幾何数理工学演習

数理 7 研 助教 相馬 輔
tasuku_soma@mist.i.u-tokyo.ac.jp

2018/1/14

1 テンソル

1.1 復習（Einstein の記法，アフィン空間）

- Einstein の記法：表記の簡略化のため，式中の同一の添字をその添字に関する和を表すものと約束する記法．例えば

$$v^\kappa w_\kappa = \sum_{\kappa=1}^n v^\kappa w_\kappa,\ A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa = \sum_{\kappa=1}^n A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa,\ A_{\kappa'}^\kappa a_\kappa = \sum_{\kappa=1}^n A_{\kappa'}^\kappa a_\kappa$$

  など．
- アフィン変換，アフィン空間：ある空間上の座標系について

$$x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa + a^{\kappa'}$$

  の形で与えられるような座標変換のみが許されているような状況は様々な分野でしばしば現れる（$A_\kappa^{\kappa'}$ は非退化とする）．ここで，x^κ は，ある点のある座標系 (κ) における座標，$x^{\kappa'}$ は別の座標系 (κ') における座標である．このような変換をアフィン変換と呼び，アフィン変換で移りあえる座標系の集合をもつ n 次元空間のことを n 次元アフィン空間と呼ぶ．アフィン空間は記号 E_n で表す．

1.2 復習（スカラー，反変ベクトル，共変ベクトル）

- ある量が座標系の選び方に依存しない値を持つとき，その量をスカラーという．
- 座標系を (κ) から (κ') に変換するとき，ベクトル u^κ $(\kappa = 1, \cdots, n)$ の受ける変換が

$$u^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} u^\kappa$$

  という形になる u^κ を反変ベクトルという．同様に，ベクトル w_κ $(\kappa = 1, \cdots, n)$ の受ける変換が

$$w_{\kappa'} = A_{\kappa'}^\kappa w_\kappa$$

  という形になる w_κ を共変ベクトルという．

1.3 テンソル

- p 個の指標を右上にもち，q 個の指標を右下にもつ量 $T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ で，座標系を (κ) から (κ') に変換したときに，

$$T^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = A^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda'_1\cdots\lambda'_q} T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

という変換をうけるものを，反変 p 価，共変 q 価のテンソルと呼ぶ．ただし，

$$A^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} A^{\kappa'_2}_{\kappa_2} \cdots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} A^{\lambda_2}_{\lambda'_2} \cdots A^{\lambda_p}_{\lambda'_p}$$

である．
- 添え字の数の等しい２つのテンソル $\boldsymbol{T} = (T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$，$\boldsymbol{S} = (S^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ に対して和 $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}$ を

$$(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} = T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} + S^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

で定める．これは反変 p 価共変 q 価のテンソルとなる．
- ２つのテンソル $\boldsymbol{T} = (T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$，$\boldsymbol{S} = (S^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_t})$ に対してテンソル積 $\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$ を

$$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S})^{\kappa_1\cdots\kappa_p\ \mu_1\cdots\mu_s}_{\lambda_1\cdots\lambda_q\ \nu_1\cdots\nu_t} = T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} S^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_t}$$

で定める．これは反変 $(p+s)$ 価共変 $(q+t)$ 価のテンソルとなる．

■問題 1　アフィン空間 E_n 中の n 個の反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa},\dots,\underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa},\dots,\underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が $\underset{i}{v}^{\kappa}\underset{j}{w}_{\kappa} = \delta_{ij}$ を満たすとき，これらは相反系をなすという．

1. （５点）２次元アフィン空間 E_2 上の反変ベクトル $\{(1,2)^\top,(3,1)^\top\}$ と相反系をなす共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa},\underset{2}{w}_{\kappa}\}$ を求めよ．
2. （５点）$\mathbf{R}^2$ の $(\{(1,0)^\top,(0,1)^\top\}$ を基底とする$)$ 通常の座標系においてベクトル $\mathbf{a}$ の成分が $(8,1)^\top$ であるとする．このとき $\{(1,2)^\top,(3,1)^\top\}$ を基底ベクトルとする座標系 Σ における $\mathbf{a}$ の成分を求めよ．
3. （５点）n 次元アフィン空間 E_n 中の反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa},\dots,\underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa},\dots,\underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が相反系をなすとき，$\{\underset{1}{v}^{\kappa},\dots,\underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と $\{\underset{1}{w}_{\kappa},\dots,\underset{n}{w}_{\kappa}\}$ はそれぞれ一次独立であることを示せ．

答: 各５点.

1. 行列 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ の逆行列を求めればよく，$\underset{1}{w}_{\kappa} = (-\frac{1}{5},\frac{3}{5}), \underset{2}{w}_{\kappa} = (\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$ となる．
2. 成分を求めるには基底に対応する相反系の共変ベクトルを使えばよく，$(1,2)^\top$ の成分は $(-\frac{1}{5},\frac{3}{5})(8,1)^\top = -1$, $(3,1)^\top$ の成分は $(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})(8,1)^\top = 3$.

3. 反変ベクトル，共変ベクトルからなる行列

$$V = \begin{pmatrix} \underset{1}{v}^1 & \cdots & \underset{n}{v}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{1}{v}^n & \cdots & \underset{n}{v}^n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} \underset{1}{w}_1 & \cdots & \underset{1}{w}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{n}{w}_1 & \cdots & \underset{n}{w}_n \end{pmatrix}$$

に関して相反系の定義から $WV = I$. すなわち $W = V^{-1}$, $V = W^{-1}$ なので V, W は正則. よって $\{\underset{1}{v}^\kappa, \ldots, \underset{n}{v}^\kappa\}$ と $\{\underset{1}{w}_\kappa, \ldots, \underset{n}{w}_\kappa\}$ はそれぞれ一次独立.

■問題 2*　次の各問に解答せよ.

1. （各５点）E_3 中の３つの共変ベクトル $\mathbf{u} = (2,3), \mathbf{v} = (1,2), \mathbf{w} = (-1,2)$ について $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$，$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ を求めよ（成分を列挙せよ）.
2. （各５点）E_3 中の２つの共変ベクトル $\mathbf{v} = (1,3,2), \mathbf{w} = (2,-1,1)$ について $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$，$\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ を求めよ.

答:

1. 表記の簡単化のために $T_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3} = (\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}))_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}$ とおくと，$T_{111} = -2, T_{112} = 4, T_{121} = -4, T_{122} = 8, T_{211} = -3, T_{212} = 6, T_{221} = -6, T_{222} = 12$. $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ も同じ.
2. $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = v_i w_j$ なので,

$$\begin{aligned} &(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{11} = 2, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{12} = -1, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{13} = 1, \\ &(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{21} = 6, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{22} = -3, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{23} = 3, \\ &(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{31} = 4, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{32} = -2, (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{33} = 2. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} &(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{11} = 2, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{12} = 6, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{13} = 4, \\ &(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{21} = -1, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{22} = -3, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{23} = -2, \\ &(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{31} = 1, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{32} = 3, (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{33} = 2. \end{aligned}$$

■問題 3*　２次元ベクトル空間 V において，座標系 (κ) の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と，別の座標系 (κ') の基底 $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}\}$ が

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 3\mathbf{e}_{1'} + \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{e}_{1'} + \mathbf{e}_{2'} \end{aligned}$$

を満たすとする.

1. （５点）座標系 (κ) における成分が $(2,-1)^\top$ であるような反変ベクトル $\mathbf{v}$ の座標系 (κ') における成分を求めよ.
2. （５点）座標系 (κ) における成分が $(2,-1)$ であるような共変ベクトル $\mathbf{w}$ の座標系 (κ') における成分を求めよ.
3. （１０点）座標系 (κ) において次のような成分を持つ反変２価のテンソル T

$$\begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の (κ') における成分を求めよ．

4. （１０点）座標系 (κ) において次のような成分を持つ共変２価のテンソル T

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の (κ') における成分を求めよ．

5. （１０点）座標系 (κ) において次のような成分を持つ反変１価共変１価のテンソル T

$$\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

の (κ') における成分を求めよ．

答:　ベクトル空間の基底は

$$\mathbf{e}_1 = A_1^{1'}\mathbf{e}_{1'} + A_1^{2'}\mathbf{e}_{2'},\ \mathbf{e}_2 = A_2^{1'}\mathbf{e}_{1'} + A_2^{2'}\mathbf{e}_{2'}$$

のように変換されるから

$$A_1^{1'} = 3,\ A_1^{2'} = 1,$$
$$A_2^{1'} = 2,\ A_2^{2'} = 1.$$

これを用いて行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する．$A^\kappa_{\kappa'}$ たちについては

$$\begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1'}^{1} & A_{2'}^{1} \\ A_{1'}^{2} & A_{2'}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'}^{1} & A_{2'}^{1} \\ A_{1'}^{2} & A_{2'}^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，A の逆行列から求まる：

$$\begin{pmatrix} A_{1'}^{1} & A_{2'}^{1} \\ A_{1'}^{2} & A_{2'}^{2} \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. 反変ベクトルの成分の変換法則は

$$v^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} v^\kappa$$

であるから

$$v^{1'} = A_1^{1'}v^1 + A_2^{1'}v^2 = 3 \times 2 + 2 \times (-1) = 4,$$
$$v^{2'} = A_1^{2'}v^1 + A_2^{2'}v^2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$$

となる．行列を用いて計算する場合には

$$\begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい．

2. 共変ベクトルの成分の変換法則は

$$w_{\kappa'} = A^{\kappa}_{\kappa'} w_{\kappa}$$

であるから

$$\begin{aligned}
w_{1'} &= A^1_{1'} w_1 + A^2_{1'} w_2 = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) = 3, \\
w_{2'} &= A^1_{2'} w_1 + A^2_{2'} w_2 = (-2) \times 2 + 3 \times (-1) = -7
\end{aligned}$$

となる．行列を用いて計算する場合には

$$\begin{pmatrix} w_{1'} & w_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} \end{pmatrix}$$

または

$$\begin{pmatrix} w_{1'} \\ w_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

を用いて計算すればよい．

3. 反変２価のテンソルの成分の変換法則は，

$$T^{\kappa'\lambda'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda'}_{\lambda} T^{\kappa\lambda}$$

で与えられる．これを真面目に計算すればよい：

$$\begin{aligned}
T^{1'1'} &= A^{1'}_1 A^{1'}_1 T^{11} + A^{1'}_1 A^{1'}_2 T^{12} + A^{1'}_2 A^{1'}_1 T^{21} + A^{1'}_2 A^{1'}_2 T^{22} \\
&= 3 \times 3 \times 1 + 3 \times 2 \times 2 + 2 \times 3 \times (-3) + 2 \times 2 \times 1 \\
&= 7, \\
T^{1'2'} &= A^{1'}_1 A^{2'}_1 T^{11} + A^{1'}_1 A^{2'}_2 T^{12} + A^{1'}_2 A^{2'}_1 T^{21} + A^{1'}_2 A^{2'}_2 T^{22} \\
&= 3 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times (-3) + 2 \times 1 \times 1 \\
&= 5, \\
T^{2'1'} &= A^{2'}_1 A^{1'}_1 T^{11} + A^{2'}_1 A^{1'}_2 T^{12} + A^{2'}_2 A^{1'}_1 T^{21} + A^{2'}_2 A^{1'}_2 T^{22} \\
&= 1 \times 3 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times (-3) + 1 \times 2 \times 1 \\
&= 0, \\
T^{2'2'} &= A^{2'}_1 A^{2'}_1 T^{11} + A^{2'}_1 A^{2'}_2 T^{12} + A^{2'}_2 A^{2'}_1 T^{21} + A^{2'}_2 A^{2'}_2 T^{22} \\
&= 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times (-3) + 1 \times 1 \times 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} T^{1'1'} & T^{1'2'} \\ T^{2'1'} & T^{2'2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{2'}_1 \\ A^{1'}_2 & A^{2'}_2 \end{pmatrix} = A \left(T^{\kappa\lambda} \right) A^{\top}$$

と計算しても良い．ただし，転置の付け方などに注意すること．

4. 共変２価のテンソルの成分の変換法則は，

$$T_{\kappa'\lambda'} = A^{\kappa}_{\kappa'} A^{\lambda}_{\lambda'} T_{\kappa\lambda}$$

であるので，前問と同様に，真面目に計算すれば良い：

$$
\begin{aligned}
T_{1'1'} &= A^1_{1'}A^1_{1'}T_{11} + A^1_{1'}A^2_{1'}T_{12} + A^2_{1'}A^1_{1'}T_{21} + A^2_{1'}A^2_{1'}T_{22} \\
&= 1 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) \times 2 + (-1) \times 1 \times (-3) + (-1) \times (-1) \times 1 \\
&= 3, \\
T_{1'2'} &= A^1_{1'}A^1_{2'}T_{11} + A^1_{1'}A^2_{2'}T_{12} + A^2_{1'}A^1_{2'}T_{21} + A^2_{1'}A^2_{2'}T_{22} \\
&= 1 \times (-2) \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + (-1) \times (-2) \times (-3) + (-1) \times 3 \times 1 \\
&= -5, \\
T_{2'1'} &= A^1_{2'}A^1_{1'}T_{11} + A^1_{2'}A^2_{1'}T_{12} + A^2_{2'}A^1_{1'}T_{21} + A^2_{2'}A^2_{1'}T_{22} \\
&= (-2) \times 1 \times 1 + (-2) \times (-1) \times 2 + 3 \times 1 \times (-3) + 3 \times (-1) \times 1 \\
&= -10, \\
T_{2'2'} &= A^1_{2'}A^1_{2'}T_{11} + A^1_{2'}A^2_{2'}T_{12} + A^2_{2'}A^1_{2'}T_{21} + A^2_{2'}A^2_{2'}T_{22} \\
&= (-2) \times (-2) \times 1 + (-2) \times 3 \times 2 + 3 \times (-2) \times (-3) + 3 \times 3 \times 1 \\
&= 19.
\end{aligned}
$$

行列で表示した場合には

$$
\begin{pmatrix} T_{1'1'} & T_{1'2'} \\ T_{2'1'} & T_{2'2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} \end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)^\top \left(T_{\kappa\lambda}\right) A^{-1}
$$

となる．ただし，転置の付き方などに注意すること．

5. 反変 1 価共変 1 価のテンソルの成分の変換法則は，

$$
T^{\kappa'}_{\lambda'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} T^{\kappa}_{\lambda}
$$

であるので，やはり同様に，真面目に計算すれば良い：

$$
\begin{aligned}
T^{1'}_{1'} &= A^{1'}_1 A^1_{1'} T^1_1 + A^{1'}_1 A^2_{1'} T^1_2 + A^{1'}_2 A^1_{1'} T^2_1 + A^{1'}_2 A^2_{1'} T^2_2 \\
&= 3 \times 1 \times 1 + 3 \times (-1) \times 2 + 2 \times 1 \times (-3) + 2 \times (-1) \times 1 \\
&= -11, \\
T^{1'}_{2'} &= A^{1'}_1 A^1_{2'} T^1_1 + A^{1'}_1 A^2_{2'} T^1_2 + A^{1'}_2 A^1_{2'} T^2_1 + A^{1'}_2 A^2_{2'} T^2_2 \\
&= 3 \times (-2) \times 1 + 3 \times 3 \times 2 + 2 \times (-2) \times (-3) + 2 \times 3 \times 1 \\
&= 30, \\
T^{2'}_{1'} &= A^{2'}_1 A^1_{1'} T^1_1 + A^{2'}_1 A^2_{1'} T^1_2 + A^{2'}_2 A^1_{1'} T^2_1 + A^{2'}_2 A^2_{1'} T^2_2 \\
&= 1 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) \times 2 + 1 \times 1 \times (-3) + 1 \times (-1) \times 1 \\
&= -5, \\
T^{2'}_{2'} &= A^{2'}_1 A^1_{2'} T^1_1 + A^{2'}_1 A^2_{2'} T^1_2 + A^{2'}_2 A^1_{2'} T^2_1 + A^{2'}_2 A^2_{2'} T^2_2 \\
&= 1 \times (-2) \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 1 \times (-2) \times (-3) + 1 \times 3 \times 1 \\
&= 13.
\end{aligned}
$$

行列で表示した場合には

$$
\begin{pmatrix} T^{1'}_{1'} & T^{1'}_{2'} \\ T^{2'}_{1'} & T^{2'}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} \end{pmatrix} = A\left(T^{\kappa}_{\lambda}\right) A^{-1}
$$

となる．

■問題 4* （１０点）各座標系 (κ) に関して $(p+q)$ 個の指標をもつ量 $W^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ の，任意の反変 t 価，共変 s 価 $(0\le s\le p,\,0\le t\le q)$ のテンソル $P^{\lambda_1\cdots\lambda_t}_{\kappa_1\cdots\kappa_s}$ との縮約積

$$V^{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}=W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}$$

が反変 $(p-s)$ 価，共変 $(q-t)$ 価のテンソルであるならば，$W^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ は反変 p 価，共変 q 価のテンソルであることを証明せよ．

答: $V^{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}, W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}, P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}$ をそれぞれ座標変換すると

$$\begin{aligned}W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}A^{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\rho_1\cdots\rho_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\rho'_1\cdots\rho'_s}P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}&=A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}V^{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}\\&=A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}\end{aligned}$$

これより，

$$\left(W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}A^{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\rho_1\cdots\rho_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\rho'_1\cdots\rho'_s}-A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}\right)P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}=0$$

$P^{\lambda_1\cdots\lambda_t}_{\kappa_1\cdots\kappa_s}$ は任意だったので，

$$\begin{aligned}&W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}A^{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\rho_1\cdots\rho_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\rho'_1\cdots\rho'_s}-A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}=0\\\Rightarrow\quad&W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}=A^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q}W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}.\end{aligned}$$

■問題 5 （Newton 法のアフィン変換不変性）$\mathbf{R}^2$ におけるある座標系 (κ) 上で実数値関数 $f(x^\kappa)$ を最小化するときに，$x^\kappa_{(0)}$ を初期点として Newton 法を用いると，$H(x^\kappa)$ を f の Hesse 行列

$$H(x^\kappa)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^1}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}\\\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^2}\end{pmatrix}$$

として $x^\kappa_{(k+1)}=x^\kappa_{(k)}-(H(x^\kappa_{(k)}))^{-1}\nabla f(x^\kappa_{(k)})$ という列が生成される．いま，$x^{\kappa'}=A^{\kappa'}_{\kappa}x^\kappa$ のように座標変換される別の座標系 (κ') 上で関数 $g(x^{\kappa'})=f(A^{\kappa}_{\kappa'}x^{\kappa'})$ を最小化することを考える．

1. （１０点）Hesse 行列 $(H(x^\kappa))$ を座標変換すると

$$H'(x^{\kappa'})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'}\partial x^{1'}}&\frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'}\partial x^{2'}}\\\frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'}\partial x^{1'}}&\frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'}\partial x^{2'}}\end{pmatrix}$$

   である．$x^ix^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$ がスカラーとなること，つまり $x^ix^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=x^{i'}x^{j'}\frac{\partial^2 g}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$ を示せ．
2. （１０点）Hesse 行列の逆行列は反変２価のテンソルとなることを示せ．
3. （１０点）初期点 $A^{\kappa'}_{\kappa}x^\kappa_{(0)}$ を用いて Newton 法を適用すると $A^{\kappa'}_{\kappa}x^\kappa_{(0)},A^{\kappa'}_{\kappa}x^\kappa_{(1)},\ldots$ という列が生成されることを示せ．

答:

1.

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\kappa'}}=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}=A^{\kappa}_{\kappa'}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}$$

なので

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^{\kappa'}\partial x^{\lambda'}} = A^{\kappa}_{\kappa'}A^{\lambda}_{\lambda'}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}.$$

これより Hesse 行列は共変２価のテンソル．

$$x^{\kappa'}x^{\lambda'}\frac{\partial^2 g}{\partial x^{\kappa'}\partial x^{\lambda'}} = A^{\kappa_1}_{\kappa'}A^{\lambda_1}_{\lambda'}A^{\kappa'}_{\kappa_2}A^{\lambda'}_{\lambda_2}x^{\kappa_2}x^{\lambda_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\kappa_1}\partial x^{\lambda_1}} = \delta^{\kappa_1}_{\kappa_2}\delta^{\lambda_1}_{\lambda_2}x^{\kappa_2}x^{\lambda_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\kappa_1}\partial x^{\lambda_1}}.$$

2. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 \end{pmatrix}$$

とおくと $H(x^{\kappa})$ は共変２価のテンソルなので $H'(x^{\kappa'})$ は $H'(x^{\kappa'}) = (A^{-1})^{\top}H(x^{\kappa})A^{-1}$ のように変換される．そのため，その逆行列は $(H'(x^{\kappa'}))^{-1} = A(H(x^{\kappa}))^{-1}A^{\top}$ と変換され，これより反変２価のテンソルであることがわかる．

3. ある k で $x^{\kappa'}_{(k)} = A^{\kappa'}_{\kappa}x^{\kappa}_{(k)}$ であったとして (κ') で Newton 法を行うと，∇f が共変ベクトルであることに注意して

$$\begin{aligned} x^{\kappa'}_{(k+1)} &= x^{\kappa'}_{(k)} - (H'(x^{\kappa'}_{(k)}))^{-1}\nabla g(x^{\kappa'}_{(k)}) \\ &= x^{\kappa'}_{(k)} - A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\lambda'}_{\lambda}(H^{-1})^{\kappa\lambda}A^{\rho}_{\lambda'}\frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} \\ &= A^{\kappa'}_{\kappa}x^{\kappa}_{(k)} - A^{\kappa'}_{\kappa}(H^{-1})^{\kappa\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}} \\ &= A^{\kappa'}_{\kappa}\left(x^{\kappa}_{(k)} - (H^{-1})^{\kappa\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}\right) \\ &= A^{\kappa'}_{\kappa}x^{\kappa}_{(k+1)}. \end{aligned}$$

■問題 6* （２５点）3 次元 Euclid 空間内の質点 M(質量 m) の運動方程式を一般の斜交座標系 (κ) であらわすことを考える．M の加速度および力を (κ) に関してあらわしたものを，$\frac{\mathrm{d}^2x^{\kappa}}{\mathrm{d}t^2}$，$f_{\kappa}$ とすれば，(κ) に関する運動方程式は，2 価のテンソル $m_{\lambda\kappa}$ を用いて，

$$m_{\lambda\kappa}\frac{\mathrm{d}^2x^{\kappa}}{\mathrm{d}t^2} = f_{\lambda}$$

となる．今，M の位置が $\mathrm{d}x^{\kappa}$ だけ変化したときの仕事量 $f_{\kappa}\mathrm{d}x^{\kappa}$ が座標系の選び方によらない値であることから，力 f_{κ} は共変ベクトルであることを説明せよ．さらに，$m_{\lambda\kappa}$(これを質量テンソルという) と M の質量 m との関係を求め，これが共変２価のテンソルになることを示せ．ただし，速度 $\frac{\mathrm{d}x^{\kappa}}{\mathrm{d}t^2}$ と加速度 $\frac{\mathrm{d}^2x^{\kappa}}{\mathrm{d}t^2}$ が反変ベクトルと考えられることは用いて良い．

答: ２５点（力 f は共変ベクトルであることの説明に１０点．$m_{\lambda\kappa}$ を求めるのに５点．共変２価であることに１０点）．$\mathrm{d}x^{\kappa}$ が反変ベクトルであるため，$f_{\kappa}\mathrm{d}x^{\kappa}$ がスカラーであれば f_{κ} は共変ベクトルとなる (問題４)．直交座標系では，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^{\kappa'}}{\mathrm{d}t^2} = f_{\kappa'}$$

となる．これを座標変換すると，

$$mA^{\kappa'}_{\kappa}\frac{\mathrm{d}^2x^{\kappa}}{\mathrm{d}t^2} = A^{\lambda}_{\kappa'}f_{\lambda}$$

となり，

$$m\sum_{\kappa'} A_\kappa^{\kappa'} A_\lambda^{\kappa'} \frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}t^2} = f_\lambda$$

を得る．指標を $\kappa' \to i$ に変更すると

$$m_{\kappa\lambda} = m\sum_i A_\kappa^i A_\lambda^i$$

となる．また，座標変換したときの変化については $A_{\kappa'}^i = A_\kappa^i A_{\kappa'}^\kappa$ であるから，

$$\begin{aligned} m_{\kappa'\lambda'} &= m\sum_i A_\kappa^i A_{\kappa'}^\kappa A_\lambda^i A_{\lambda'}^\lambda \\ &= A_{\kappa'}^\kappa A_{\lambda'}^\lambda m\sum_i A_\kappa^i A_\lambda^i \\ &= A_{\kappa'}^\kappa A_{\lambda'}^\lambda m_{\kappa\lambda}. \end{aligned}$$

■問題 7 （１０点）ある 0 でない共変２価のテンソル $T_{\kappa\lambda}$ について，ある 0 でない２つのスカラー s，t が存在して

$$sT_{\kappa\lambda} = tT_{\lambda\kappa}$$

が成り立っているとする．このとき，次の２つのうち，どちらかが成り立つことを示せ：

- $s = t$ かつ $T_{\kappa\lambda} = T_{\lambda\kappa}$,
- $s = -t$ かつ $T_{\kappa\lambda} = -T_{\lambda\kappa}$.

答: 任意の κ，λ について $sT_{\kappa\lambda} = tT_{\lambda\kappa}$ であるから，κ，λ を入れ替えると $sT_{\lambda\kappa} = tT_{\kappa\lambda}$ である．これらの両辺を掛け合わせると

$$(s^2 - t^2)T_{\lambda\kappa}T_{\kappa\lambda} = 0 \;\Leftrightarrow\; (s-t)(s+t)T_{\lambda\kappa}T_{\kappa\lambda} = 0 \qquad \text{（ただし } \kappa, \lambda \text{ について和はとらない．）}$$

となり，κ，λ の任意性から $s = t$ または $s = -t$ となる．

1.4　対称化，交代化，外積空間，p–ベクトル

表記の簡単化のため，以下の定義は反変テンソルについてのみ述べるが，共変テンソルについても全く同様に定義される．

- テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ の反変指標のいくつか，たとえば $\kappa_1,\cdots,\kappa_s$ $(s \le p)$ に着目する．これら s 個の指標を並べかえる並べ方は $s!$ とおりあるが，それらのすべての平均をとったものを
$$T^{(\kappa_1\cdots\kappa_s)\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$
で表し，$T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ を $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ について対称化したテンソルという．同様に $\kappa_1,\cdots,\kappa_s$ の $s!$ とおりの並べ方のうち $(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s)$ の偶置換には正，奇置換には負の符号をつけて和をとり $s!$ で割ったものを
$$T^{[\kappa_1\cdots\kappa_s]\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$
で表し，$T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ を指標 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ について交代化したテンソルという．
- 反変 p 価のテンソル $v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ が
$$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = v^{[\kappa_1\cdots\kappa_p]}$$
を満たすとき，$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ を反変 p–ベクトルという．また，反変，共変の区別が重要でないときには，反変 p–ベクトルと共変 p–ベクトルをあわせて p–ベクトルと呼ぶ．
- アフィン空間 E_n 上において，反変ベクトルのつくる線形空間を V と書くことにする．反変 p–ベクトルの作る（テンソルの和に関する）線形空間を外積空間といい，$\overset{p}{\wedge} V$ で表す（共変のときは $\overset{p}{\wedge} V^*$.）
- $\mathbf{v} \in \overset{p}{\wedge} V$，$\mathbf{w} \in \overset{q}{\wedge} V$ に対し，$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} \in \overset{p+q}{\wedge} V$ を次のように定義する：
$$(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})^{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda_1\cdots\lambda_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} v^{[\kappa_1\cdots\kappa_p} w^{\lambda_1\cdots\lambda_q]}.$$

■問題 8 （５点）$p > n$ のとき E_n における p–ベクトルはすべての成分が 0 であるテンソルのみであることを示せ．

答:　p–ベクトル $v^{[\kappa_1\cdots\kappa_p]}$ の指標を考えると，$p > n$ より必ず同じ指標が含まれている．それらを κ_i,κ_j とすると $v^{[\kappa_1\cdots\kappa_i\cdots\kappa_j\cdots\kappa_p]} = v^{[\kappa_1\cdots\kappa_j\cdots\kappa_i\cdots\kappa_p]}$ だが，交代性から $v^{[\kappa_1\cdots\kappa_j\cdots\kappa_i\cdots\kappa_p]} = -v^{[\kappa_1\cdots\kappa_i\cdots\kappa_j\cdots\kappa_p]}$.

■問題 9 （１５点）反変 p–ベクトル $v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ の成分が p 個の反変ベクトル $\underset{1}{v}^{\kappa},\cdots,\underset{p}{v}^{\kappa}$ を用いた行列式
$$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^{\kappa_1} & \cdots & \underset{1}{v}^{\kappa_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{p}{v}^{\kappa_1} & \cdots & \underset{p}{v}^{\kappa_p} \end{vmatrix}$$

の形に表わされるとき，$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ は単純であるという．p–ベクトル $v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ について以下の (A), (B) は同値となる．これを $p=2$ の場合について示せ．ただし，${}^\forall\kappa_1\cdots\kappa_p$, $v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}=0$ のときは自明なので, ${}^\exists\kappa_1\cdots\kappa_p$, $v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}\neq 0$ とする．

(A)　$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ が単純

(B)　$v^{[\kappa_1\cdots\kappa_p}v^{\lambda_1]\lambda_2\cdots\lambda_p}=0$

答: (A) ⇒ (B)
丁寧に計算すればよい．
(B) ⇒ (A)
$v^{\kappa_1\kappa_2}$ は 2–ベクトルなので交代的だから，与えられた条件から

$$v^{\kappa_1\kappa_2}v^{\lambda_1\lambda_2}+v^{\kappa_2\lambda_1}v^{\kappa_1\lambda_2}+v^{\lambda_1\kappa_1}v^{\kappa_2\lambda_2}=0$$

となるので

$$v^{\kappa_1\kappa_2}v^{\lambda_1\lambda_2}=v^{\lambda_1\kappa_2}v^{\kappa_1\lambda_2}+v^{\kappa_1\lambda_1}v^{\kappa_2\lambda_2}$$

が成り立つ．そこで $x_\kappa y_\lambda v^{\kappa\lambda}=1$ なる共変ベクトル x_κ，y_λ を用いると

$$x_{\lambda_1}y_{\lambda_2}v^{\kappa_1\kappa_2}v^{\lambda_1\lambda_2}=x_{\lambda_1}y_{\lambda_2}v^{\lambda_1\kappa_2}v^{\kappa_1\lambda_2}+x_{\lambda_1}y_{\lambda_2}v^{\kappa_1\lambda_1}v^{\kappa_2\lambda_2}$$

となり

$$v^{\kappa_1\kappa_2}=(x_{\lambda_1}v^{\lambda_1\kappa_2})(y_{\lambda_2}v^{\kappa_1\lambda_2})+(x_{\lambda_1}v^{\kappa_1\lambda_1})(y_{\lambda_2}v^{\kappa_2\lambda_2})=-(x_{\lambda_1}v^{\kappa_2\lambda_1})(y_{\lambda_2}v^{\kappa_1\lambda_2})+(x_{\lambda_1}v^{\kappa_1\lambda_1})(y_{\lambda_2}v^{\kappa_2\lambda_2})$$

を得る．よって $u^\kappa=x_\lambda v^{\kappa\lambda}$，$w^\kappa=y_\lambda v^{\kappa\lambda}$ とおけば $v^{\kappa_1\kappa_2}=u^{[\kappa_1}w^{\kappa_2]}$.

1.5　計量

- ベクトルの長さなどの計量的性質を扱うには，計量テンソルと呼ばれる対称な 2 価の共変テンソル $g_{\lambda\kappa}$ を与えればよい (ただし $\det(g_{\lambda\kappa}) \neq 0$ となるように与える．) このとき，反変ベクトル v^κ と共変ベクトル w_κ の長さは，それぞれ

$$\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda}, \quad \sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda}$$

  のように定義される．また，$g_{\kappa\lambda}$ およびこの逆行列 $g^{\kappa\lambda}$ (反変 2 価の対称テンソル) を用いると，反変ベクトルと共変ベクトルは

$$v_\lambda = g_{\kappa\lambda}v^\kappa, \qquad v^\kappa = g^{\kappa\lambda}v_\lambda$$

  という関係により一対一に対応づけられる．
- 計量テンソルが定まっているとき，2 つの反変ベクトル v^κ，w^κ の内積を $g_{\kappa\lambda}v^\kappa w^\lambda$ で定義できる．
- 逆に，n 次元ベクトル空間 V にあらかじめ内積 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ が定まっているとき，その空間の計量テンソルは $g_{\kappa\lambda} = \langle \mathbf{e}_\kappa, \mathbf{e}_\lambda\rangle$ となる．ただし，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ は V の基底である．
- 内積と計量が定まっているとき，２つの反変ベクトル $\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ について，そのなす角 $\theta,\ 0 \le \theta < \pi$ を

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}||}$$

  を満たすものとして定める．$||\mathbf{v}||$，$||\mathbf{w}||$ は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の長さである．

■問題 10* 　2 次元のベクトル空間 V に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定まっており，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を基底とする座標系 (κ) において計量テンソルが

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるとする．

1. （各 5 点）反変ベクトル $\mathbf{v} = (2,1)^\top$ と共変ベクトル $\mathbf{w} = (2,1)$ の長さを求めよ．
2. （5 点）2 つの反変ベクトル $\mathbf{v}_1 = (1,0)^\top$ と $\mathbf{v}_2 = (0,1)^\top$ のなす角を求めよ．

答:

1. $\mathbf{v}$ の長さは $\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda}$ であるが，これは行列を用いると

$$\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda} = \left(\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

   $\mathbf{w}$ の長さは $\sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda}$ であるが，まず，行列 $(g_{\kappa\lambda})$ の逆行列から

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これを用いて

$$\sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda} = \left((w_1 \quad w_2) \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \left((2 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

2. 前問と同様にして，各ベクトルの長さは $||\mathbf{v}_1|| = 1$，$||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{2}$ であり，$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1$ であることから，なす角 θ は $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ を満たす．これより $\theta = 45°$.

■<u>問題 11*</u>　2 次元アフィン空間 E_2 に，ある座標系 (κ) での成分が $\mathbf{v} = (1,1)^\top$，$\mathbf{w} = (2,0)^\top$ と表されている 2 つの反変ベクトルが与えられているとする．

1. （１０点）各ベクトルの長さが $||\mathbf{v}|| = 1$，$||\mathbf{w}|| = 4$，$\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ のなす角 θ が $60°$ となるように計量テンソルを定め，座標系 (κ) における成分 $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ を求めよ．
2. （１０点）この計量の下で反変ベクトル $(1,1)^\top$ と $(3+\sqrt{3},2)^\top$ のなす角を求めよ．

答:

1. g_{ij} に関する連立方程式を作って解けば良い．結果として $g_{11} = 4, g_{12} = g_{21} = -3, g_{22} = 3$ となる．
2. 定義に従って計算．$||(1,1)^\top|| = 1, ||(3+\sqrt{3},2)^\top|| = \sqrt{24+12\sqrt{3}}, \langle (1,1)^\top, (3+\sqrt{3},2)^\top \rangle = 3+\sqrt{3}$ なので，なす角 θ は

$$\cos\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{24+12\sqrt{3}}} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{12+6\sqrt{3}}{24+12\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

これより $\theta = 45°$.

1.6　テンソル密度・擬テンソル・擬テンソル密度

- $\varDelta = \det(A_{\kappa}^{\kappa'})$ とする．$\boldsymbol{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ が，座標変換に関し，

$$\boldsymbol{P}^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \frac{1}{|\varDelta|^t} A^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda'_1\cdots\lambda'_q} \boldsymbol{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

  という変換を受けるとき，$\boldsymbol{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ を重み t，反変 p 価，共変 q 価のテンソル密度という．

- $\widetilde{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ が，座標変換に関し，

$$\widetilde{P}^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \frac{\varDelta}{|\varDelta|} A^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda'_1\cdots\lambda'_q} \widetilde{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

  という変換を受けるとき，$\widetilde{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ を反変 p 価，共変 q 価の擬テンソルという．

- $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ が，座標変換に関し，

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \frac{\varDelta}{|\varDelta|}\frac{1}{|\varDelta|^t} A^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\kappa_1\cdots\kappa_p\lambda'_1\cdots\lambda'_q} \widetilde{\boldsymbol{P}}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

  という変換を受けるとき，$\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$ を重み t，反変 p 価，共変 q 価の擬テンソル密度という．

■問題 12　（１０点）E_3 の２つの共変ベクトル (w_1, w_2, w_3)，(v_1, v_2, v_3) に対して

$$\tilde{\mathbf{f}}^1 = w_2v_3 - w_3v_2,\ \tilde{\mathbf{f}}^2 = w_3v_1 - w_1v_3,\ \tilde{\mathbf{f}}^3 = w_1v_2 - w_2v_1$$

で定義される量 $\tilde{\mathbf{f}}^\kappa$ は重み ＋１，反変１価の擬ベクトル密度であることを示せ.

答:　例えば $\tilde{\mathbf{f}}^{1'}$ を求めると

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}^{1'} &= w_{2'}v_{3'} - w_{3'}v_{2'} \\
&= \left(A^1_{2'}w_1 + A^2_{2'}w_2 + A^3_{2'}w_3\right)\left(A^1_{3'}v_1 + A^2_{3'}v_2 + A^3_{3'}v_3\right) \\
&\qquad - \left(A^1_{3'}w_1 + A^2_{3'}w_2 + A^3_{3'}w_3\right)\left(A^1_{2'}v_1 + A^2_{2'}v_2 + A^3_{2'}v_3\right) \\
&= \left(A^1_{2'}A^2_{3'} - A^1_{3'}A^2_{2'}\right)w_1v_2 + \left(A^1_{2'}A^3_{3'} - A^1_{3'}A^3_{2'}\right)w_1v_3 + \left(A^2_{2'}A^1_{3'} - A^2_{3'}A^1_{2'}\right)w_2v_1 \\
&\qquad + \left(A^2_{2'}A^3_{3'} - A^2_{3'}A^3_{2'}\right)w_2v_3 + \left(A^3_{2'}A^1_{3'} - A^3_{3'}A^1_{2'}\right)w_3v_1 + \left(A^3_{2'}A^2_{3'} - A^3_{3'}A^2_{2'}\right)w_3v_2 \\
&= \left(A^2_{2'}A^3_{3'} - A^2_{3'}A^3_{2'}\right)(w_2v_3 - w_3v_2) + \left(A^3_{2'}A^1_{3'} - A^3_{3'}A^1_{2'}\right)(w_3v_1 - w_1v_3) \\
&\qquad + \left(A^1_{2'}A^2_{3'} - A^1_{3'}A^2_{2'}\right)(w_1v_2 - w_2v_1) \\
&= \det(A^\kappa_{\kappa'})\left(A^{1'}_1\tilde{\mathbf{f}}^1 + A^{1'}_2\tilde{\mathbf{f}}^2 + A^{1'}_3\tilde{\mathbf{f}}^3\right) \\
&= \Delta^{-1}\left(A^{1'}_1\tilde{\mathbf{f}}^1 + A^{1'}_2\tilde{\mathbf{f}}^2 + A^{1'}_3\tilde{\mathbf{f}}^3\right)
\end{aligned}$$

となる．他も同様.

■問題 13　（１０点）計量テンソル $g_{\kappa\lambda}$ に対し $\boldsymbol{g} = |\det(g_{\kappa\lambda})|$ は重み＋２のスカラー密度であることを示せ.

答:

$$
\begin{aligned}
|\det(g_{\kappa'\lambda'})| &= |\det(A^{\kappa}_{\kappa'}A^{\lambda}_{\lambda'}g_{\kappa\lambda})| \\
&= |\det A^{\kappa}_{\kappa'}|\cdot|\det A^{\lambda}_{\lambda'}|\cdot|\det g_{\kappa\lambda}| \\
&= |\Delta|^{-2}|\det g_{\kappa\lambda}|.
\end{aligned}
$$

■問題 14 （１５点）反変 n–ベクトル $v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}(=v^{[\kappa_1,\ldots,\kappa_n]})$ が擬スカラー密度と見なせることを示しその重みを求めよ．

答: $\kappa_1,\ldots,\kappa_n$ に同じ添え字があると 0 であり $v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}=\mathrm{sgn}(\sigma)v^{1,\ldots,n}$ となる．したがって

$$
\begin{aligned}
v^{1',\ldots,n'} &= A^{1',\ldots,n'}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} \\
&= \Delta v^{1,\ldots,n} \\
&= \frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{1}{|\Delta|^{-1}}v^{1,\ldots,n}.
\end{aligned}
$$

添え字は上の $1,\ldots,n$ 以外の並びでも上の変換式が成立することに着目して重み－1 の擬スカラー密度であることが分かる．