Lista de Exercícios IPE #4a

Taiguara Melo Tupinambás

Entrega: 24 de maio de 2017

Exercício 1

Para provar a convergência em distribuição, vamos analisar a CDF das VA's X_n e X:

Para $x < 0$, ou seja a probabilidade de X_n ou X assumir valores menores do que 0 é nula:

- $P(X_n \leq x) = 0$
- $P(X \leq x) = 0$

Para $0 \leq x < 1$, ou seja a probabilidade de X_n ou X assumir valor menor do que 1 é igual a probabilidade de assumir o valor 0 (ω_3 e ω_4 para X_n e ω_1 e ω_2 para X)

- $P(X_n \leq x) = P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$
- $P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$

Para $x > 1$, ou seja a probabilidade de X_n ou X assumir valor menor do que 1 é igual a probabilidade de assumir o valor 0 + a probabilidade de assumir o valor 1 $P(\Omega)$

- $P(X_n \leq x) = P(X_n = 0) + P(X_n = 1) = 1$
- $P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1$

Ou seja:

$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ \frac{1}{2}, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

O que mostra que, em distribuição, há igualdade entre X_n e X para todo n.

```
Para provar que as VA's $X_n$ e $X$ não convertem em probabilidade, é necessário checar se:
```

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 \tag{1}$$

Sabemos, no entanto, que $|X_n - X| = 1$, para qualquer ω_n, $n = 1, 2, 3\ e\ 4$.

Desta forma, se escolhermos qualquer valor de $\epsilon < 1$, teremos:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 1 \tag{2}$$

O que prova a não convergência em probabilidade, c.q.d..

Exercício 2

As variáveis aleatórias X_n assumem os seguintes valores, com as devidas probabilidades:

$$X_n- > \begin{cases} 2^n, & P(X_n) = 2^{-n-1} \\ -2^n, & P(X_n) = 2^{-n-1} \\ 1, & P(X_n) = \frac{1}{2}(1-2^{-n}) \\ -1, & P(X_n) = \frac{1}{2}(1-2^{-n}) \end{cases}$$

Sua função característica $\Phi(\omega)$ é dada por:

$$\Phi(\omega) = E[e^{j\omega X_n}] \tag{3}$$
$$\Phi(\omega) = e^{j\omega 2^n}2^{-n-1} + e^{-j\omega 2^n}2^{-n-1} + \frac{1}{2}(1-2^-n)(e^j\omega + e^-j\omega) \tag{4}$$
$$\Phi(\omega) = 2^{-n}(\frac{e^{j\omega 2^n} + e^{-j\omega 2^n}}{2}) + (1-2^{-n})(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}) \tag{5}$$
$$\Phi(\omega) = 2^{-n}cos(\omega 2^n) + (1-2^{-n})cos(\omega) \tag{6}$$

Desta forma, calculando $\frac{1}{\sqrt{(n)}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ através de sua função característica, toma-se o produtorio de $\Phi(\omega)$ de i a n. Para que ela convirja para a distribuição normal de $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, o resultado esperado é $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
Uma forma alternativa de se verificar a convergência é utilizando o teorema do limite central:

$$\frac{S_N - E[S_N]}{\sqrt{(var(S_N))}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - NE_X[X]}{\sqrt{Nvar(X)}} \to N(0,1) \tag{7}$$

Em que $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$
Calculando o valor esperado e a de X_n:

$$E[X_n] = 2^n 2^{-n-1} - 2^n 2^{-n-1} + \frac{1}{2}(1-2^{-n})(1-1) = 0 \tag{8}$$

E, como as variáveis são independentes, $var(S_N) = \sum_{i=1}^{N} var(X_i)$. Calculando $var(X_i)$:

$$var[X_n] = 2^{n^2}2^{-n-1} + (-2^n)^2 2^{-n-1} + \frac{1}{2}(1-2^{-n})((1)^2 + (-1)^2) \tag{9}$$
$$var[X_n] = 2^n - 2^{-n} + 1 \tag{10}$$

Tomando o limite dde $\sum_{i=1}^{n} var(X_i)$, com $n \to \infty$, sobra:

$$var[S_N] = \lim_{n\to\infty} n \tag{11}$$

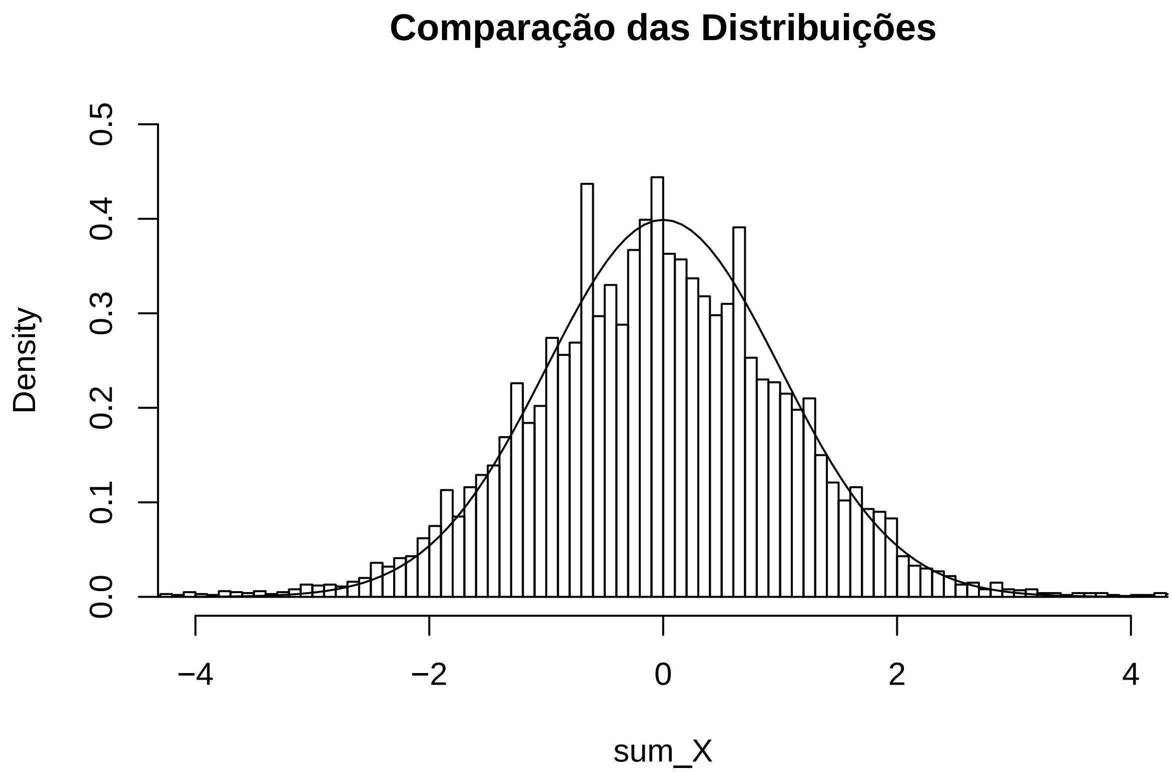
Substituindo os valores econtrados para $var[S_N]$ e $E[X_n]$ em (7):

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - NE_X[X]}{\sqrt{var(S_N)}} = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i) \to N(0,1) \tag{12}$$

Como queríamos demonstrar.

O resultado teórico foi simulado e a comparação entre o histograma da simulação e a distribuição normal pode ser observado, corroborando a o resultado teórico.

```
M<-10000 #número de realizações
N<-1000 #quantidade de Xn

X<-matrix(nrow = M, ncol = N)
sum_X<-c(1:M)-c(1:M)

for (i in 1:M)  {
        for (n in 1:N) {
                prob1<-2^(-n-1)#prob Xn=+-2^n
                prob2<-(1/2)*(1-2^(-n)) #prob Xn=1/2(1-2^-n)

                u<-runif(1) #VA uniforme para realização

                if (u<prob1) {
                        X[i,n]<-2^n
                } else if (u<2*prob1) {
                        X[i,n] <- -(2^n)
                } else if (u<prob2) {
                        X[i,n] <- 1
                } else {
                        X[i,n] <- -1
                }
        }
        sum_X[i] <- 1/sqrt(N)*sum(X[i,]) #somatório das realizações
}

normal<-rnorm(N)


hist(sum_X, prob=TRUE, breaks=10000,
     xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.5),
     main="Comparação das Distribuições")
curve(dnorm(x, mean=0, sd=1), add=TRUE)
```



Exercício 3

A integral múltipla pode ser interpretada como o cálculo do valor esperado de uma transformação $g(X_1, X_2, ..., X_n)$, com $X_n = U(0,1)$, para todo n, tal que:

$$g(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{X_1 + X_2 + ... + X_N} \tag{13}$$

Desta forma, calculando $E_{X_1,X_2,...,X_n}[g(X_1, X_2, ..., X_n)]$, é possível calcular a integral solicitada.

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{\sum_{i=1}^{N} X_i}\right] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right]}{E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]} = \frac{\sum_{i=1}^{N} E\left[X_i^2\right]}{\sum_{i=1}^{N} E\left[X_i\right]} \tag{14}$$

Mas, como pode-se assumir que as variáveis são independentes:

$$\frac{nE\left[X^2\right]}{nE\left[X\right]} = \frac{var(X) + E^2\left[X\right]}{E\left[X\right]} \tag{15}$$

Mas, sabemos que $var(X) = \frac{(b-1)^2}{12}$ e $E\big[X\big] = \frac{b+a}{2}$, para $U(0,1)$, temos que: $var(X) = \frac{1}{12}$ e $E\big[X\big] = \frac{1}{2}$. Logo:

$$E_{X_1,X_2,...,X_n}\big[g(X_1,X_2,...,X_n)\big] = \frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \tag{16}$$

Desta forma, o limite da integral múltipla dada é $\frac{2}{3} \approx 0.66667$

A simulação encontrou o mesmo valor, conforme script a seguir:

```
N<-1000
limit<-c(1:N)-c(1:N)
for (i in 1:N) {
        a<-runif(N)
        limit[i]<-sum(a^2)/sum(a)
}

x<-sum(limit)/N

print(x)
```

```
## [1] 0.6663267
```