完全マッチングに対する代数的アルゴリズム

2017年11月9日　17:23

$G=(V,E)$ … 単純無向グラフ　$\left(\begin{array}{l} V=\{1,\cdots,n\} \\ |E|=m \end{array}\right)$

Def　$M\subseteq E$ が G の完全マッチング (perfect matching)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M の枝は端点を共有せず、$2|M|=|V|$.

完全マッチングのアルゴリズム

Edmonds 1965　$O(n^2 m)$ 時間　グラフ理論的・難しい・複雑

⋮　　（完全マッチングがあれば出力する）

今日やるアルゴリズム　Lovász 1979　$O(n^3)$ 時間

乱択・線形代数的・シンプル

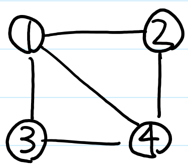
（ただし Edmonds と違って、完全マッチングがあるか判定するアルゴリズム）

Def (Tutte 行列)　$\mathbb{F}$: 体，　T: $\mathbb{F}(x_e : e\in E)$ 上の $n\times n$ 行列

新しい変数

$$T_{ij} := \begin{cases} x_e & \text{if } e=ij\in E,\ i<j \\ -x_e & \text{if } \quad \text{〃} \quad ,\ i>j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例



$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & 0 & x_{24} \\ -x_{13} & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lovász のアルゴリズム

Input　G, $U\subseteq\mathbb{F}$: 有限集合

1: Tutte 行列の変数に対し、U から一様ランダムに値を代入して $\tilde{T}\in\mathbb{F}^{n\times n}$ を得る.

2: <u>if</u> $\det\tilde{T}\neq 0$: <u>return</u> "YES"

3: <u>else</u> : <u>return</u> "NO"

Thm　$|\mathbb{F}|\geq|U|\geq n$ とする. Lovász のアルゴリズムは

G に完全マッチングがない $\Longrightarrow$ "No" を返す

G に 〃 がある $\Longrightarrow$ 確率 $\frac{1}{2}$ 以上で "YES" を返す.

Pfaffian

Def (Pfaffian)

$$\mathrm{pf}\,T := \sum a(M)$$

$a(M)$ は well-defined

$$\mathrm{pf}\,T := \sum_{M:\,G\text{の完マ}} a(M)$$

$a(M)$ は well-defined である（レポート).

ただし $M=\{i_1 j_1, \cdots, i_{n/2} j_{n/2}\}$ としたとき

$$a(M) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & & i_{n/2} & j_{n/2} \end{pmatrix} \prod_{ij\in M} T_{ij}$$

Prop $\det T = (\mathrm{pf}\,T)^2$

(pf) $\det T = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} T_{i\sigma(i)}$

各置換 σ に対し、有向グラフ $D_\sigma := (V, A_\sigma)$, $A_\sigma := \{i\sigma(i) : i=1,\cdots,n\}$
を考えると、D_σ が奇数長の有向サイクルをもつものは消える.
以下では、D_σ が偶数長有向サイクルのみからなる σ だけ考える.

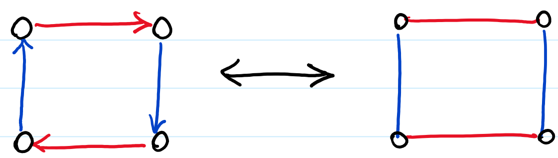
$$(\mathrm{pf}T)^2 = \left(\sum_M a(M)\right)^2 = \sum_{M,M'} a(M)a(M')$$

$$\det T = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} T_{i\sigma(i)}$$

実は
各項は 1:1対応する

- σ と完マの ordered pair (M,M') には 1:1対応がある.

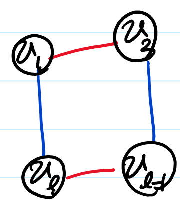
☺ DECC



(M, M') □

- $\sigma, (M,M')$: 上の1:1対応する組

$$\Longrightarrow \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_i T_{i\sigma(i)} = a(M)a(M')$$



☺ $a(M)$の符号 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \cdots & l-1 & l & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{l-1} & v_l & \end{array}\right)$

$a(M')$ 〃 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \cdots & l-1 & l & \cdots \\ v_l & v_1 & \cdots & v_{l-2} & v_{l-1} & \end{array}\right) = \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} v_l & v_1 & \cdots & v_{l-2} & v_{l-1} & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & l-1 & l & \end{array}\right)$

$a(M)a(M')$ の符号 $= \mathrm{sgn}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \cdots & l-1 & l & \cdots \\ 2 & 3 & \cdots & l & 1 & \end{array}\right)$

ここの符号は $(-1)^{l-1} = (-1)$

$$= (-1)^{\#\,\mathrm{cycle}} = \mathrm{sgn}(\sigma) \qquad \square$$

よって $(\mathrm{pf}\,T)^2 = \left(\sum_M a(M)\right)^2 = \sum_{M,M'} a(M)a(M')$

$$= \sum \mathrm{sgn}(\sigma)\prod^{n} T_{i\sigma(i)} = \det T. \qquad \square$$

$$= \sum_{\sigma : \mathrm{DECC}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} T_{i\sigma(i)} = \det T.$$

$\square$

<u>Cor</u> Gが完マをもつ $\Longrightarrow$ $\det T \not\equiv 0$

Gが完マをもたない $\Longrightarrow$ $\det T \equiv 0$.

Schwartz - Zippel Lemma

$\det T$ は効率的に計算できるか??

$\longrightarrow$ No! (Tは文字を含む行列なので はきだし法は使えない)

<u>Idea</u> ランダムに値を入れて推定する

<u>Lem</u> (Schwartz - Zippel)

$p \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_m]$: 多項式, $p \not\equiv 0$

$U \subseteq \mathbb{F}$: 有限

$X_1, \cdots, X_m$: U上の i.i.d. 一様確率変数

$$\Longrightarrow \Pr\left(p(X_1, \cdots, X_m) = 0\right) \leq \frac{\deg(p)}{|U|}.$$

(pf) m に関する帰納法.

$m=1$ のときは自明 (レポート問題)

$m-1$ まで正しいとする.

$$p(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{\ell} x_1^i p_i(x_2, \cdots, x_m) \quad とする$$

(ただし $p_\ell \not\equiv 0$).

A : $p(X_1, \cdots, X_m) = 0$ となる事象

B : $p_\ell(X_2, \cdots, X_m) = 0$ 〃 とすると,

帰納法の仮定より $\Pr(B) \leq \dfrac{\deg(p) - \ell}{|U|}$.

$\Pr(A | \overline{B}) \leq \dfrac{\ell}{|U|}$ (∵ $m=1$ のときを使う)

$$\therefore \Pr(A) = \Pr(A|B)\Pr(B) + \Pr(A|\overline{B})\Pr(\overline{B})$$

$$\leq 1 \cdot \frac{\deg(p) - \ell}{|U|} + \frac{\ell}{|U|} \cdot 1 = \frac{\deg(p)}{|U|}$$

$\square$

$$\therefore \Pr(A) = \Pr(A \mid B)\Pr(B) + \Pr(A \mid \bar{B})\Pr(\bar{B})$$

$$\leq 1 \cdot \frac{\deg(p) - l}{|U|} + \frac{l}{|U|} \cdot 1 = \frac{\deg(p)}{|U|} \qquad \square$$

（主定理の証明）

Cor. より G が完マをもたないときは 必ず "No" を返す.
一方, G が完マをもつときは $\deg(\mathrm{pf}\, T) \leq n/2$ より
Schwartz-Zippel Lemma より $\Pr(\text{"No"を返す}) \leq \frac{n/2}{|U|} \leq \frac{1}{2}$. $\square$

<u>補足</u>　Lovász の アルゴリズム は 存在判定 だが、
応用すると 完全マッチングを求める アルゴリズム にもできる。（レポート）