

Lista de Exercícios IPE # Auxiliar

Exercício 1 (Super fácil - lembrar conceitos)

Considere o espaço amostral $\Omega = [0, 1)$ com a seguinte medida de probabilidade $P(A) = \int_A 1 d\omega$, $A \subset \Omega$.

Para $A = [0, \frac{1}{2})$, $B = [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $C = [0, \frac{1}{8}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup [\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, determine se A , B e C são mutuamente independentes.

Exercício 2

Seja $X \sim \text{Geo}(p)$.

a) Mostre que $P(X > n) = p^n$.

b) Determine $P(\{X > n + k\} \mid \{X > n\})$. O que vc pode dizer a respeito da variável aleatória?

Exercício 3

Uma luz de intensidade λ é direcionada a um fotomultiplicador que gera $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ primárias. O fotomultiplicador também gera Y secundárias, onde dado $X = n$, Y é condicionalmente geométrica com parâmetro $(n + 1)^{-1}$. Encontre o número esperado de secundárias e a correlação entre as primárias e secundárias.

Exercício 4

A entropia diferencial de uma variável contínua X com densidade f é

$$h(X) = E[-\ln(f(X))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{1}{f(x)}\right) dx.$$

Se $X \sim \text{Uni}(0, 2)$, encontre $h(X)$. Repita para $X \sim \text{Uni}(0, \frac{1}{2})$ e para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Como você compararia as distribuições? Justifique.

Exercício 5

Sejam X e Y variáveis uniformes independentes no intervalo $(0, 1)$. Mostre que se

$U = \sqrt{-2 \ln(X)} \cos(2\pi Y)$ e $V = \sqrt{-2 \ln(X)} \sin(2\pi Y)$, então U e V são variáveis $N(0, 1)$ independentes.

Exercício 6

Sejam X e Y variáveis independentes e com distribuição Uniforme Contínua em $(0, 1)$. Defina as variáveis W e Z como o mínimo e máximo entre X e Y , respectivamente. Mostre que a esperança condicional de W dado Z é $\frac{Z}{2}$.