

# Sensor Fusion for Irregularly Sampled Systems

Taiguara Tupinambás

**Orientador por:** Prof. Dr. Bruno Teixeira e Prof. Dr. Leonardo Tôrres

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares (MACSIN)  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE)  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

21 de Fevereiro, 2019

# Sumário

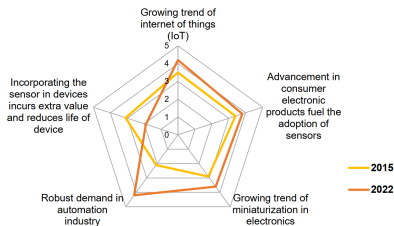
- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Sumário

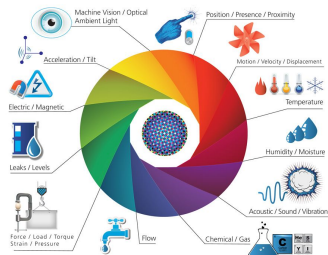
- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Crescimento do Mercado Global de Sensores

- CAGR de 11.3% a.a. no período 2016-2022
- USD 241 bilhões em 2022



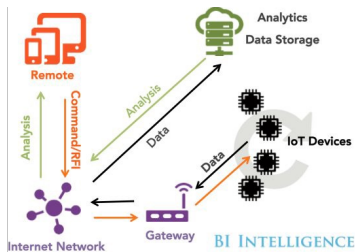
Fonte: Allied Market Research, 2016



Fonte: Postscope, 2015

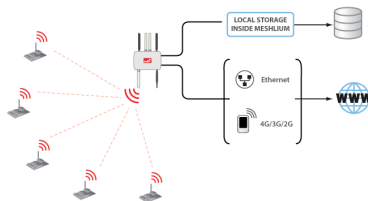
# Tendências

## Internet das Coisas



Fonte: Business Insider

## Redes Complexas de Sensores



Fonte: Libelium

# Desafios

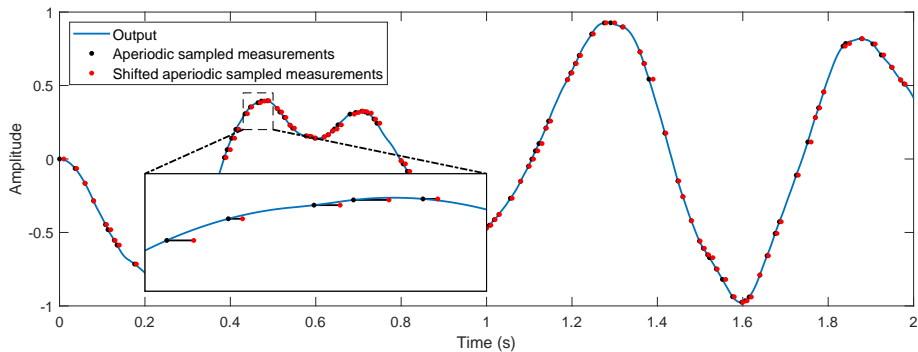
Aplicações de fusão sensorial clássicas consideram que as informações são **recebidas de forma regular**. Caso não sejam, é possível adaptar os algoritmos considerando os **carimbos de tempo correta**.

Falta de sincronização entre os múltiplos sensores da rede pode levar a **amostragem irregular** sem informação confiável de **carimbo de tempo**

## Soluções:

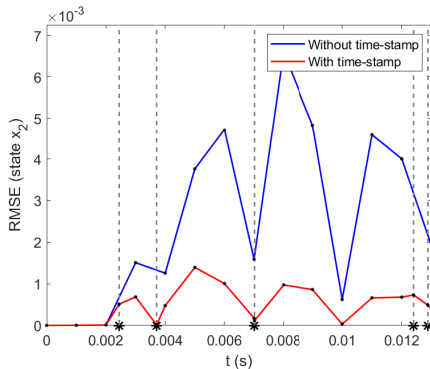
- Investir em sincronização e em capacidade computacional
- Deslocar os instantes de tempo

# Efeitos de se deslocar os instantes de tempo



# Efeitos de se deslocar os instantes de tempo

Evolução do erro de estimação de um estado, para estimadores que consideram o carimbo de tempo (**vermelho**) e não consideram (**azul**)





# Vale a pena investir em sincronização e capacidade computacional?

- Qual a **relevância** do erro para os objetivos da fusão sensorial?
- Quais são os **fatores** que influenciam o desempenho?

Fusão sensorial resumido ao problema de *estimação de estados* de sistemas amostrados *aperiodicamente*

# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - **Objetivos**
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Objetivos

1. Revisar os métodos de **fusão sensorial** e o problema de **amostragem irregular**;
2. Discutir os algoritmos e suas **adaptações** ao modelo de amostragem aperiódica;
3. Desenvolver uma **metodologia** para estudar os efeitos de desconsiderar os carimbos de tempo;
4. Aplicar a metodologia em um sistema linear e outro não-linear, utilizando testes numéricos para **avaliar precisão e consistência** das estimativas;

# Sumário

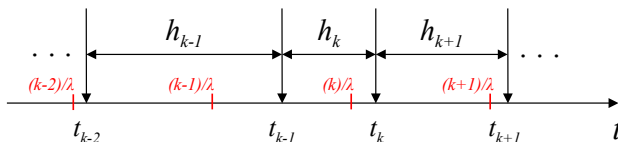
- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - **Modelo de Amostragem: Aperiódica**
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Modelo de Amostragem: Aperiódica

Instantes de amostragem modelados por um **processo de Poisson**:

$$\rho_{h_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$\lambda \rightarrow$  frequência média de amostragem



# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - **Estimação de Estados de Sistemas Amostrados**
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Estimação de Estados

## Etapa de predição:

$$\rho(x_k | (y_1, \dots, y_{k-1})) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x_k | x_{k-1}) \rho(x_{k-1} | y_1, \dots, y_{k-1}) dx_{k-1}$$

## Etapa de assimilação de dados:

$$\rho(x_k | (y_1, \dots, y_k)) = \frac{\rho(y_k | x_k) \rho(x_k | (y_1, \dots, y_{k-1}))}{\rho(y_k | (y_1, \dots, y_{k-1}))}$$

# Sistemas Amostrados Não Lineares

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), w(t), t) \\ y(t_k) &= g(x(t_k), v(t_k), t_k)\end{aligned}$$

Discretizado por Runge-Kutta:

$$\begin{aligned}x(t_{k+1}) &= x(t_k) + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4), \\ t_{k+1} &= t_k + h_k,\end{aligned}$$



# Sistemas Amostrados Lineares

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t_k) &= Cx(t_k) + v(t_k)\end{aligned}$$

Discretizado por:

$$x(t_{k+1}) = A_d(t_k, t_{k+1})x(t_k) + B_d(t_k, t_{k+1})u(t_k) + w_d(t_k, t_{k+1})$$

# Formulação do Problema

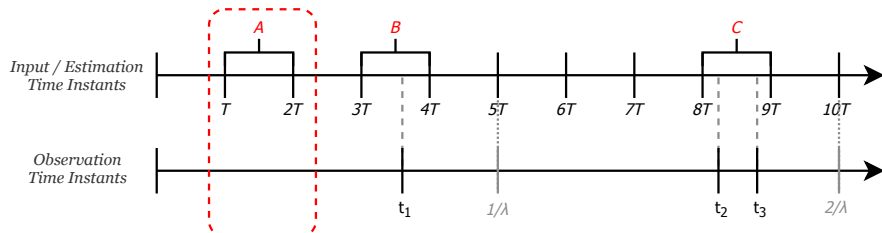
Queremos estimar o vetor de estados  $x(iT)$  e sua covariância de forma recursiva, em intervalos igualmente espaçados  $T$ , considerando:

- Instantes de tempo das observações  $t_k$  é definido pelo intervalo:
  - $h_k \triangleq t_k - t_{k-1}$
  - $h_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- Entrada  $u(t)$  é atualizada em intervalos de tempo constantes  $T$ :
  - $u(t) = u(iT)$ , para  $iT \leq t < (i+1)T$

# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - **Estimação com Amostragem Aperiódica**
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Instantes de Estimação e de Observação



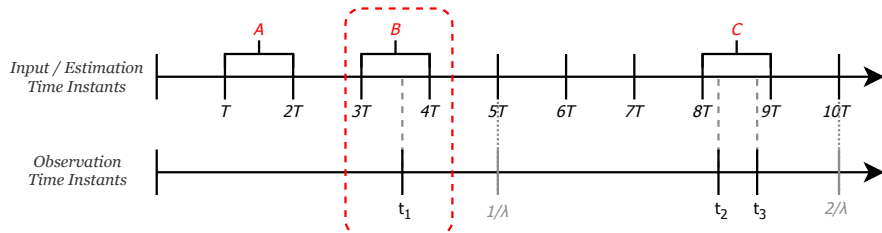
- **Com carimbo:**

1. predição, de  $T$  a  $2T$ ;

- **Sem carimbo:**

1. predição, de  $T$  a  $2T$ ;

# Instantes de Estimação e de Observação



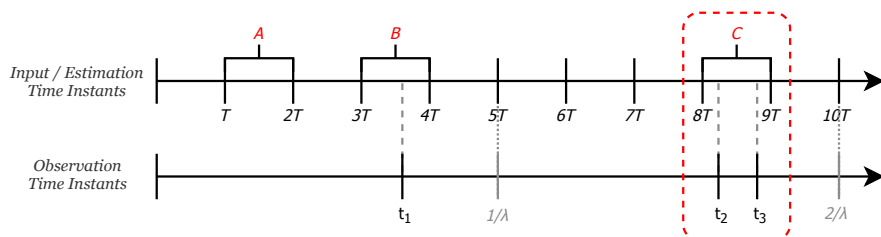
## Com carimbo:

1. completo, de  $3T$  a  $t_1$ ;
2. predição, de  $t_1$  a  $4T$ ;

## Sem carimbo:

1. completo, de  $3T$  a  $4T$ , com  $t_1 = 4T$ ;

# Instantes de Estimação e de Observação



- **Com carimbo:**

1. completo, de  $8T$  a  $t_2$ ;
2. completo, de  $t_2$  a  $t_3$ ;
3. predição, de  $t_3$  a  $9T$ ;

- **Sem carimbo:**

1. completo, de  $8T$  a  $9T$ , com  $t_3 = 9T$ ;

# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - **Análise do Erro**
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Diretamente proporcional à derivada do sinal

Para um modelo de medição linear e  $\delta_k = nT - t_k$ ,

$$e_k = C[x(t_k) - x(t_k + \delta_k)],$$

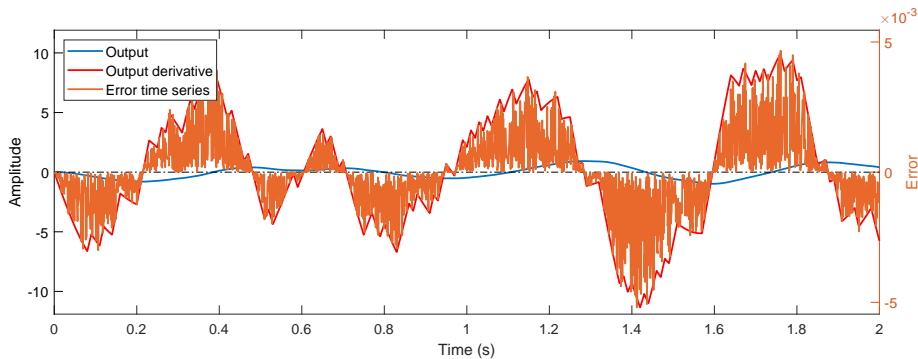
$$e_k = C \left( \frac{[x(t_k) - x(t_k + \delta_k)]}{\delta_k} \right) \delta_k,$$

$$e_k \approx -C \frac{dx}{dt} \delta_k,$$

$$e_k \approx -\frac{dy}{dt} \delta_k.$$

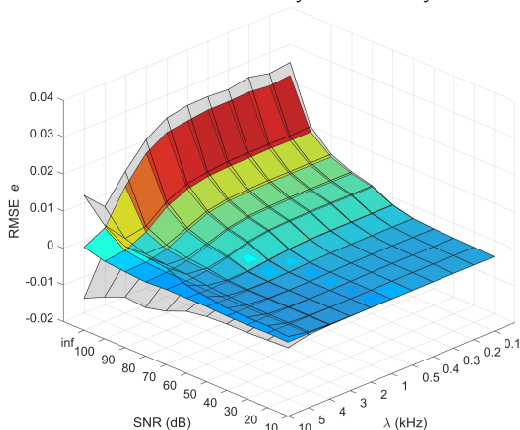


# Diretamente proporcional à derivada do sinal



# Em função do ruído e da frequência média de amostragem

$$\text{RMSE}_e = \text{RMSE}_{\tilde{y}} - \text{RMSE}_y$$



# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Parâmetros variados

Símbolo	Definição	Objetivo
$\lambda$	$h_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$	Influência da <b>dinâmica</b> do sinal de saída
$\alpha$	$\frac{1}{\lambda} \triangleq \alpha T$	Influência da <b>relação</b> entre amostragens
SNR	$SNR_{\text{dB}} \triangleq 10 \log_{10} \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}}$	Influência do <b>ruído</b>

# Sumário

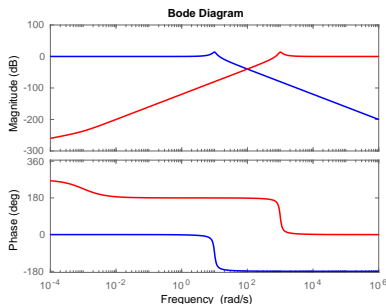
- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - **Sistema Linear**
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Descrição do Sistema

Dois modos subamortecidos, um **passa-baixas** e outro **passa-altas**:

$$G_{lp}(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$$

$$G_{hp}(s) = \frac{s^2 - 0.001s}{s^2 + 200s + 10^6}$$



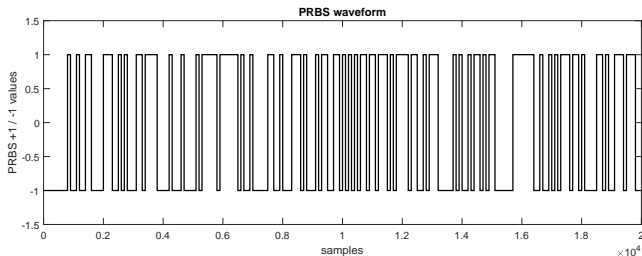
# Descrição do Sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

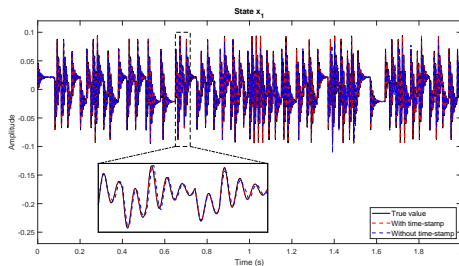
$$A = \begin{bmatrix} -100 & 994.99 & 0 & 0 \\ -994.99 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9.949 \\ 0 & 0 & -9.949 & -1 \end{bmatrix}$$

Entrada:

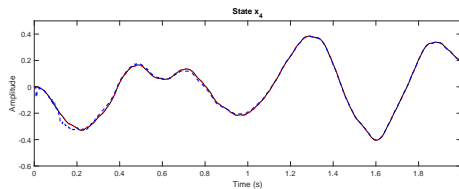


# Estimativas Para Uma realização

Estado do modo passa-alta:



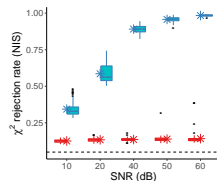
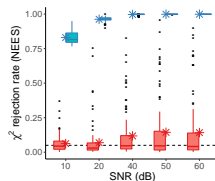
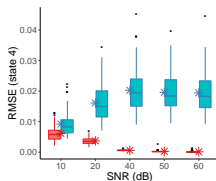
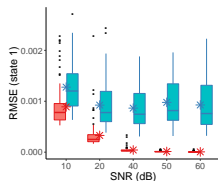
Estado do modo passa-baixa:





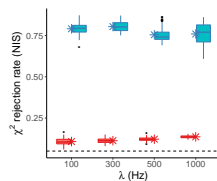
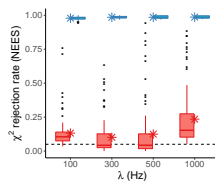
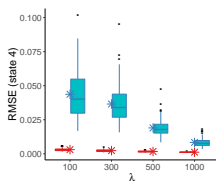
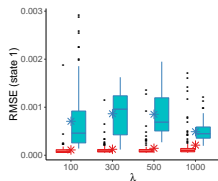
# Resultados - Variação do Nível de Ruído do Sistema (SNR)

Scenarios		State 1 (RMSE difference)		State 4 (RMSE difference)	
		$\mu_D$	Cohen's $d$	$\mu_D$	Cohen's $d$
SNR (dB)	10	$[2.7, 5.0] \times 10^{-4}$	$[0.39, 0.97]$	$[2.3, 3.8] \times 10^{-3}$	$[0.52, 1.1]$
	20	$[5.0, 6.9] \times 10^{-4}$	$[0.97, 1.6]$	$[11, 14] \times 10^{-3}$	$[1.6, 2.3]$
	40	$[7.4, 9.1] \times 10^{-4}$	$[1.6, 2.3]$	$[18, 21] \times 10^{-3}$	$[2.3, 3.1]$
	50	$[8.8, 10] \times 10^{-4}$	$[1.9, 2.6]$	$[18, 21] \times 10^{-3}$	$[2.8, 3.7]$
	60	$[8.3, 10] \times 10^{-4}$	$[1.6, 2.3]$	$[18, 21] \times 10^{-3}$	$[2.6, 3.4]$



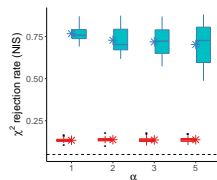
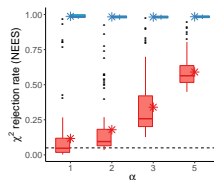
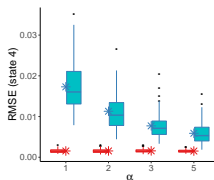
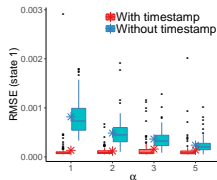
# Resultados - Variação da Frequência Média da Saída ( $\lambda$ )

Scenarios		State 1 (RMSE difference)		State 4 (RMSE difference)	
		$\mu_D$	Cohen's $d$	$\mu_D$	Cohen's $d$
$\lambda$ (kHz)	0.1	$[4.6, 7.3] \times 10^{-4}$	[0.58, 1.2]	$[3.7, 4.4] \times 10^{-2}$	[2.0, 2.7]
	0.3	$[6.5, 8.2] \times 10^{-4}$	[1.4, 2.0]	$[3.1, 3.7] \times 10^{-2}$	[2.1, 2.9]
	0.5	$[6.1, 8.1] \times 10^{-4}$	[1.1, 1.7]	$[1.6, 1.9] \times 10^{-2}$	[2.3, 3.1]
	1	$[2.1, 3.5] \times 10^{-4}$	[0.46, 1.0]	$[0.66, 0.78] \times 10^{-2}$	[2.0, 2.7]



# Resultados - Variação da Relação Entre Frequências ( $\alpha$ )

Scenarios		State 1 (RMSE difference)		State 4 (RMSE difference)	
		$\mu_D$	Cohen's $d$	$\mu_D$	Cohen's $d$
$\alpha$	1	$[5.9, 7.8] \times 10^{-4}$	$[1.1, 1.8]$	$[15, 17] \times 10^{-3}$	$[2.5, 3.2]$
	2	$[3.1, 4.2] \times 10^{-4}$	$[0.96, 1.6]$	$[8.9, 11] \times 10^{-3}$	$[1.9, 2.6]$
	3	$[1.6, 2.5] \times 10^{-4}$	$[0.56, 1.1]$	$[5.6, 6.7] \times 10^{-3}$	$[1.7, 2.4]$
	5	$[0.46, 1.5] \times 10^{-4}$	$[0.088, 0.65]$	$[3.8, 4.9] \times 10^{-3}$	$[1.3, 2.0]$



# Sumário

- 1 Motivação
  - Popularização de Redes de Sensores
  - Objetivos
- 2 Metodologia
  - Modelo de Amostragem: Aperiódica
  - Estimação de Estados de Sistemas Amostrados
  - Estimação com Amostragem Aperiódica
- 3 Resultados Numéricos
  - Análise do Erro
  - Cenários de Simulação
  - Sistema Linear
  - Sistema Não-Linear
- 4 Conclusões

# Descrição do sistema

Considere o sistema de um robô móvel não-holonômico:

$$\dot{p}_x = v \cos(\theta),$$

$$\dot{p}_y = v \sin(\theta),$$

$$\dot{\theta} = u_1(t),$$

$$\dot{v} = u_2(t),$$

em que:

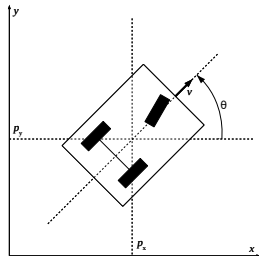
$p_x$  e  $p_y$ : coordenadas de posição,

$\theta$ : orientação angular,

$v$ : velocidade linear,

$u_1$ : entrada: velocidade angular ( $\omega$ ),

$u_2$ : entrada: aceleração linear ( $a$ )



# Robô Móvel não-Holomônico

Vetor de estados:

$$x_i \triangleq [p_{x,i} \ p_{y,i} \ \theta_i \ v_i]^T.$$

Modelo de observações:

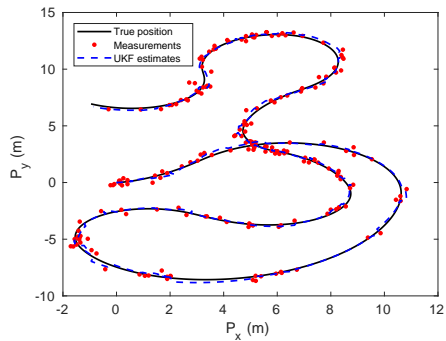
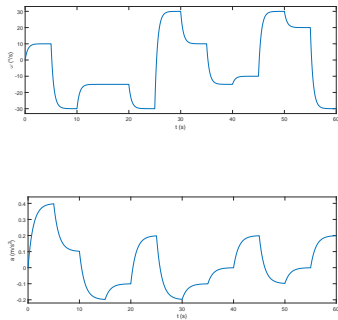
$$y(t_k) = \begin{bmatrix} p_x(t_k) \\ p_y(t_k) \end{bmatrix} + v(t_k), \quad v(t_k) \sim \mathcal{N}(0, R_{t_k}).$$

Vetor de entradas:

$$u_i = [\omega_i \ a_i]^T,$$

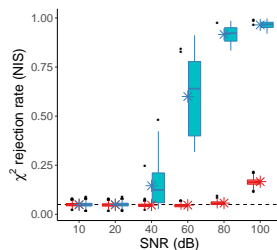
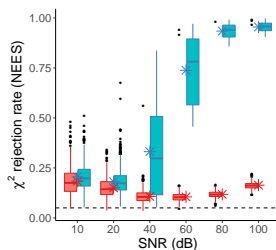
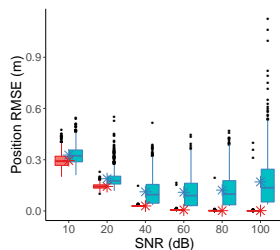
$$u_i = \tilde{u}_i - w_i, \quad w \sim \mathcal{N}(0, Q_i).$$

# Entradas e Realização Única



# Resultados - Variação do Nível de Ruído da Saída $SNR_{obs}$

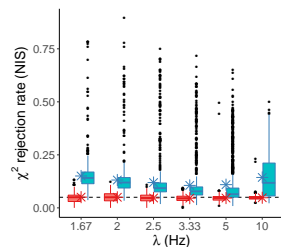
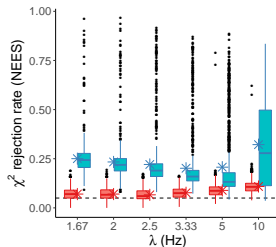
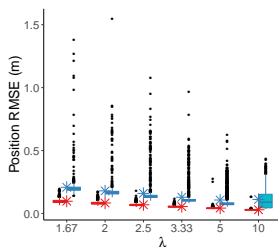
Scenarios		Position (RMSE difference)	
		$\mu_D$ (cm)	Cohen's $d$
SNR (dB)	10	[3.0, 3.4]	[0.76, 0.94]
	20	[4.2, 4.8]	[0.83, 1.0]
	40	[7.8, 8.7]	[1.0, 1.2]
	60	[9.8, 11]	[1.2, 1.4]
	80	[11, 13]	[1.2, 1.4]
	100	[16, 18]	[1.2, 1.3]





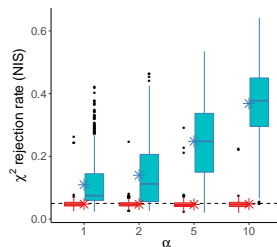
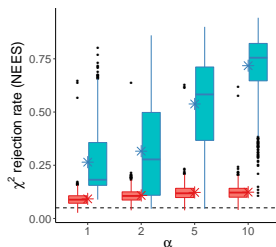
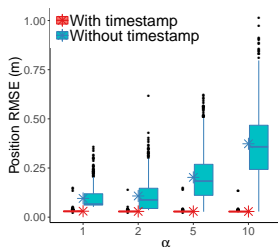
# Resultados - Variação da Frequência Média da Saída ( $\lambda$ )

Scenarios	$\lambda$ (kHz)	Position (RMSE difference)	
		$\mu_D$ (cm)	Cohen's $d$
	1.67	[10, 12]	[1.1, 1.3]
	2	[9.1, 10]	[1.0, 1.2]
	2.5	[8.4, 9.7]	[0.82, 1.0]
	3.33	[6.9, 7.9]	[0.79, 0.97]
	5	[6.0, 6.9]	[0.78, 0.96]
	10	[7.7, 8.7]	[1.0, 1.2]



# Resultados - Variação da Relação Entre Frequências ( $\alpha$ )

Scenarios	$\alpha$	Position (RMSE difference)	
		$\mu_D$ (cm)	Cohen's $d$
$\alpha$	1	[6.2, 6.8]	[1.2, 1.4]
	2	[7.4, 8.3]	[1.0, 1.2]
	5	[17, 18]	[1.3, 1.5]
	10	[33, 35]	[1.9, 2.1]



# Principais Resultados e Contribuições

Cenários com **maior** influência no desempenho do estimador:

- **Baixo ruído** nos sinais;
- **Baixa frequência** média da amostragem irregular;
- **Menor relação** entre a requência média da amostragem irregular e a frequência de estimação, quando SNR das observações é maior que o do modelo de processo.

Abordagem útil para a tomada de decisão sobre investimento em sincronização e em capacidade computacional.

# Trabalhos Futuros

1. Investigação sobre algoritmos que compensam o erro de deslocar instantes de tempo;
2. Desenvolvimento de rotinas de sintonia do estimador *ad hoc*, aumentando o traço da matriz de covariância do modelo de observação, para estimativas mais consistentes;
3. Estudo dos efeitos de amostragem irregular com a introdução de atraso de tempo;
4. Utilização de outros métodos de filtragem, como o baseado em partículas, com potencial de ser mais robustos a ruídos não gaussianos;

# OBRIGADO

e-mail: [tatatupi@gmail.com.br](mailto:tatatupi@gmail.com.br)