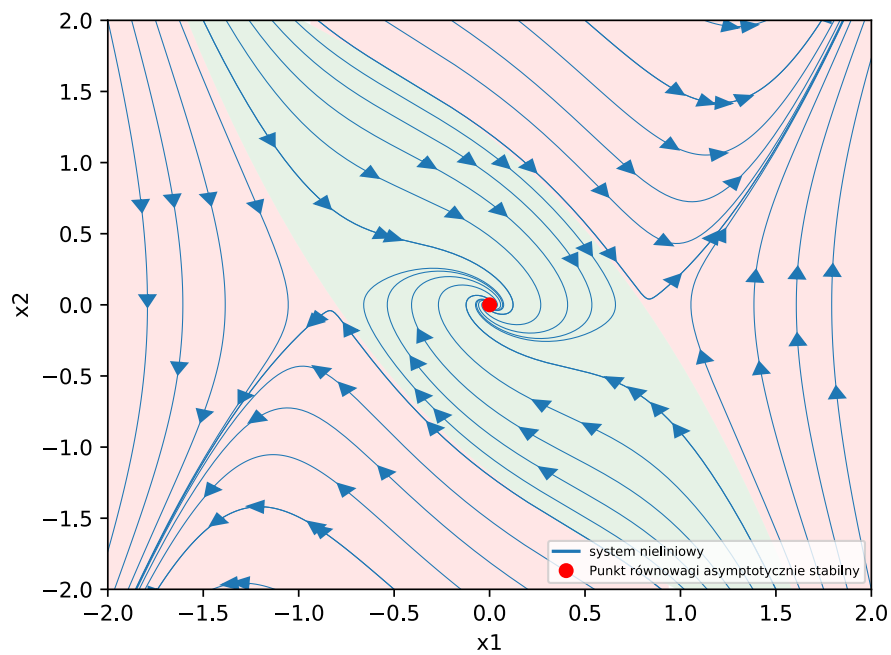


Rysunek 22: Układ zlinearyzowany

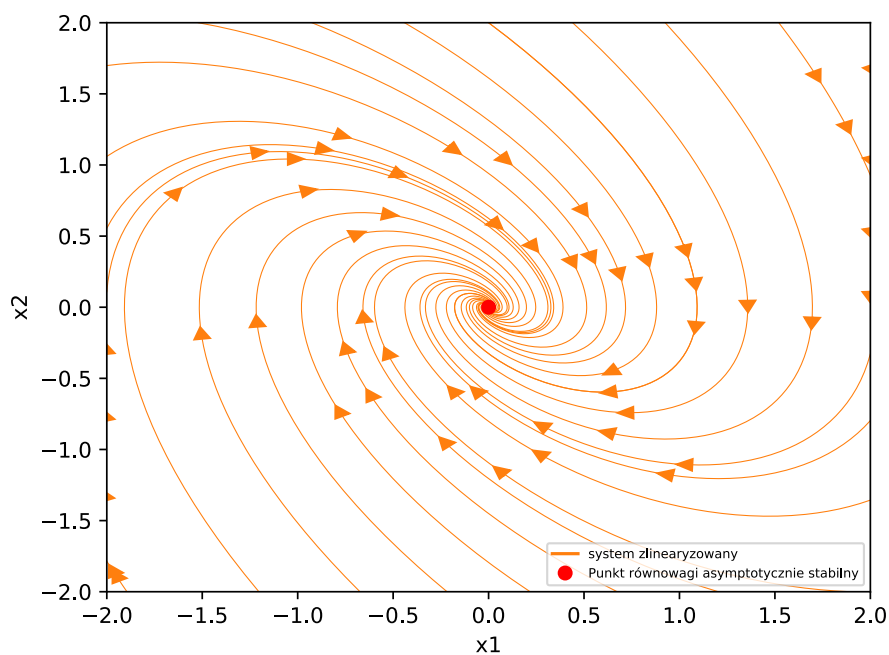


Rysunek 23: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

2.4.2 Sprężyna miękka

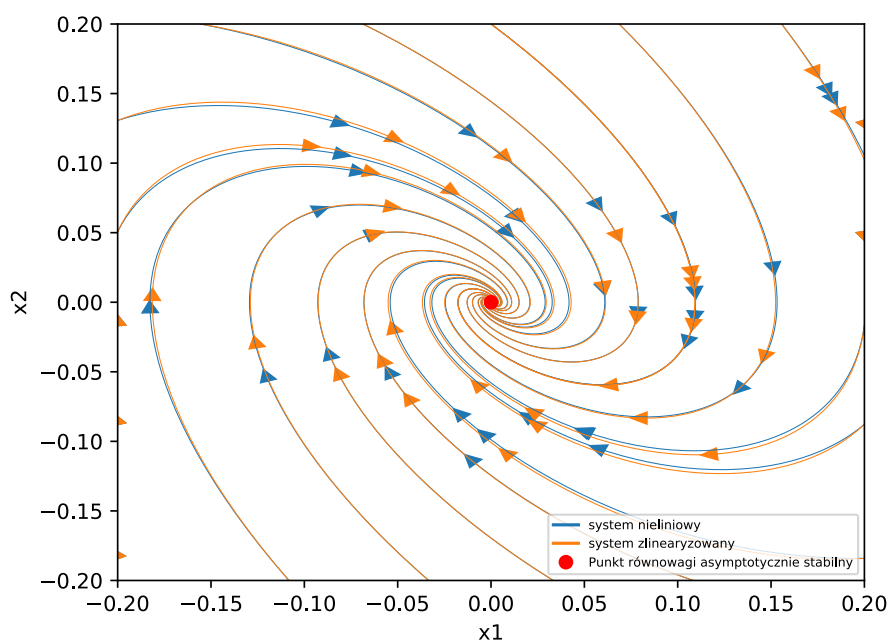


Rysunek 24: Układ nieliniowy



Rysunek 25: Układ zlinearyzowany

Rysunek 26: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi



Rysunek 27: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

3 Wnioski

Mimo tego, że wiele układów ma te same jacobiany oraz te same punkty równowagi, to jednak mogą zachowywać się skrajnie różnie. Najlepszym przykładem tego jest układ mechaniczny ze sprężyną miękką oraz sprężyną twardą, gdzie dobór współczynnika, który jest przy członie zerującym się przy procesie linearyzacji ma wpływ na to czy układ zachowuje się asymptotycznie stabilnie, czy dla niektórych punktów startowych jego trajektoria jest nieograniczona.

Im rozważane otoczenie punktów równowagi jest mniejsze, tym lepiej da się je przybliżyć modelami liniowymi. Wszystkie rozważane przypadki, które posiadały punkt równowagi, były w jego otoczeniu dobrze aproksymowane modelem liniowym.

Niektóre systemy nieliniowe posiadają wiele punktów równowagi – co nie ma miejsca w układach liniowych. Dobrym przykładem tego jest wahadło, które posiada asymptotycznie stabilne punkty równowagi rozmieszczone w punktach $(0, k \cdot 2\pi)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$ oraz niestabilne w $(0, (2k + 1)\pi)$ – na granicy obszarów przyciągania. Z modelu liniowego wynika, że układ posiada tylko jeden punkt równowagi i do niego będzie asymptotycznie zmierzał. W przypadku wahadła jest to efekt niezauważalny ludzkim okiem, ale przyrząd pomiarowy liczący bezwzględny kąt obrotu będzie podawał na zaprojektowany pod liniowy model regulator błędne informacje.