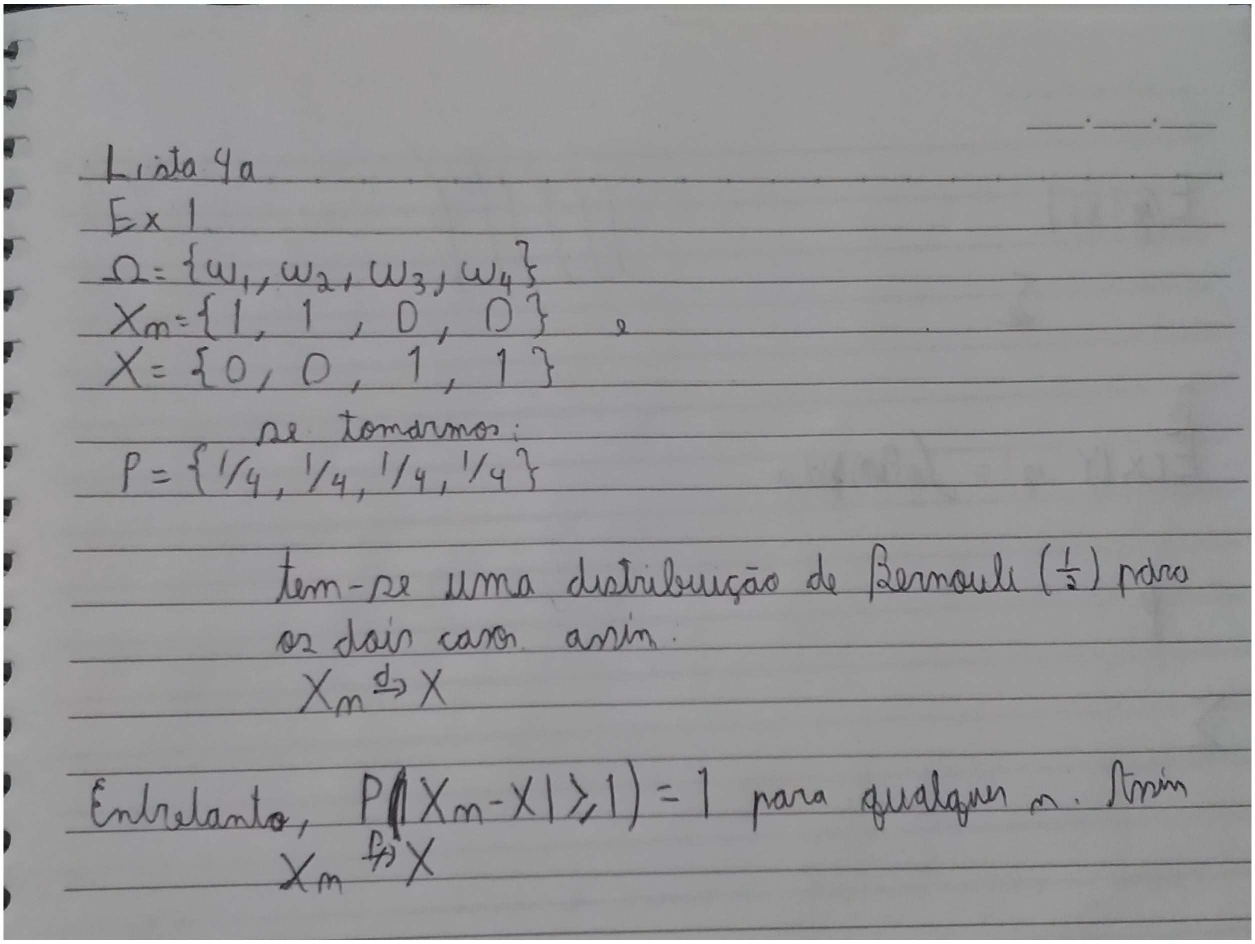
Lista 4a

André Moura Gomes da Costa

18 de maio de 2017

1



Lista 4a

Ex 1

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$X_n = \{1, 1, 0, 0\}$ e

$X = \{0, 0, 1, 1\}$

se tomarmos:

$P = \{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$

tem-se uma distribuição de Bernoulli $(\frac{1}{2})$ para os dois casos assim:

$X_n \xrightarrow{d} X$

Entretanto, $P(|X_n - X| \geq 1) = 1$ para qualquer n. Assim

$X_n \not\xrightarrow{p} X$

Figure 1: Qestão 1

2

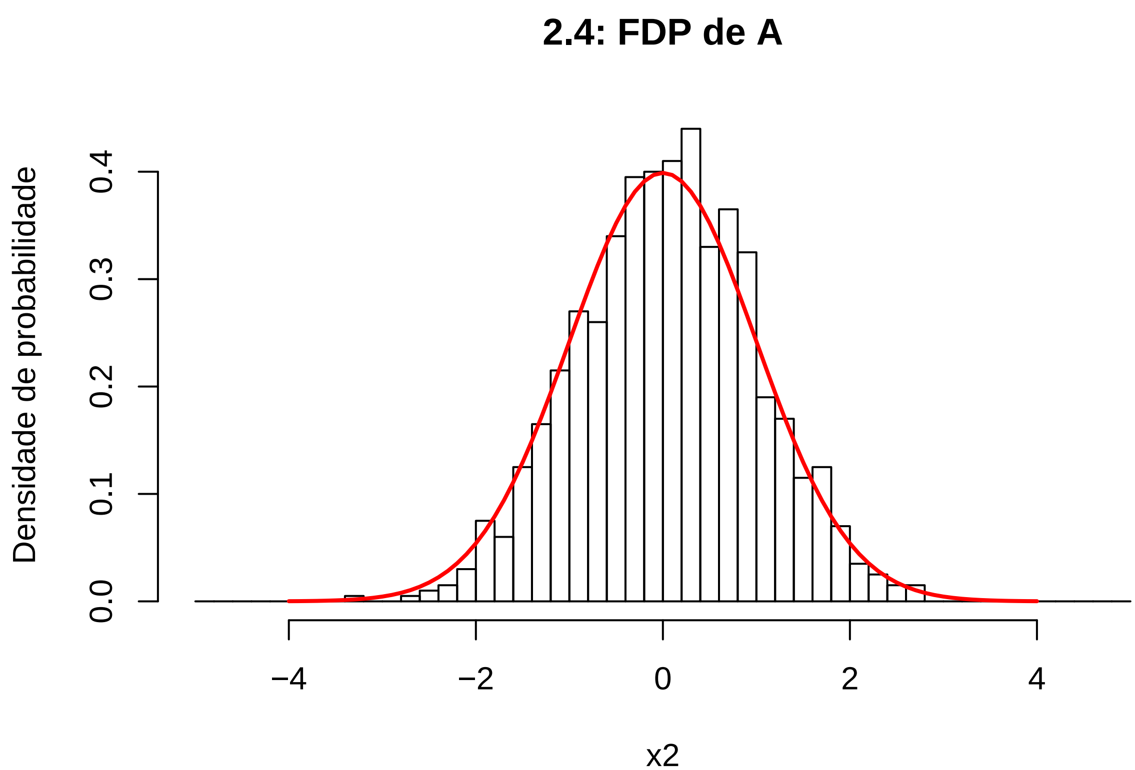
Em papel tentei resolver este problema usando função característica, sem sucesso. Outras idéias exploradas foram de tentar provar uma convergência mais forte, como de probabilidade, para garantir convergência em distribuição, mas também, não obtive sucesso.

A simulação é mostrada a seguir:

```
N1=1000
x<-vector(length=N1)

for (i in 1:N1){
```

```
  N=10000
  x[i]=0
  for (n in i:N){
    a<-runif(1)
    if (a<2^(-n-1)) x[i] <- x[i]+2^n
    else if (a<2^(-n)) x[i]<- x[i]-2^2
    else if (a<2^(-n) + 1/2*(1-2^-n)) x[i]<-x[i] +1
    else x[i]<- x[i]-1
  }
}
```

```
x2<-x/(sqrt(N))

x1 <- hist(x2, breaks = seq(-5,5, by=0.2), plot=FALSE)
x1$counts=x1$density
plot(x1, main="2.4: FDP de A", ylab="Densidade de probabilidade")

B<-seq(-4,4, by=0.1)
C<-1/(sqrt(2*pi))*exp(-0.5*B^2)
lines(B,C,type='l',col='red',lwd=2)
```



3

A integral em questão se equivale ao cálculo da seguinte esperança, considerando cada X_i como uma variável uniforme IID.

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

Simulação

A simulação a seguir sugere a equivalência entre as expressões (integral e esperança), e sugere que o resultado de tal integral seja igual a 2/3.

```
library(cubature)
```

```
## Warning: package 'cubature' was built under R version 3.3.3
```

```
f <- function(x) { (x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2 + x[4]^2 + x[5]^2+ x[6]^2 +x[7]^2 + x[8]^2)/(x[1] + x[2] +
b <- adaptIntegrate(f, lowerLimit = (vector(length=8)+1-1), upperLimit = (vector(length=8)+1))
b$integral
```

```
## [1] 0.651625
```

```
n=1000000
N=1000
k=vector(length=N)
for (i in 1:N){
  X=runif(n)
  k[i]<-sum(X^2)/sum(X)
}
mean(k)
```

```
## [1] 0.6666631
```

Resolução

Lembrando que:

$$E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

É verificável que, se conseguir provar que a seguinte expressão é valida para este problema, então ele será resolvido.

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)} = \frac{nE(X^2)}{nE(X)} = \frac{2}{3}$$

Utilizando a desigualdade de Jensen:

Se a função $f(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ for convexa, então teremos

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) \leq \frac{(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)}{(\sum_{i=1}^{n} EX_i)} = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}$$

Se esta função for côncava, teremos

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)}{(\sum_{i=1}^{n} EX_i)} = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}$$

Se a função for convexa e côncava, então a igualdade é valida

Para verificar a convexidade da função, é calculada a derivada parcial em X_1 (poderia ser em qualquer X_n):

$$\frac{\partial^2}{\partial(X_1^2)} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\partial^2}{\partial(X_1^2)} \frac{X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} X_i^2}{X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i}$$

Fazendo $y = \sum_{i=2}^{n} X_i^2$ e $\sum_{i=2}^{n} X_i$

$$\frac{\partial^2}{\partial(X_1^2)} \frac{X_1^2 + y}{X_1 + z} = \frac{2(y + z^2)}{(X_1 + z)^2}$$

Sabe-se que, quando n tende a infinito, z tende a infinito e y também. Tamém sabe-se que, $z > y$ (visto que estamos no intervalo $[0, 1]$).

Assim, visto que há um denominador com z^3, enquanto no numerador, a ordem máxima é quadrática, esta derivada parcial tende a 0.

Isso faz com que a função tenda a ter derivadas segundas iguais a 0 e assim, tenda a ser convexa e concava, validando a expressão inicial.

Como a expressão tente a 0 pela direita, a expressão com $\leq$ é sempre válida, mas a expressão com $\geq$ só é valida no limite, o que faz com que a convergência a $2/3$ seja pela esquerda.