Programowanie liniowe			
Adrian Jałoszewski	26 IV 2017	Środa 14:00	

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest dokonanie optymalizacji dwóch funkcji celu na zadanych ograniczeniach. Jednym z przypadków jest zadanie maksymalizacji zysków przy ograniczeniach wynikających z możliwości przerobowych przedsięcbiorstwa. Drugie zadanie polega na takim doborze rezystancji aby mając ustalone napiecia na poszczególnych rzezystancjach i ograniczenia na przepływający przez nie prąd zminimalizować zużycie mocy przez układ.

2 Przebieg ćwiczenia

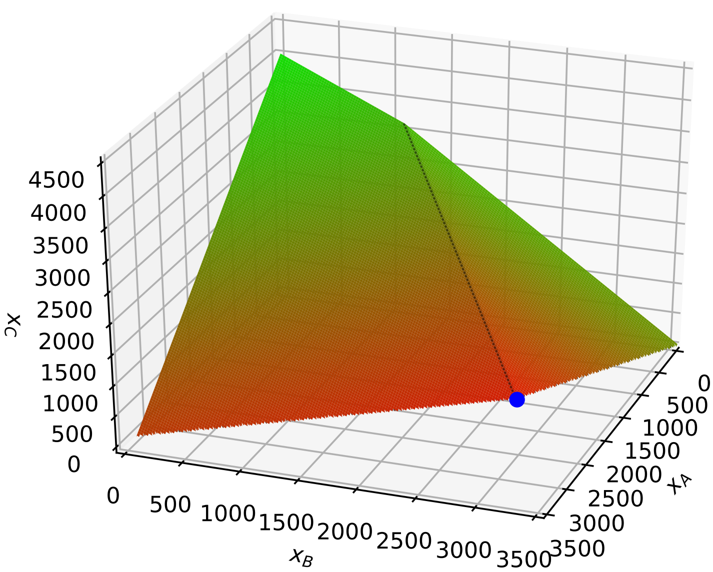
2.1 Zadanie 1

Ćwiczenie należy rozpocząć od przedstawienia zagadnienia w postaci zagadnienia programowania liniowego. Oznaczmy x_A, x_B, x_C jako kolejno ilość wytworzonego danego typu. Wtedy zgodnie z zadanymi ograniczeniami zachodzi:

$$
\begin{aligned}
0.3 \cdot x_A + 0.5 \cdot x_B + 0.4 \cdot x_C &\leqslant 1800 \\
0.1 \cdot x_A + 0.08 \cdot x_B + 0.12 \cdot x_C &\leqslant 500 \\
0.06 \cdot x_A + 0.04 \cdot x_B + 0.05 \cdot x_C &\leqslant 200 \\
x_A, x_B, x_C &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

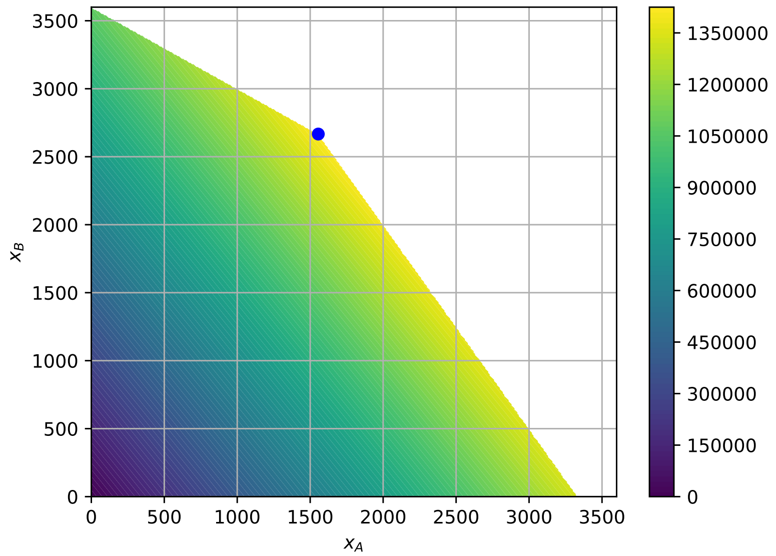
Funkcja celu jest zadana w tym przypadku jako:

$$f(x_A, x_B, x_C) = 400 \cdot x_A + 300 \cdot x_B + 200 \cdot x_C$$



Rysunek 1: Graficzne przedstawienie rozwiązania

Podstawa wielościanu będącego ograniczeniami w zadaniu jest następująca:



Rysunek 2: Podstawa graniastosłupe

Kropki zaznaczają znalezione maksimum, które się znajduje w przybliżeniu w punkcie $(x_A, x_B, x_C) = (1556, 2667, 0)$, wynosi ono 1 422 222.

2.2 Zadanie 2

Najpierw należy sprowadzić zadany układ do postaci kanonicznej zadania programowania liniowego. Jest to zadanie minimalizacji z ograniczeniami na to aby wartości prądów były nieujemne i ograniczenia górne na ich kombinacje liniowe.

Minimalizowana funkcja celu dana jest wzorem na sumę mocy wydzielanych na poszczególnych rezystorach:

$$f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = 6I_1 + 10I_2 + 4I_3 + 7I_4 + 3I_5$$

Każde z ograniczeń postaci:

$$I_i - D_i \leqslant I_i \leqslant I_i + D_i$$

można sprowadzić do następującej pary ograniczeń:

$$\begin{aligned} I_i &\leqslant I_i + D_i \\ -I_i &\leqslant D_i - I_i \end{aligned}$$

Aby układ był realizowalny fizycznie muszą być spełnione prawa Kirchhoffa. Ponieważ napięciowe prawa są już narzucone wystarczy wypisać prawa prądowe dla dwóch węzłów:

$$\begin{aligned} I_1 =& I_3 + I_4 \\ I_2 + I_3 =& I_5 \end{aligned}$$

Obydwie te równości można zapisać w postaci czterech nierówności:

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_3 - I_4 &\leqslant 0\\
-I_1 + I_3 + I_4 &\leqslant 0\\
I_2 + I_3 - I_5 &\leqslant 0\\
-I_2 - I_3 + I_5 &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

Mimo tego, że jest to układ mostka – nie trzeba rozważać przypadku kiedy prąd przez rezystor R_3 płynie w drugą stronę – kierunek przepływu prądu jest już narzucony przez ograniczenia narzucone w treści zadania.

W ten sposób wszystkie ograniczenia można przedstawić w następującej postaci:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
1 & 0 & -1 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & -1\\
0 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\\ I_5
\end{bmatrix}
\leqslant
\begin{bmatrix}
5\\ -3\\ 3\\ -1\\ 3\\ -1\\ 3\\ -1\\ 4\\ -4\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0
\end{bmatrix}
$$

Oraz warunki o nieujemności prądów:

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \geqslant 0$$

Wyznaczenie wartości prądów jest w zupełności wystarczające do wyznaczenia wartości rezystancji, gdyż są podane również napięcia. Gdyby rozwiązywać te zadanie wykorzystując rezystancje jako zmienne decyzyjne funkcja celu nie byłaby funkcją liniową, a ograniczenia uległyby komplikacjom.

Minimum o wartości 65 mW otrzymuje się dla prądów o wartości $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = (4, 1, 3, 1, 4)$ miliamperów, czyli dla rezystancji o wartościach:

$$(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = (1.5\text{k}\Omega, 10\text{k}\Omega, 1.333\text{k}\Omega, 7\text{k}\Omega, 0.75\text{k}\Omega)$$

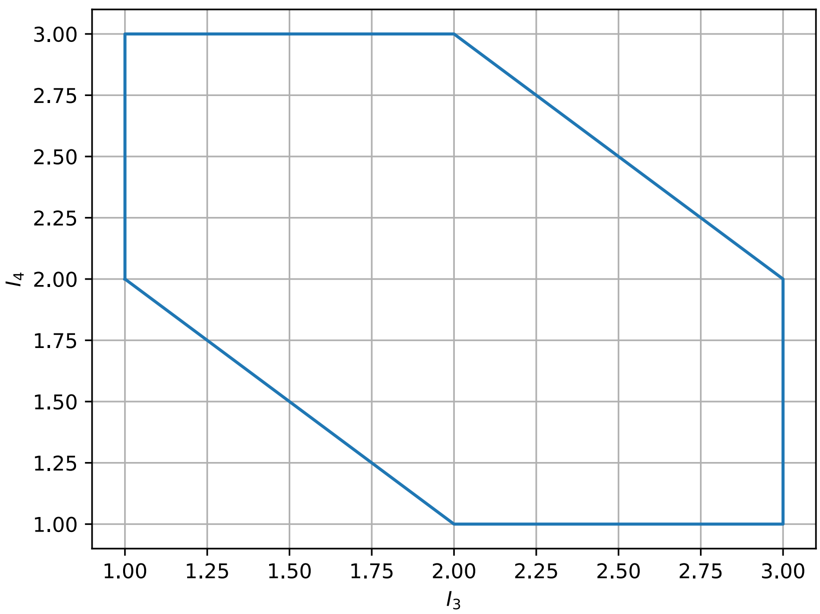
Do rozważań ilości rozwiązań należy wziąć pod uwagę fakt, że warunki z zadania składają się na układ trzech równań i czterech nierówności. Z równań wynika, że:

$$
\begin{aligned}
I_5 &= 4\\
I_2 &= 4 - I_3\\
I_1 &= I_3 + I_4
\end{aligned}
$$

Podstawiając te trzy wartości do czterech nierówności można je zredukować do dwóch zmiennych:

$$
\begin{aligned}
3 \leqslant I_3 + I_4 \leqslant 5 \\
1 \leqslant 4 - I_3 \leqslant 3 \\
1 \leqslant I_3 \leqslant 3 \\
1 \leqslant I_4 \leqslant 3
\end{aligned}
$$

Można to już przedstawić na płaszczyźnie i policzyć wierzchołki wielokąta w ten sposób uzyskanego:



Rysunek 3: Wielokąt wyznaczany przez pozostałe zmienne

Potencjalnych rozwiązań jest więc sześć.

3 Wnioski z wykonanego ćwiczenia

Ćwiczenie te przyniosło sporo doświadczenia, jeżeli chodzi o wizualizację danych. Rozwiązanie poszczególnych zagadnień programowania liniowego jak i ich ułożenie było zdecydowanie prostsze od wizualizacji uzyskanych w ćwiczeniu wyników.

O ile ćwiczenie pierwsze nie wnosiło zbyt wiele do tematu, o tyle ćwiczenie drugie pokazało jak można sprowadzić zadanie, które dla zadanych zmiennych optymalizacyjnych nie jest zadaniem programowania liniowego (rezystancje) do zadania programowania liniowego (wykorzystanie prądów), a w szczególności do jego postaci kanonicznej.

Cennym doświadczeniem było również zastosowanie dostarczonych wraz z bilbiotekami solwerów, gdyż pokazało to na czym w rzeczywistości polegają zagadnienia związane z optymalizacją.