УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО И ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Работа посвящена изучению статистических свойств свободного и закрепленного броуновских движений, а также установлению фрактальных закономерностей случайного броуновского процесса. Впервые введено понятие фрактальной броуновской линии. Метод ее получения – случайное изотропное смещение средних точек отрезков полилинии. Предложен метод оценки размерности неоднородных фрактальных полилиний. Получены статистические свойства и фрактальная размерность случайных броуновских полилиний.

Ключевые слова: броуновское движение, фрактальная броуновская линия, фрактальная размерность.

Введение

Компьютерное моделирование броуновского движения (БД) − хаотического перемещения видимой частицы, возникающего при ее столкновениях с большим числом малых невидимых частиц − реализуется множеством методов [1-4]. Каждый из них в различной степени адекватен данному природному явлению, в действительности происходящему под воздействием большого числа неопределенных факторов: размеров и масс частиц, величин и направлений их скоростей, длин и длительностей свободного пробега, плотности и вязкости среды и т. п. Учет всех этих составляющих в процессе моделирования проблематичен, поэтому неизбежно принятие определенных идеализаций и упрощений, аналогичных замене трассировки всех световых лучей на отслеживание лишь приведенных обратных лучей в расчете освещенности поверхностей [5, 6]:

- использование модельных единиц измерения длины, времени и скорости, мало связанных с метриками реального БД;
- простейшие формы частиц, например, сферы одинакового диаметра либо просто точки;
- случайные или даже равные единице длительности свободного пробега частиц;
- мгновенное изменение скорости либо перемещения частицы после ее столкновения с другой частицей на алгоритмически генерируемую случайную векторную величину;
- равномерное движение частицы с новой скоростью до следующего столкновения.

Свободное броуновское движение

В рамках принятых допущений построим на плоскости стошаговую траекторию *свободного броуновского движения* $p_{i+1}=p_i+V_i \ \ \forall i=\overline{0,99}$ из начального положения $p_0=\mathrm{O}$, где $\mathrm{O}=[0\ 0]$ – нулевой вектор. Для изменения векторов скорости V_i используем функцию $rv(\sigma)=rf(\sigma)\cdot[\sin(\varphi)\ \cos(\varphi)]$ генерирования вектора со случайными длиной $rf(\sigma)$ и углом направления $\varphi=rnd(2\pi)$ рад, равномерно распределённым по кругу. При задании типа генератора случайных чисел (ГСЧ) с нулевым средним $z=rf(\sigma)$ можно выбрать либо равномерный $z=2rnd(\sigma)-\sigma$ в интервале $[-\sigma,\sigma]$, либо нормальный ГСЧ с гауссовой плотностью вероятности $e^{-z^2/2\sigma^2}\Big/\sigma\sqrt{2\pi}$ со среднеквадратичным отклонением (СКО) σ.

На рис. 1 построены реализации броуновского движения с *равномерным* ГСЧ с параметром $\sigma=1$ двумя методами изменения направления движения частицы после столкновения: (*а*) $V_i=V_{i-1}+rv(\sigma)$ при $V_{-1}=O$ и (*б*) $V_i=rv(\sigma)$. Насколько каждый из этих методов случайного блуждания близок к реальному броуновскому движению – судить тем, кто видел его воочию, возможно, даже в микроскоп.

Изучим статистические свойства процесса со случайными приращениями положений, показанного на рис. 1, *б*. Каждая n -шаговая полилиния $P=p_0p_1\ldots p_n$ с вершинами p_i $\forall i=\overline{0,n}$ имеет следующие длину γ и квадраты максимального удаления ρ и расстояния χ между начальной и последней вершинами p_0 и p_n:

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}|p_i-p_{i-1}|,\quad \rho=\max_i\left(|p_i-p_0|^2\right),\quad \chi=|p_n-p_0|^2. \tag{1}$$

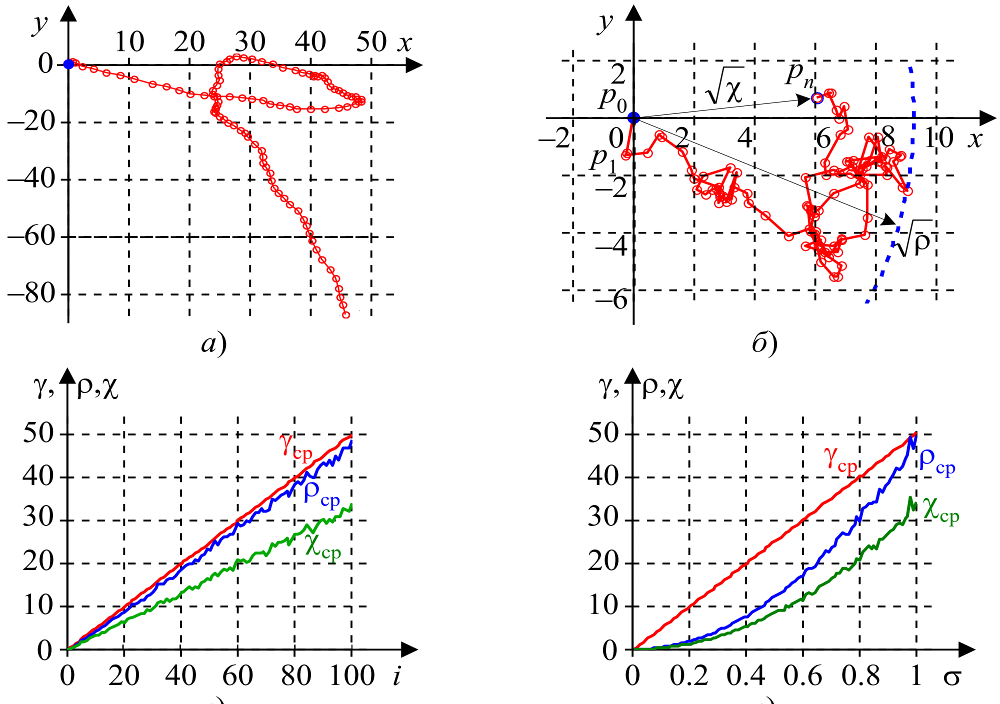

Рис. 1. Свободное броуновское движение

Сгенерируем ансамбль из $K=1000$ случайных траекторий броуновского движения P_k, $k=\overline{1,K}$, вычислим по (1) значения γ_k, ρ_k, χ_k и рассчитаем средние параметры ансамбля:

$$\gamma_{ср}=mean(\gamma_k),\quad \rho_{ср}=mean(\rho_k),\quad \chi_{ср}=mean(\chi_k).$$

Соответствующие графики этих зависимостей от числа шагов моделирования i и параметра разброса *равномерного* ГСЧ σ приведены на рис. 1, *в*, *г*. Все они хорошо аппроксимируются следующими функциями:

$$\gamma_{ср}(i)\approx 0.5i,\quad \rho_{ср}(i)\approx 0.47i,\quad \boxed{\chi_{ср}(i)\approx 0.33i},$$

$$\gamma_{ср}(\sigma)\approx 50\sigma,\quad \rho_{ср}(\sigma)\approx 48.2\sigma^2,\quad \chi_{ср}(\sigma)\approx 33.3\sigma^2.$$

Аналогичные зависимости при использовании *нормального* ГСЧ с СКО σ выглядят следующим образом:

$$\gamma_{ср}(i)\approx 0.8i,\quad \rho_{ср}(i)\approx 1.41i,\quad \boxed{\chi_{ср}(i)\approx i},$$

$$\gamma_{ср}(\sigma)\approx 79.8\sigma,\quad \rho_{ср}(\sigma)\approx 142\sigma^2,\quad \chi_{ср}(\sigma)\approx 100\sigma^2.$$

Особо значимым результатом моделирования является пропорциональность среднего квадрата расстояния $\chi_{\text{ср}}(i)$ от начальной до конечной точки броуновской полилинии числу шагов (времени движения при равномерном квантовании времени), экспериментально подтвердившая хорошо известную в молекулярной физике формулу Альберта Эйнштейна.

Фрактальные броуновские линии

Понятие «фрактал» было введено Б. Мандельбротом в 1975 году для преодоления проблемы чрезвычайной громоздкости математического описания бесконечно дробимых объектов уравнениями линий или поверхностей [6]. Наибольшее распространение в компьютерной графике фрактальная тема получила для формирования объектов природного ландшафта. Нерегулярность самоподобия означает, что фрагменты объекта не точно повторяют его форму в уменьшенном масштабе, а имеют некоторые отклонения от регулярности, носящие случайный (стохастический) характер. Случайность доставляет фрактальному объекту неповторимость, живость и близость к реальным природным образованиям, каждый из которых уникален.

Рассмотренная выше броуновская линия в действительности не является фрактальной, так как в методе ее создания отсутствует процесс дробления элементов. Вместе с тем двусторонне закрепленная *фрактальная броуновская линия* (ФБЛ), проходящая между заданными точками a и b, дает классический пример устройства бесконечно дробимых самоподобных объектов. Для ее построения используется хорошо зарекомендовавший себя рекурсивный *метод срединного смещения* [4], состоящий в *изотропном гауссовом* смещении средних точек дробимых отрезков строящейся полилинии. В плоском варианте задачи изотропность и гауссовость означают следующее (рис. 2):

- случайный угол φ отклонения вектора смещения средней точки $c=(a+b)/2$ отрезка ab от вертикали равномерно распределён в интервале $[0,2\pi)$;
- случайная величина смещения нормально распределена с нулевым средним значением и абсолютным СКО $|b-a|\sigma$.

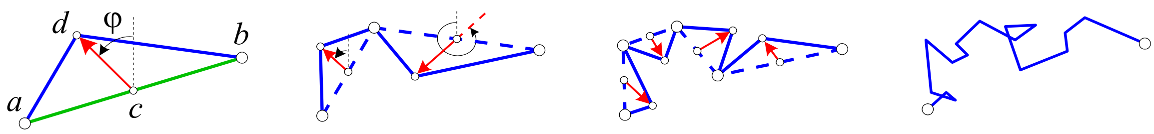

Рис. 2. Метод срединного смещения

Используя предложенную нами ранее методологию [7], для повышения гибкости алгоритма построения ФБЛ введем в список его параметров *признак направления срединного смещения* $D_\varphi \in \{0,1\}$: при $D_\varphi = 0$ смещение происходит по вертикали с углом $\varphi = 0$, тогда как при $D_\varphi = 1$ производится генерирование случайного угла отклонения $\varphi = rnd(2\pi)$.

Начальное значение смещения задаётся пропорциональным длине исходного отрезка $|b-a|$, а на каждой следующей рекурсии параметр σ уменьшается в 2^H раз, где $H \in [0,1]$ – *показатель Херста*, задающий степень хаотичности ФБЛ и коррелированности смещений. При $H=0$ неизменное значение σ при уменьшении длин отрезков приводит к максимальной изрезанности ФБЛ.

Рекурсивная функция $FBLrec(L,b,\sigma,\delta,r,D_\varphi,H)$ построения фрактальной броуновской линии с аргументами L (списком вершин построенной части линии, последняя точка которого a является началом следующего отрезка ab), точкой b, абсолютным СКО σ, минимальной длиной разбиваемого отрезка δ и глубиной рекурсии r работает по следующему алгоритму.

$FBLrec\left(L,b,\sigma,\delta,r,D_\varphi,H\right)$

$\{\ a=L_{size(L)}\ ,\ V=b-a\ ;$ // начало отрезка и его направление

если $\{r=0\}\vee\{|V|<\delta\}$, то // условия остановки разбиения отрезка

$\{\ b\to L\ ;$ // добавление в список новой точки

$line(a,b);$ // вывод отрезка ab

возврат $L\ \};$ // выход из рекурсии

$\varphi=D_\varphi\cdot rnd(2\pi)$, $\sigma=\sigma/2^H$; // параметры смещения

$d=a+0.5V+rf(\sigma)\cdot[\sin(\varphi)\ \cos(\varphi)];$ // смещение средней точки

$L=FBLrec\left(L,d,\sigma,\delta,--r,D_\varphi,H\right);$ // разбиение отрезка ad

возврат $FBLrec\left(L,b,\sigma,\delta,r,D_\varphi,H\right);$ // разбиение отрезка db

$\}$

Построение ФБЛ на отрезке ab осуществляется заданием начального значения погонного СКО σ, соответствующего единице длины отрезка $|b-a|$, и однократным вычислением списка её вершин $L=FBLrec\left(a,b,|b-a|\sigma,\delta,r,D_\varphi,H\right)$. Для создания броуновского фрактала на базовой полилинии $p_1p_2\ldots p_n$ инициализируется начальный список, состоящий из ее первой вершины $L=\{p_1\}$, после чего в цикле:

$$L=FBLrec\left(L,p_i,|p_i-p_{i-1}|\sigma,\delta,r,D_\varphi,H\right)\ \forall i=\overline{2,n}$$

к нему подстраиваются сегменты ФБЛ на отрезках $p_{i-1}p_i$.

На рис. 3 показаны четыре группы реализаций алгоритма $FBLrec$ на базовом единичном отрезке за $r=8$ рекурсий при разных значениях параметров σ, $D\varphi$ и H . Изучение графиков приводит к следующим выводам:

- при строго вертикальных срединных смещениях ($D_\varphi=0$) абсциссы всех точек ФБЛ изменяются монотонно, что позволяет строить на таких базовых линиях самонепересекающиеся ландшафтные поверхности [4];
- изотропность срединного смещения ($D_\varphi=1$) создает на фрактальных линиях хаотически расположенные петли и участки попятного движения – совсем как на реальных траекториях случайного блуждания частиц в молекулярной среде. Однако такое поведение ФБЛ усложняет их использование в качестве базовых линий фрактальных броуновских поверхностей, моделирующих строение поверхности природных ландшафтов, – они получаются чрезвычайно самопересекающимися и комковатыми, в чем мы скоро сможем убедиться;
- влияние показателя Херста $0\le H\le 1$ на форму фрактальных линий сказывается на относительном содержании в их спектре высокочастотных гармоник (шума) и коррелированности соседних смещений. При малых значениях $H\approx 0$ доля шума максимальна, а направления соседних смещений в среднем противоположны. Наоборот, выбор $H\approx 1$ позволяет создать ФБЛ с малым уровнем высокочастотных колебаний и сильной коррелированностью соседних смещений.

Важной статистической характеристикой полилинии, отражающей ее непрямолинейность, является *коэффициент удлинения* – отношение полной длины линии к расстоянию между ее концами:

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n-1}|p_i-p_{i+1}|\Big/|p_1-p_n| \qquad (2a)$$

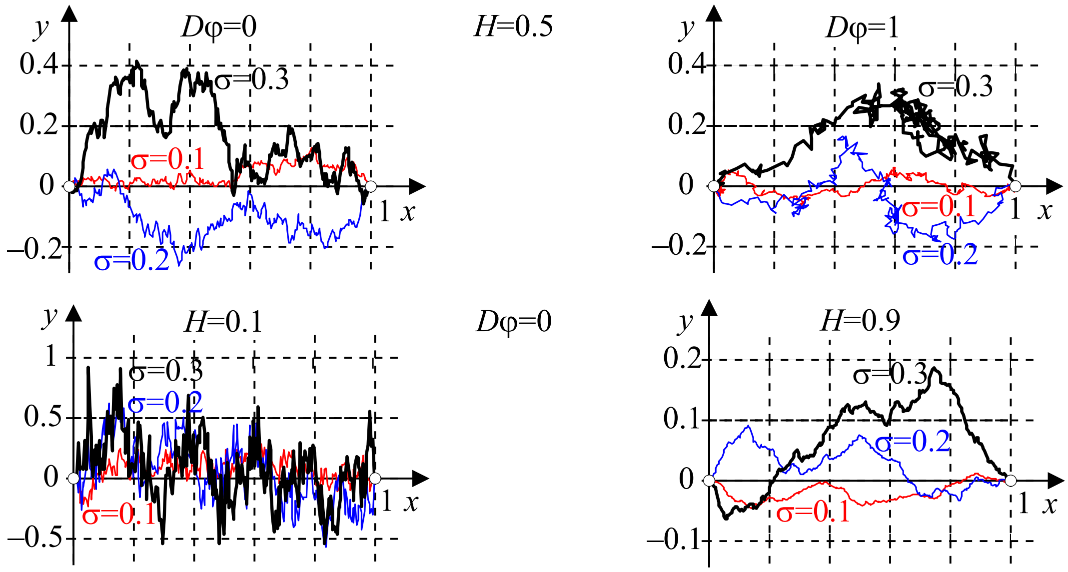

Рис. 3. Фрактальные броуновские линии

Зададим набор СКО $\sigma_j = 0.01j \;\; \forall j = \overline{0, 50}$ и для каждого σ_j сгенерируем ансамбль из $K = 100$ фрактальных полилиний с вычисленными по (2а) значениями $\gamma_k \;\; \forall k = \overline{1, K}$. Рассчитаем среднее значение коэффициента удлинения:

$$\gamma_{\text{ср}} = mean(\gamma_k). \tag{2б}$$

Наилучшие приближения $\gamma_{\text{ср}}(\sigma, H)$, вычисленные в MathCAD методом Левенберга-Марквардта с помощью функции *genfit* на $r = 8$ уровнях рекурсии для выборочных значений $H = 0.5$ и $\sigma = 0.3$, имеют следующий вид:

$$\gamma_{\text{ср}}(\sigma, 0.5) \approx 1 + 18.3\sigma^{1.16}, \;\; \gamma_{\text{ср}}(0.3, H) \approx 1 + 69.6 \cdot 2^{-7.8H}. \tag{2в}$$

Графики этих зависимостей от параметров σ и H при выборочных глубинах рекурсии $r \in \{4, 6, 8, 10\}$ показаны на рис. 4.

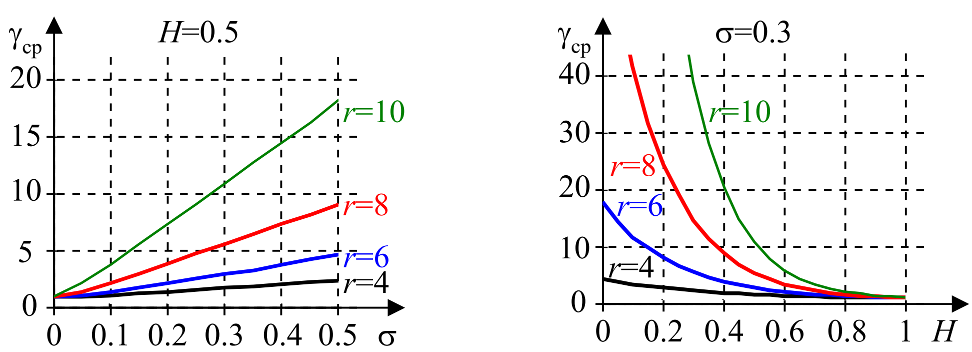

Рис. 4. Статистические свойства ФБЛ

Экспериментальная оценка размерности ФБЛ

Броуновская полилиния также является стохастическим линейным фракталом с неоднородными элементами (рис. 3). На рис. 5 построены графики усредненных по $K=100$ реализациям функции $FBLrec(a,b,\sigma,0,r,0,H)$ зависимостей их полной длины $\gamma_{\text{ср}}(\sigma,H,r)$ и размерности $d_{\text{ср}}(\sigma,H,r)$ от числа рекурсий r на наборе СКО $\sigma\in\{0.1,0.2,0.3\}$ нормального ГСЧ $rf(\sigma)$ и от показателя Херста $H\in\{0.1,0.5,0.9\}$. Выбор логарифмического масштаба позволяет обнаружить *предельную* линейную зависимость функции $\log_2(\gamma_{\text{ср}})$ от числа итераций и оценить полную длину ФБЛ зависимостью от двух параметров $\alpha(\sigma,H)$ и $\beta(\sigma,H)$:

$$\log_2(\gamma_{\text{ср}})\approx\alpha\left(e^{-\beta r}+\beta r-1\right)$$

с нулевыми значением и наклоном при $r=0$. Прямые измерения по графикам обнаруживают установившиеся значения коэффициентов наклона $\alpha\beta=1-H$.

Таким образом, оценка предельной длины ФБЛ приобретает вид $M_r(\sigma,H)\to2^{(1-H)r}$, а ее фрактальная размерность

$$D_r(\sigma,H)=\lim_{r\to\infty}\frac{D_{\text{т}}}{1-\log_2(M_r/M_{r-1})}$$

сходится к

$$D_r(\sigma,H)\to\frac{1}{1-(1-H)r+(1-H)(r-1)}=\frac{1}{H}=\text{const}\ \forall r.$$

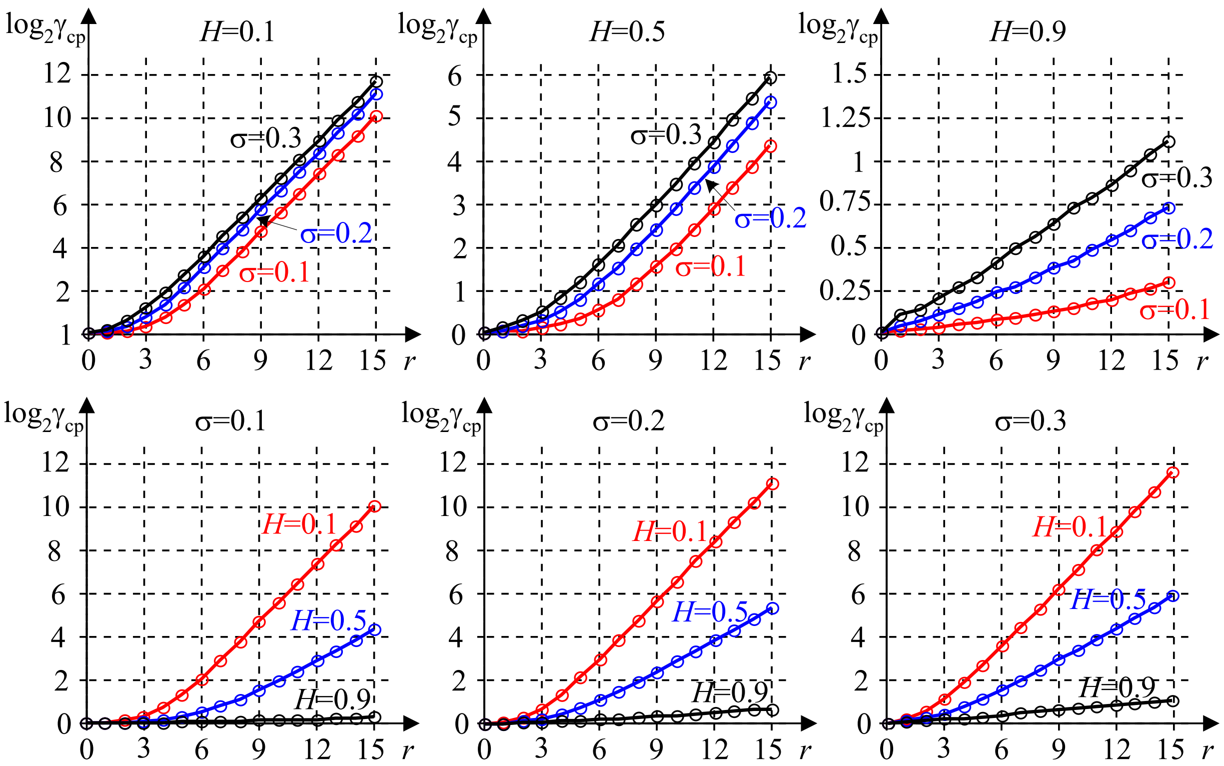

Рис. 5. Длина фрактальной броуновской линии

Это полностью согласуется с размерностью броуновского движения, приведенной в [1] и экспериментально подтверждается графиками на рис. 6, асимптотически сходящимися к пунктирно проведенным уровням $1/H$, независимым от значений σ. При этом скорость сходимости сильно замедляется по мере приближения показателя Херста H к 1.

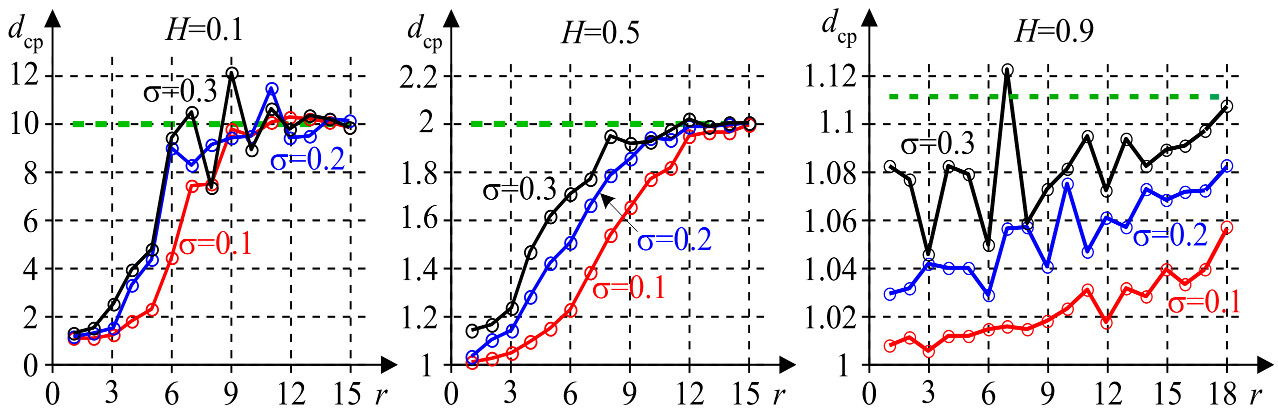

Рис. 6. Размерность фрактальной броуновской линии

Заключение

Получены усредненные характеристики траекторий броуновского движения, создаваемых с помощью генераторов равномерно и нормально распределенных случайных чисел. На основе этого становится возможным как оценить вид и область расположения полилинии при заданных значениях s, σ и r, так и задать эти параметры сообразно ее желаемому поведению.

Библиографический список

1. **Мандельброт, Б.** Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. **Кроновер, Р.М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. **Федер, Е**. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
4. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Фракталы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 100 с.
5. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Оптическая визуализация: учеб. пособие для вузов. / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 200 с.
6. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2017. – 708 с.
7. **Никулин, Е.**А. Исследование фрактальных полилиний // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2018. № 3(122). − С. 23-31.

Дата поступления
в редакцию 11. 01.2019

E.A. Nikulin

COMPUTER INVESTIGATION OF THE BROWN MOVEMENT BY MEANS OF STATISTICAL FRACTAL ANALYSIS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: The establishment of statistical regularities of random Brownian motion.
Methodology: Random isotropic displacement of midpoints of polyline segments.
Experiments: A statistical experiment was performed to evaluate the length and dimension of a fractal polyline.
Results: Statistical properties and fractal dimension of random Brownian polylines are obtained.
Findings: A method for estimating the dimension of inhomogeneous fractal polylines is proposed.
Research implications: Computer synthesis of random fractal objects with desired properties.

Key words: Brownian motion, fractal polyline, fractal dimension.