Funkcja kary			
Adrian Jałoszewski	10 V 2017	Środa 14:00	

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami funkcji kary wewnętrznej oraz zewnętrznej oraz z ograniczeniami ich stosowalności.

2 Przebieg ćwiczenia

2.1 Zadanie 1

Zadanie ma na celu minimalizować funkcję celu:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Przy ograniczeniu równościowym:

$$x_2 = 1$$

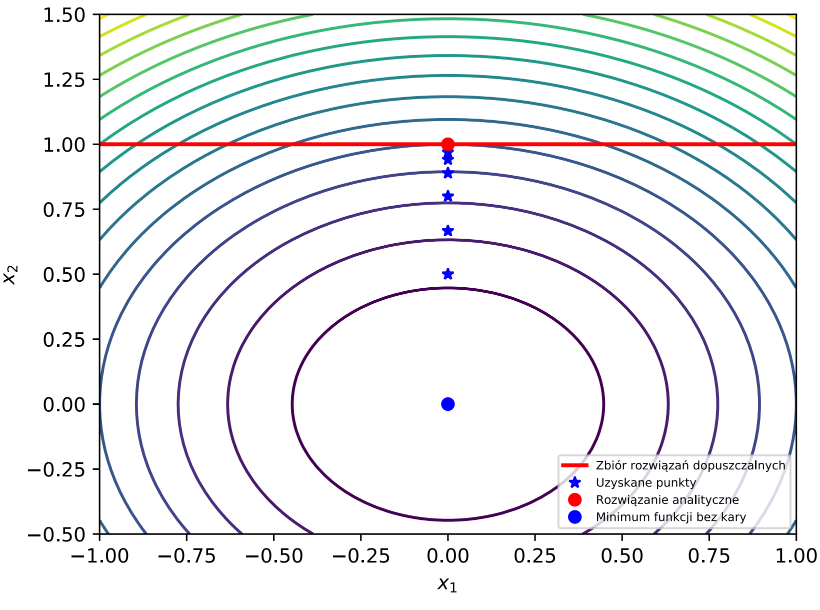
Podstawiając $x_2 = 1$ otrzymuje się równanie paraboli $x_1^2 + 1$, które posiada minimum dla $x_1 = 0$. Minimum wyznaczone analitycznie znajduje się więc w punkcie $(x_1, x_2) = (0, 1)$.

Ponieważ mamy do czynienia z ograniczeniem równościowym, to należy je zapisać jako:

$$g_1(x) = x_2 - 1 \leqslant 0$$
$$g_2(x) = -x_2 + 1 \leqslant leq 0$$

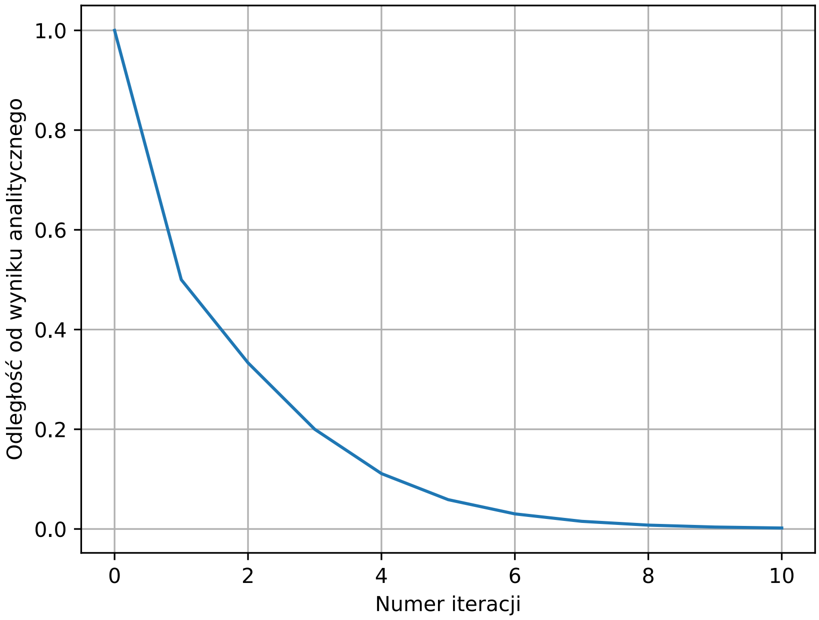
Ponieważ w funkcji kary występuje człon $\max(g_i(x), 0)$, a zawsze jedno z ograniczeń będzie niedodatnie można funkcję kary przedstawić jako:

$$\Phi = 2^i (x_2 - 1)^2$$

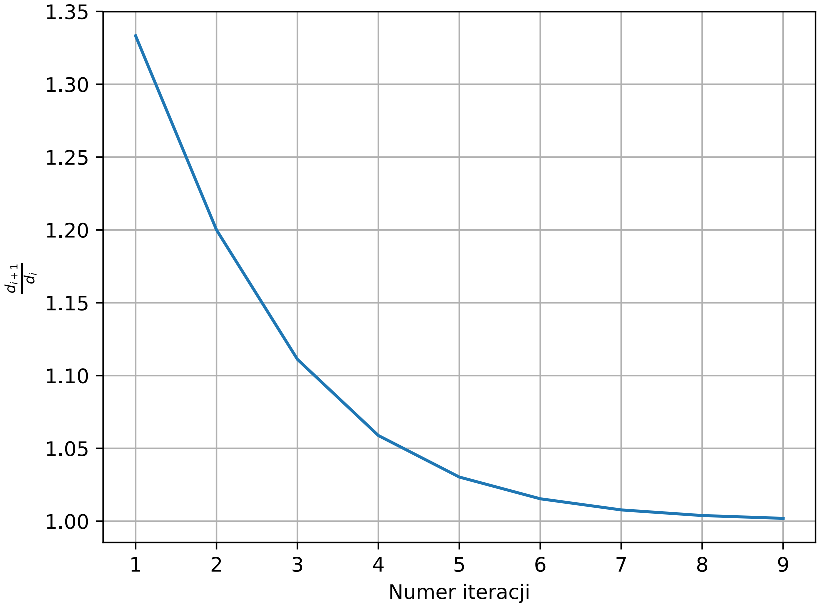


Rysunek 1: Funkcja celu, obszar rozwiązań dopuszczalnych oraz punkty wyznaczone

Odległość wyznaczonych tą metodą punktów od rozwiązania analitycznego w zależności od iteracji jest przedstawiona na poniższym wykresie. Iteracje są tu przesunięte o 1, gdyż zerowa iteracja przedstawia przypadek gdy nie ma funkcji kary.



Rysunek 2: Odległość od punktu startowego



Rysunek 3: Stosunek dwóch następujących po sobie wartości

2.2 Zadanie 2

Zadanie jest źle postawione, ponieważ obydwie proste są do siebie równoległe i nie posiadają punktów wspólnych (są względem siebie przesunięte).

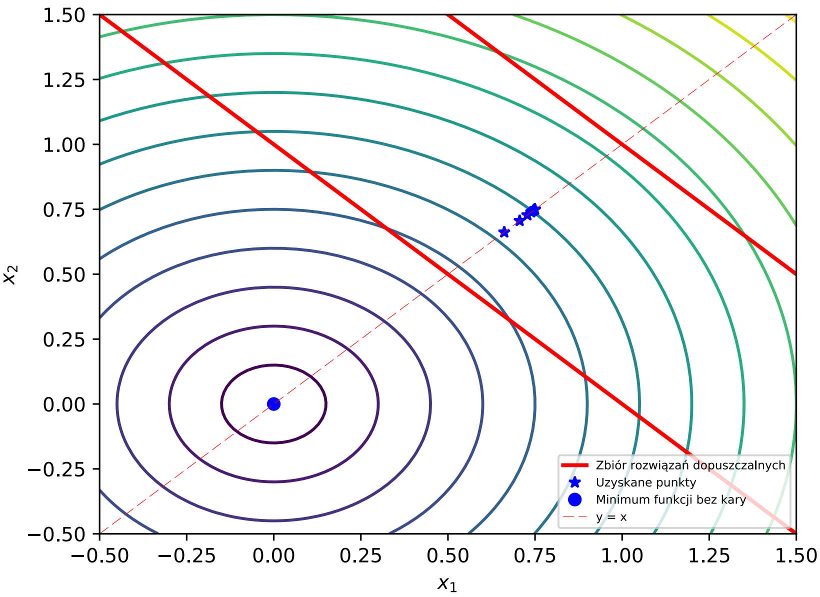
Funkcja celu jest dana jako odległość od punktu (0, 0), jest to więc przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o bokach rownych współrzędnym x_1 oraz x_2. Jest to więc:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Ograniczenia równościowe zadane w treści zadania:

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Podobnie jak w poprzednim punkcie rozważania sprowadzają się do kwadratów każdego z ograniczeń.



Rysunek 4: Wyznaczone punkty

Poszczególne punkty leżą na prostej przechodzącej przez środek i będącej prostopadłą do prostych stanowiących ograniczenia.

2.3 Zadanie 3

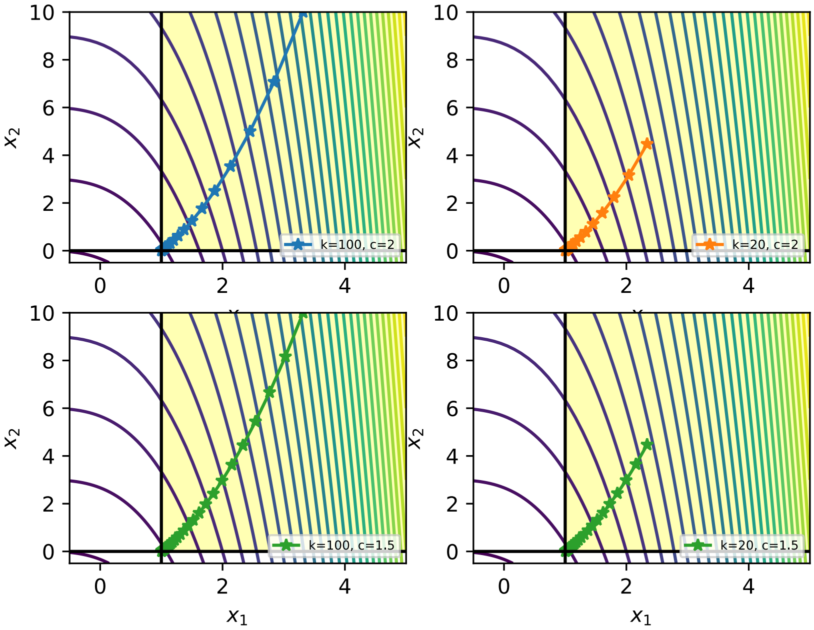
Dana jest funkcja do minimalizacji:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$$

Funkcja ta jest ograniczona przez:

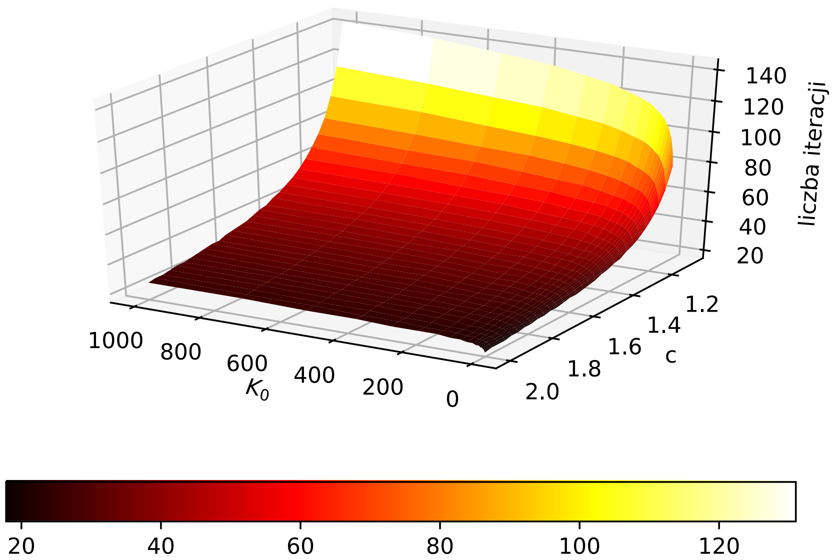
$$g_1(x) = x_1 - 1 \geqslant 0$$
$$g_2(x) = x_2 \geqslant 0$$

Ponieważ każda funkcja składa się sumy dwóch rosnących funkcji (na zadanych ograniczeniach) jednej zmiennej, a na każdą ze zmiennych nałożone są niezależne niezależne od siebie ograniczenia, to minimum znajduje się dla najmniejszych x_1 oraz x_2 w punkcie $(x_1, x_2) = (1, 0)$.



Rysunek 5: Wyznaczanie minimum dla różnych parametrów

Można zauważyć, że im mniejszy współczynnik c, tym więcej iteracji jest potrzebnych do dokonania minimalizacji, gdyż współczynnik k musi być więcej razy dzielony, aby uzyskać daną wartość.



Rysunek 6: Liczba iteracji w zależności od wartości parametrów

3 Wnioski i obserwacje z wykonanego ćwiczenia

3.1 Zadanie 1

Optymalizacja przy pomocy zewnętrznej funkcji kary jest metodą bardzo szybko zbieżną ze względu na występujący czynnik wykładniczy. Satysfakcjonujący wynik jest uzyskiwany już po dziesięciu iteracjach. Użyta funkcja spełnia warunki bycia funkcją kary – zeruje się dla zbioru dopuszczalnego ($x_2 = 1$) oraz dla pozostałych punktów przyjmuje wartości dodatnie. Wraz ze wzrostem współczynnika k (2^i) rośnie jej wartość oraz nie jest ograniczona od góry.

3.2 Zadanie 2

Mimo tego, że zadanie jest źle postawione, funkcja kary pozwala na znalezienie wyniku, którego lokalizacja zależy od tego w jakim stopniu karamy rozwiązania bardziej odległe od prostych.

3.3 Zadanie 3

Metoda wewnętrznej funkcji kary jest zdecydowanie mniej skuteczna od metody zewnętrznej funkcji kary. Jest to spowodowane tym, że wiele metod optymalizujących funkcje jest najzwyczajniej w stanie przeskoczyć narzucone przez nią ograniczenia, a po drugiej stronie ograniczeń funkcja ta potrafi nawet zmierzać do minus nieskończoności. Metoda ta zdaje się być skuteczna w przypadku, gdy mamy do czynienia z bardzo dużą rozdzielczością poszukiwania, jednak i w tym przypadku zdecydowanie lepiej jest zastosować zewnętrzną funkcję kary. W celu wizualizacji danych byłem zmuszony tutaj zastosować pewnego rodzaju oszustwo, które polegało na podawaniu pewnej znacznie większej od pozostałych wartości, tak aby solvery nie były w stanie wejść na tamten obszar. Ponieważ zbiór X_0 jest tutaj niepusty, ograniczenia są ćwiartką płaszczyzny – zbiór wypukły, a funkcja celu również tworzy zbiór wypukły, a ich kombinacja tworzy zbiór ściśle wypukły, to jest to poprawna wewnętrzna funkcja celu.