レポートの見本

yyyy 年 mm 月 dd 日

総合理工学科 情報システム系
n 年 mm 番　名前 太郎

問題

実数の連続性により，以下の極限が収束することを示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

解答

実数の連続性により [1, 見本]，$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおいたときに $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\le 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

以上より，どんな n に対しても $a_n \le a_{n+1}$ を満たすから $\{a_n\}$ は単調増加数列である．また $1-\frac{1}{n}\le 1$ より

$$\begin{aligned}
a_n &\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&\le 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2} \le 3
\end{aligned}$$

よって $\{a_n\}$ は上に有界であるから，$\{a_n\}$ は収束する．(表 1 参照 (意味はない)) $\square$

表 1: ローマ字表一部

	a	i	u	e	o
k	ka	ki	ku	ke	ko
s	sa	si	su	se	so

参考文献

[1] ：著者名，本の名前，出版会社，出版年

[2] ：ページタイトル (，サイトタイトル)，URL，閲覧年月日