Lista de Exercicios IPE#6

Taiguara Melo Tupinambas

Entrega: 12 de julho de 2017

Capítulo 21 - Poisson

Exercício 21.1

$$P_k(t) = P\big[N(t) = k\big] \tag{1}$$

Como as únicas possibilidades se ter k chegadas até o tempo t são:

- k chegadas no intervalo $[0, t - \Delta t]$ e nenhuma no intervalo $(t - \Delta t, t]$;
- $k - 1$ chegadas no intervalo $[0, t - \Delta t]$ e uma chegada no intervalo $(t - \Delta t, t]$;

Temos que:

$$P\big[N(t) = k\big] = P\big[N(t - \Delta t) = k - 1, N(t) - N(t - \Delta t) = 1\big] + P\big[N(t - \Delta t) = k, N(t) - N(t - \Delta t) = 0\big] \tag{2}$$

Por independência (3) e estacionariedade (4) dos incrementos:

$$P\big[N(t) = k\big] = P\big[N(t - \Delta t) = k - 1\big]P\big[N(t) - N(t - \Delta t) = 1\big] + P\big[N(t - \Delta t) = k\big]P\big[N(t) - N(t - \Delta t) = 0\big] \tag{3}$$

$$P\big[N(t) = k\big] = P\big[N(t - \Delta t) = k - 1\big]P\big[N(t + \Delta t) - N(t) = 1\big] + P\big[N(t - \Delta t) = k\big]P\big[N(t + \Delta t) - N(t) = 0\big] \tag{4}$$

Substituindo:

- $P\big[N(t - \Delta t) = k - 1\big] = P_{k-1}(t - \Delta t)$;
- $P\big[N(t - \Delta t) = k\big] = P_k(t - \Delta t)$;
- $P\big[N(t + \Delta t) - N(t) = 1\big] = \lambda \Delta t$;
- $P\big[N(t + \Delta t) - N(t) = 0\big] = 1 - \lambda \Delta t$.

Temos que:

$$P_k(t) = P_{k-1}(t - \Delta t)\lambda \Delta t + P_k(t - \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) \tag{5}$$

$$P_k(t) - P_k(t - \Delta t) = P_{k-1}(t - \Delta t)\lambda \Delta t - P_k(t - \Delta t)\lambda \Delta t \tag{6}$$

$$\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{\Delta t} = P_{k-1}(t - \Delta t)\lambda - P_k(t - \Delta t)\lambda \tag{7}$$

Com $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = P_{k-1}(t)\lambda - P_k(t)\lambda \tag{8}$$
$$\frac{dP_k(t)}{dt} + P_k(t)\lambda = P_{k-1}(t)\lambda \tag{9}$$

C.Q.D.

Exercício 21.2

Fazendo a transformada de Laplacace da Eq. 21.3:

$$sP_k(s) - P_k(0^+) + \lambda P_k(s) = \lambda P_{k-1}(s) \tag{10}$$

Mas, $P_k(0^+) = P\big[N(0^+) = k\big] = N(0)$
Como $N(0) = 0$:

$$sP_k(s) + \lambda P_k(s) = \lambda P_{k-1}(s) \tag{11}$$
$$P_k(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} P_{k-1}(s) \tag{12}$$

Resolvendo recursivamente, temos que:

$$P_k(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k P_0(s) \tag{13}$$

Resolvendo para $P_0(s)$:

$$P_0(s) = L\{P_0(t)\} = L\{e^{\lambda t} u(t)\} = \frac{1}{s + \lambda} \tag{14}$$

Logo:

$$P_k(s) = \frac{\lambda^k}{\big(\lambda + s\big)^{k+1}} \tag{15}$$

E, pela tabela de transformadas:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{16}$$

para k=0,1,2,. . .

Exercício 21.6

A probabilidade de haver mais de 12 ligações no primeiro minuto é:

$$P\big[N(60) > 12\big] = 1 - P\big[N(60) \leq 12\big] \tag{17}$$
$$P\big[N(60) > 12\big] = 1 - \sum_{k=0}^{12} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{18}$$

Para $\lambda = \frac{1}{5}$ e $t = 60$:

$$P\big[N(60) > 12\big] = 1 - e^{-12}\sum_{k=0}^{12}\frac{12^k}{k!} \tag{19}$$

```
x<-0;
for (i in 0:12) {
    x<-x+(12^i)/factorial(i)
}

Ans<-1-exp(-12)*x

cat("Resposta:", Ans)
```

```
## Resposta: 0.4240348
```

Exercício 21.8

$$P\big[T > t\big] = P\big[min(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})\big] = P\big[T_1^{(1)} > t, T_1^{(2)} > t\big] \tag{20}$$

Por independência:

$$P\big[T > t\big] = P\big[T_1^{(1)} > t\big]P\big[T_1^{(2)} > t\big] = P^2\big[T_1 > t\big] \tag{21}$$
$$\tag{22}$$
$$P\big[T > t\big] = \left(\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx\right)^2 = e^{-2\lambda t} \tag{23}$$

Mas, $P\big[T > t\big] = 1 - F_T(t)$, logo:

$$p_T(t) = \frac{d\big(1 - e^{-2\lambda t}\big)}{dt} = 2\lambda e^{-2\lambda t} \tag{24}$$

Exercício 21.9

Seja $N_s(t) = N_1(t) + N_2(t)$, com $N_s(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$.

Os incrementos de $t_4 > t_3$ e $t_2 > t_1$ são dados por:

$$N_s(t_2) - N_s(t_1) = \big(N_1(t_2) - N_1(t_1)\big) + \big(N_2(t_2) - N_2(t_1)\big) \tag{25}$$
$$N_s(t_4) - N_s(t_3) = \big(N_1(t_4) - N_1(t_3)\big) + \big(N_2(t_4) - N_2(t_3)\big) \tag{26}$$

Se $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são processos de *Poisson* independentes, então cada termo das equações acima também são independentes entre si e a a soma da primeira equação é independente da soma da segunda equanção (os incrementos de N_s são estacionários).

Utilizando a função característica de N_s, temos:

$$\Phi_{N_s}(\omega) = \Phi_{N_1}(\omega)\Phi_{N_2}(\omega) \tag{27}$$
$$\Phi_{N_s}(\omega) = e^{\lambda_1 t(e^{j\omega}-1)}e^{\lambda_2 t(e^{j\omega}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^{j\omega}-1)} \tag{28}$$

Logo, $N_s(t)$~Poiss($(\lambda_1 + \lambda_2)t$)

Exercício 21.10

Valor esperado:

$$E\big[N(t_2) - N(t_1)\big] = \lambda t_2 - \lambda t_1 = \lambda(t_2 - t_1) \tag{29}$$

Para variância, utiliza-se do fato de que os incrementos são estacionários e a tabela de VAs para Poisson:

$$var\big(N(t_2) - N(t_1)\big) = var\big(N(t_2 - t_1)\big) = \lambda(t_2 - t_1) \tag{30}$$

Exercício 21.16

Temos que $P\big[t - \Delta t \le T_k \le t\big]$ é igual a $P\big[(k-1)$ chegadas em $[0, t - \Delta t] \cup$ uma chegada em $(t - \Delta t, t]\big]$.

Logo:

$$P\big[t - \Delta t \le T_k \le t\big] = e^{-\lambda(t-\Delta t)}\frac{(\lambda(t-\Delta t))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda\Delta t \tag{31}$$

$$\frac{P\big[t - \Delta t \le T_k \le t\big]}{\Delta t} = e^{-\lambda(t-\Delta t)}\frac{(\lambda(t-\Delta t))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda \tag{32}$$

Com $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{P\big[t - \Delta t \le T_k \le t\big]}{\Delta t} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda t} \tag{33}$$

Capítulo 22 - Markov

Exercício 22.15

Os estados são: $[0, 1, 2, 3]$ e suas transições:

- $P_{00} = 1$, $P_{01} = 0$, $P_{02} = 0$, $P_{03} = 0$
- $P_{10} = \frac{1}{2}$, $P_{11} = \frac{1}{2}$, $P_{12} = 0$, $P_{13} = 0$
- $P_{20} = \frac{1}{4}$, $P_{21} = \frac{1}{2}$, $P_{22} = \frac{1}{4}$, $P_{23} = 0$
- $P_{30} = \frac{1}{8}$, $P_{31} = \frac{3}{8}$, $P_{32} = \frac{3}{8}$, $P_{33} = \frac{1}{8}$

Temos, então, a matriz de transição da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

```
P<-matrix(c(1,0,0,0,
            1/2,1/2,0,0,
            1/4,1/2,1/4,0,
            1/8,3/8,3/8,1/8),
          nrow=4,ncol=4,byrow=TRUE)

for (i in 1:15) {
    P<-P%*%P
}

cat("P infinito:\n")
```

```
## P infinito:
```

```
print(P)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]    1    0    0    0
## [3,]    1    0    0    0
## [4,]    1    0    0    0
```

Para qualquer que seja o π_0, as probabilidades estacionárias serão: $\pi = [1, 0, 0, 0]^T$. Ou seja, a probabilidade de todas as lâmpadas falharem (estado 0) chega a 100%.

Exercício 22.17

Pelo teorema de *Perron-Frobenius*, sabe-se que a matriz P^n tem um autovalor $\lambda_1 = 1$ e os outros autovalores com módulo menor do que 1.

Dessa forma, considerando $\mathbf{P^n} = \mathbf{V} \wedge^\mathbf{n} \mathbf{V^{-1}}$, em que $\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \mathbf{v_3}]$ e $\mathbf{V^{-1}} = [\mathbf{w_1}\ \mathbf{w_2}\ \mathbf{w_3}]$, teremos que $\mathbf{P^n} \to \mathbf{v_1 w_1^T}$.

Como $\mathbf{P}^\infty \mathbf{1} = \mathbf{1}$, logo: $\mathbf{v_1 w_1^T 1} = \mathbf{1}$.

Mas, $\mathbf{w_1^T 1}$ é um escalar (k). Fazendo $k = \frac{1}{c}$, temos que: $\mathbf{v_1 w_1^T 1} = \mathbf{v_1 \frac{1}{c}} = \mathbf{1} \to \mathbf{v_1} = \mathbf{c1}$.

Sabemos, também, que $\pi^{\mathbf{T}}\mathbf{v_1}\mathbf{w_1^T} = \pi^{\mathbf{T}}$ e que $\pi^{\mathbf{T}}\mathbf{v_1}$ também é um escalar (k). Fazendo $k = \frac{1}{d}$, teemos que:$\pi\mathbf{v_1}\mathbf{w_1^T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}\mathbf{w_1^T} = \pi^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{w_1} = \mathbf{d}\pi^{\mathbf{T}}$.

Logo, sabendo que $\pi^{\mathbf{T}}\mathbf{1} = \mathbf{1}$:

$$\mathbf{w_1^T}\mathbf{v_1} = (\mathbf{d}\pi)^{\mathbf{T}}\mathbf{c}\mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{34}$$
$$\pi^{\mathbf{T}}\mathbf{1}\mathbf{c}\mathbf{d} = \mathbf{1} \tag{35}$$
$$\mathbf{c}\mathbf{d} = \mathbf{1} \tag{36}$$
$$\mathbf{P}^{\infty} = \mathbf{1}\pi^{\mathbf{T}} \tag{37}$$

C.Q.D.

Exercício 22.18

```
P<-matrix(c(0.1,0.4,0.5,
            0.2,0.5,0.3,
            0.3,0.3,0.4),
          nrow=3,ncol=3,byrow=TRUE)

for (i in 1:100) {
    P<-P%*%P
    P<-round(P,digits=4)
}

cat("P^100:\n")
```

```
## P^100:
```

```
print(P)
```

```
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.2165 0.4021 0.3814
## [2,] 0.2165 0.4021 0.3814
## [3,] 0.2165 0.4021 0.3814
```

O resultado está de acordo com a teoria, uma vez que as linhas continuam somando para 1, e, com $n \rightarrow \infty$, as linhas de P^n serão iguais.

Exercício 22.24

```
P<-matrix(c(6/8,1/8,1/8,
            5/8,2/8,1/8,
            4/8,3/8,1/8),
          nrow=3,ncol=3,byrow=TRUE)

for (i in 1:100) {
    P<-P%*%P
    P<-round(P,digits=4)
}

cat("P^100:\n")
```

```
## P^100:
```

```r
print(P)
```

```
##        [,1]   [,2]  [,3]
## [1,] 0.6964 0.1786 0.125
## [2,] 0.6964 0.1786 0.125
## [3,] 0.6964 0.1786 0.125
```

No caso do Exemplo 22.8, a matriz de transição era do tipo *doubly stochastic matrix*, já que, além das linhas somarem 1, as colunas também, o que resulta em probabilidades estacionárias iguais. Nesse caso, temos como probabilidade estacionária: $\pi = [0.6964 \quad 0.1786 \quad 0.1250]^T$

Exercício 22.26

Para montar a Matrix de Transição, foi feito um código em R, considerando que a primeira linha (dia 0) é igual a $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

Para os outros dias, foi considerada uma PMF binomial, com $P[n] = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-n}$

```r
p<-1/2
P<-matrix(0,5,5)
P[1,]<-c(1,0,0,0,0)

for (k in 1:4) {
        for (n in 0:k) {
                P[k+1,n+1]<-ncol(combn(k,n))*p^n*(1-p)^(k-n)
        }
}

cat("P:\n")
```

```
## P:
```

```r
print(P)
```

```
##        [,1]  [,2]  [,3]  [,4]   [,5]
## [1,] 1.0000 0.000 0.000 0.000 0.0000
## [2,] 0.5000 0.500 0.000 0.000 0.0000
## [3,] 0.2500 0.500 0.250 0.000 0.0000
## [4,] 0.1250 0.375 0.375 0.125 0.0000
## [5,] 0.0625 0.250 0.375 0.250 0.0625
```

Considerando que os estados são as quantidades de peixes (k=0,1,2,3,4) presentes no poço, deseja-se encontrar quando o estado 0 terá mais do que 90% de probabilidade.

Dessa forma:

```r
pi<-c(0,0,0,0,1)
n<-0
while (pi[1]<0.9) {
        pi<-pi%*%P
        n<-n+1
}

cat("O pescador deve planejar pescar por",n,
    "dias")
```

```
## O pescador deve planejar pescar por 6 dias
```

Exercício 22.27

Temos que $\mathbf{P^T 1} = \mathbf{1}$. Logo:

$$\mathbf{P^T}(\mathbf{P^T 1}) = \mathbf{P^{T^2} 1} \tag{38}$$

$$\mathbf{P^T}(\mathbf{P^T 1}) = \mathbf{P^T 1} \tag{39}$$

$$\mathbf{P^{T^2}} = \mathbf{P^T} \tag{40}$$

$$\mathbf{P^{\infty^T} 1} = \mathbf{1} \tag{41}$$

Pelo problema 22.17, temos que : $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{1}\pi^{\mathbf{T}}$. Logo:

$$\mathbf{P}^\infty \mathbf{1} = \left(\mathbf{1}\pi^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{42}$$

$$\pi \mathbf{1^T 1} = \mathbf{1} \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

Mas, como $\mathbf{1^t 1} = \mathbf{k}$ sendo k um escalar constante, temos que: $\pi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}$, como queríamos demonstrar.