Relatório do Trabalho de Estatística Bayesiana I

Mistura de Normais com Variância Contaminada

Caio Balieiro
Taiguara Melo Tupinambás
Walmir dos Reis Miranda Filho

Prof. Dani Gamerman
Prof$^{\underline{a}}$ Rosangela Helena Loschi

Programa de Pós-Graduação em Estatística
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 2 de dezembro de 2019

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo a implementação de agoritmos para aproximação de uma distribuição *a posteriori*, através das técnicas: i) quadratura de Riemann; ii) amostragem por importância (SIR); e iii) *Markov chain Monte Carlo* (MCMC), via Metropolis-hastings.

A Seção 1.1 descreve o modelo utilizado para a distribuição amostral, uma mistura finita de distribuições normais, e para as distribuições *a priori*. Em seguida, os parâmetros escolhidos para a simulação são definidos na Seção 1.2 e uma amostra gerada por simualção, para um tamanho amostral de 500, é apresentada na Seção 1.3. Finalmente, nas Seções 2, 3 e 4, os algoritmos são apresentados, assim como os resultados obtidos.

1.1 Formulação do Modelo

Considere uma amostra $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ independente e identicamente distribuída da seguinte mistura finita de distribuições normais:

$$f(x|\mu, \sigma^2, \nu) = \nu\phi(x|\mu, 100\sigma^2) + (1-\nu)\phi(x|\mu, \sigma^2), \ x \in \mathcal{R}, \tag{1}$$

onde $\phi(x|M, V)$ denota a função densidade de probabilidade da distribuição normal com média M e variância V avaliada no ponto $x, \mu \in \mathcal{R}, \sigma^2 \in \mathcal{R}^+$ e $\nu \in (0, 1)$. Os parâmetros μ, σ^2 e μ possuem distribuição *a priori* conforme

$$\begin{aligned} \mu|\sigma^2 &\sim N(m, V\sigma^2), \\ \sigma^2 &\sim GI(a, d), \\ \nu &\sim U(0, 1). \end{aligned} \tag{2}$$

DICA: pode-se usar, sem provar, que a mistura finita de distribuições normais pode ser hierarquicamente representada por

1.2 Escolha dos Parâmetros *a priori*

1.3 Amostra Gerada

Para gerar a amostra, foi utilizada a representação hierárquica da mistura finita de distribuições normais [1], definida como:

$$\begin{aligned} X_i|\mu, \sigma^2, U_i = u_i &\sim N(\mu, \sigma^2 u_i^{-1}), \\ U_i|\mu &\sim discreta(1, 100), \\ P(U_i = 100) &= \nu. \end{aligned} \tag{3}$$

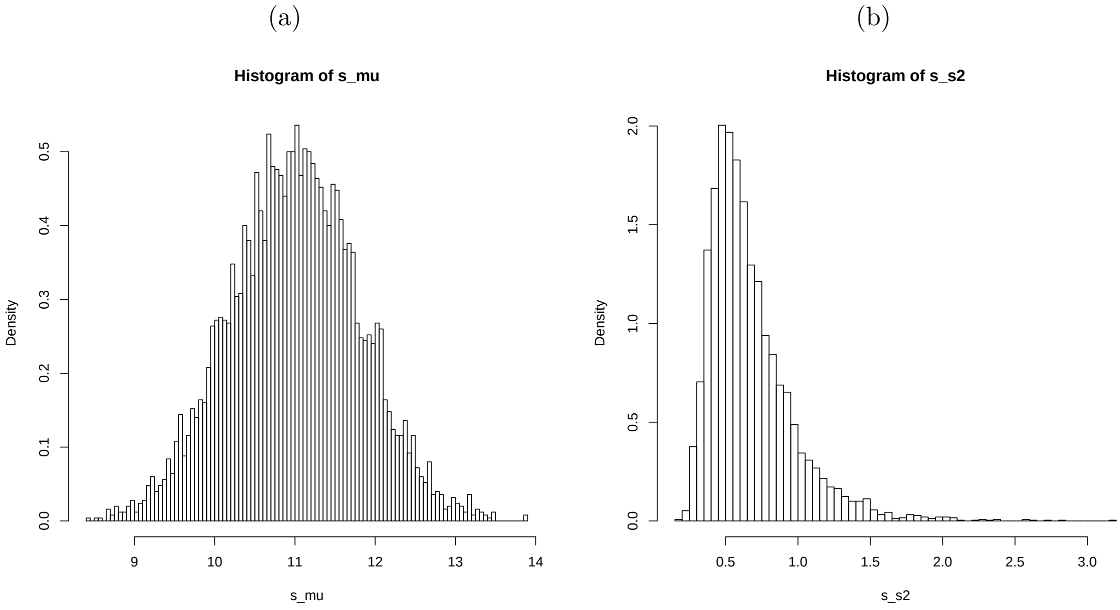

Figura 1: Distribuições a priori

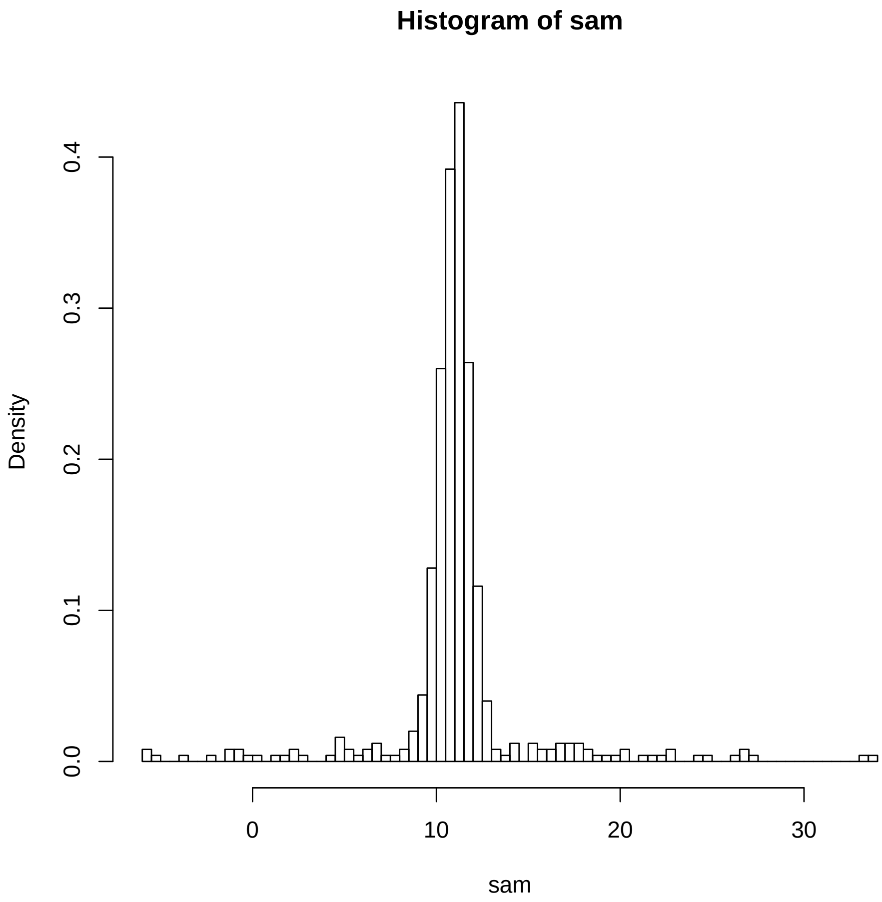

Figura 2: Amostra de tamanho 500.

2 O Método da Quadratura de Riemann

3 O Método da Reamostragem Ponderada

4 O Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov

Referências

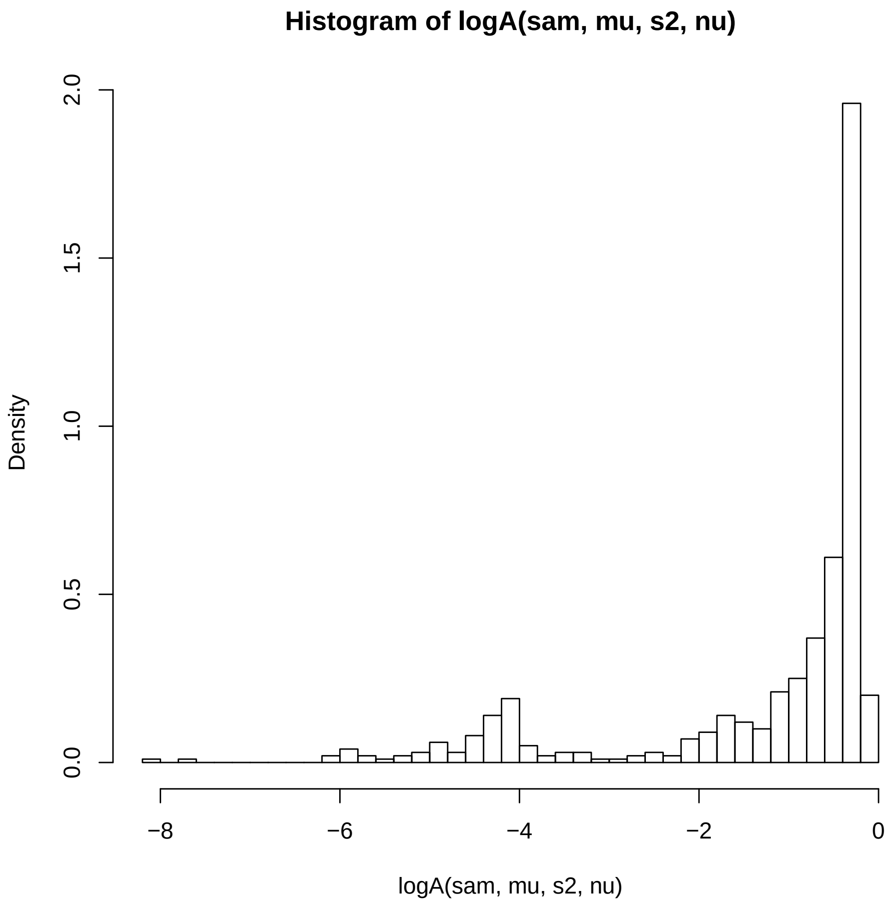

Figura 3: Amostra de tamanho 500.

(a)

(b)

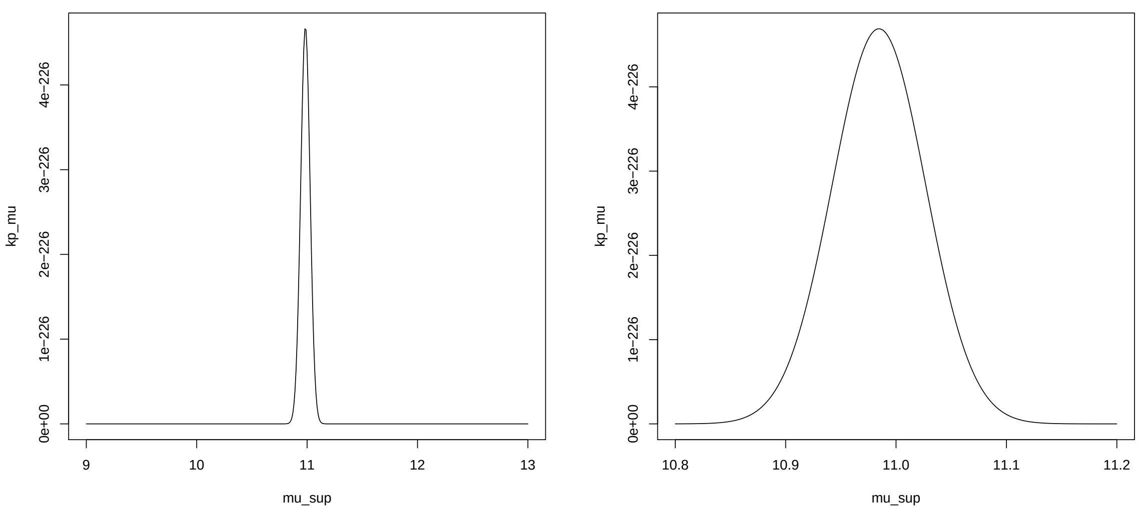

Figura 4: Grade de mu

(a) (b)

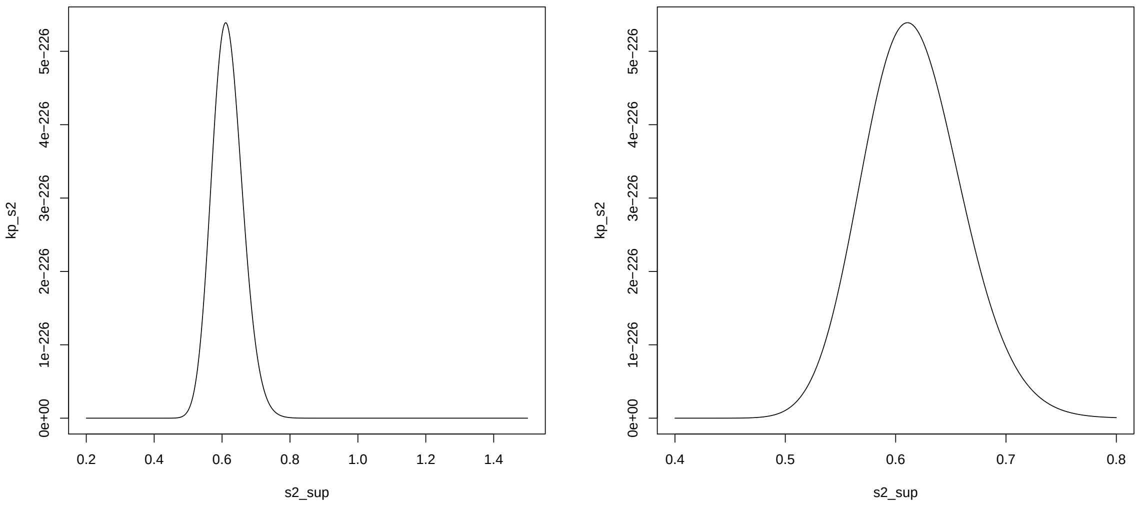

Figura 5: Grades de sigma

(a) (b)

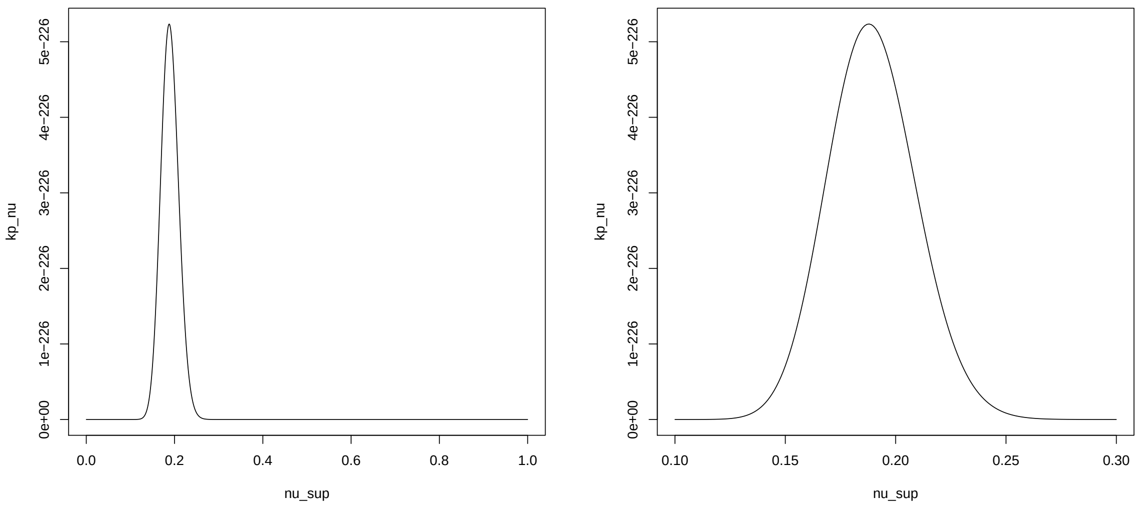

Figura 6: Grades de nu

(a) (b) (c)

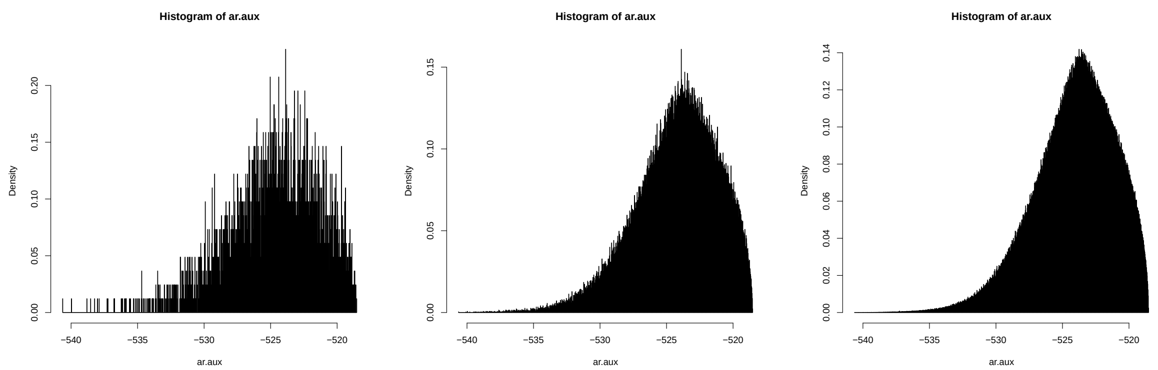

Figura 7: Calculo da constante de proporcionalidade

(a) (b) (c)

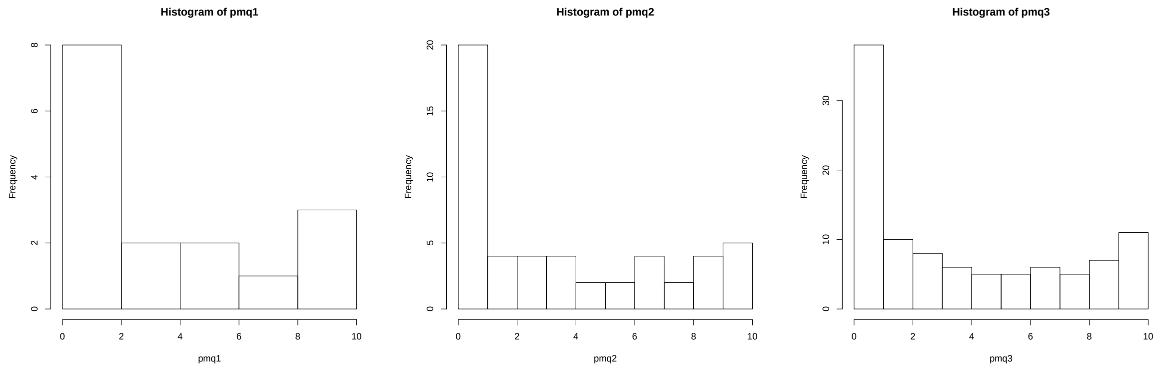

Figura 8: Posteriori de mu

(a) (b) (c)

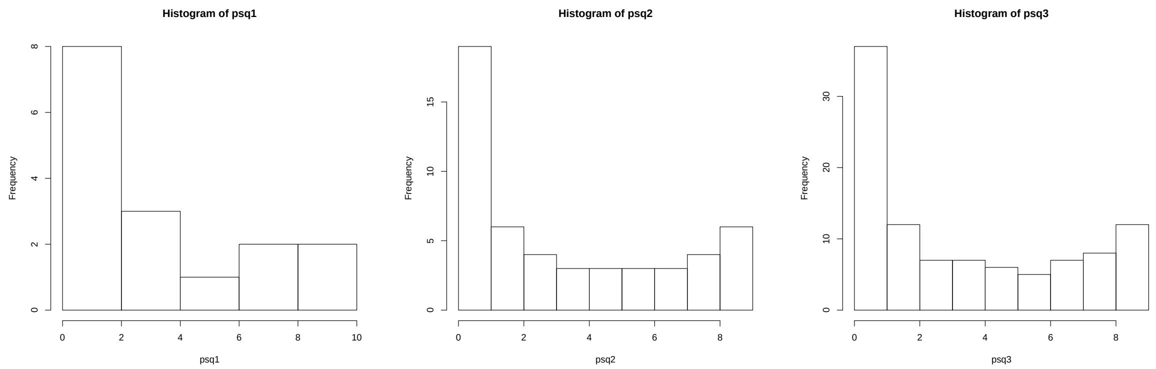

Figura 9: Posteriori de sigma

(a) (b) (c)

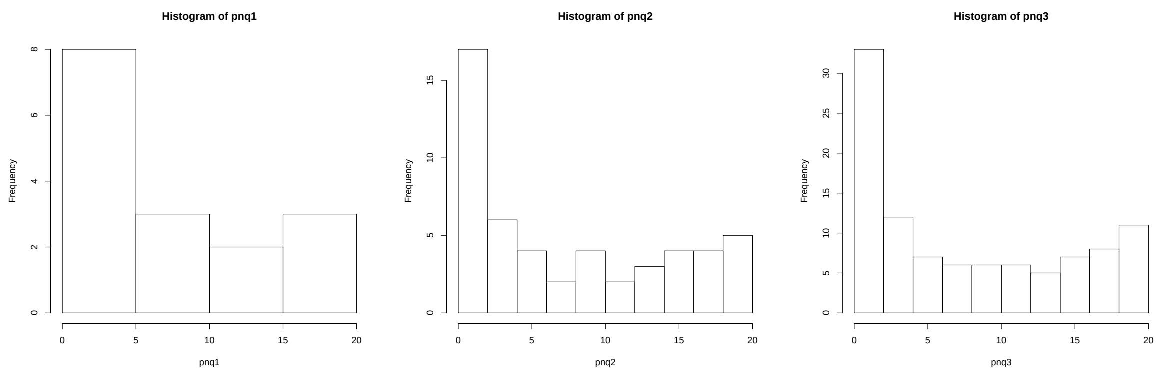

Figura 10: Posteriori de nu