| Optymalizacja wielokryterialna | | | |
|---|---|---|---|
| Adrian Jałoszewski | 24 V 2017 | Środa 14:00 | |

# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się zastosowaniami optymalizacji wielokryterialnej na przykładzie optymalizacji parametrów dwójnika elektrycznego, regulatora proporcjonalnego z inercją oraz dla przypadku, gdzie mamy do czynienia z wysokim kosztem pozyskania danych.

# 2 Przebieg ćwiczenia

## 2.1 Zadanie 1

Zadanie polega na optymalizacji dwójnika elektrycznego pod względem sprawności oraz wydzielanej mocy na rezystancji $R_a$. Rezystancja $R_i$ jest ograniczona – jej wartość mieści się w przedziale $[3, 5]$. Równanie napięciowe Kirchhoffa dla tego układu:

$$E - iR_i - iR_a = 0$$

Wynika z tego, że prąd płynący przez obwód jest zadany wzorem:

$$i = \frac{E}{R_i + R_a}$$

Moc wydzielana na rezystancji jest dana zależnością:

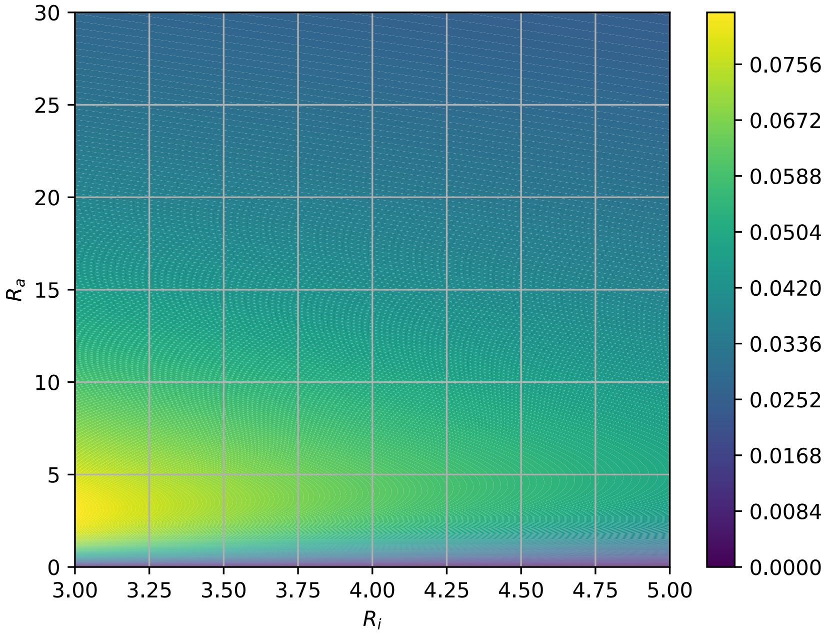
$$P_a = R_a i^2 = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} E^2$$

Ponieważ wartość ta jest zależna od wartości napięcia źródła zasilania, lepiej jest zastąpić te kryterium przy pomocy kryterium równoważnego:

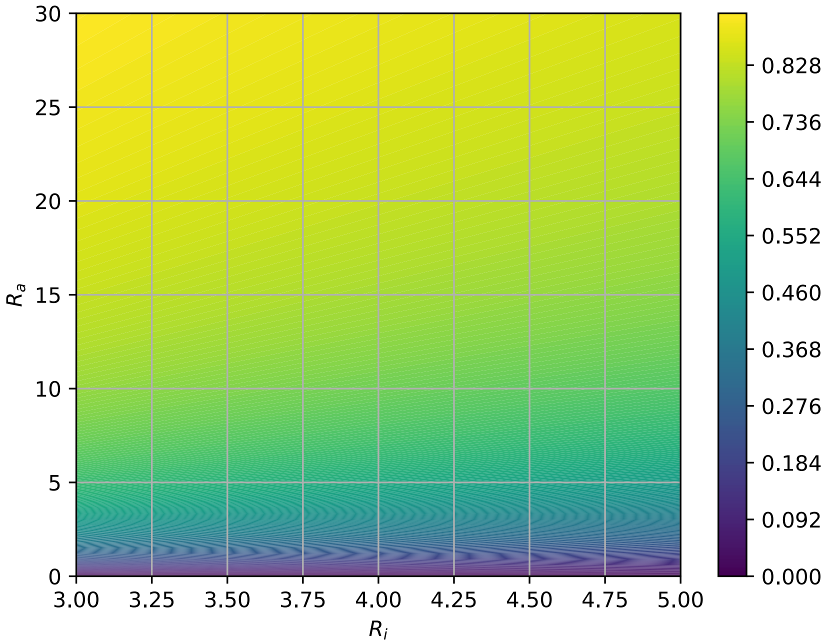
$$\mu = \frac{P_a}{E^2} = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

Sprawność jest zadana jako stosunek mocy wydzielanej na rezystancji $R_a$ do mocy wydzielanej na obydwu rezystancjach.

$$\eta = \frac{P_a}{P_a + P_i} = \frac{R_a i^2}{R_a i^2 + R_i i^2} = \frac{R_a}{R_a + R_i}$$




Rysunek 1: Moc wydzielana na rezystancji $R_a$ w stosunku do kwadratu napięcia

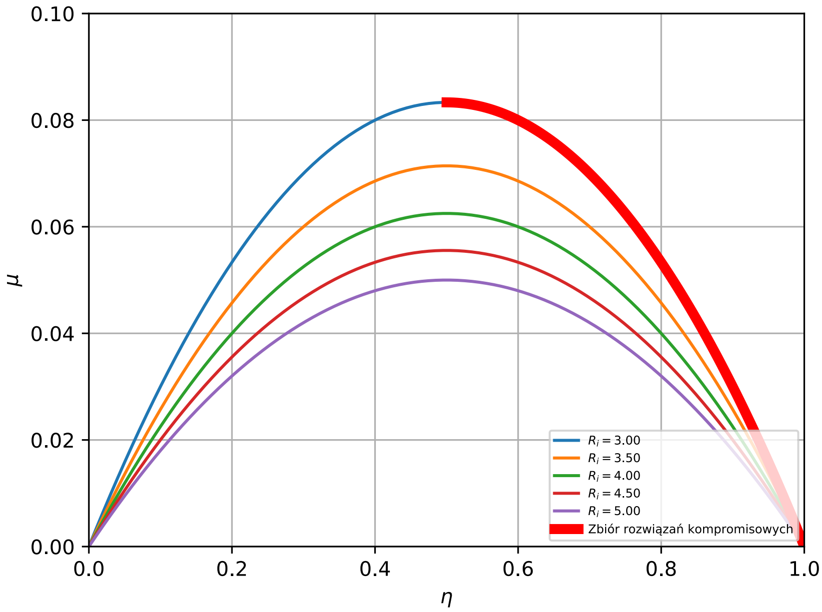



Rysunek 2: Sprawność układu

Można zauważyć, że człon $\frac{R_a}{R_a+R_i}$ występuje w obydwu wskaźnikach jakości. Można w ten sposób uzależnić wskaźniki jakości od siebie i jednej z wartości. Otrzymuje się w ten sposób zależność mocy wydzielonej jako:

$$\mu = \frac{1}{R_i}(1-\eta)\eta \tag{1}$$

Jest to rodzina paraboli o wierzchołkach leżących na prostej $\eta = \frac{1}{2}$, z parametrem $R_i$, który określa jego położenie. Istnieje również prostsza zależność $\mu = \frac{1}{R_a}\eta^2$, jednak jej wadą jest to, że dla każdej paraboli istnieje parabola lepsza – taka o mniejszym $R_a$, a ponieważ tylko 0 jest ograniczeniem, to taka parabola nie istnieje. Dlatego do wyznaczenia zbioru kompromisów lepiej jest wziąć zależność 1.




Rysunek 3: Rodzina zbiorów rozwiązań kompromisowych

## 2.2 Zadanie 2

Zadanie polega na dobraniu tak parametrów układu regulacji aby zminimalizować uchyb statyczny, równocześnie minimalizując przeregulowanie. Zakładam, że zakłócenie jest zerowe. Transmitancja układu otwartego jest wtedy dana jako:

$$G_o(s) = \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1}$$

Transmitancja układu zamkniętego jest wtedy dana jako:

$$G(s) = \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + (K + 1)}$$

Aby można było rozważać ten układ w kategoriach stabilności, musi on być stabilny. Ponieważ parametr odpowiadający za tłumienie w układzie jest dodatni, to układ jest stabilny asymptotycznie pod warunkiem, że wyraz wolny jest dodatni $K > -1$.

Uchyb statyczny jest dany wzorem:

$$e_s = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Gdzie $E(s)$ jest dane wzorem:

$$E(s) = W(s) - Y(s) = W(s) - G_o(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{W(s)}{1 + G_o(s)}$$

Ponieważ jest to układ liniowy, a rozważanie samego uchybu statycznego jest mało miarodajne można przyjąć dowolną wartość dla sygnału skokowego i rozważać względną wartość uchybu:

$$e_w(s) = \frac{\frac{1}{s}}{(1 + \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1})}$$

$$e_{ws} = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{(1 + \frac{K}{T_o T_r s^2 + (T_o + T_r)s + 1})} = \frac{1}{1 + K}$$

Do wyznaczenia względnego przeregulowania można posłużyć się wzorem:

$$PO = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \tag{2}$$

$\zeta$ jest tutaj współczynnikiem tłumienia, który można odczytać z wzoru na transmitancję układu, gdy jest postaci:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

Transmitancję całego układu należy jednak najpierw sprowadzić do tej formy:

$$G(s) = \frac{K}{T_r T_o s^2 + (T_r + T_o)s + K + 1} = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{T_r T_o}{K+1} s^2 + \frac{T_r + T_o}{K+1} s + 1}$$

Można na podstawie tego odczytać, że:

$$T = \sqrt{\frac{T_r T_o}{K + 1}}$$

$$\zeta = \frac{T_r + T_o}{2T(K + 1)}$$

Równanie 2 posiada ograniczenie, że $\zeta < 1$, gdy współczynnik ten jest większy należy przyjąć przeregulowanie jako zerowe, gdyż zjawisko te wtedy nie występuje. Podstawiając do równanania na współczynnik $\zeta$ wartość współczynnika $T$ otrzymuje się:

$$\zeta = \frac{T_0 + T_r}{2} \frac{1}{\sqrt{T_r T_o}} \frac{1}{K + 1} \tag{3}$$

Aby pozbycć się $T_o$ z zależności 3 można zmienić bez straty zmienić zmienną decyzyjną $T_o$ na zmieną decyzyjną $x$ będącą ilorazem średniej arytmetycznej oraz geometrycznej. Rozwiązanie te ma zaletę uniezależnienia rozważań od wartości parametru $T_o$, wadą tego rozwiązania jest natomiast, że nie odwzorowanie to nie jest injekcją.

$$x = \frac{T_o + T_r}{2\sqrt{T_r T_o}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T_o}{T_r}} + \sqrt{\frac{T_r}{T_o}}\right)$$

Konieczne jest wyznaczenie pochodnej $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T_r}$ w celu ustalenia zachowania tego odwzorowania.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T_r} = \frac{1}{4}\left(\frac{T_o}{T_r^{3/2}} + \frac{1}{T_o T_r^{1/2}}\right)$$

Z wartości pochodnej wynika, że:

- Dla $T_r > T_o$ odwzorowanie jest rosnące
- Dla $T_r < T_o$ odwzorowanie jest malejące
- Dla $T_r = T_o$ odwzorowanie osiąga minium równe 1

Dla wartości $T_r \to \infty$ oraz $T_r \to 0$ wartość odwzorowania zmierza do nieskończoności. Z tego oraz z wartości pochodnych funkcji wynika, że dla każdej wartości $T_r$ za wyjątkiem $T_r = T_o$ odwzorowanie te posiada przyjmuje tę samą wartość dla dwóch różnych argumentów, a jego przeciwdziedzina należy do $[1, +\infty)$.

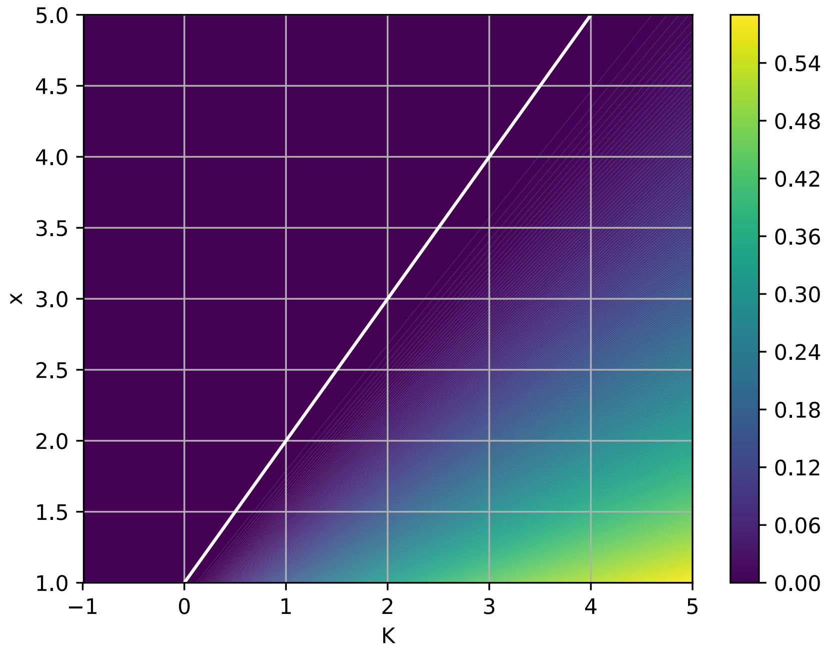
Dokonując zamiany wartości otrzymuję następujący wzór na współczynnik $\zeta$:

$$\zeta = \frac{x}{K+1} \tag{4}$$

Po wprowadzeniu tej zmiany równanie na wartość uchybu statycznego nie ulega zmianom. Zamiana ta ma tylko wpływ na postać równania przeregulowania, które po podstawieniu ma teraz postać:

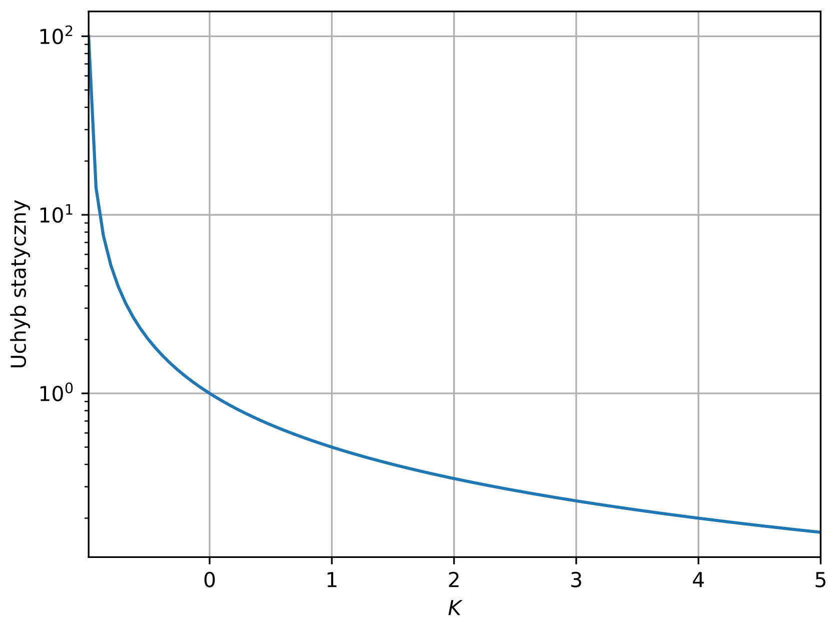
$$PO = \exp\left(-\frac{\frac{x}{K+1}\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{K+1}\right)^2}}\right) \tag{5}$$

Z ograniczenia $\zeta < 1$ wynika ograniczenie $x < K + 1$. Jak to nie jest spełnione, to w układzie nie występuje zjawisko przeregulowania (na wykresie nad białą linią).




Rysunek 4: Wartość przesterowania

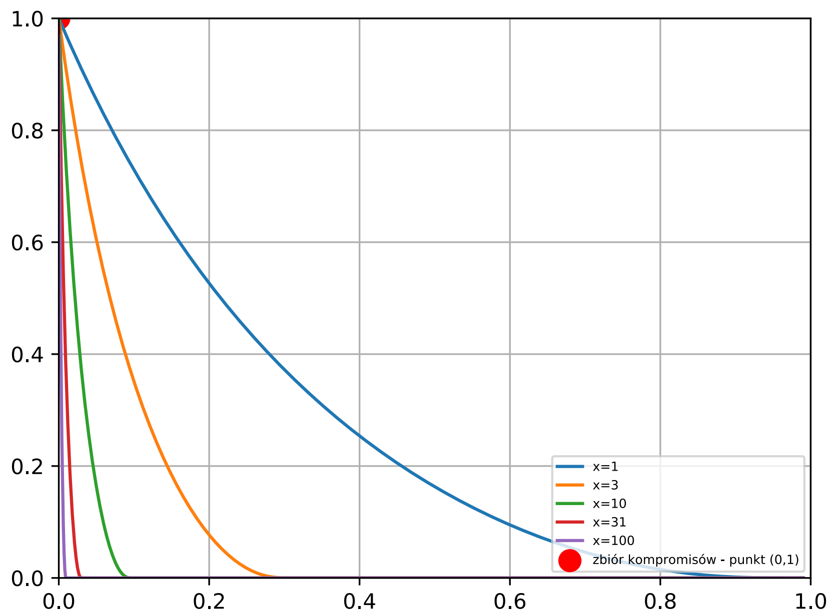
Ponieważ wartości uchybu statycznego są zależne tylko od jednej zmiennej można je przedstawić na dwuwymiarowym wykresie.




Rysunek 5: Wartość uchybu statycznego

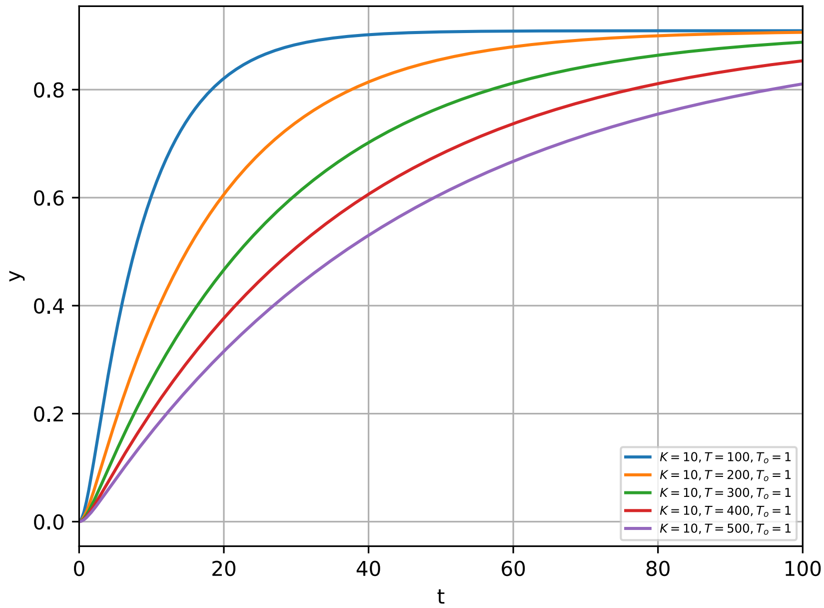
Zależność kryteriów od siebie jest dana jako:

$$PO = \exp\left(\frac{-\pi}{\sqrt{(xe_{ws})^{-2} - 1}}\right)$$




Rysunek 6: Zależności między kryteriami

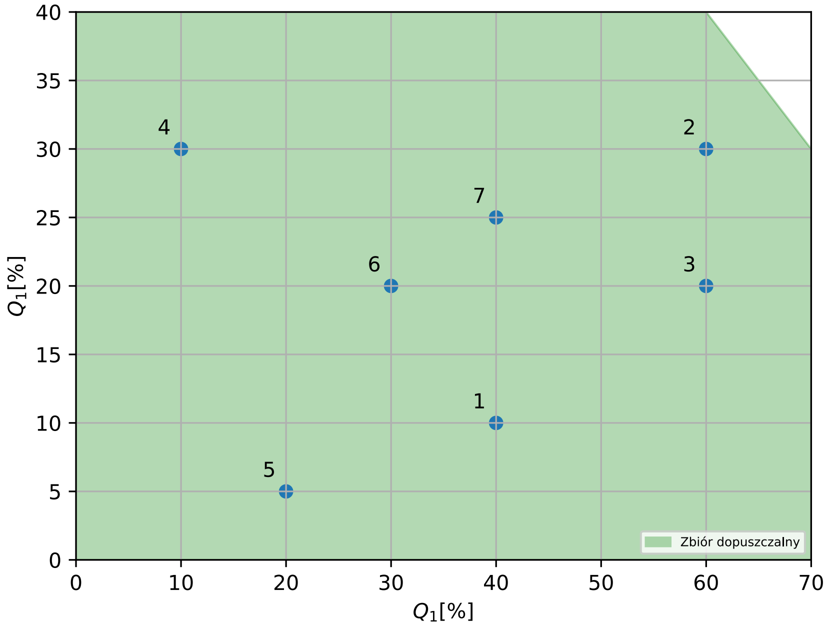
Na podstawie tego można wywnioskować, że najlepszym przypadkiem jest ten dla którego nie ma przeregulowania, a wartość uchybu jest zerowa $K \to \infty$. Zbiór kompromisów dla tego przypadku składa się z jednego punkut, gdyż dla pozostałych zawsze znajdzie się lepszy (z większym współczynnikiem $x$ – większa rozbieżność między stałymi czasowymi.




Rysunek 7: Przebieg odpowiedzi skokowej dla dobranych parametrów

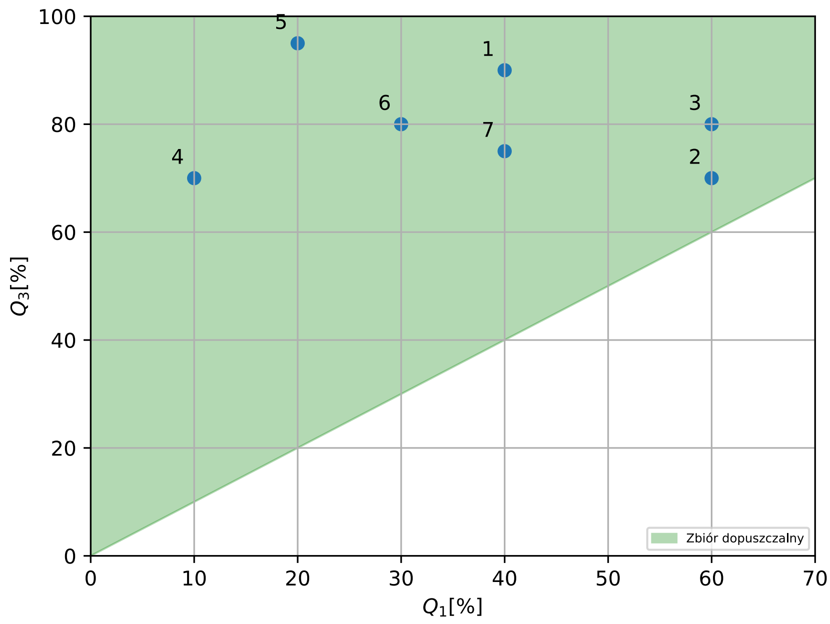
## 2.3 Zadanie 3

Zadanie polega na maksymalizacji współczynnika skuteczności leku przy równoczesnej minimalizacji jego nieskuteczności. Wartości są ograniczone poprzez $Q_1 + Q_2 \leqslant 100\%$




Rysunek 8: Porównanie kryteriów

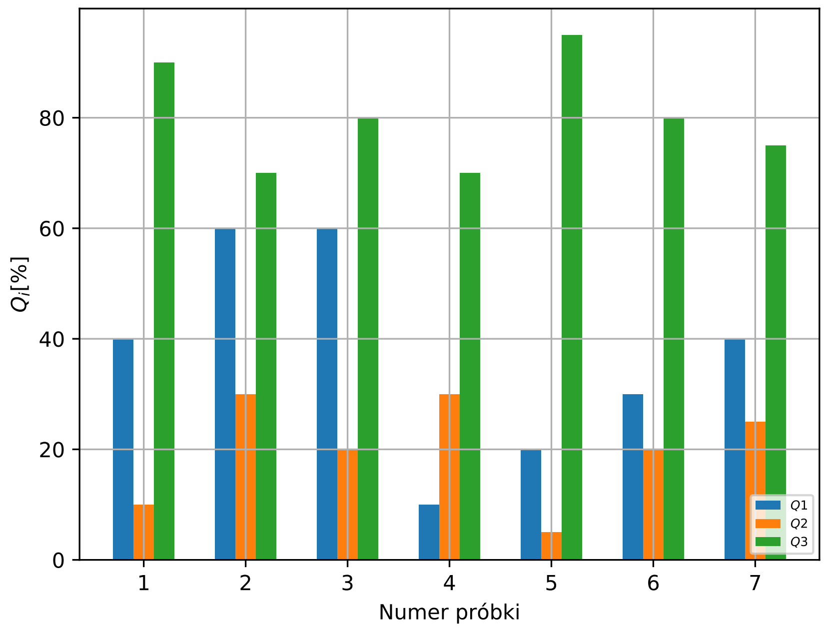
Do rozważań skuteczności leku warto wziąć pod uwagę procent badanych, który doświadczył jakiejkolwiek poprawy zdrowia dany jako $Q_3 = 100\% - Q_2$, do którego należy jednak podejść krytycznie ze względu na możliwość wystąpienia efektu placebo.




Rysunek 9: Porównanie skuteczności

Jest to zdecydowanie lepszy przypadek w rozważaniu, gdyż biorąc w rozważania wskaźniki $Q_1$ oraz $Q_3$ mamy do czynienia z zagadnieniem maksymalizacji dwóch wskaźników. Ograniczenia są wtedy nastepujące:

$$
\begin{aligned}
Q_1 + Q_2 &\leqslant 100\% \\
Q_1 + 100\% - Q_3 &\leqslant 100\% \\
Q_1 &\leqslant Q_3
\end{aligned}
$$




Rysunek 10: Porównanie skuteczności, nieskuteczności oraz braku nieskuteczności

Zbiorem kompromisow w tym przypadku są próbki 1, 3, 5, gdyż pozostałe przypadki spełniają jedno lub więcej kryteriów gorzej niż pozostałe.

# 3 Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia

## 3.1 Zadanie 1

Zbiór kompromisów jest tutaj fragmentem paraboli znajdującym się po jednej ze stron wierzchołka. Zależność pomiędzy poszczególnymi kryteriami można tutaj wyznaczyć na dwa sposoby, jednak ze względu na brak ograniczeń na jedną ze zmiennych decyzyjnych tylko przy pomocy jednej z nich dało się wyznaczyć zbiór kompromisów.

## 3.2 Zadanie 2

W tym przykładzie bardzo dobrze można uwidocznić jak zmiana zmiennych decyzyjnych może pomóc uogólnić rozważania. Warto zauważyć, że w tym przypadku optymalizacji jest wziętych pod uwagę za mało kryteriów. Przykładowo – rozwiązaniami, które posiadają tę samą wartość funkcji celu jest zarówno przypadek tłumienia krytycznego jak i przypadek, który się zbliży do wartości ustalonej na dzień przed zużyciem wodoru przez Słońce. Istnieje tutaj tylko jeden punkt w zbiorze kompromisów, gdyż dla każdego innego przypadku ze względu na brak ograniczeń we wzmocnieniu da się znaleźć przypadek lepszy – zwiększenie rozbieżności pomiędzy stałymi czasowymi skutkuje w przesunięciu wykresu bliżej osi. Jedynie jeden punkt wspólny dla wszystkich wykresów równocześnie minimalizuje jeden ze wskaźników lepiej niż pozostałe.

## 3.3 Zadanie 3

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, tak i tutaj zamiana zmiennych decyzyjnych pozwala uprościć rozważania, jednak w tym przypadku upaszczanie polega na zamianie zagadnienia równoczesnej minimalizacji i maksymalizacji wskaźników na maksymalizację obydwu. Warto zwrócić tutaj uwagę na to, że wariantem leku, który by wszedł na rynek byłby wariant trzeci, gdyż jest on najskuteczniejszy, jednak biorąc pod uwagę możliwośc niezadowolenia konsumentów z niedziałającego leku warto również wziąć pod uwagę jego nieskuteczność lub też jakąkolwiek skuteczność i na podstawie nich skonstruować funkcję celu.