# Lista de Exercícios IPE #2

*Taiguara Melo Tupinambás*

*Entrega: 11 de abril de 2017*

As 43a seções, equações, figuras, exemplos e exercícios são do livro *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB* de Stephen M. Kay, Springer, 2006.

## Exercício 1:

*i. Espaço de Probabilidade*

O espaço de probabilidade é dado pela tripla (Ω,F,P), formada por um conjunto Ω , uma conjunto de eventos F em Ω e uma medida positiva P para os eventos:

Ω = {todas as palavras formadas por 3 letras de um alfabeto com **n** letras}

**F** = {A,B,C}

**P** = {P(A),P(B),P(C)}

$$P(A) = \frac{1 \times n \times n}{n^3} = \frac{1}{n} \tag{1}$$

$$P(B) = \frac{n \times 1 \times n}{n^3} = \frac{1}{n} \tag{2}$$

$$P(C) = \frac{3 \times n \times (n-1)}{n^3} = \frac{3n-3}{n^2} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

---

*ii. Independência dois a dois e três a três*

A∩B: palavra começa com **s** e tem a letra **s** no meio

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times 1 \times n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = P(A)P(B) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Logo, A e B são independentes

A∩C: palavra começa com **s** e tem duas letras exatamente iguais, i.e. as duas primeiras letras são **s**, a primeira e última são **s** e a do meio não ou as duas últimas são iguais e não são **s**

$$P(A \cap C) = \frac{[1 \times 1 \times (n-1)] + [1 \times (n-1) \times 1] + [1 \times (n-1) \times 1]}{n^3} = \frac{3n-3}{n^3} = P(A)P(C) \tag{7}$$

Logo, A e C são independentes

B∩C: palavra tem **s** no meio e tem duas letras exatamente iguais, i.e. as duas primeiras letras são **s**, a segunda e última são **s** e a primeira não ou a primeira e última são iguais e não são **s**

$$P(A \cap C) = \frac{[1 \times 1 \times (n-1)] + [(n-1) \times (1) \times 1] + [1 \times (n-1) \times 1]}{n^3} = \frac{3n-3}{n^3} = P(B)P(C) \tag{8}$$

Logo, A e C são independentes e **os eventos A, B e C são independentes dois a dois**.

A∩B∩C: palavra que começa com **s**, tem **s** no meio e tem duas letras exatamente iguais, i.e. as duas primeiras letras são **s** e a última, não.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1 \times 1 \times (n-1)}{n^3} = \frac{n-1}{n^3} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{3n-3}{n^4} \tag{9}$$

Logo, **os eventos A, B e C não são independentes três a três**

---

*iii) Simulação para o caso n=6*

```
#letras de 1 a 6 (s=1)
n=6
N=100000
A=0;B=0;C=0;

for (i in 1:N) {
        p=c(0,0,0)
        for (j in 1:3) {
        p[j]=floor(runif(1,1,7))
        }
        if (p[1]==1){
                A=A+1
        }
        if (p[2]==1){
                B=B+1
        }
        if (p[1]==p[2]&p[1]!=p[3] | p[1]==p[3]&p[1]!=p[2] | p[2]==p[3]&p[2]!=p[1]) {
                C=C+1
        }
}

cat("P(A) simulado =",A/N,"\nP(B) simulado =", B/N,"\nP(C) simulado =",C/N)
```

```
## P(A) simulado = 0.1656
## P(B) simulado = 0.16661
## P(C) simulado = 0.41671
```

```
cat("P(A) teórico =",1/n,"\nP(B) teórico =", 1/n,"\nP(C) teórico =",(3*n-3)/n^2)
```

```
## P(A) teórico = 0.1666667
## P(B) teórico = 0.1666667
## P(C) teórico = 0.4166667
```

## Exercício 2:

a) Evento A:

$$y \geq x \tag{10}$$

P(A) será a área à direita da reta y=x até encostar no retângulo, dividido pela área total do retângulo (ab). Desta forma, para a>b

$$P(A) = \frac{1}{ab} \times \int_0^b x dx. = \frac{1}{ab} \times \frac{b^2}{2} = \frac{b}{2a} \tag{11}$$

para b>a

$$P(A) = \frac{1}{ab} \times \int_0^a x dx. = \frac{1}{ab} \times \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2b} \tag{12}$$

B) Evento B:

$$bx + ay \leq \frac{ab}{2} \tag{13}$$

$$y \leq \frac{b}{2} - \frac{bx}{a} \tag{14}$$

Desta forma, P(B) é a área debaixo da reta definida pela desigualdade acima dentro do retângulo, dividido pela área do retângulo (ab) Fazendo a integral da função em x variando de 0 a a/2, temos que:

$$P(B) = \frac{1}{ab} \times \int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{b}{2} - \frac{bx}{a}) dx. = \frac{1}{ab} \times \frac{ba}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

C) Evento C:

$$bx + ay \geq \frac{ab}{3} \tag{15}$$

$$y \geq \frac{b}{3} - \frac{bx}{a} \tag{16}$$

Desta forma, P(C) é a área acima da reta definida pela desigualdade limitada pelo retângulo, dividido pela área do retângulo (ab) Fazendo a integral da função em x variando de 0 a a/3, temos que:

$$P(C) = 1 - \frac{1}{ab} \times \int_0^{\frac{a}{3}} (\frac{b}{3} - \frac{bx}{a}) dx. = 1 - \frac{1}{ab} \times \frac{ba}{18} = \frac{17}{18} = 0.9444 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

D) Evento d:

$$x + y < \frac{1}{3} \tag{19}$$

$$y < \frac{1}{3} - x \tag{20}$$

Desta forma, para a e b > 1/3, P(D) é a área debaixo da reta definida pela desigualdade acima dentro do retângulo, dividido pela área do retângulo (ab) Fazendo a integral da função em x variando de 0 a 1/3, temos que:

$$P(D) = \frac{1}{ab} \times \int_0^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3} - x)dx. = \frac{1}{ab} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{18ab} = 0.005556\frac{1}{ab} \tag{21}$$

---

- Verificando se B e C são independentes

A probabilidade da interseção entre B e C é a área entre as retas definidas pela desigualdade de B e C. Logo temos que:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{ab} \times [\int_0^{\frac{a}{2}} (\frac{b}{2} - \frac{bx}{a})dx - \int_0^{\frac{a}{3}} (\frac{b}{3} - \frac{bx}{a})dx]. = \frac{5}{72} = 0.06944 \tag{22}$$

$$P(B) \times P(C) = \frac{17}{144} = 0.118 \neq P(B \cap C) \tag{23}$$

Logo, **B e C não são independentes**

---

- *Os resultados para a simulação (a=b=1) são apresentados abaixo (todos conforme os valores teóricos calculados)*

```
N=100000
a=1
b=1
x=runif(N,0,a)
y=runif(N,0,b)
A=0;B=0;C=0;D=0;BC=0;

for (i in 1:N) {
        if (x[i]<y[i]) {
                A=A+1
        }
        if (b*x[i]+a*y[i]<=a*b/2) {
                B=B+1
        }
        if (b*x[i]+a*y[i]>=a*b/3) {
                C=C+1
        }
        if (x[i]+y[i]<1/3) {
                D=D+1
        }
        if (b*x[i]+a*y[i]<=a*b/2 & b*x[i]+a*y[i]>=a*b/3) {
                BC=BC+1
        }
}

cat("P(A)=",A/N,"\nP(B) =", B/N,"\nP(C) =",C/N,"\nP(D) =",D/N,
    "\nP(BC) =",BC/N,"\nP(B)P(C) =",(B/N)*(C/N))
```

```
## P(A)= 0.50205
```

```
## P(B) = 0.12475
## P(C) = 0.94484
## P(D) = 0.05516
## P(BC) = 0.06959
## P(B)P(C) = 0.1178688
```

### Exercício 3:

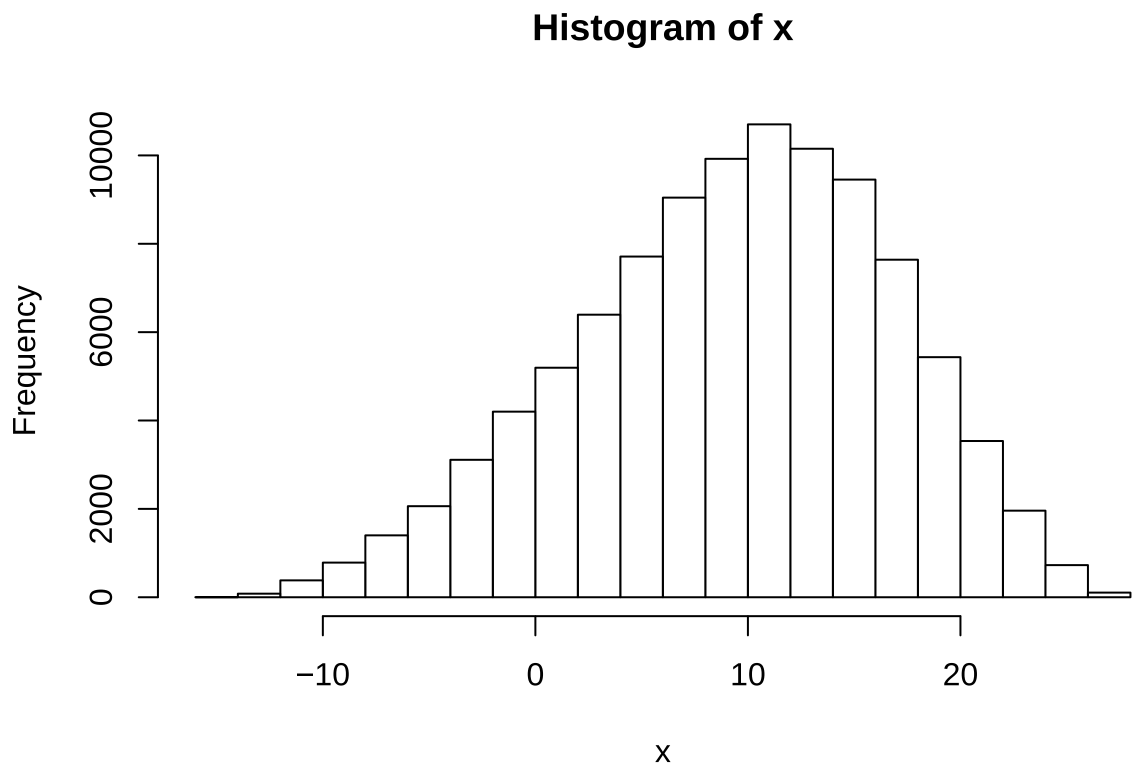
Para que a raíz seja imaginária, é necessário que:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \tag{24}$$

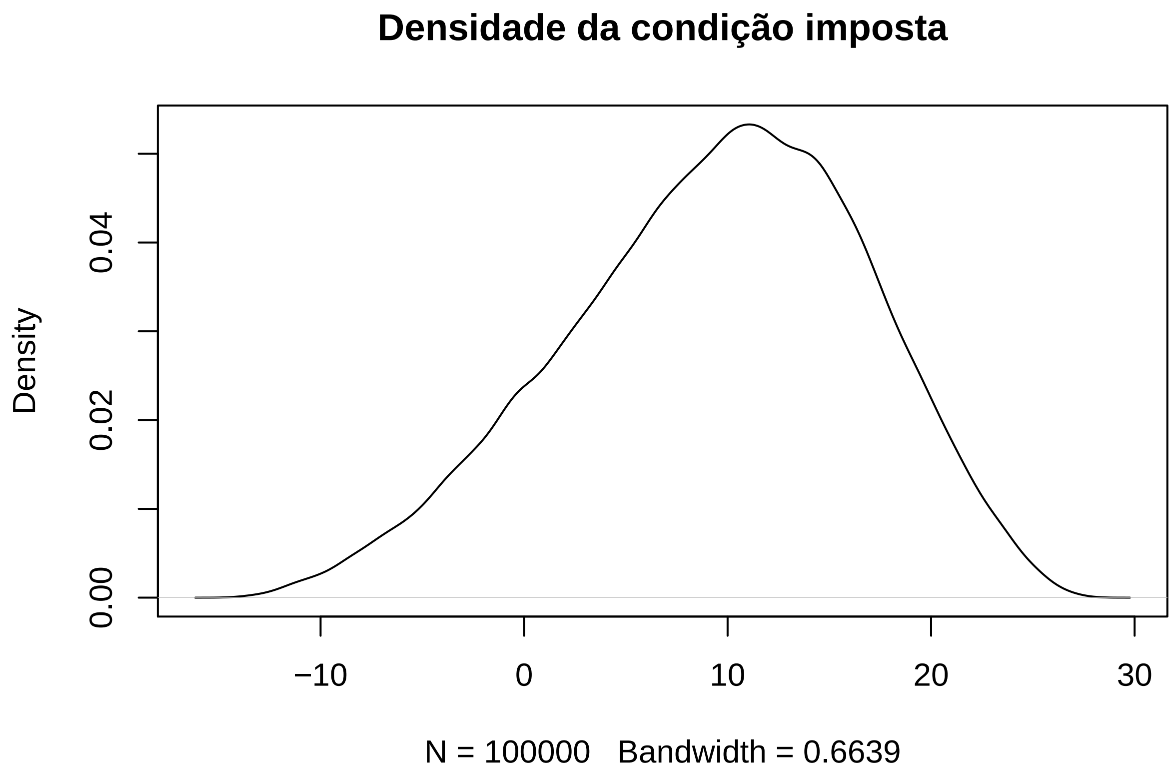
```r
N=100000
a=runif(N,1,2)
b=runif(N,5,6)
c=runif(N,2,5)

for (i in 1:N) {
        x[i]=b[i]^2-4*a[i]*c[i]
}

cat("P(raízes imaginárias) =",sum(x<0)/N)
```

```
## P(raízes imaginárias) = 0.12022
```

```r
hist(x)
```




```r
plot(density(x),main="Densidade da condição imposta")
```




O histograma da condição imposta parece tender à uma distribuição do tipo gama (negativa), conforme Figura 1 abaixo:

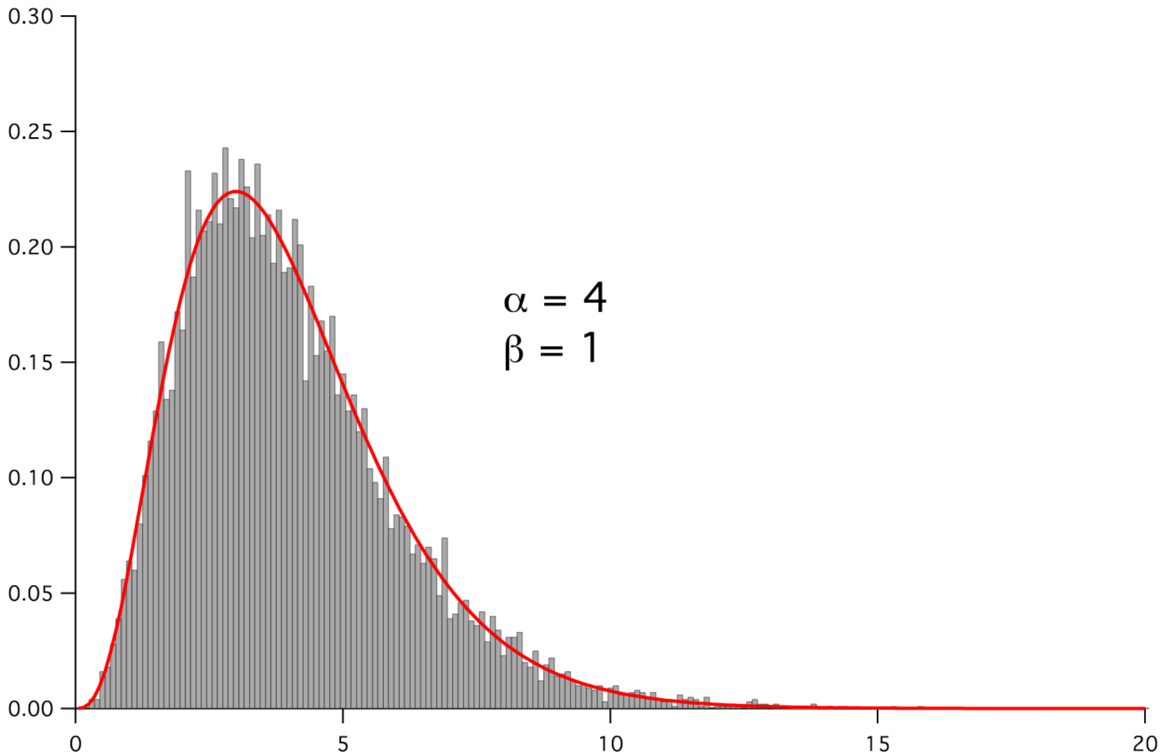



Figure 1: Exemplo de Distribuição gama

### Exercício 4:

A probabilidade da carta estar no arquivo 1 (Evento B), dado que ela não foi encontrada no arquivo 1 (Evento A), é dada por:

$$P[B|A] = \frac{P[A|B] \times P[B]}{P[A]} \tag{25}$$

Sabemos que:

b) a probabilidade da carta estar em 1, P[B] é igual a 1/3.
c) a probabilidade de encontrar a carta ($A^c$), dado que ela está em 1 (B) é $P[A^c|B] = \alpha_1$

É necessário cacular a probabilidade de encontrar a carta P[A], para resolver o problema.

Aplicando o teorema de Bayes para a informação dada em **a)**, usando a informação de **b)** e sabendo que a probabilidade da carta estar em 1 (B) dado que ela foi encontrada ($A^c$) é igual a 1, temos que:

$$P[A^c|B] = \frac{P[B|A^c] \times P[A]}{P[B]} \tag{26}$$

$$\alpha_1 = \frac{1 \times P[A^c]}{\frac{1}{3}} \tag{27}$$

$$P[A^c] = 1 - \frac{\alpha_1}{3} \tag{28}$$

Logo, a probabilidade da carta não ser encontrada P[A]=1-P[A^C]=$\alpha_1/3$.

Com esta informação, podemos resolver o problema:

$$P[B|A] = \frac{P[A|B] \times P[B]}{P[A]}$$
$$P[B|A] = \frac{(1-\alpha_1) * \frac{1}{3}}{\frac{(3-\alpha_1)}{3}} = \frac{1-\alpha_1}{3-\alpha_1}$$

### Exercício 5:

## Exercício 3.34 do livro

A probabilidade de se obter uma bola vermelha e uma bola preta em qualquer ordem é:

$$P[R,B] + P[B,R] = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = 0.53333 \tag{29}$$

```
eventos=0;k=1;total_r=4;total_b=2
for (i in 1:total_r) {
        for (j in 1:total_b) {
                remove(x)
                x=paste("R",i)
                x=paste(x,"B",j)
                eventos[k]=x
                k=k+1
        }
}
for (i in 1:total_b) {
        for (j in 1:total_r) {
                remove(x)
                x=paste("B",i)
                x=paste(x,"R",j)
                eventos[k]=x
                k=k+1
        }
}
Tab_eventos<-data.frame(table(eventos))
print(Tab_eventos[1])
```

```
##    eventos
## 1  B 1 R 1
## 2  B 1 R 2
## 3  B 1 R 3
## 4  B 1 R 4
## 5  B 2 R 1
## 6  B 2 R 2
## 7  B 2 R 3
## 8  B 2 R 4
## 9  R 1 B 1
## 10 R 1 B 2
```

```
## 11 R 2 B 1
## 12 R 2 B 2
## 13 R 3 B 1
## 14 R 3 B 2
## 15 R 4 B 1
## 16 R 4 B 2
```

```
total=(total_r+total_b)*(total_r+total_b-1)
Prob_eventos=length(eventos)/total
cat("Probabilidade simulada é igual a ",Prob_eventos)
```

```
## Probabilidade simulada é igual a  0.5333333
```

## Exercício 3.37 do livro

```
Stir=0
Fact=0
for (i in 1:100) {
        Stir[i]=sqrt(2*pi)*i^(i+1/2)*exp(-i)
        Fact[i]=factorial(i)
}
result=data.frame(Stir,Fact,log(Stir),log(Fact),Fact/Stir)
print(result)
```

```
##              Stir          Fact    log.Stir.   log.Fact. Fact.Stir
## 1    9.221370e-01  1.000000e+00  -0.08106147   0.0000000  1.084438
## 2    1.919004e+00  2.000000e+00   0.65180648   0.6931472  1.042207
## 3    5.836210e+00  6.000000e+00   1.76408154   1.7917595  1.028065
## 4    2.350618e+01  2.400000e+01   3.15726316   3.1780538  1.021008
## 5    1.180192e+02  1.200000e+02   4.77084705   4.7874917  1.016784
## 6    7.100782e+02  7.200000e+02   6.56537508   6.5792512  1.013973
## 7    4.980396e+03  5.040000e+03   8.51326465   8.5251614  1.011968
## 8    3.990240e+04  4.032000e+04  10.59419164  10.6046029  1.010466
## 9    3.595369e+05  3.628800e+05  12.79257202  12.8018275  1.009298
## 10   3.598696e+06  3.628800e+06  15.09608201  15.1044126  1.008365
## 11   3.961563e+07  3.991680e+07  17.49473417  17.5023078  1.007602
## 12   4.756875e+08  4.790016e+08  19.98027166  19.9872145  1.006967
## 13   6.187239e+09  6.227021e+09  22.54575486  22.5521639  1.006430
## 14   8.666100e+10  8.717829e+10  25.18526981  25.1912212  1.005969
## 15   1.300431e+12  1.307674e+12  27.89371665  27.8992714  1.005570
## 16   2.081411e+13  2.092279e+13  30.66665245  30.6718601  1.005221
## 17   3.539483e+14  3.556874e+14  33.50017205  33.5050735  1.004913
## 18   6.372805e+15  6.402374e+15  36.39081605  36.3954452  1.004640
## 19   1.211128e+17  1.216451e+17  39.33549863  39.3398842  1.004395
## 20   2.422787e+18  2.432902e+18  42.33145014  42.3356165  1.004175
## 21   5.088862e+19  5.109094e+19  45.37617094  45.3801389  1.003976
## 22   1.119751e+21  1.124001e+21  48.46739373  48.4711814  1.003795
## 23   2.575853e+22  2.585202e+22  51.60305261  51.6066756  1.003630
## 24   6.182979e+23  6.204484e+23  54.78125738  54.7847294  1.003478
## 25   1.545959e+25  1.551121e+25  58.00027207  58.0036052  1.003339
## 26   4.020010e+26  4.032915e+26  61.25849679  61.2617018  1.003210
## 27   1.085532e+28  1.088887e+28  64.55445235  64.5575386  1.003091
## 28   3.039823e+29  3.048883e+29  67.88676707  67.8897431  1.002980
```

```
## 29   8.816392e+30  8.841762e+30  71.25416552  71.2570390  1.002878
## 30   2.645171e+32  2.652529e+32  74.65545867  74.6582363  1.002782
## 31   8.200765e+33  8.222839e+33  78.08953547  78.0922236  1.002692
## 32   2.624465e+35  2.631308e+35  81.55535537  81.5579595  1.002607
## 33   8.661418e+36  8.683318e+36  85.05194184  85.0544670  1.002528
## 34   2.945101e+38  2.952328e+38  88.57837663  88.5808275  1.002454
## 35   1.030858e+40  1.033315e+40  92.13379472  92.1361756  1.002384
## 36   3.711332e+41  3.719933e+41  95.71737979  95.7196945  1.002317
## 37   1.373279e+43  1.376375e+43  99.32836026  99.3306125  1.002255
## 38   5.218769e+44  5.230226e+44 102.96600568 102.9681986  1.002195
## 39   2.035434e+46  2.039788e+46 106.62962356 106.6317603  1.002139
## 40   8.142173e+47  8.159153e+47 110.31855642 110.3206397  1.002085
## 41   3.338460e+49  3.345253e+49 114.03217930 114.0342118  1.002035
## 42   1.402221e+51  1.405006e+51 117.76989731 117.7718814  1.001986
## 43   6.029829e+52  6.041526e+52 121.53114357 121.5330815  1.001940
## 44   2.653242e+54  2.658272e+54 125.31537724 125.3172711  1.001896
## 45   1.194009e+56  1.196222e+56 129.12208182 129.1239336  1.001854
## 46   5.492663e+57  5.502622e+57 132.95076347 132.9525750  1.001813
## 47   2.581651e+59  2.586232e+59 136.80094961 136.8027226  1.001775
## 48   1.239238e+61  1.241392e+61 140.67218756 140.6739236  1.001738
## 49   6.072483e+62  6.082819e+62 144.56404329 144.5657439  1.001702
## 50   3.036345e+64  3.041409e+64 148.47610031 148.4777670  1.001668
## 51   1.548586e+66  1.551119e+66 152.40795862 152.4095926  1.001635
## 52   8.052902e+67  8.065818e+67 156.35923376 156.3608363  1.001604
## 53   4.268167e+69  4.274883e+69 160.32955591 160.3311282  1.001574
## 54   2.304877e+71  2.308437e+71 164.31856907 164.3201123  1.001544
## 55   1.267718e+73  1.269640e+73 168.32593031 168.3274454  1.001516
## 56   7.099414e+74  7.109986e+74 172.35130906 172.3527971  1.001489
## 57   4.046771e+76  4.052692e+76 176.39438643 176.3958484  1.001463
## 58   2.347187e+78  2.350561e+78 180.45485465 180.4562914  1.001438
## 59   1.384874e+80  1.386831e+80 184.53241645 184.5338289  1.001413
## 60   8.309438e+81  8.320987e+81 188.62678455 188.6281734  1.001390
## 61   5.068873e+83  5.075802e+83 192.73768118 192.7390473  1.001367
## 62   3.142770e+85  3.146997e+85 196.86483760 196.8661817  1.001345
## 63   1.979988e+87  1.982608e+87 201.00799366 201.0093164  1.001324
## 64   1.267218e+89  1.268869e+89 205.16689741 205.1681995  1.001303
## 65   8.237084e+90  8.247651e+90 209.34130471 209.3425868  1.001283
## 66   5.436581e+92  5.443449e+92 213.53097888 213.5322415  1.001263
## 67   3.642578e+94  3.647111e+94 217.73569034 217.7369341  1.001245
## 68   2.476998e+96  2.480036e+96 221.95521634 221.9564418  1.001226
## 69   1.709159e+98  1.711225e+98 226.18934060 226.1905483  1.001208
## 70  1.196432e+100 1.197857e+100 230.43785310 230.4390436  1.001191
## 71  8.494810e+101 8.504786e+101 234.70054974 234.7017234  1.001174
## 72  6.116363e+103 6.123446e+103 238.97723216 238.9783896  1.001158
## 73  4.465016e+105 4.470115e+105 243.26770746 243.2688490  1.001142
## 74  3.304162e+107 3.307885e+107 247.57178798 247.5729141  1.001127
## 75  2.478159e+109 2.480914e+109 251.88929111 251.8904022  1.001112
## 76  1.883428e+111 1.885495e+111 256.22003907 256.2211356  1.001097
## 77  1.450261e+113 1.451831e+113 260.56385873 260.5649410  1.001083
## 78  1.131219e+115 1.132428e+115 264.92058143 264.9216498  1.001069
## 79  8.936750e+116 8.946182e+116 269.29004280 269.2910977  1.001055
## 80  7.149494e+118 7.156946e+118 273.67208262 273.6731243  1.001042
## 81  5.791165e+120 5.797126e+120 278.06654464 278.0675734  1.001029
## 82  4.748815e+122 4.753643e+122 282.47327643 282.4742927  1.001017
```

```
## 83  3.941565e+124 3.945524e+124 286.89212928 286.8931333  1.001005
## 84  3.310954e+126 3.314240e+126 291.32295804 291.3239501  1.000993
## 85  2.814344e+128 2.817104e+128 295.76562096 295.7666014  1.000981
## 86  2.420363e+130 2.422710e+130 300.21997966 300.2209486  1.000969
## 87  2.105739e+132 2.107757e+132 304.68589892 304.6868568  1.000958
## 88  1.853071e+134 1.854826e+134 309.16324661 309.1641936  1.000947
## 89  1.649251e+136 1.650796e+136 313.65189362 313.6528299  1.000937
## 90  1.484341e+138 1.485716e+138 318.15171370 318.1526396  1.000926
## 91  1.350764e+140 1.352002e+140 322.66258338 322.6634991  1.000916
## 92  1.242715e+142 1.243841e+142 327.18438191 327.1852877  1.000906
## 93  1.155736e+144 1.156773e+144 331.71699114 331.7178872  1.000896
## 94  1.086403e+146 1.087366e+146 336.26029546 336.2611820  1.000887
## 95  1.032092e+148 1.032998e+148 340.81418168 340.8150589  1.000878
## 96  9.908175e+149 9.916779e+149 345.37853901 345.3794071  1.000868
## 97  9.611016e+151 9.619276e+151 349.95325894 349.9541180  1.000859
## 98  9.418878e+153 9.426890e+153 354.53823518 354.5390855  1.000851
## 99  9.324769e+155 9.332622e+155 359.13336362 359.1342054  1.000842
## 100 9.324848e+157 9.332622e+157 363.73854223 363.7393756  1.000834
```

```r
Stir200=sqrt(2*pi)*200^(200+1/2)*exp(-200)
print(Stir200)
```

```
## [1] Inf
```

```r
Fat200=factorial(200)
```

```
## Warning in factorial(200): valor fora de limites em 'gammafn'
```

```r
print(Fat200)
```

```
## [1] Inf
```

Observa-se que a aproximação tende a reduzir o erro percentual quanto maior é o número N. (a ultima coluna é a divisão do valor real (factorial) pela aproximação). Comparando os valores dos logaritmos também chega-se a mesma conclusão.

Sobre o cálculo para fatorial de 200, em ambos os casos ultrapassa os limites computacionais, produzindo o resultado Inf.