

# Regulator PID jako filtr

Adrian Jałoszewski

28 marca 2017, godzina 12:30

## 1 Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z regulatorami P, PI, PD oraz PID w dziedzinie częstotliwości, traktując je jako filtry. Oprócz tego należało zaprojektować filtr pasmowoprzepustowy.

## 2 Wykonanie

Aby móc sensownie dopasować rozważać regulatory w kategoriach filtrów należy zapisać ich transmitancje w postaci ułamku - licznika i mianownika, oraz współczynnika  $K$ :

$$G_r(s) = K \frac{L(s)}{M(s)}$$

Następnie należy przedstawić zarówno licznik jak i mianownik w postaci iloczynowej, jednak w przypadku regulatora PID nie zawsze jest to możliwe, gdyż miejsca zerowe mogą być zespolone sprzężone. Wtedy licznik należy zostawić w postaci funkcji kwadratowej.

Na podstawie zer i biegunów transmitancji można opisać jej zachowanie jako filtr. Każde zero zwiększa tempo wzrostu charakterystyki amplitudowej o 20dB na dekadę, a każdy biegun zmniejsza jej tempo wzrostu o 20dB na dekadę. Współczynnik  $K$  decyduje natomiast o jej przesunięciu.

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K + 20 \log |L(j\omega)| + 20 \log \left| \frac{1}{M(j\omega)} \right|$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K + 20 \log |L(j\omega)| - 20 \log |M(j\omega)|$$

Pojedynczy jednomian natomiast:

$$\omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow 20 \log |jT\omega + 1| = 0$$

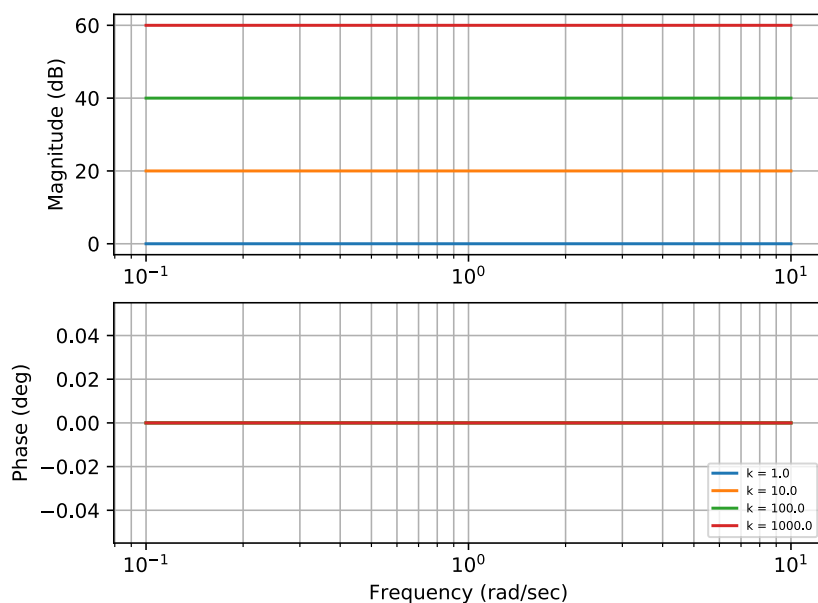
Dla pulsacji znacznie wyższych od  $\frac{1}{T}$  natomiast wartość ta zbliża się do  $20 \log |jT\omega| = 20 \log T + 20 \log |j\omega|$ . Pierwszy człon odpowiada za przesunięcie takie aby zgięcie te nastąpiło dla  $\omega = \frac{1}{T}$ , drugi natomiast odpowiada za wzrost o 20dB na dekadę, gdyż:

$$20 \log 10\omega - 20 \log \omega = 20 \log 10 + 20 \log \omega - 20 \log \omega = 20$$

## 2.1 Regulator P

Ze względu na swoją transmitancję regulator P przepuszcza wszystkie pulsacje jednakowo.

$$G_P(s) = k$$

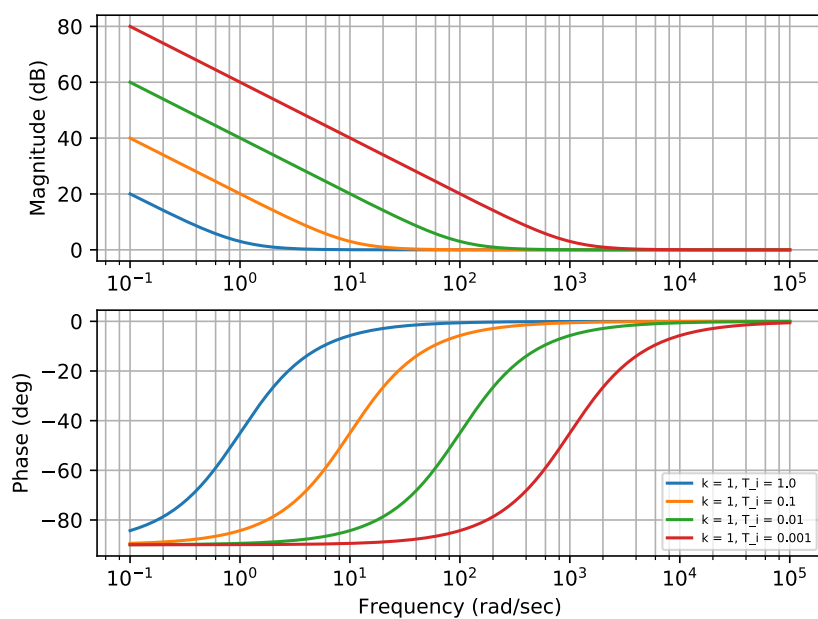


Rysunek 1: Charakterystyki bodego dla regulatora P

## 2.2 Regulator PI

Regulator PI jest filtrem dolnoprzepustowym, który przepuszcza pulsacje mniejsze od  $\frac{1}{T_I}$ .

$$G_{PI}(s) = k \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{k}{T_i} \cdot \frac{T_I s + 1}{s}$$

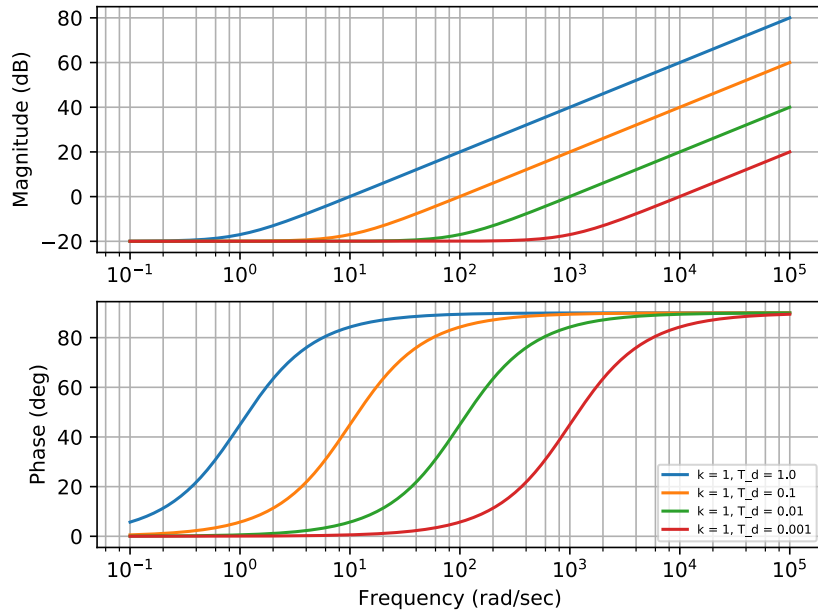


Rysunek 2: Charakterystyki bodego dla regulatora PI

## 2.3 Regulator PD

Regulator PD jest filtrem górnoprzepustowym, który dobrze przepuszcza pulsacji większe od  $\frac{1}{T_D}$

$$G_{PD}(s) = k(1 + T_D s)$$

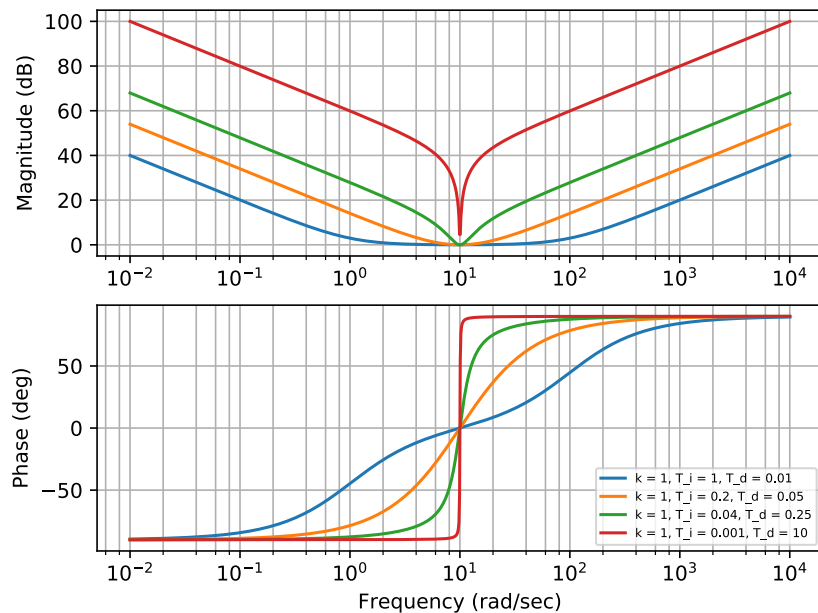


Rysunek 3: Charakterystyki bodego dla regulatora PD

## 2.4 Regulator PID

Regulator PID jest natomiast filtrem pasmowozaporowym, gdyż biegun transmitancji jest mniejszy niż może być jej zero (mamy do czynienia z funkcją kwadratową o współczynnikach dodatnich - pierwiastki jej mają część rzeczywistą mniejszą od 0, a więc moduł większy niż 0).

$$G_{PID}(s) = k \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{k}{T_I} \cdot \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{s}$$



Rysunek 4: Charakterystyki bodego dla regulatora PID

Regulator PID łączy w sobie cechy regulatora PI oraz PD, wzmacniając bardziej częstotliwości znajdujące się poza pasmem zaporowym. Miejsca w których charakterystyka ulega przegięciu zależą od tego jak dobrane zostaną czas całkowania i czas różniczkowania (pulsacje dla jakich się zeruje licznik transmitancji decydują o tym gdzie nastąpią te przegięcia). W przypadku gdy wyróżnik licznika transmitancji okazuje się być ujemny mamy do czynienia z zespolonymi pierwiastkami. Charakterystyki są symetryczne względem  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_I T_D}}$ , a współczynniki zostały tak dobrane aby zachodziło to dla  $\omega = 10$ .

Tabela 1: Porównanie charakterystyk regulatora PID

Kolor charakterystyki	Opis
niebieski	w liczniku transmitancji dwa pierwiastki rzeczywiste – typowy filtr pasmowo-zaporowy
pomarańczowy	w liczniku transmitancji jeden pierwiastek podwójny – niewielkie pasmo zaporowe, płynne przejście w charakterystyce fazowej
zielony	w liczniku transmitancji pierwiastki zespolone, stosunek części urojonej do rzeczywistej niewielki – pojawia się niewielkie zagłębienie w charakterystyce amplitudowej
czerwony	w liczniku transmitancji pierwiastki zespolone, stosunek części urojonej do rzeczywistej duży – wgłębienie jest znacznie większe

## 2.5 Filtr pasmowoprzepustowy

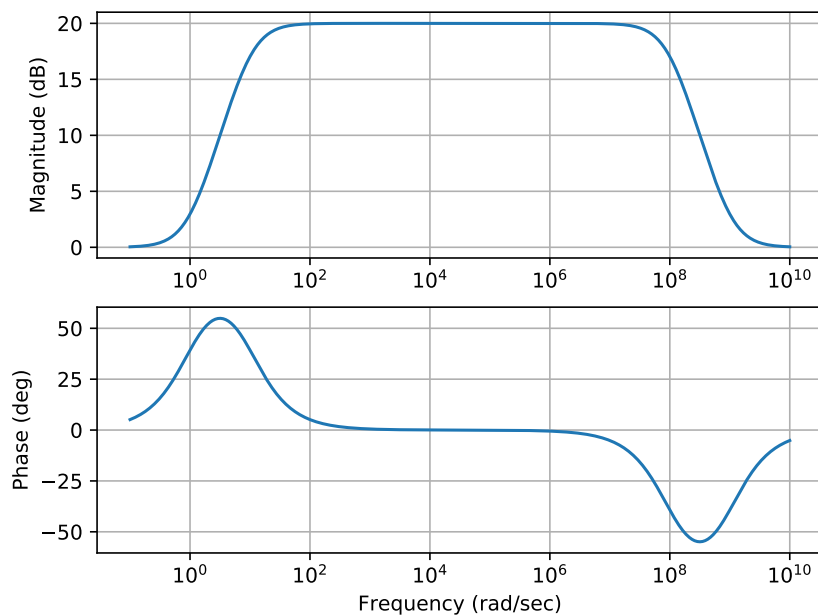
Filtr pasmowoprzepustowy musi mieć charakterystykę amplitudową zmieniającą się w trzech miejscach - miejsce, gdzie zaczyna narastać, gdzie wzrost jej hamuje oraz miejsce gdzie wartość zaczyna maleć. Dlatego jej transmitancja jest dana wzorem:

$$G(s) = K \cdot \frac{(T_1 s + 1)(T_4 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

gdzie  $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ , a w najlepszym przypadku  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$ , wtedy charakterystyka amplitudowa rośnie tyle samo dekad co opada.

Przykładem takiego filtra pasmowoprzepustowego jest:

$$G(s) = \frac{(1s + 1)(10^{-9}s + 1)}{(0.1s + 1)(10^{-8}s + 1)}$$



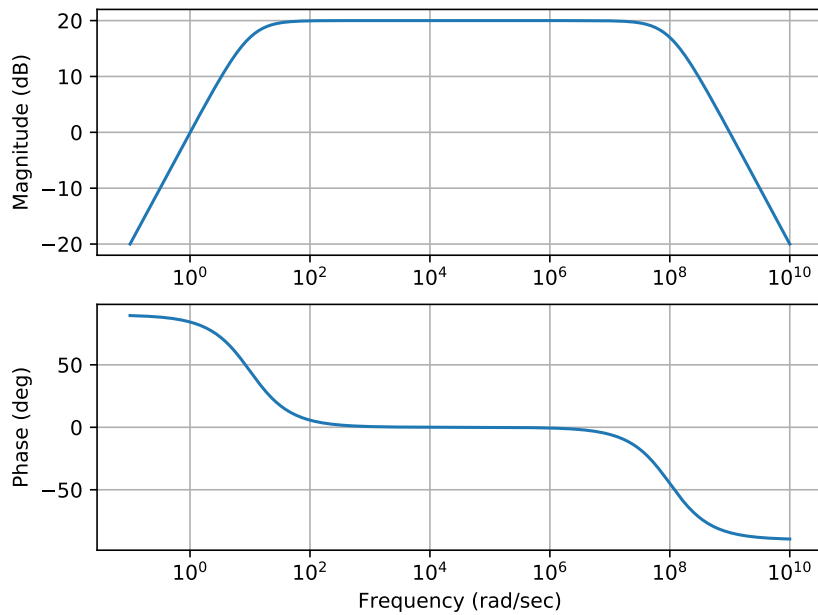
Rysunek 5: Filtr pasmowoprzepustowy przepuszczający dla  $\omega \in [10^1, 10^8]$

Ten filtr jednak działa na zasadzie wzmacniania sygnału w paśmie przepustowym, sygnał który znajduje się poza nim nie jest tłumiony. Stosując transmitancję:

$$G(s) = \frac{s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

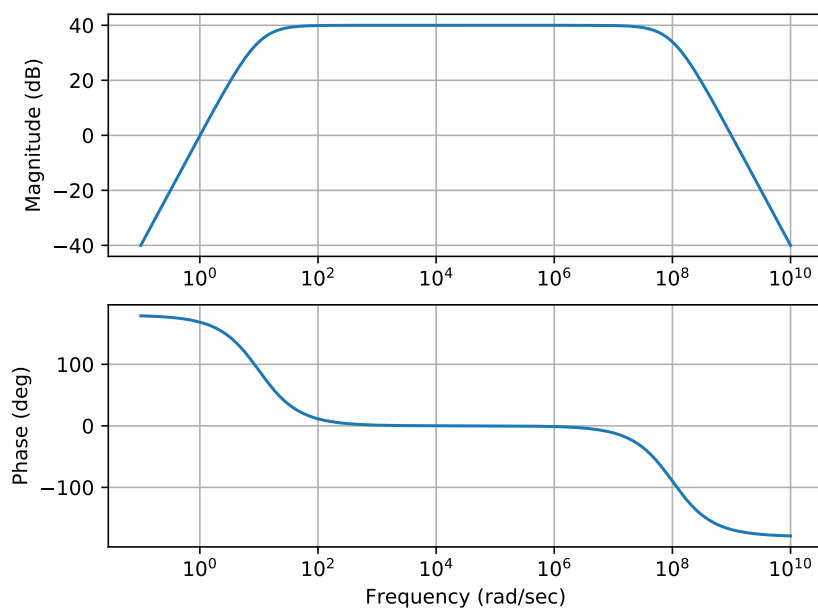
Dla zerowej pulsacji sygnał jest tłumiony do zera, dla pulsacji zmierzającej do nieskończoności sygnał jest również tłumiony do zera. Przykładem takiego filtru jest:

$$G(s) = \frac{s}{(0.1s + 1)(10^{-8}s + 1)}$$



Rysunek 6: Filtr pasmowoprzepustowy przepuszczający dla  $\omega \in [10^1, 10^8]$

Jeżeli w transmitancji powieli się zera i bieguny, można otrzymać znacznie bardziej stromą charakterystykę (w tym przypadku zastosowano podwojenie):



Rysunek 7: Filtr pasmowoprzepustowy przepuszczający dla  $\omega \in [10^1, 10^8]$

### 3 Wnioski

Traktując regulatory jako filtry można zmieniać czułość regulatora w zależności od częstotliwości podawanego na niego sygnału. Można w ten sposób zapinając sprzężenie zwrotne reagować lepiej na szybkie zmiany sygnału wyjściowego (regulator PD) lub na zmiany powolne (regulator PI) lub na obydwa rodzaje zmian - wykorzystując regulator PID.

Filtr pasmowo przepustowy może zostać zrealizowany przy pomocy obiektu drugiego rzędu. Jednak narasta on i opada wtedy łagodnie na brzegach (20 dB na dekadę). Można te tempo wzrostu i spadku zwiększyć, powiększając bieguny oraz zera transmitancji. Należy jednak być z tym ostrożnym, gdyż zwiększa to rząd transmitancji, a to może być niekorzystne w sytuacji zapinania sprzężenia zwrotnego – układ może stać się łatwo niestabilny.