

# Pierwsza metoda Lapunowa

Adrian Jałoszewski

4 kwietnia 2017, godzina 12:30

## 1 Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z układami nieliniowymi oraz ich przybliżeniami liniowymi na układzie równań van der Polla, układu mechanicznego ze sprężyną oraz równania wahadła. Należało zbadać ich obszary przyciągania oraz wyznaczyć ich punkty stabilne.

## 2 Wykonanie laboratorium

### 2.1 Układ równań van der Polla

Układ równań Van der Pola jest dany jako:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)\end{aligned}$$

Punkty równowagi wyznaczam podstawiając za pochodne 0:

$$\begin{aligned}0 &= x_2 - x_1^3 - ax_1 \\ 0 &= -x_1\end{aligned}$$

Wynika z tego, że  $x_1 = x_2 = 0$ . Jakobian tego systemu jest następujący:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

W punkcie równowagi macierz A ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a\lambda + 1$$

Dla poszczególnych wartości współczynnika  $a$  własnych:

$a = 0$  – środek

$a \in (0, 2)$  – ognisko asymptotycznie stabilne

$a = 2$  – węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny

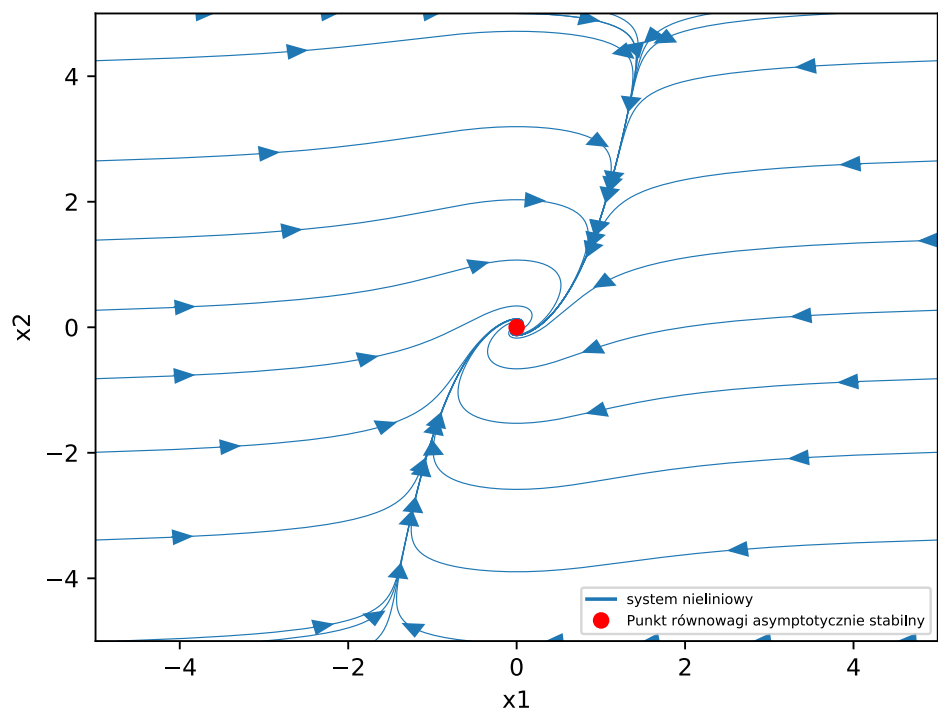
$a > 2$  – węzeł asymptotycznie stabilny

#### 2.1.1 Współczynnik $a = 1$

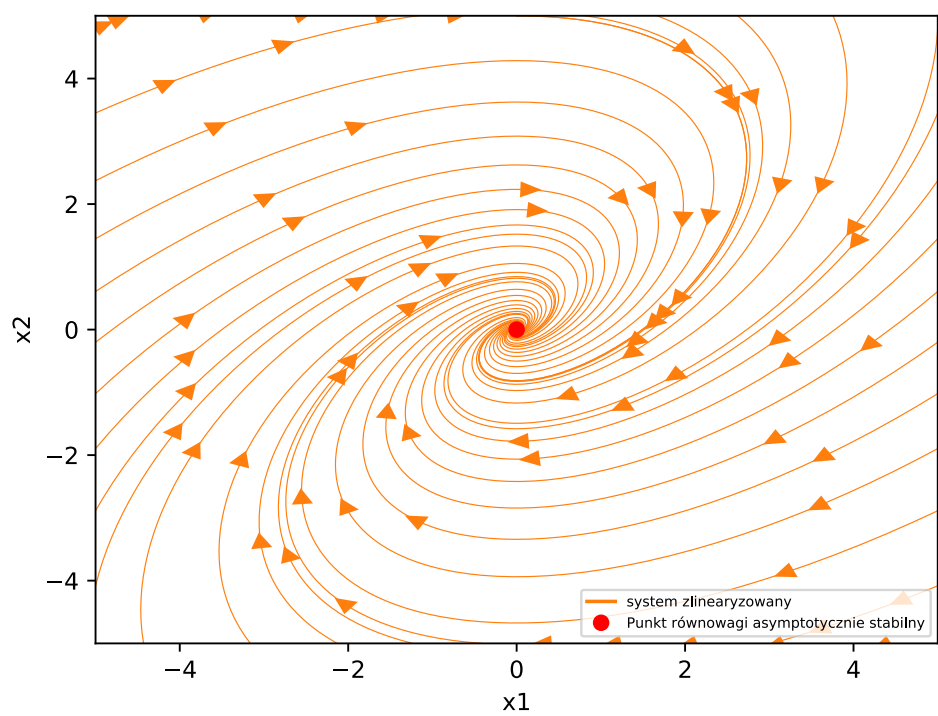
Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu ogniska asymptotycznie stabilnego o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

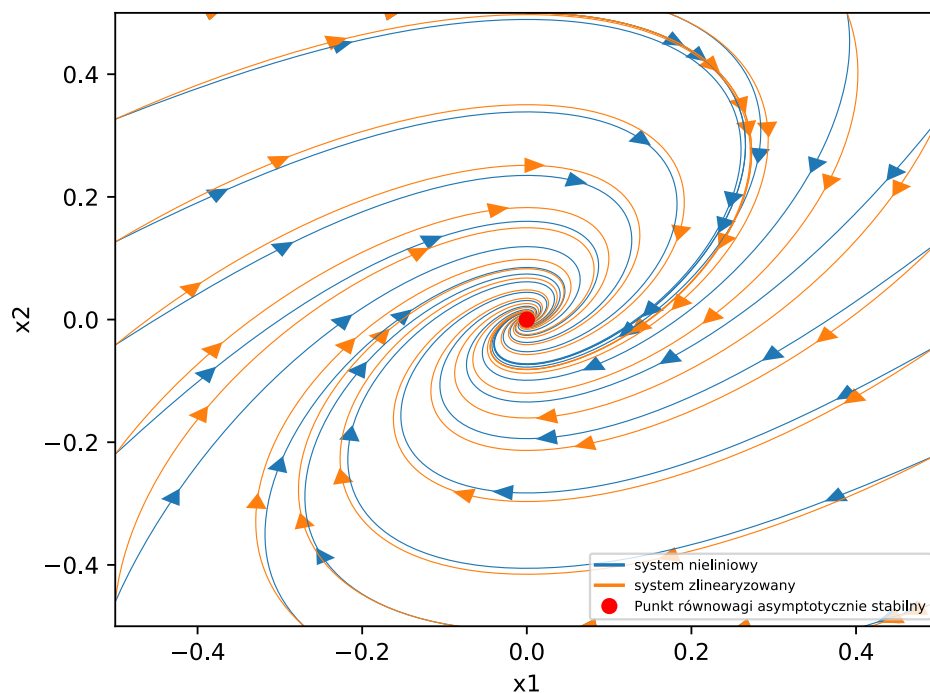
Wartości własne macierzy:  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu  $(0, 0)$



Rysunek 1: Układ nieliniowy



Rysunek 2: Układ zlinearyzowany



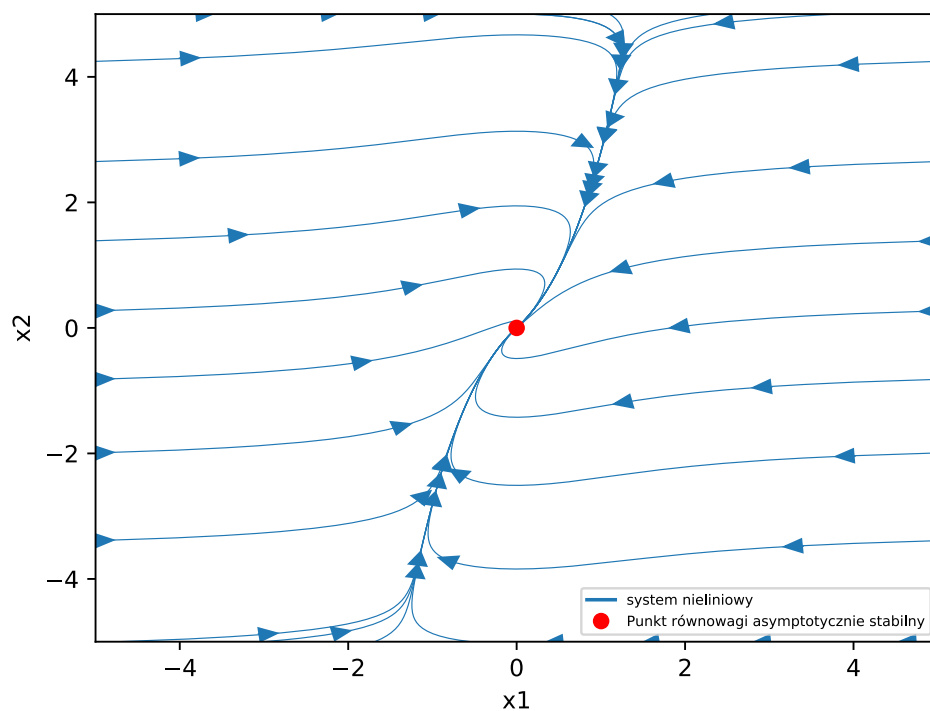
Rysunek 3: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

### 2.1.2 Współczynnik $a = 2$

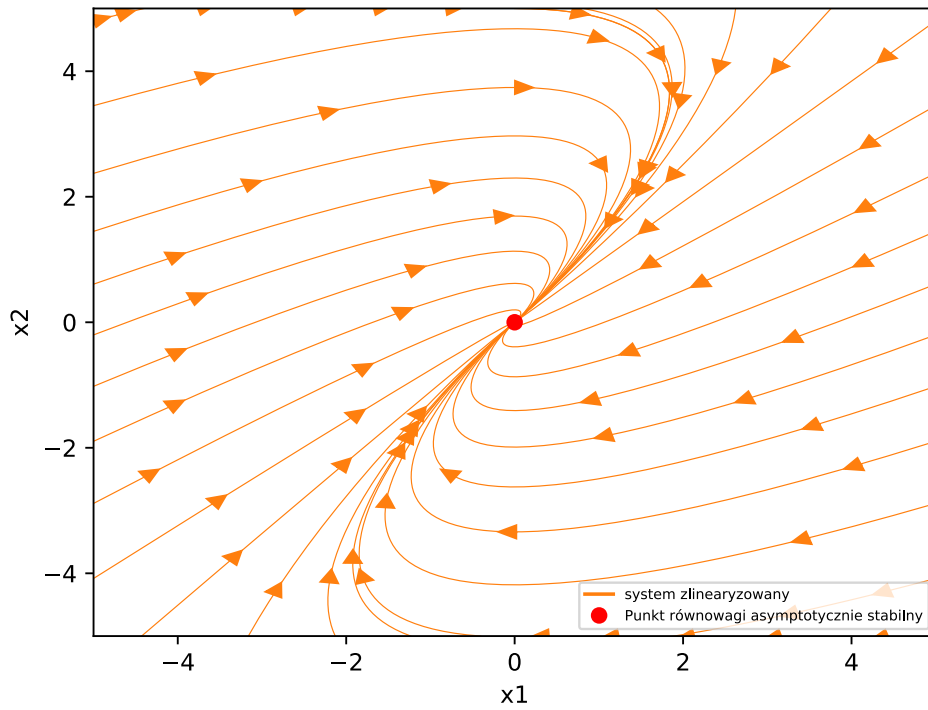
Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu węzła zdegenerowanego asymptotycznie stabilnego o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

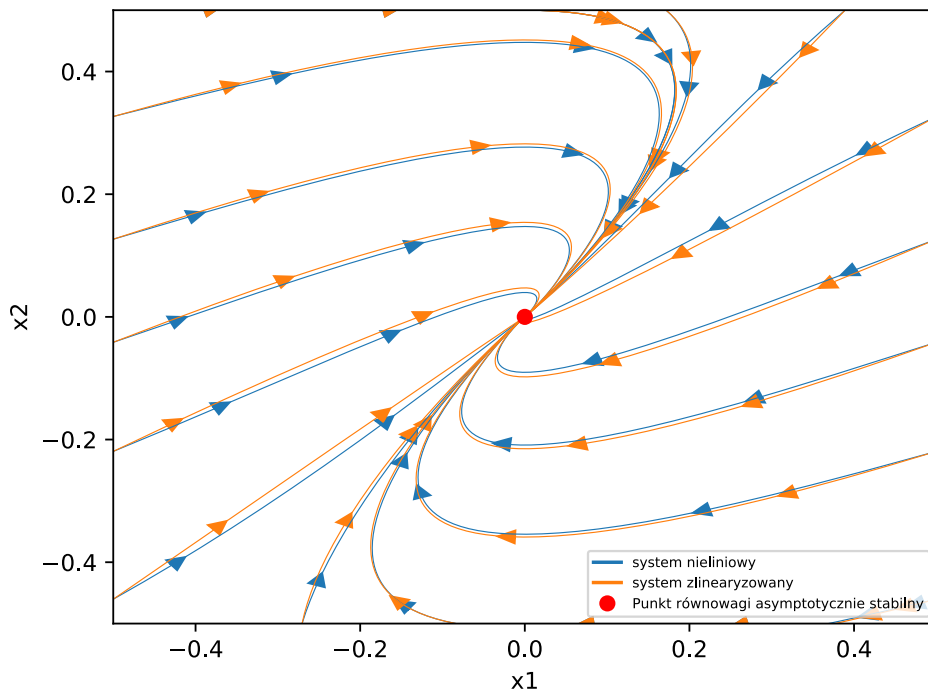
Wartości własne macierzy:  $\lambda_{1/2} = -1$ , układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu  $(0, 0)$



Rysunek 4: Układ nieliniowy



Rysunek 5: Układ zlinearyzowany



Rysunek 6: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

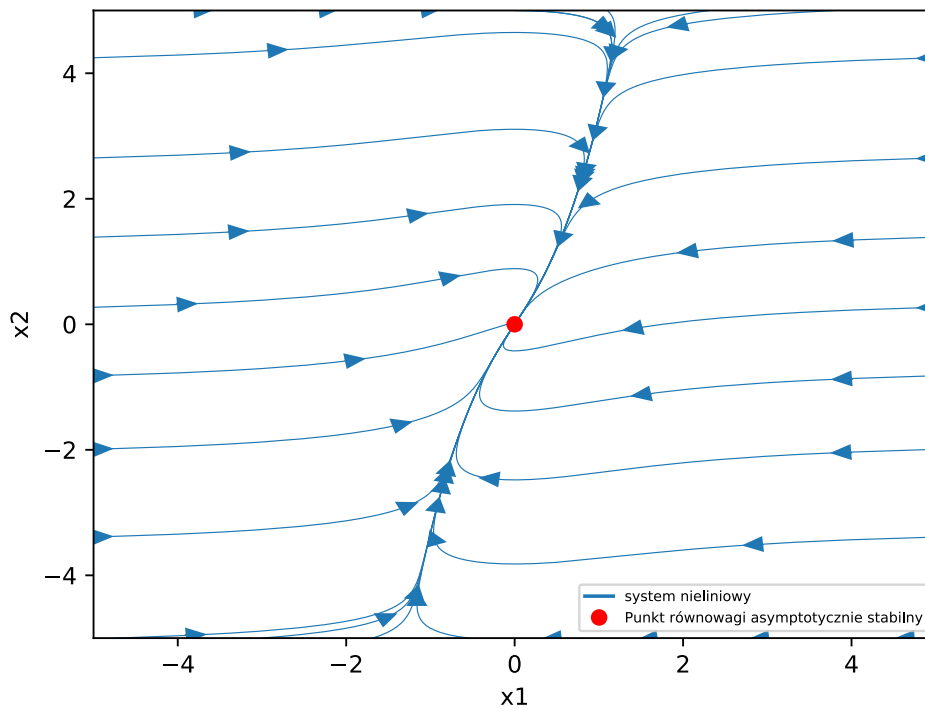
### 2.1.3 Współczynnik $a = 2,5$

Współczynnik został dobrany tak aby trajektorie układu dla macierzy w postaci kanonicznej były postaci  $x_2 = x_1^4$  – stosunek wartości własnych powinien być równy 4. Stopień wielomianu został wybrany w ten sposób aby krzywizna trajektorii była dobrze widoczna na portretach fazowych – (dla wielomianu drugiego stopnia  $a = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,12$ , dla trzeciego stopnia  $a = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$  – wartości na tyle bliskie tym z przypadku

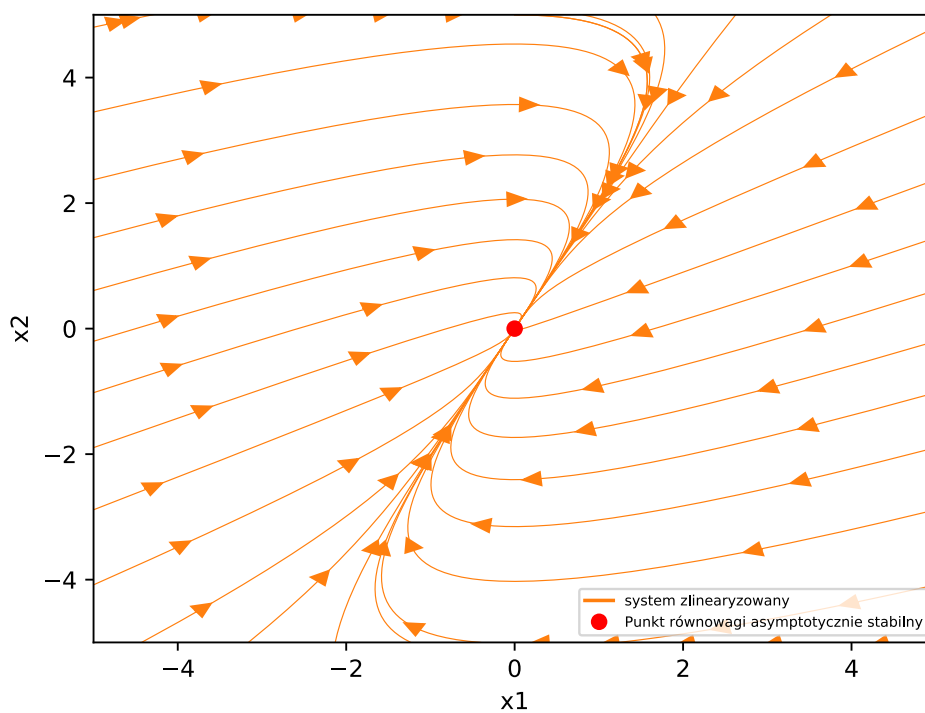
węzła zdegenerowanego, że trudno było rozróżnić poszczególne przypadki).

$$A = \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

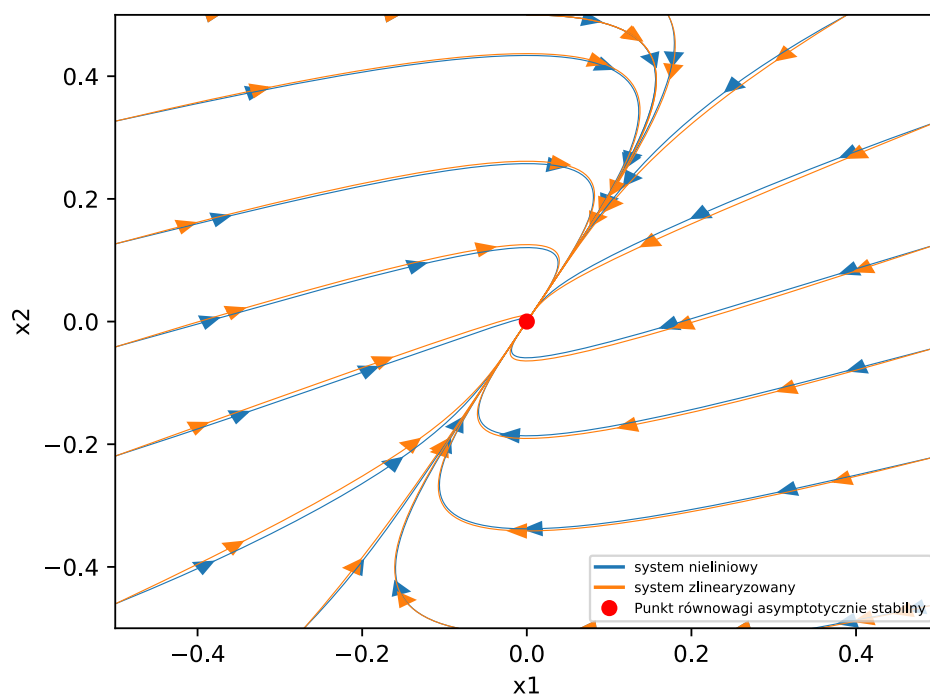
Wartości własne macierzy:  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = -2$ , układ jest więc asymptotycznie stabilny w okolicy punktu  $(0, 0)$



Rysunek 7: Układ nieliniowy



Rysunek 8: Układ zlinearyzowany



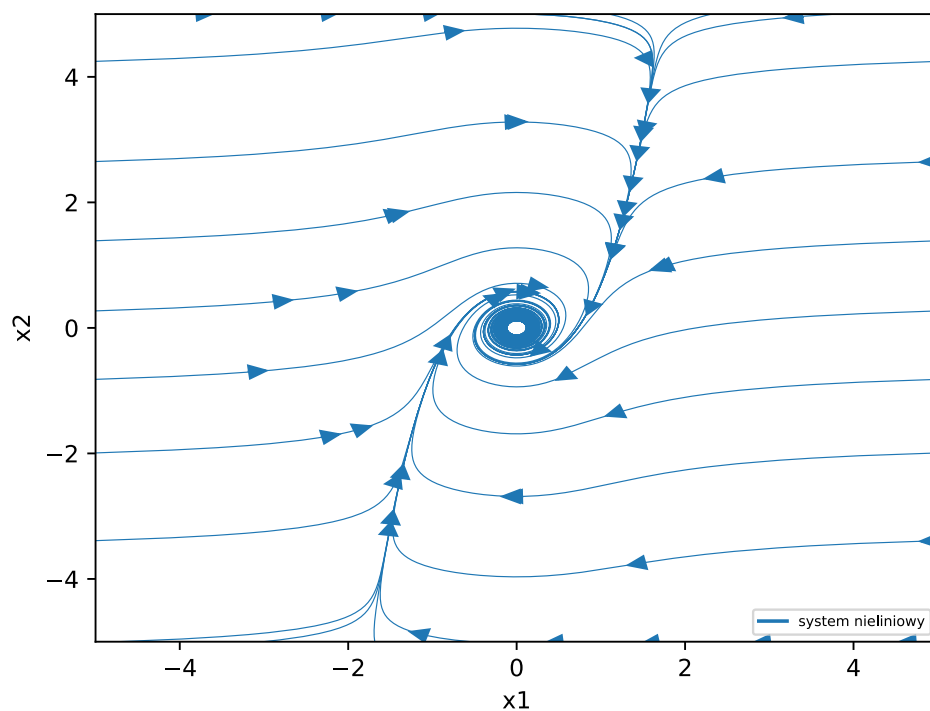
Rysunek 9: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

#### 2.1.4 Współczynnik $a = 0$

Jest to przypadek kiedy zlinearyzowany układ posiada portret fazowy typu środka o macierzy stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne  $\lambda_1 = -j$ ,  $\lambda_2 = j$  mają zerową część rzeczywistą – o stabilności układu nieliniowego nie można wnioskować. Jest to przypadek niespełniający warunków opisanych w poleceniu, więc nie będzie rozważany.



Rysunek 10: Układ nieliniowy

## 2.2 Wahadło tłumione

Wahadło tłumione jest zadane wzorem:

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l} \sin y(t) + \frac{c}{lm} \dot{y}(t) = 0$$

Dla uproszczenia rozważań podstawiam  $a = \frac{g}{l}$ ,  $b = \frac{c}{lm}$ , otrzymuję w ten sposób:

$$\ddot{y}(t) + a \sin y(t) + b \dot{y}(t) = 0$$

Ze względu na charakter parametrów  $g, l, c, m$  parametry  $a, b$  są większe lub równe 0. Układ ten można przedstawić równoważnie:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 - a \sin x_1\end{aligned}$$

Gdzie  $x_2 = \dot{y}$  oraz  $x_1 = y$ . Aby wyznaczyć punkty równowagi podstawiam za pochodne 0:

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -bx_2 - a \sin x_1\end{aligned}$$

Punkty równowagi następują więc dla  $(x_1, x_2) = (k\pi, 0)$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Jakobian dla tego układu jest następujący:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Należy rozważyć dwa przypadki punktów stabilności:

$x_2 = 0, x_1 = 2k\pi$  dla  $k \in \mathbb{Z}$  – wtedy  $\cos x_1 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  jest dany jako:  $\lambda^2 + b\lambda + a$ , jeżeli wartości  $a, b$  są dodatnie, to wielomian drugiego rzędu posiada pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zespolonej – są to punkty równowagi asymptotycznie stabilne. Wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  dany jest jako  $\lambda^2 + \lambda b$

$x_2 = 0, x_1 = (2k+1)\pi$  dla  $k \in \mathbb{Z}$  – wtedy  $\cos x_1 = -1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  jest dany jako:  $\lambda^2 + b\lambda - a$ , gdy parametry  $a, b$ , ponieważ badamy układ nieliniowy, to współczynnik  $a$  musi być większy od zera – wyraz wolny wielomianu jest zawsze mniejszy od zera, z czego wynika, że w tych punktach występuje równowaga niestabilna.

Ponieważ układ zachowuje się cyklicznie względem  $x_1$  z okresem  $2\pi$ , wystarczy w rozważaniach układu zlinearyzowanego wziąć pod uwagę tylko punkt  $(0, 0)$ .

Zależnie od wartości parametrów  $a, b$  można znaleźć wyróżnić następujące portrety fazowe w układzie zlinearyzowanym:

$b = 0, a > 0$  – środek

$b \in (0, 2\sqrt{a})$  – ognisko asymptotycznie stabilne

$b = 2\sqrt{a}$  – węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny

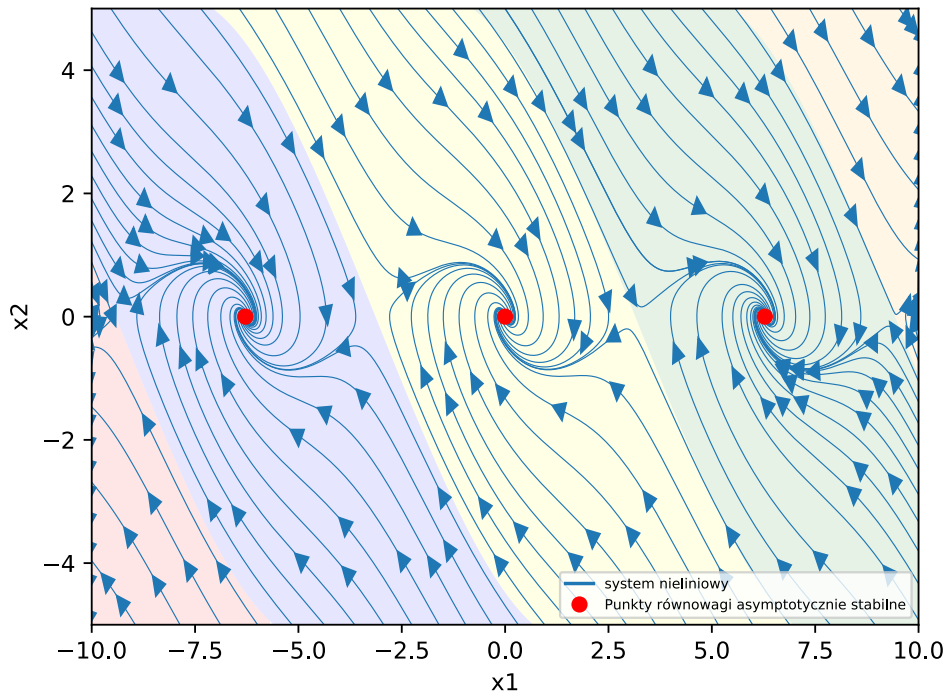
$b > 2\sqrt{a}$  – węzeł asymptotycznie stabilny

Poszczególne wykresy zostały podzielone kolorami tła zgodnie z obszarami przyciągania.

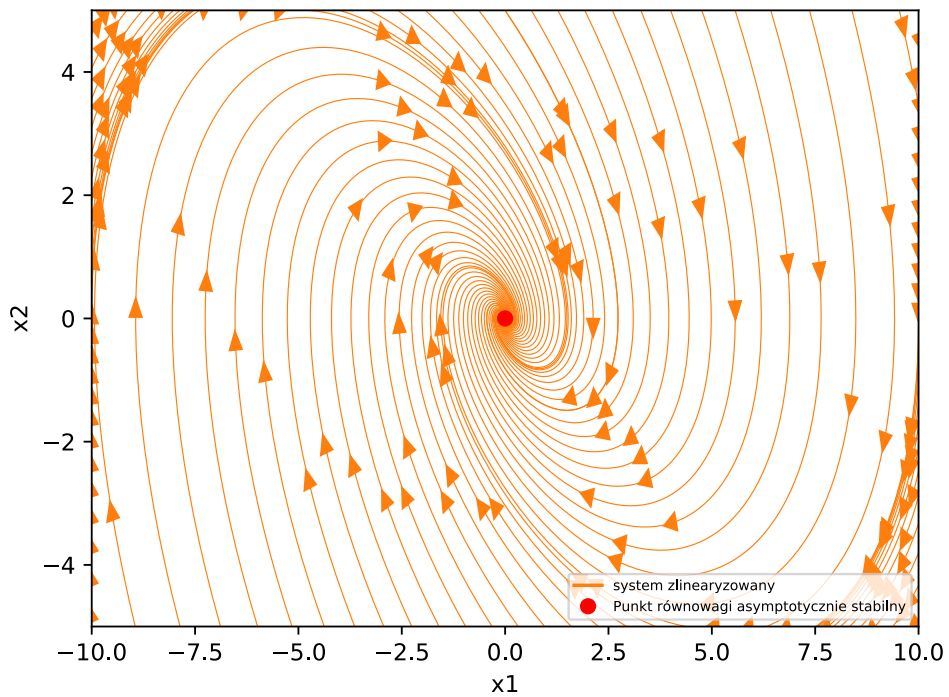
### 2.2.1 Współczynniki $a=1$ , $b=1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest ogniskiem asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

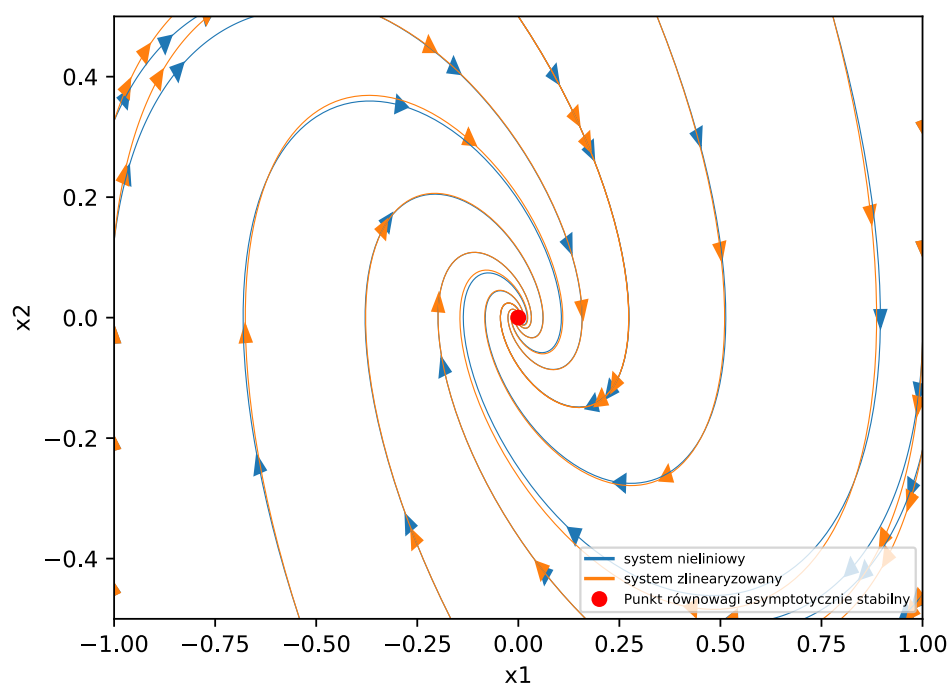


Rysunek 11: Układ nieliniowy



Rysunek 12: Układ zlinearyzowany



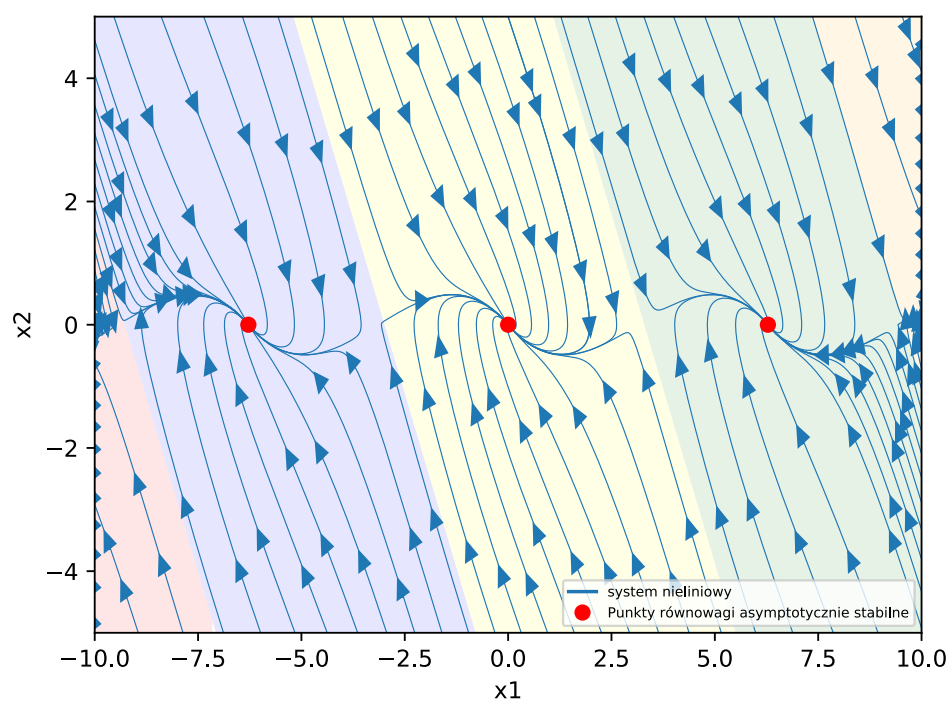


Rysunek 13: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

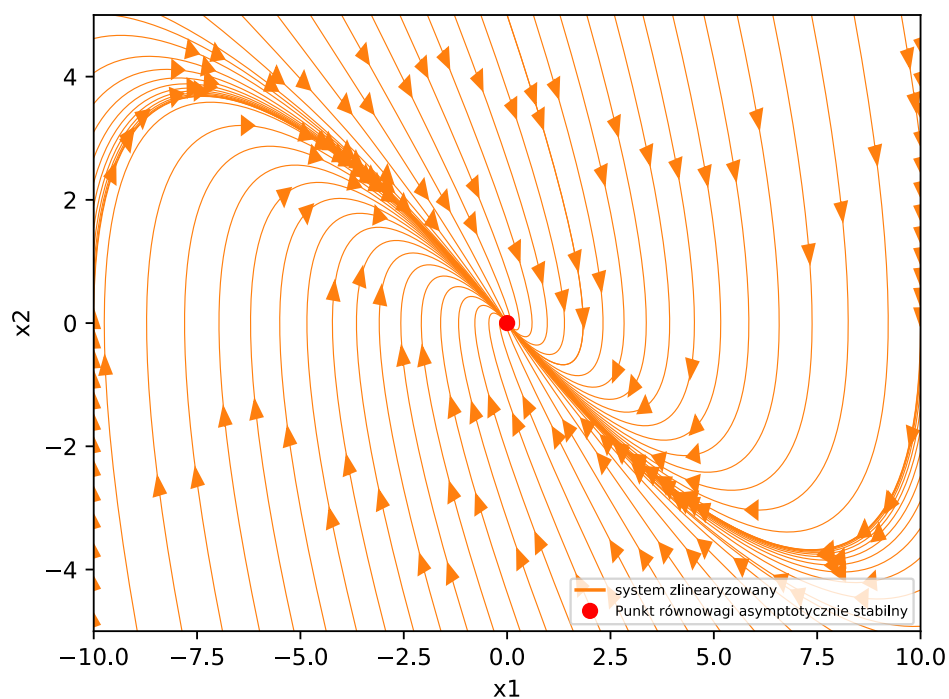
### 2.2.2 Współczynnik $a = 1$ , $b = 2$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest węzłem zdegenerowanym asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_{1/2} = -1$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

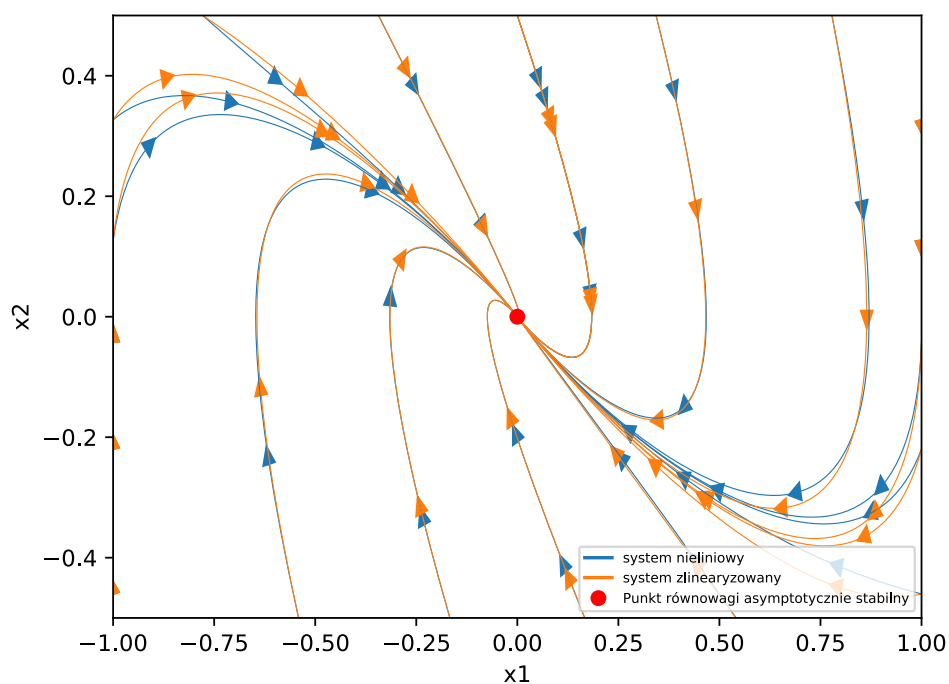
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 14: Układ nieliniowy



Rysunek 15: Układ zlinearyzowany



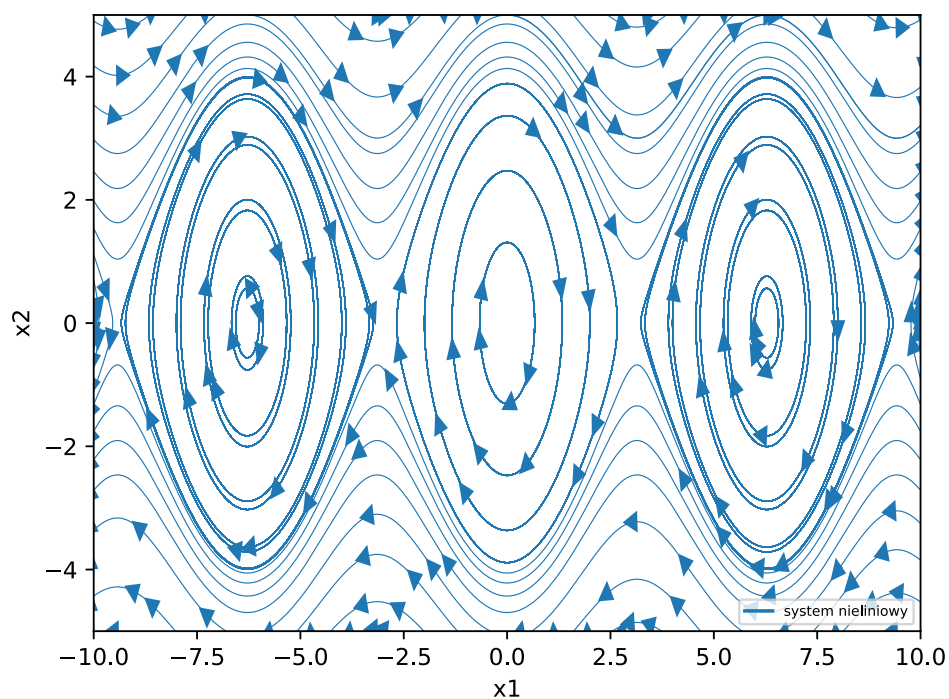
Rysunek 16: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

### 2.2.3 Współczynnik $a = 4$ , $b = 0$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest środkiem z wartościami własnymi  $\lambda_{1/2} = -1$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Nie można nic wnioskować na temat stabilności układu, nie jest więc dokładniej rozpatrywany, gdyż nie jest objęty treścią zadania.

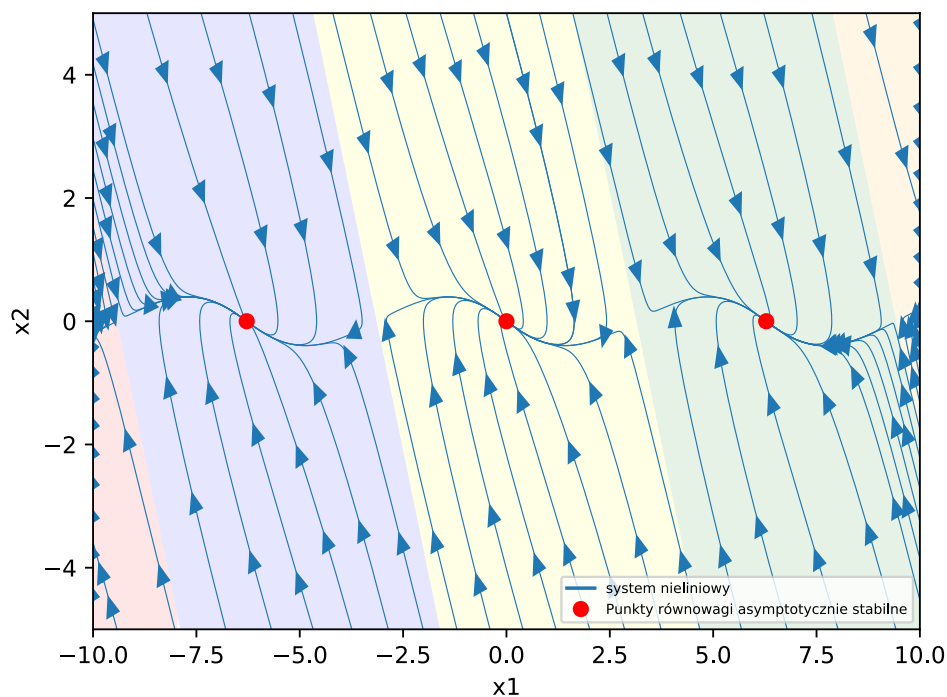


Rysunek 17: Układ nieliniowy

#### 2.2.4 Współczynnik $a = 1$ , $b = 2,5$

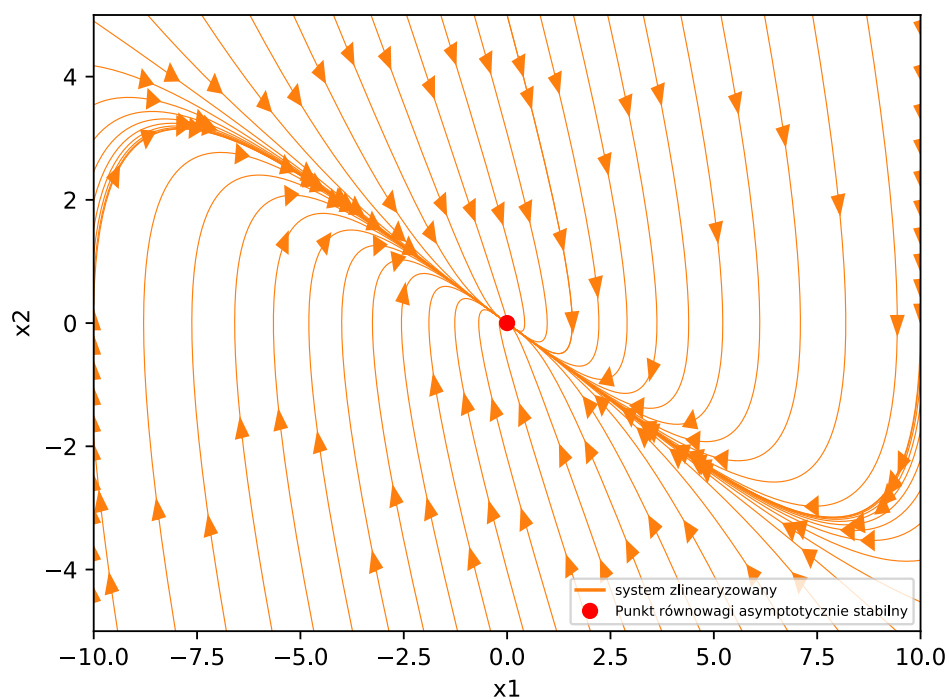
Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest węzłem zdegenerowanym asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_{1/2} = -1$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako (te same współczynniki co rozważane przy równaniach van der Polla):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5/2 \end{bmatrix}$$

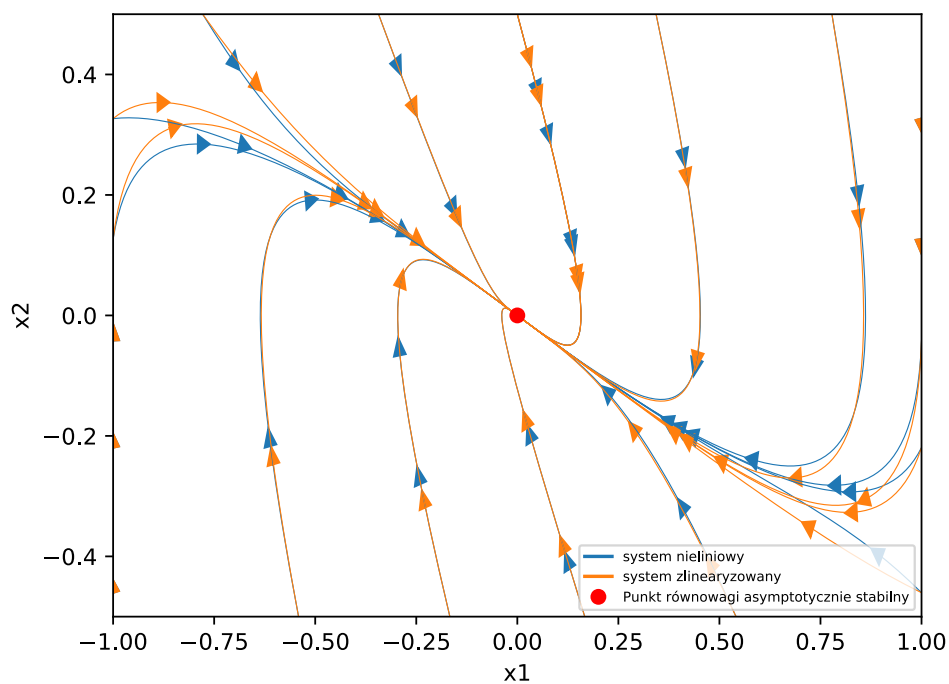


z

Rysunek 18: Układ nieliniowy



Rysunek 19: Układ zlinearyzowany



Rysunek 20: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

## 2.3 Układ mechaniczny

Układ mechaniczny ze sprężyną jest opisany równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) + dy^3(t) = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 - cx_1 - dx_1^3$$

Gdzie  $x_2 = \dot{y}$  oraz  $x_1 = y$ . Aby wyznaczyć punkty równowagi podstawiam za pochodne 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -bx_2 - cx_1 - dx_1^3 \end{aligned}$$

Wynika z tego, że punkty równowagi występują dla  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 0$  oraz dla sprężyny miękkiej dla  $x_1 = \pm \sqrt{\frac{c}{d}}$ .

Jakobian tego systemu jest następujący:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c - 3dx_1^2 & -b \end{bmatrix}$$

### 2.3.1 Sprężyna twarda

Układ ze sprężyną twardą posiada tylko jeden punkt równowagi dla  $x_1 = x_2 = 0$ . Macierz A jest dana w takim przypadku jako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny układu zlinearyzowanego:  $\lambda^2 + b\lambda + c$ . Rozważane przypadki

$b \in (0, 2\sqrt{c})$  – o asymptotycznie stabilne

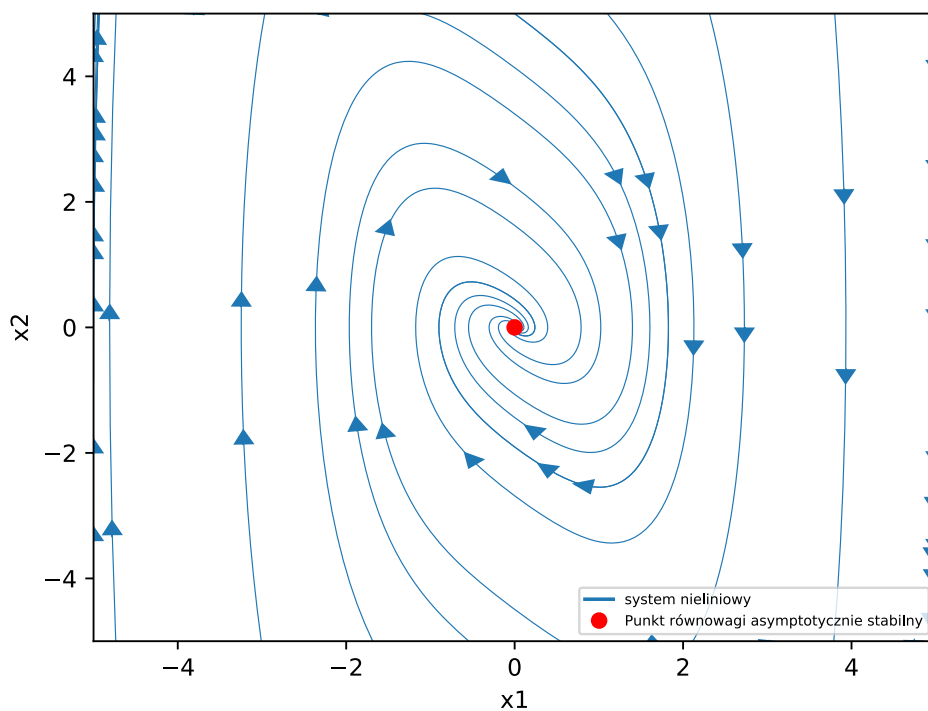
$b = 2\sqrt{c}$  – węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny

$b > 2\sqrt{c}$  – węzeł asymptotycznie stabilny

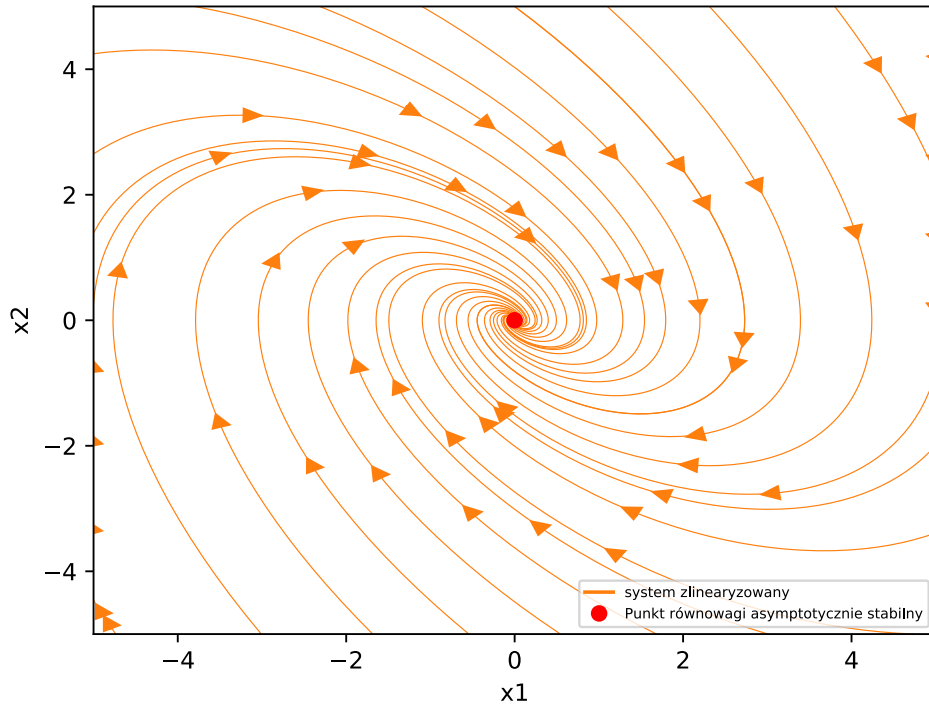
### 2.3.2 Sprężyna twarda $b = c = 1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest ogniskiem asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

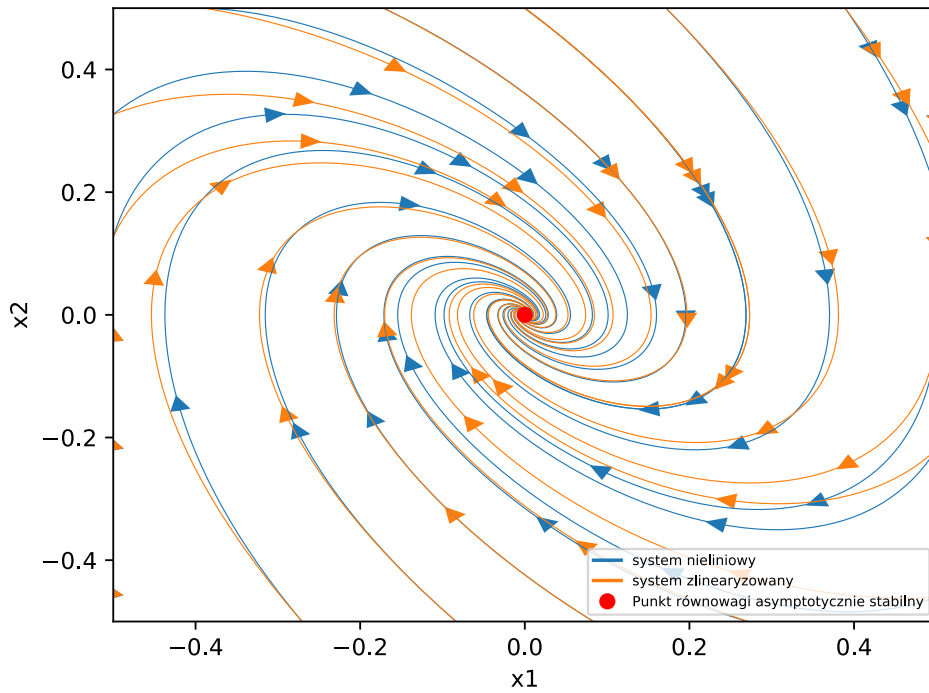
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Rysunek 21: Układ nieliniowy



Rysunek 22: Układ zlinearyzowany

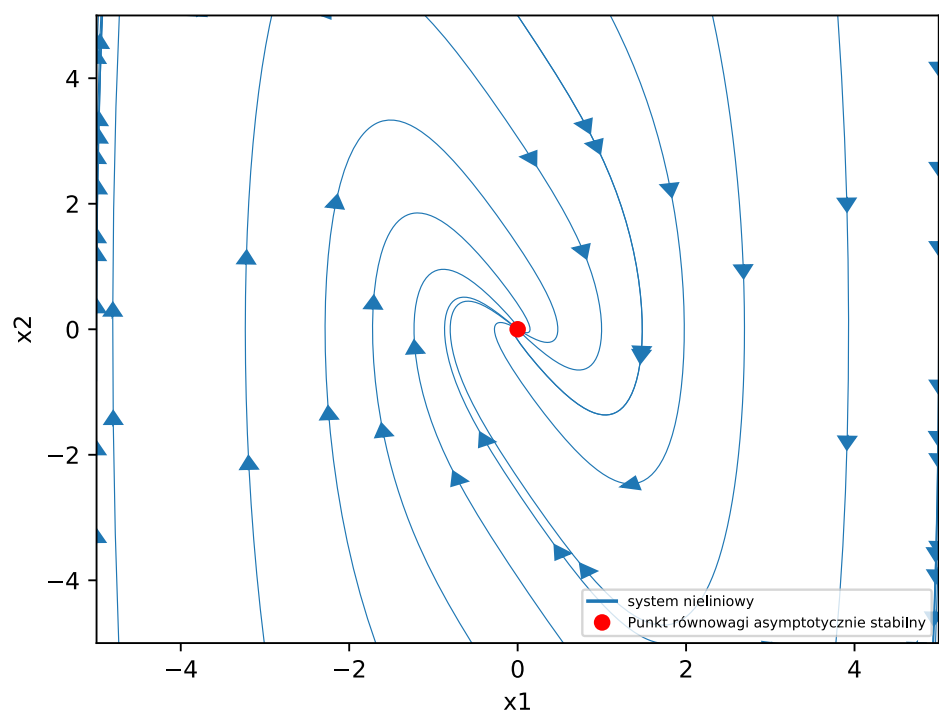


Rysunek 23: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

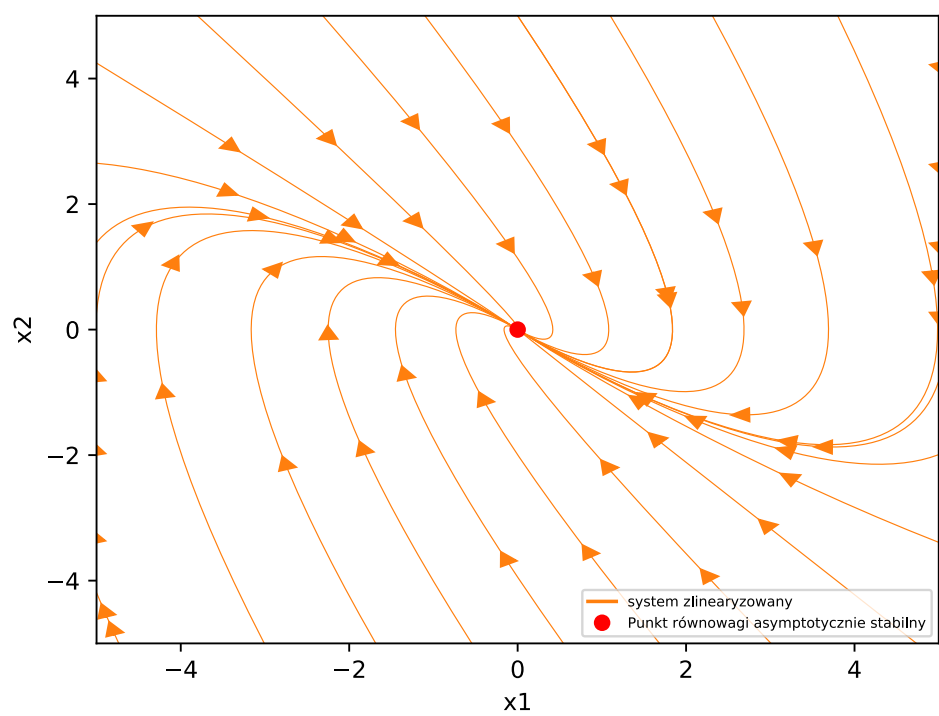
### 2.3.3 Sprężyna twarda $b = 2$ , $c = 1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest węzłem zdegenerowanym asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_{1/2} = -1$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako (te same współczynniki co rozważane przy równaniach van der Polla):

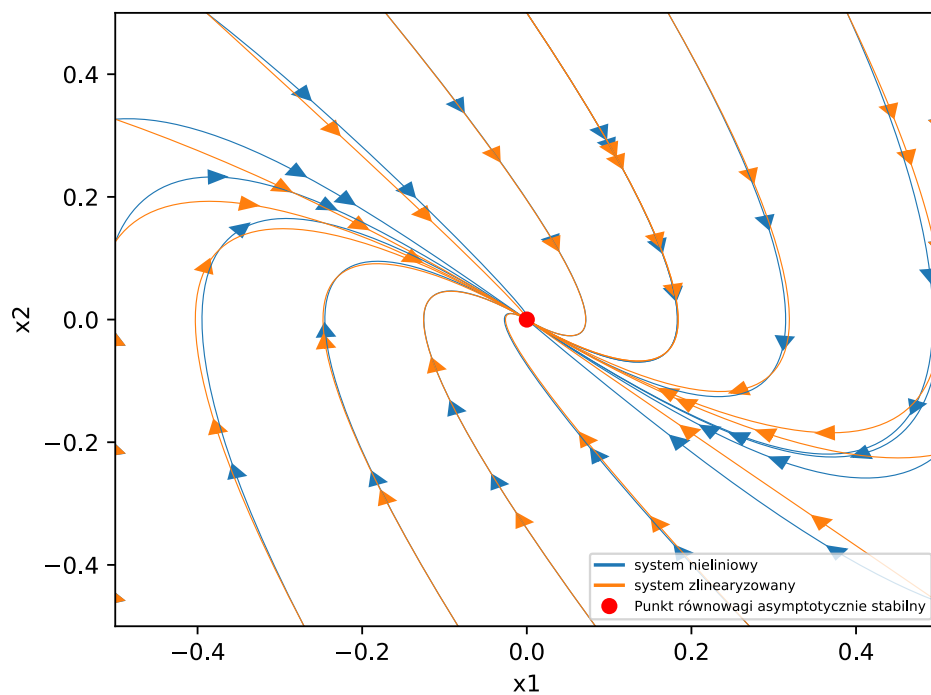
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5/2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 24: Układ nieliniowy



Rysunek 25: Układ zlinearyzowany

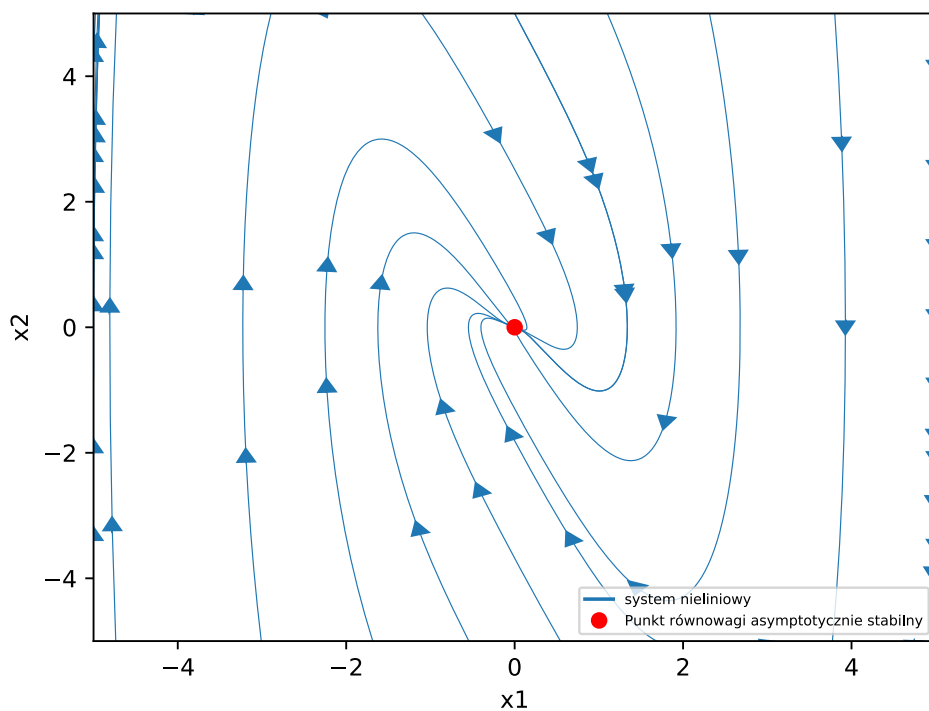


Rysunek 26: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

#### 2.3.4 Sprężyna twarda $b = 2,5$ , $c = 1$

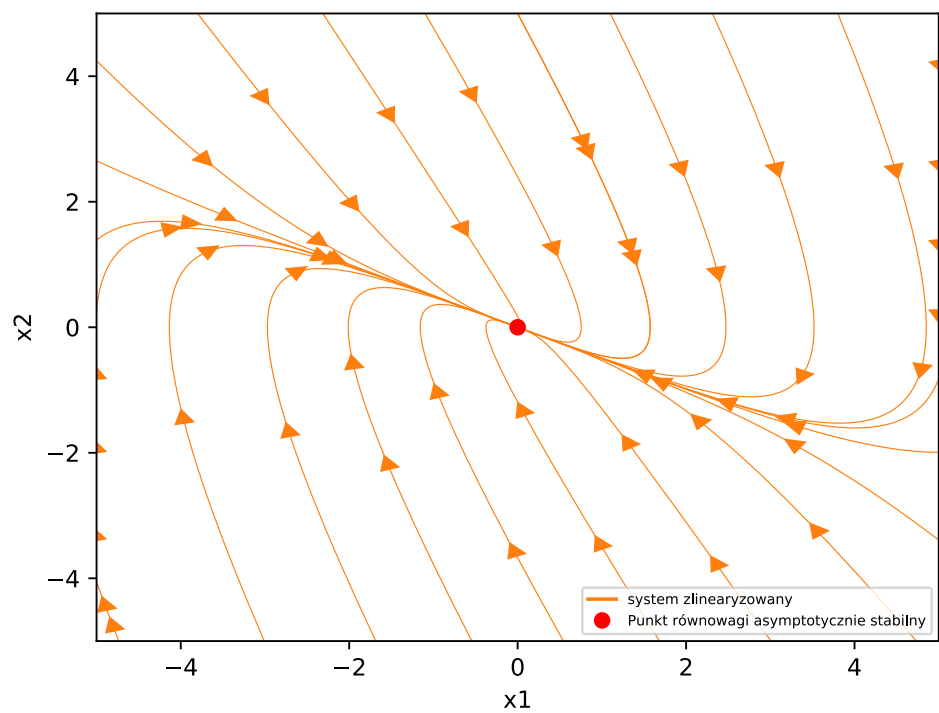
Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest ogniskiem asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

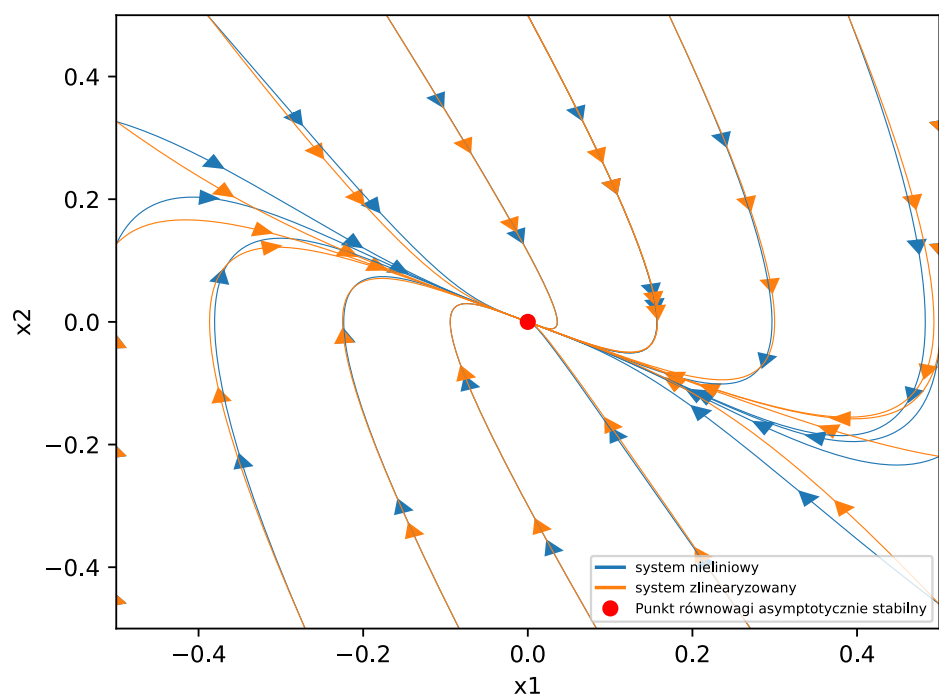


Rysunek 27: Układ nieliniowy





Rysunek 28: Układ zlinearyzowany



Rysunek 29: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

### 2.3.5 Sprężyna miękka

W przypadku sprężyny twardej występują trzy punkty równowagi: dla  $x_2 = 0$  oraz  $x_1 \in \{0, \pm \frac{c}{d}\}$

$$x_1 = x_2 = 0$$

Macierz stanu jest identyczna jak dla sprężyny twardej - jest to punkt równowagi asymptotycznie stabilny:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$  i  $x_1 = \pm \frac{c}{d}$  - można obydwie przypadki rozpatrywać jako jeden, bo w jakobianie zmienna ta występuje w potęgach drugiej.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c - 3\frac{d^3}{c^2} & -b \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy stanu:  $\lambda^2 + b\lambda + c + \frac{3d^3}{c^2}$ . Aby punkt był stabilny wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego muszą być nieujemne, ponieważ  $b > 0$ , należy rozpatrzyć wyraz wolny.

$$c + 3\frac{d^3}{c^2} \geq 0$$

$$c^3 + 3d^3 \geq 0$$

$$c^3 \geq -3d^3$$

$$c > -\sqrt[3]{3}d$$

Ponieważ  $d < 0$  i  $c > 0$

$$|c| = c > \sqrt[3]{3}|d| > |d|$$

Jest to sprzeczne z założeniem z zadania, że  $|c| < |d|$  - obydwie te punkty równowagi są niestabilne.

Wynika z tego, że jedynym punktem stabilnym jest punkt  $(0, 0)$ . Dla poszczególnych parametrów układ zlinearyzowany przyjmuje następujące postacie:

$b \in (0, 2\sqrt{c})$  - ognisko asymptotycznie stabilne

$b = 2\sqrt{c}$  - węzeł zdegenerowany asymptotycznie stabilny

$b > 2\sqrt{c}$  - węzeł asymptotycznie stabilny

Wykresy zostały podzielone kolorami tła:

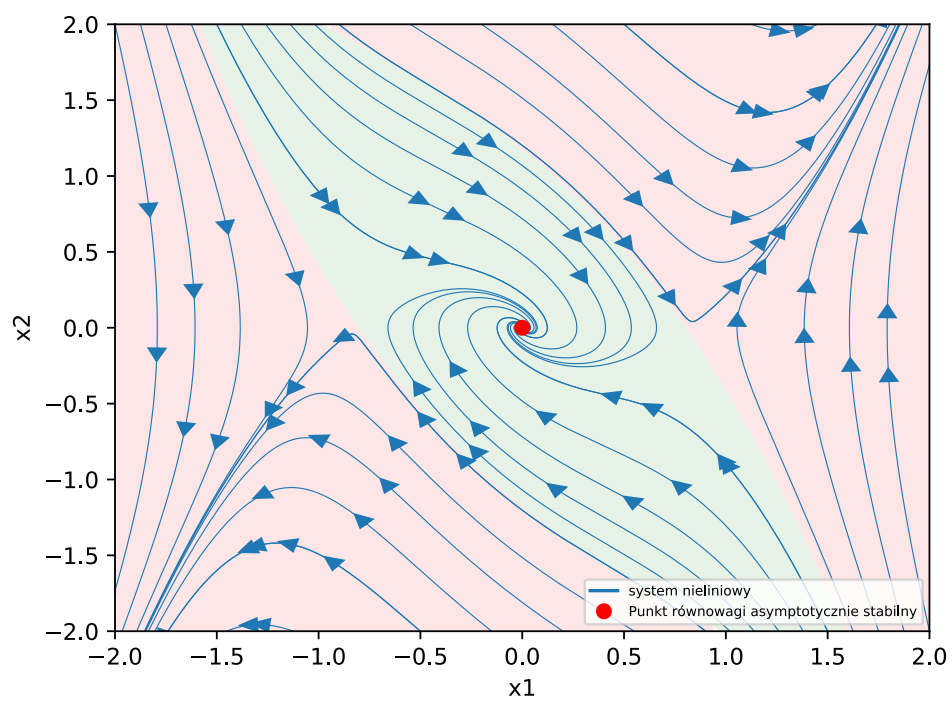
czerwony - obszar odpychania

zielony - obszar przyciągania

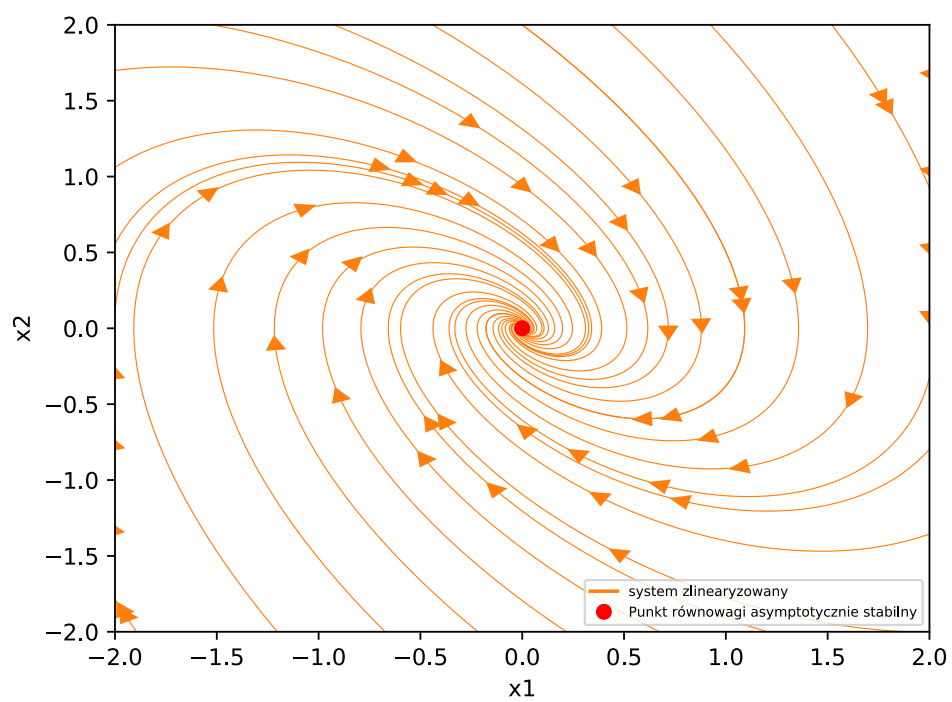
### 2.3.6 Sprężyna miękka $b = c = 1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest ogniskiem asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

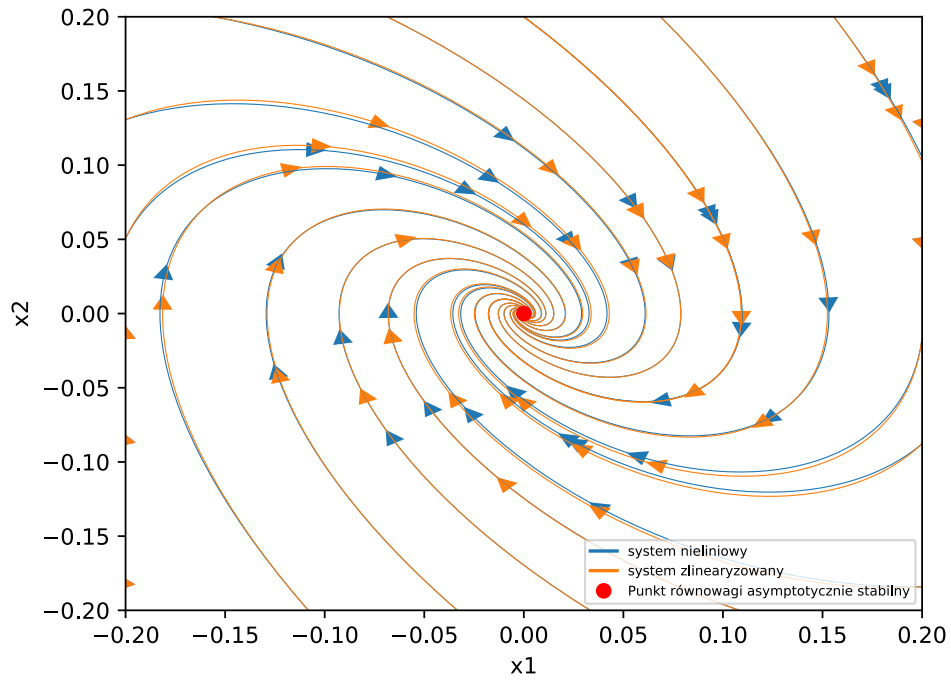
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Rysunek 30: Układ nieliniowy



Rysunek 31: Układ zlinearyzowany

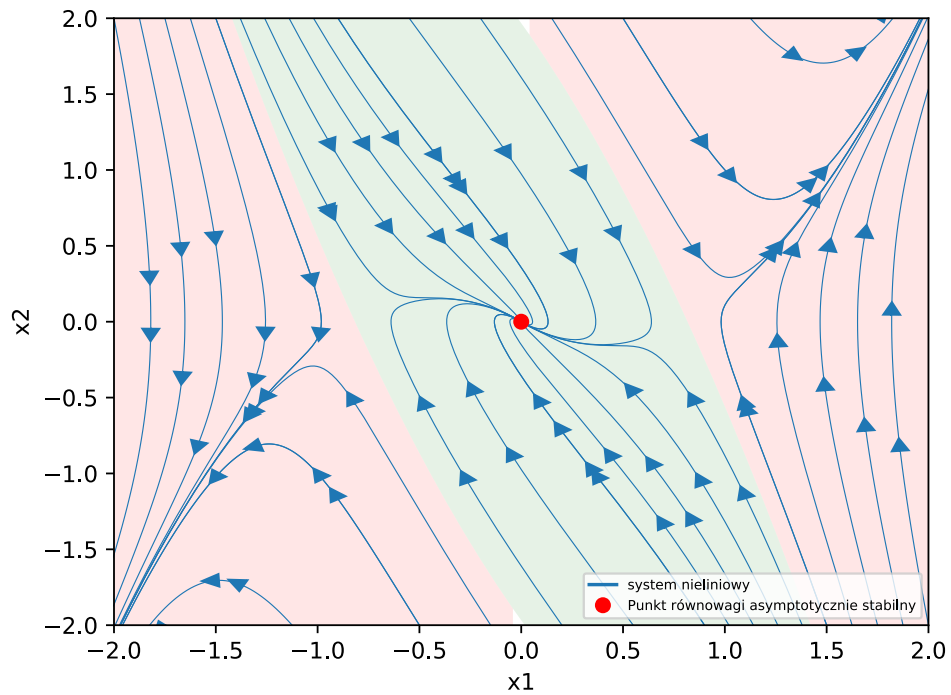


Rysunek 32: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

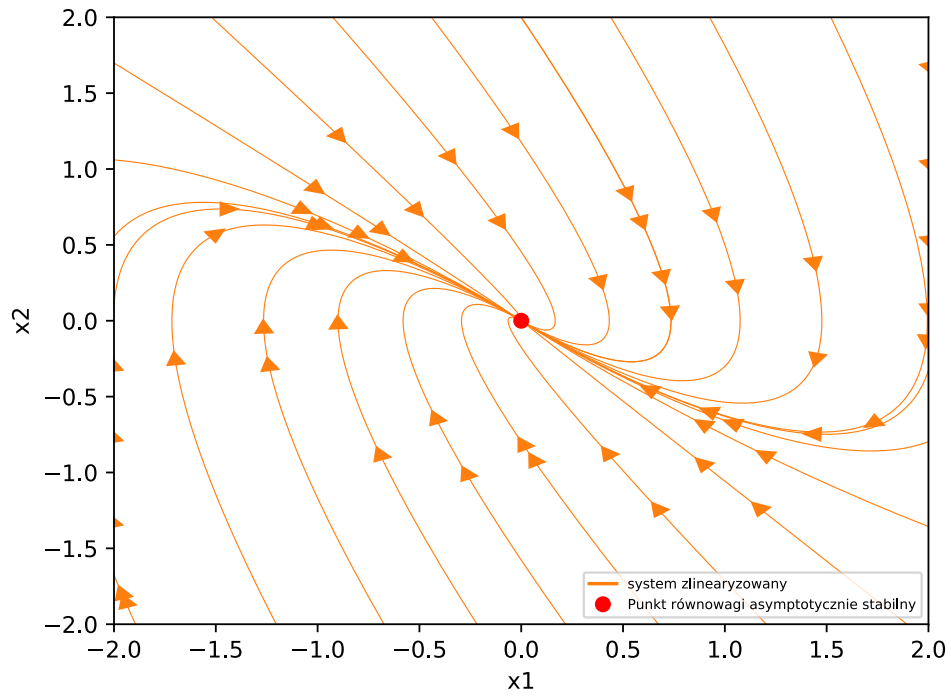
### 2.3.7 Sprężyna miękka $b = 2$ , $c = 1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest węzłem zdegenerowanym asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_{1/2} = -1$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako (te same współczynniki co rozważane przy równaniach van der Polla):

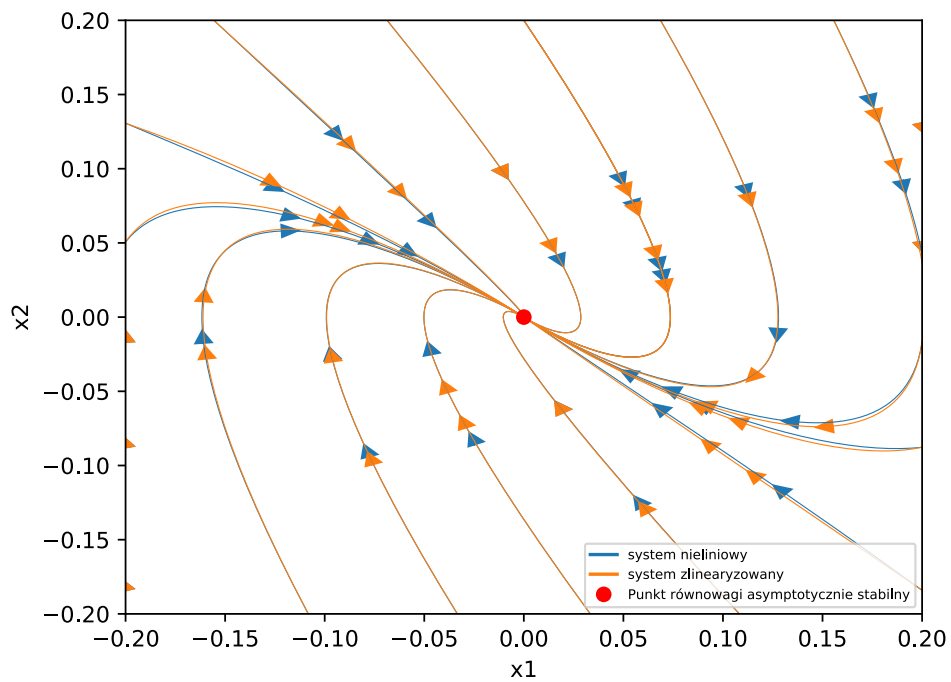
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5/2 \end{bmatrix}$$



Rysunek 33: Układ nieliniowy



Rysunek 34: Układ zlinearyzowany

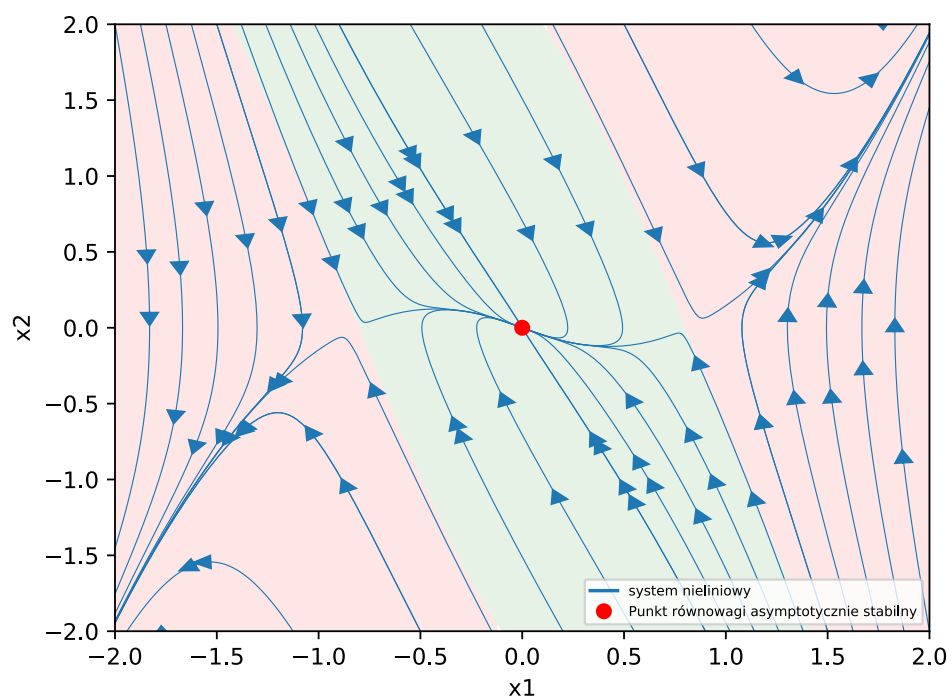


Rysunek 35: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

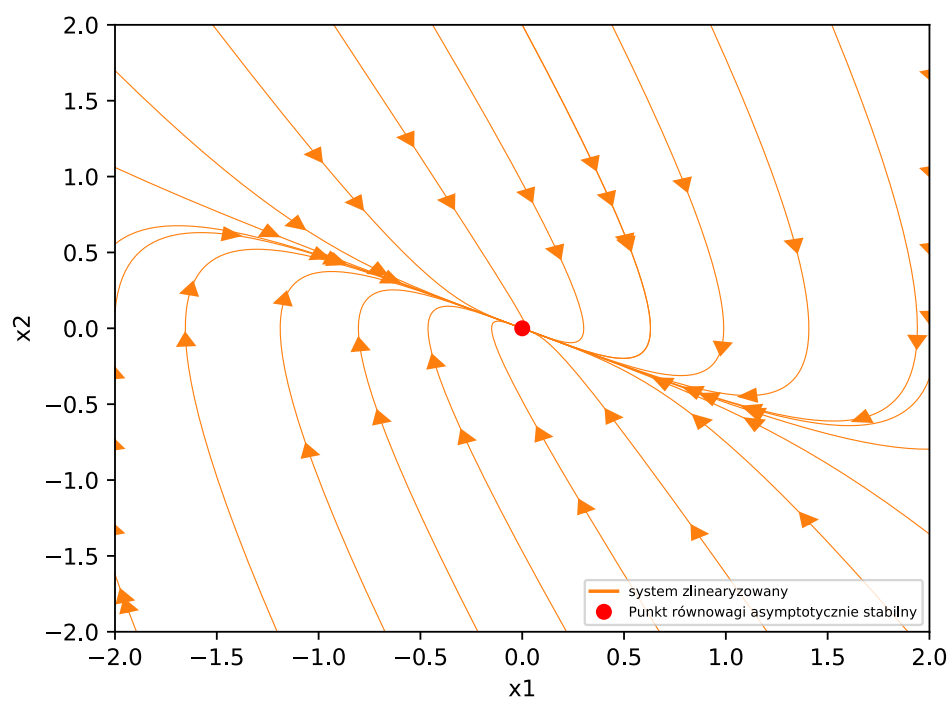
### 2.3.8 Sprężyna miękka $b = 2,5$ , $c = 1$

Jest to przypadek gdy układ zlinearyzowany jest ogniskiem asymptotycznie stabilnym z wartościami własnymi  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , macierz zlinearyzowanego układu jest dana jako:

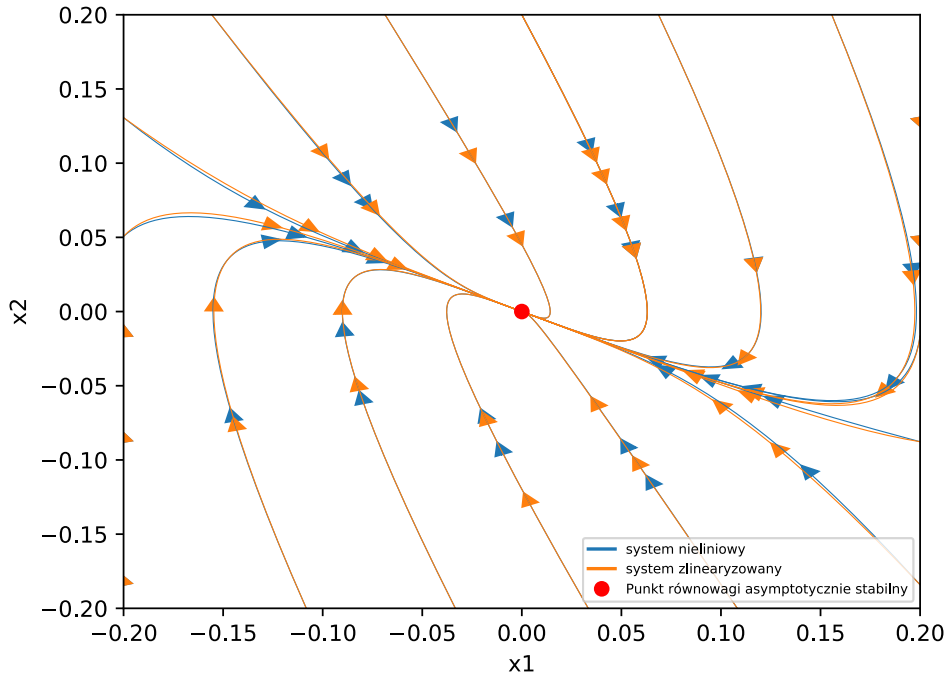
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



Rysunek 36: Układ nieliniowy



Rysunek 37: Układ zlinearyzowany



Rysunek 38: Porównanie w otoczeniu punktu równowagi

### 3 Wnioski

Mimo tego, że wiele układów ma te same jacobiany oraz te same punkty równowagi, to jednak mogą zachowywać się skrajnie różnie. Najlepszym przykładem tego jest układ mechaniczny ze sprężyną miękką oraz sprężyną twardą, gdzie dobór współczynnika, który jest przy członie zerującym się przy procesie linearyzacji ma wpływ na to czy układ zachowuje się asymptotycznie stabilnie, czy dla niektórych punktów startowych jego trajektoria jest nieograniczona.

Im rozważane otoczenie punktów równowagi jest mniejsze, tym lepiej da się je przybliżyć modelami liniowymi. Wszystkie rozważane przypadki, które posiadały punkt równowagi, były w jego otoczeniu dobrze aproksymowane modelem liniowym. Im dalej od punktu równowagi, tym trajektorie były do siebie coraz mniej podobne – jest to dobrze widoczne w przypadku sprężyny twardej (niezależnie od tego jaki będzie układ po linearyzacji, to i tak dla większego otoczenia zacznie przypominać ognisko), przy sprężynie miękkiej (układ w pewnych obszarach był niestabilny), przy wahadle (układ zachowywał się okresowo, a dla przykładu z ogniskiem trajektorie w pewnej odległości się prostowały wbrew modelowi liniowemu) oraz przy przypadku gdy układ opisany równaniami van der Polla po linearyzacji miał portret fazowy typu ogniska (w pewnej odległości trajektorie się prostowały).

Niektóre systemy nieliniowe posiadają wiele punktów równowagi – co nie ma miejsca w układach liniowych. Dobrym przykładem tego jest wahadło, które posiada asymptotycznie stabilne punkty równowagi rozmieszczone w punktach  $(2k\pi, 0)$  gdzie  $k \in \mathbb{Z}$  oraz niestabilne w  $((2k+1)\pi, 0)$  – na granicy obszarów przyciągania. Z modelu liniowego wynika, że układ posiada tylko jeden punkt równowagi i do niego będzie asymptotycznie zmierzał, co może doprowadzić do błędnego dobrania regulatora.