LISTA DE EXERCÍCIOS IPE # AUXILIAR

TAIGUARA MELO TUPINAMBÁS

09 de maio de 2017

Exercício 1

Se $P(A) = \int_A 1d\omega$, A $\subset \Omega$, a probabilidade de A é dada pelo intervalo do evento. Como os intervalos dos eventos A, B e C são mutualmente exclusivos, a probabilidade de cada um é dada pela soma de seus intervalos. Desta forma, temos que:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Para saber se os eventos são mutualmente independentes, são investigadas as independências dois a dois e três a três:

$$P(A \cap B) = P\left(\left(0, \frac{1}{4}\right]\right) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \text{ – } A \text{ e } B \text{ são independentes}$$

$$P(A \cap C) = P\left(\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \text{ – } A \text{ e } C \text{ são independentes}$$

$$P(B \cap C) = P\left(\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = P(A)P(B) \text{ – } B \text{ e } C \text{ são independentes}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P\left(\left(0, \frac{1}{8}\right]\right) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C) \text{ – } A, B \text{ e } C \text{ são independentes}$$

Logo, como os eventos são independentes 2 a 2 e 3 a 3, eles **são mutualmente independentes.**

Exercício 2

Sabe-se que:

$$P(X > n) = 1 - P(X \leq n) = 1 - F_X(n)$$

Em que $F_X(n)$ é a CDF geométrica, dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{i=1}^{[x]} (1-p)^{i-1}p & x \geq 1 \end{cases}$$

Desenvolvendo o somatório para $x \geq 1$, e substituindo x por n, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} (1-p)^{i-1}p = p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p)^i = p\left[\frac{1-(1-p)^{n-1+1}}{1-(1-p)}\right] = 1-(1-p)^n$$

Desta forma, $P(X > n) = 1 - [1-(1-p)^n] = (1-p)^n = \boldsymbol{q^n}$

Em seguida é determinada a probabilidade $P(\{X > n + k\}|\{X > n\})$, i.e., a probabilidade da variável ser maior do que n+k, dado que ela é maior do que n.

$$P(\{X > n + k\}|\{X > n\}) = \frac{P(\{X > n + k\} \cap \{X > n\})}{P(\{X > n\})}$$

No entanto, se X é maior do que n+k, ele é maior do que n (para todo k>0).

Logo, $P(\{X > n + k\} \cap \{X > n\}) = P(\{X > n + k\})$, e:

$$P(\{X > n + k\}|\{X > n\}) = \frac{P(\{X > n + k\})}{P(\{X > n\})} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = P(\{X > k\})$$

Esse resultado era esperado, uma vez que a probabilidade de não se obter um sucesso antes de n+k tentativas, dado que já não houve sucesso em n tentativas, deveria ser igual à probabilidade de não se obter um sucesso antes de k tentativas. Pode-se dizer, dessa forma, que essa variável aleatória não possui memória.

Exercício 3

O valor esperado da variável aleatória Y é dada por:

$$E_Y[Y] = \sum_i E_{Y|X}[Y|x_i]p_X[x_i]$$

Dado que X = n e sabendo que Y ~ geom((n+1)$^{-1}$), temos que:

$$E_Y[Y] = \sum_i E[geom\left(\frac{1}{n-1}\right)]p_X[n]$$

$$E_Y[Y] = \sum_i (n-1)p_X[n]$$

$$E_Y[Y] = 1 + \sum_i (n)p_X[n]$$

$$E_Y[Y] = 1 + E_X[X]$$

$$E_Y[Y] = 1 + \lambda$$

Logo, o número esperado de secundárias é de $\boldsymbol{1 + \lambda}$

A correlação é dada por:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$$

Determinando a covariância:

$$cov(X,Y) = E_{X,Y}[XY] - E_x[X]E_Y[Y]$$

$$E_{X,Y}[XY] = \sum_n \sum_k nkp_{Y|X}[k|n]p_X[n] = \sum_n np_X[n] \sum_k kp_{Y|X}[k|n] = \sum_n np_X[n]\, E_{Y|X}[Y|]$$

$$= \sum_n n(n+1)p_X[n] = \sum_n n^2p_X[n] + \sum_n np_X[n] = E[X^2] + E[X]$$

$$E_X[X^2] = var(X) + E^2[X] = \lambda + \lambda^2$$

$$E_{X,Y}[XY] = \lambda + \lambda^2 + \lambda = 2\lambda + \lambda^2$$

$$cov(X,Y) = 2\lambda + \lambda^2 - \lambda(1 + \lambda) = \lambda$$

Sabendo que *var(X) = λ*, falta determinar *var(Y):*

$$var(Y) = E[Y^2] - E^2[Y]$$

$$E[Y^2|X=n] = var(Y|X=n) + E^2[Y|X=n] = \frac{1-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}} + (n+1)^2 = (n+1)^2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + (n+1)^2$$
$$= 2n^2 + 3n + 1$$

$$E[Y^2] = \sum_{-\infty}^{\infty}(2n^2+3n+1)p_X[n] = 2E[X^2] + 3E[X] + 1 = 2(\lambda+\lambda^2) + 3\lambda + 1 =$$

$$var(Y) = 2\lambda^2 + 5\lambda + 1 - (1+\lambda)^2 = \lambda^2 + 3\lambda$$

E, finalmente, a correlação entre as primárias e secundárias é dada por:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda^2+3\lambda)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda+3}}$$

Exercício 4

Para X~Uni(0,2), temos que:

$$f(x) = \frac{1}{2}, 0 \le x \le 2$$
$$h(x) = \int_0^2 \frac{1}{2}\ln(2)\,dx = \ln(2)$$

Para X~Uni(0,1/2):

$$f(x) = 2\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$$
$$h(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)dx = -\ln(2)$$

Para X~N(μ,σ²):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}, -\infty < x < \infty$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}}\right)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}\ln\left(e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}\right)dx =$$

$$\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2dx$$

Resolvendo a segunda integral:

$$\frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-2x\mu+\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}x^2p_X[x] - 2\mu\int_{-\infty}^{\infty}xp_X[x] + \mu^2\int_{-\infty}^{\infty}p_X[x]$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2}(E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2) = \frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2+\mu^2-2\mu^2+\mu^2) = \frac{1}{2}$$

Uma vez que $E[X^2] = var(x) + E^2[X]$. Desta forma, a entropia diferencial de X é dada por:

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} = \frac{\ln(2\pi e)}{2} + \ln(\sigma) = \ln(\sigma) + 1.41894$$

Avaliando os resultados, temos que a entropia diferencial das variáveis aleatórias estudadas só dependem do desvio padrão, sendo que para um mesmo valor de sigma, variáveis com distribuição gaussiana apresentam aproximadamente 1.4 nats a mais.

Exercício 5

Primeiro, será encontrada a probabilidade conjunta de *U* e *V*:

$$p_{U,V}(u,v) = p_{X,Y}\left(g^{-1}(u,v), h^{-1}(u,v)\right)\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|$$

Por independência:

$$p_{U,V}(u,v) = p_X\left(g^{-1}(u,v)\right)p_Y\left(h^{-1}(u,v)\right)\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

As funções inversas $g^{-1}(u,v)$ e $h^{-1}(u,v)$ precisam ser determinadas. Para isso, é necessária uma manipulação das variáveis U e V, para se isolar X e Y, através da determinação de U/V e U^2+V^2:

$$\frac{u}{v} = \frac{\cos(2\pi y)}{\sin(2\pi y)} = \frac{1}{\tan(2\pi y)}$$

$$y = \frac{\arctan\frac{v}{u}}{2\pi} = h^{-1}(u,v)$$

$$u^2 + v^2 = -2\ln(x)(\cos^2(2\pi y) + \sin^2(2\pi y)) = -2\ln(x)$$

$$x = e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}} = g^{-1}(u,v)$$

Calculando a Jacobiana:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} -ue^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}} & -ve^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}} \\ -\frac{v}{2\pi(u^2+v^2)} & \frac{u}{2\pi(u^2+v^2)} \end{bmatrix}$$

$$\left|\det\begin{pmatrix} -ue^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}} & -ve^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}(u^2+v^2)}{2\pi(u^2+v^2)} = \frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}}{2\pi}$$

Como $p_X[x] = p_Y[y] = 1$, e X e Y são independentes, temos que a probabilidade conjunta de *U* e *V* é dada por:

$$p_{U,V}(u,v) = \frac{e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2}}}{2\pi} = \frac{e^{-\frac{(u^2)}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{(v^2)}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Como a probabilidade conjunta pode ser fatorada em um produto de duas pdfs marginais, as variáveis *U* e *V* são independentes e cada uma com uma distribuição normal, com média 0 e variância 1, N(0,1), c.q.d.

Exercício 6

$$E[W|Z=z] = \int_0^z w p_{w|z}(w|z) dw$$

Se Z é o valor máximo entre X e Y, temos que a probabilidade $P(Z \leq z) = P(X \leq z \,\&\, Y \leq z)$. Como X e Y são independentes, $P(Z \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z)$. Pela definição de CDF, temos que $P(X \leq z) = F_x(z)$. Logo:

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

Temos que $F_X(x) = F_Y(y)$, que é dado por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Desta forma, temos que:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z^2 & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

Desta forma, $p_Z(z)$ é obtida através da diferenciação de $F_Z(z)$, e é dada por $p_Z(z) = 2z$. Agora, para determinar $p_{w|z}(w|z)$, falta encontrar a distribuição conjunta de w e z. Para isso, é calculada a CDF da distribuição conjunta, somando os casos em que X é o valor mínimo, Y é o valor mínimo e ambos são iguais.

$$P(W \leq w, Z \leq z) = P(X \leq w, Y \leq w) + P(X \leq w, w < Y \leq z) + P(Y \leq w, w < X \leq z)$$

Como $P(X \leq x) = P(Y \leq y) = F_X(x)$ e X e Y são independentes, temos que:

$$P(W \leq w, Z \leq z) = F_X(w)F_Y(w) + F_X(w)F_Y(z-w) + F_Y(w)F_X(z-w)$$

$$P(W \leq w, Z \leq z) = w^2 + 2w(z-w) = 2wz - w^2$$

Derivando para encontrar $p_{W,Z}(w,z)$:

$$\frac{\partial^2 F_{WZ}}{\partial w \partial z} = p_{W,Z}(w,z) = 2$$

Com $p_{W,Z}(w,z)$ e $p_Z(z)$ encontrados, é possível calcular o valor de $p_{w|z}(w|z)$

$$p_{w|z}(w|z) = \frac{p_{W,Z}(w,z)}{p_Z(z)} = \frac{2}{2z} = \frac{1}{z}$$

Desta forma, só falta calcular a integral do valor esperado descrito no início da questão:

$$E[W|Z=z] = \int_0^z w p_{w|z}(w|z) dw = \frac{1}{z}\left(\frac{w^2}{2}\right)_{w=0}^{w=z} = \frac{z^2}{2z} = \frac{z}{2}$$

Esse resultado é, de certa forma, esperado, uma vez que se é dado Z=Z, logo o a VA condicional W pode ser interpretada como uma VA de distribuição uniforme em (0,Z), com valor esperado $\frac{Z}{2}$