

Lista de Exercícios IPE # 4a

As referências a seções, equações, figuras, exemplos e exercícios são do livro *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB* de Stephen M. Kay, Springer, 2006.

Exercício 1

Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ e defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$X_n \Rightarrow \begin{cases} X_n(\omega_1) = X_n(\omega_2) & = 1 \\ X_n(\omega_3) = X_n(\omega_4) & = 0 \end{cases} \quad \text{para todo } n$$

$$X \Rightarrow \begin{cases} X(\omega_1) = X(\omega_2) & = 0 \\ X(\omega_3) = X(\omega_4) & = 1 \end{cases}$$

Mostre que a convergência em distribuição não significa convergência em probabilidade.

Exercício 2

Sejam $X_n, n \geq 1$, variáveis independentes com

$$P(X_n = \pm 2^n) = 2^{-n-1} \text{ e } P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}), \quad n \geq 1,$$

Verifique que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Use simulação para demonstrar o resultado teórico.

Exercício 3

Considerando que X_1, \dots, X_n possam ser variáveis aleatórias, calcule o limite de

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Verifique o resultado por meio de simulação.