

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 3499-4866 - Fax: +55 3499-4850



---

# Sensor Fusion for Irregularly Sampled Systems

---

**Taiguara Melo Tupinambás**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientadores:** Prof. Bruno Otávio Soares Teixeira, Dr.  
Prof. Leonardo Antônio Borges Tôrres, Dr.

Belo Horizonte, Maio de 2018



---

# Contents

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Problem Formulation . . . . .	4
1.3	Objectives . . . . .	7
1.4	Text Outline . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Theoretical Background</b>	<b>9</b>
2.1	Irregular Sampling Survey . . . . .	9
2.1.1	Time Delay . . . . .	11
2.1.2	Packet Loss . . . . .	13
2.1.3	Uncertain Observation . . . . .	13
2.1.4	Aperiodic Sampling . . . . .	13
2.1.5	Multi-Rate Sampling . . . . .	14
2.2	Sensor Fusion . . . . .	14
2.2.1	Probabilistic Sensor Fusion . . . . .	14
2.2.2	Sensor Fusion Techniques . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Simulation Methods and Assumptions</b>	<b>17</b>
3.1	State Estimation with Irregular Sampling . . . . .	17
3.1.1	Input Irregular Sampling . . . . .	17
3.2	With Timestamp . . . . .	18
3.3	Without Timestamp . . . . .	19

<b>4</b>	<b>Results</b>	<b>21</b>
4.1	Unicycle Position Estimation . . . . .	21
4.1.1	System Description . . . . .	21
4.1.2	Measurement Signal-to-Noise Ratio Variation . . . . .	24
4.1.3	Average Sampling Rate Variation . . . . .	26
4.1.4	Regular and Average Irregular Time Interval Relation Variation .	26
4.2	Other system 1 . . . . .	27
4.3	Other system 2 . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>29</b>
5.1	Project Overview . . . . .	29
5.2	Main Results . . . . .	29
5.3	Future Work . . . . .	29
	<b>References</b>	<b>35</b>

---

# Todo list

---

■ Resposta sobre comentário do Prof. Bruno . . . . .	2
■ Definir quais problemas serão estudados . . . . .	5
■ Talvez incluir informação de que, em alguns casos, é possível evitar essas irregularidades com investimentos na rede de comunicação . . . . .	11
■ Vale a pena introduzir o assunto de irregularidades do controlador para o atuador (e não só do sensor para o controlador)? . . . . .	11
■ Acho que não seria necesssário dar mais detalhes da descrição, uma vez que já foi falado na formulação . . . . .	12
■ Terminar seção de time-delay . . . . .	12
■ Terminar seções de irregular sampling, da mesma forma que time-delay . . . .	13
■ Faltam ajustes nas figuras de resultados . . . . .	28



---

# Introduction

---

## 1.1 Motivation

In nature it is possible to observe data fusion in a variety of phenomena. Animals combine signals from different senses, such as sight, hearing, smell, taste and touch, to recognize the surroundings. Plants have analogous mechanisms, which are used to modulate water consumption, to change the color of its leaves or to bend its structure towards the light, for instance. Throughout history, the sensory systems in living beings have evolved to assimilate multiple information coming from numerous sources in a highly complex and efficient way, in order to have a better perception of the environment.

Nowadays information fusion is studied in many fields of science, as a way of exploiting data from multiple sources to achieve better outcomes in comparison to those obtained if any of the sources were used separately (Dasarathy, 2001). Other terms have been used to denote the synthesis of information in technical literature, for instance, data fusion, sensor fusion, multi-sensor fusion or multi-sensor integration. To avoid confusion, the terminology used by (Elmenreich, 2002) will be adopted, whereby information fusion is understood as the overall term and sensor fusion is used in cases for which the sources of information are sensors.

Some research fields have been increasingly exploiting the advantages of sensor fusion techniques, such as robotics, military, biometrics and image processing. The main benefits expected are related to accuracy, due to the use of redundant or complementary data, to dimensionality, that is additional information being created by a group of data, and to robustness against failure and interference. Consequently much effort has been put into the development and investigation of data fusion techniques.

The work of (Khaleghi et al., 2013) presents an extensive review of different approaches available, categorizing them by the way sensor data uncertainty is represented, namely, probabilistic fusion, evidential belief reasoning, fuzzy reasoning, possibilistic fusion, rough set based fusion and hybrid fusion.

Data fusion techniques based on probability theory are the earliest available and perhaps the most popular until now. They are concerned with estimating the probability distribution functions (PDF) of a system's states by means of the Bayesian approach. If the system is linear and Gaussian, the Kalman filter (KF) guarantees optimal estimation. For nonlinear processes, KF generalizations were proposed, such as the extended Kalman filter (EKF) or the unscented Kalman filter (UKF) (Julier and Uhlmann, 2004). On the other hand, particle filters (PF) can be used to deal with both nonlinearities in the dynamics and non-Gaussian distributions (Arulampalam et al., 2002).

The most common class of systems studied in state estimation is the class of sampled-data systems, due to the wide use of digital devices. Although often described by continuous time differential equations, they can be modeled using discrete state equations, using approximation techniques (Phillips and Nagle, 1995). Usually the sampling period of such systems are constant and known. In other words, the sensors are considered to transmit data at regular intervals. However, for many applications, such assumption is not valid. The use of several redundant sensors, for example, with different sampling rates or unsynchronized with one another, leads to data being received at random time instants. Additionally, when data from multiple sensors are transmitted through several subsystems in a network, there might be loss of packets and delays (Schenato et al., 2007) or even multiple information arriving simultaneously (Moayedi et al., 2011). In networked control systems, event-triggered sampling schemes have been proposed to optimize the access to communication channels (Hu et al., 2017), which will also generate time-varying sampling intervals. Nowadays, because of the ever-growing scientific advances, the technology of microprocessors, sensors and communication has become increasingly accessible, which continues to ensure that multiple sensor networks are more and more common.

Thus, despite improving accuracy and robustness of the estimation process, the



fusion of data from multiple sensors might introduce challenges to the state estimation algorithms, due to sampling irregularities. Depending on how they take place, modifications to the KF and its generalizations can be carried out to tackle these abnormalities. In the work of (Fatehi and Huang, 2017), a fusion KF is proposed to estimate the states of a system with multi-rate measurements, whereby one of them is fast, regular and delay-free and the other is slow, irregular and randomly delayed. One application of such system is for industrial process control, where there is online instrumentation characterized by the former and data from laboratory analysis, which are much more accurate, but works as the latter measurement system. For a more general case, when the random delays of the more accurate measurement process are unknown, the work of (Gopalakrishnan et al., 2010) presents a critical analysis of the available methods for data fusion. They are separated into two categories: those that incorporate the delayed measurements upon arrival, and methods that rely in state augmentation, in order to assimilate the delayed information between estimation steps.

In general the proposed methods and their performance will depend on particularities of the sampling irregularities and how they are modeled. Time delays can be multiple of a base sampling period, for instance. In those cases, the system can be described by a time-invariant discrete state equation, but with a particular representation of the measurement model. Delays can happen at single or multiple lags (Peñarrocha et al., 2012), can lead to out-of-sequence measurements (Anxi et al., 2005; Westenberger et al., 2013) or there can also be data dropout (Zhu et al., 2013). Nevertheless, the system can still be considered to be sampled at regular intervals. However, when the measurement instants happen after random time intervals, the discrete-state representation leads to a time-varying system, since the sampling period changes over time. Some researches treat the variable measurement instants as stochastic processes (Micheli and Jordan, 2002) or as a periodic sampling interval subject to noisy perturbations (Shen et al., 2016). Most of the time, the instant is considered to be known and the methods assimilate such information in the algorithm.

To the best of the author's knowledge, no method was proposed so far to take the irregularity into account and improve the estimation efficiency, for the cases in which

the random time instant the signal was measured is not known or not reliable. If the sampling irregularity is caused due to the lack of sensor synchronization in the network, several algorithms can ensure a common timescale (Sivrikaya and Yener, 2004), at the expense of additional investments or energy use. Another approach, believed to be largely used on practice, is to disregard the irregularities, assimilating the measurements once they arrive, considering regular time intervals *FALTA REFERÊNCIA (dificuldade em encontrar)*. In this case, additional noises are tuned in the estimation process, but it might be irrelevant to the overall performance.

Knowing to what extent the estimation accuracy is deteriorated by ignoring the additional uncertainty caused by the sampling irregularity is important to decide whether or not to invest in synchronization. In addition, the investment in more sensors to the network in order to improve accuracy might not pay off, if it increases the occurrence of irregularities. Nevertheless there are no detailed studies on the behavior of the degradation in accuracy. Therefore, this work assesses the differences in state estimation performance for systems with random sampling intervals with and without timestamp for different scenarios. The purpose is to shed some light on the trade-off for investments in sensor networks and synchronization.

## 1.2 Problem Formulation

Consider the stochastic nonlinear sampled system

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t), t), \quad (1.1)$$

$$y(t_k) = g(x(t_k - \delta_{t_k}), v(t_k), t_k), \quad (1.2)$$

where  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  are, respectively, the process and observation models, assumedly known. We assume that for all  $k \geq 1$ , the observations  $y(t_k) \in \mathbb{R}^m$  and the probability density functions (PDFs) of  $x_0$  and  $v(t_k)$  are known, where  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  is the initial state vector and  $v(t_k) \in \mathbb{R}^r$  is the observation noise.

Observations are taken at random time instants  $t_k$  and are delayed by a random time amount  $\delta_{t_k}$ , given by an exponential random variables, with parameter  $\lambda_{\delta_{t_k}}$ , according to Figure 1.1. Out-of-sequence measurements (OOSM) are not considered in this work. We assume that, in case a delayed measurement is to arrive later than future measurements, it gets lost in transmission.

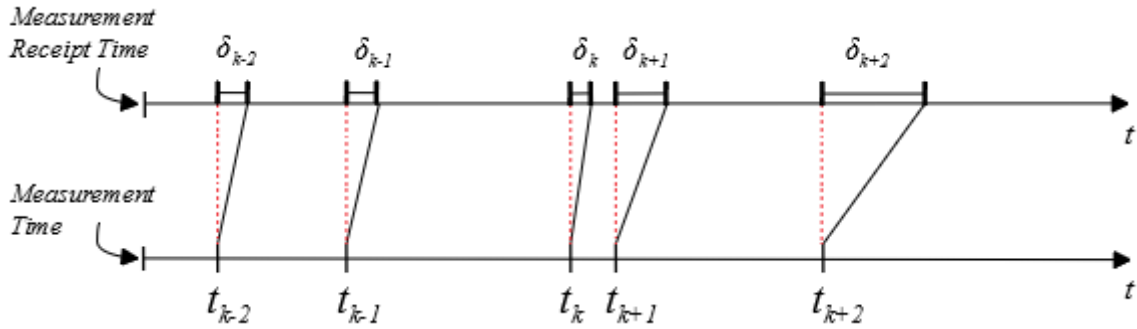


Figure 1.1: Randomly delayed measurements.

Time instants  $\forall k \in \mathbb{N}^+$  are ordered ( $t_{k+1} > t_k, \forall k \in \mathbb{N}^+$ ) and defined by the time intervals  $h_0 \triangleq t_1$ ,  $h_k \triangleq t_k - t_{k-1}$ ,  $\forall k \geq 1$ . In this work, we assume that the observation time instants  $t_k$  are given by a Poisson random process. That is, the time intervals  $h_k$  are also exponential random variables i.i.d with a known  $\lambda_{h_k}$  parameter  $h_k \sim \mathcal{E}(\lambda_{h_k})$ , where  $\mathcal{E}(\lambda)$  defines an exponential PDF, with parameter  $\lambda$ , which is also its expected value. An example of time intervals produced by such a random is illustrated in Figure 1.2.

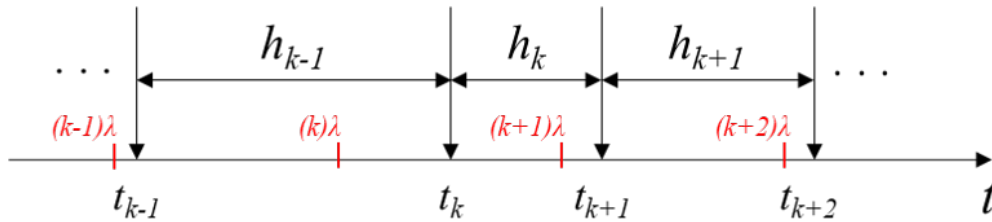


Figure 1.2: Irregular sampling process modeled by a Poisson random process. Regularly spaced time intervals  $\lambda$  are shown in red. An example of time instants  $t_k$  realization is also shown, which the respective random time intervals  $h_k$ . The expected value of time interval is given by  $E(h_k) = \lambda$ .

This sampling model characterizes a common application for an event-based sam-

pling scheme or for a networked control system with unsynchronized sensors. (Micheli and Jordan, 2002), for instance, considers a set of  $N$  identical sensors measuring the state variables of a physical process every  $L$  seconds. They proved that, if the sensors are independent and unsynchronized and  $N$  is big enough, the waiting time between the arrival of two consecutive measurements can be approximated by an exponential random variable  $\mathcal{E}(\lambda)$ , where the parameter is given by  $\lambda = N/L$ .

Input data  $u(t)$  are available at regularly spaced intervals  $T$ , that is  $u(iT) \in \mathbb{R}^p, \forall i \geq 1$  are known.  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  is process noise.

Dependendo de quais e quantos problemas forem estudados, descrever nessa seção.

### Problema 1: Amostragem Regular das Entradas

*As entradas  $u(t)$  são medidas em intervalos regularmente espaçados  $T$ , i.e.  $u(iT) \in \mathbb{R}^p, \forall i \geq 1$  são conhecidas.  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  é o ruído de processo.*

### Problema 2: Amostragem Irregular das Entradas

*Medições feitas em instantes de tempo aleatórios  $t_{u,i}, \forall i \in \mathbb{N}^+$ , ordenados ( $t_{u,i+1} > t_{u,i}, \forall i \in \mathbb{N}^+$ ) e definidos pelos intervalos de tempo  $h_{u,0} \triangleq t_{u,1}$  e  $h_{u,i} \triangleq t_{u,i} - t_{u,i-1}, \forall i \geq 1$ .  $u(t_{u,i}) \in \mathbb{R}^p, \forall i \geq 1$  são conhecidas.  $w(t_{u,i}) \in \mathbb{R}^q$  é o ruído de processo. Assim como para a medição irregular da saída, os instantes de tempo  $t_{u,i}$  são dados por um processo aleatório de Poisson com parâmetro  $\lambda_u = T$ , sendo  $T$  o valor esperado do intervalo de tempo  $h_{u,i}$ .*

Quando o carimbo de tempo está disponível, a assimilação de dados do algoritmo pode ser feita nos momentos exatos da medição. Para isso, a integração das equações diferenciais via discretização deve acontecer com intervalos de tempo variáveis, no caso deste trabalho utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Dessa forma, (1.1) pode ser reescrita como

$$x(t_j^*) = f_d(x(t_{j-1}^*), u(t_{j-1}^*), w(t_{j-1}^*), t_{j-1}^*), \quad (1.3)$$

em que  $t_j^* = t_{j-1}^* + \delta t_j^*$  e  $t_0^* = 0$ . Cada valor  $\delta t_j^*$  corresponde ao intervalo de tempo entre o último instante  $t_{j-1}^*$  em que se registrou a chegada de um sinal, seja ele de entrada ou de observação, e o próximo instante de tempo  $t_j^*$  em que um valor de entrada ou de observação é obtido, conforme será detalhado no Capítulo 3. Entre instantes de observação e de entrada é utilizado um segurador de ordem zero, considerando a ultima informação disponível.

Por outro lado, se o carimbo de tempo não é levado em conta, (1.1) pode ser reescrito como

$$x_n = f_d^*(x_{n-1}, u_{n-1}, w_{n-1}, n), \quad (1.4)$$

em que  $t = nT$ .

Deseja-se estimar o estado  $x(nT)$  de forma recursiva, em intervalos regularmente espaçados  $T$  igual ao período de amostragem regular dos sinais de entrada para o Problema 1 e valor esperado do intervalo de medição das entradas para o Problema 2. Utiliza-se o conjunto de medições  $y(t_k) : t_k \leq iT$  e de entradas passadas  $u_{i-1}$  ou  $u(t_{u,i})$ . O conhecimento dos intervalos de tempo  $h_{k-1} : t_k \leq nT$  e  $h_{u,i-1} : t_{u,i} \leq nT$  para o Problema 2 também são levados em consideração para o cenário com carimbo de tempo. O tempo médio de observações  $\lambda$  é assumidamente maior que o intervalo de tempo de estimação  $T$ , por um fator  $\alpha > 1$ , ou seja,  $\lambda = \alpha T$ .

## 1.3 Objectives

1 frase para o objetivo geral Objetivos específicos

## 1.4 Text Outline



# Theoretical Background

In this chapter, we review the irregular sampling problem and sensor fusion techniques. First, in Section 2.1 we categorize the different types of irregularities that may occur in sampling and discuss the main causes and its particularities. A diagram is built by categorizing the main types studied in the scientific literature. Then, in Section 2.2, we start a brief explanation on the four techniques used for sensor fusion: possibilistic, fuzzy reasoning, evidential belief e probabilistic. The latter, being the one used in this work, is further explained and specific techniques to deal with irregular sampling in sensor fusion are addressed.

## 2.1 Irregular Sampling Survey

Sampling irregularities may occur due to a variety of issues, sometimes as undesired side effects of using large sensor networks architectures and others due to deliberate non-uniform sampling schemes. In this section we try to categorize and review the main irregularities observed in practice. The diagram in Fig. 2.2 provides a simplified overview of them, separated by their sources.

Networked system monitoring and control appears to be the main cause of irregular sampling. Unreliable communication channels may lead to random time delays and loss of information, specially if the data are transmitted using a common media (Sahebsara et al., 2007; Moayedi et al., 2011). In case they get randomly interrupted during transmission or if a sensor fails at some point, the signal received may contain predominantly noise, causing uncertain observation or packet dropouts (Hadidi and Schwartz, 1979; Wang et al., 2009). Systems that are observed by a large number of desynchronized sensors will provide observations at random time intervals (Micheli

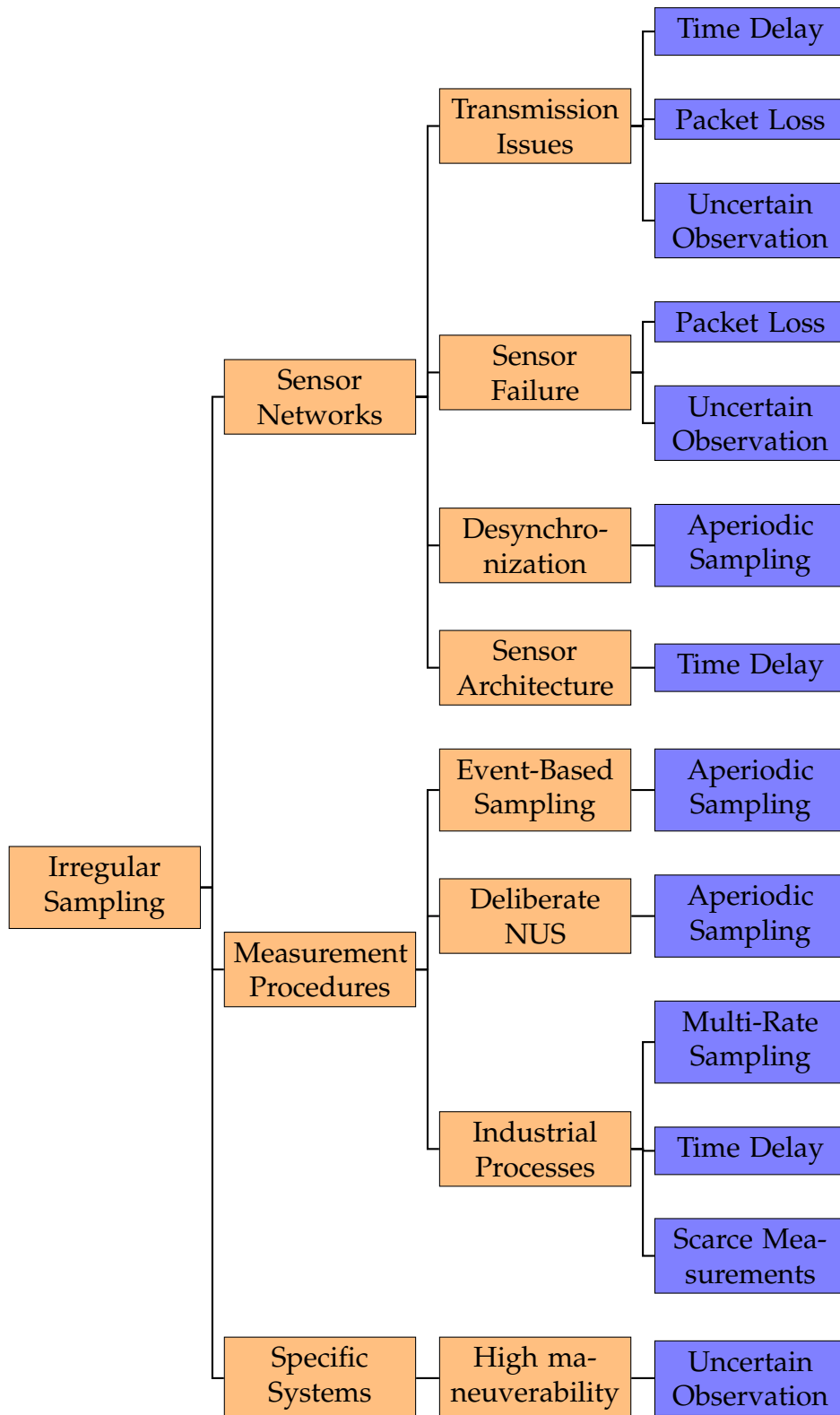


Figure 2.1: Irregular sampling diagram, showing the main causes (in orange) and effects (in blue) of irregularities



and Jordan, 2002). If they are synchronized but designed to operate in a centralized fashion, there is a chance that different time delays are produced due to distinct transmission routes for each sensor (Bar-Shalom, 2000; Challa et al., 2003; Anxi et al., 2005).

However the communication networks shall not always be held responsible. Some applications are designed to be measured in an irregular way. In event-based schemes, for example, the measurements are transmitted only when certain conditions are met (Liu et al., 2014; Zou et al., 2017). Such approach can reduce communication resource consumption substantially (Hu et al., 2017), but will cause aperiodic sampling. Non-Uniform Sampling (NUS) is also intentionally used as an alias detection method (Kunoh, 2015) or to enhance the spectral resolution of signals, largely used in Nuclear Magnetic Resonance (NMR) spectroscopy analysis (Hyberts et al., 2013). In other situations, due to the nature of the process being observed, the measurement strategy relies on different procedures. A lot of chemical processes, for instance, can be measured in a online, fast rate and delay free fashion, but provides inaccurate data. Therefore, lab analyses are used to improve estimation quality, but they are usually gathered at slower rates, sometimes irregularly and with possible time delays (Fatehi and Huang, 2017). Other industrial applications suffer from the same dilemma, and the sampling scheme ends up with a multi-rate data transmission, with random time delays and possibly measurement scarcity (Peñarrocha et al., 2012).

Finally, sampling irregularities might also appear due to a specific nature of a system. In some high maneuverable target-tracking applications, for example, there is a chance that the sensor misses the target, transmitting only noise, leading to the so called uncertain observation issue (Wang et al., 2009; Chen et al., 2013).

On the next subsections, we review the main irregular sampling effects.

### 2.1.1 Time Delay

Time-delay System (TDS) is probably the most common mathematical representation to time delays in practice. The works of (Richard, 2003; Fridman, 2014) and the

Talvez incluir informação de que, em alguns casos, é possível evitar essas irregularidades com investimentos na rede de comunicação

Vale a pena introduzir o assunto de irregularidades do controlador para o atuador (e não só do sensor para o controlador)?

references therein provide a good coverage of the subject. There might be delays in the input or output signals, introduced by the communication networks, or even state delays. The latter phenomenon is called system with aftereffect or dead-time. Since we are studying the irregular sampling issue, only the formers are relevant to us.

Considering delays in the measurement model only, (Lu et al., 2005) studied the estimation problem when they are constant and known. They describe a linear measurement model as

$$y_i(t) = H_i(t)x(t_i) + v_i(t) \quad (2.1)$$

where  $i = 0, 1, \dots, l$  and  $l$  is the number of different known delays.  $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$  are delayed measurements and  $v_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$  the measurement noises. The known delayed time instants are given by  $t_i = t_{i-1} - d_i$ , with  $d_0 = 0, d_i > 0$  for  $i > 0$  and  $t_0 = t$ .

However, in many applications the measurements are received by the estimator with irregular and unknown delays. In such cases, time delays can be interpreted as a stochastic process  $d(k)$ , varying randomly throughout time. (Han and Zhang, 2009) describes a discrete-time measurement model for random delayed observations as

$$y(k) = H(k)x(k - d(k)) + H(k)v(k) \quad (2.2)$$

where  $d(k)$  is a random but bounded time delay, assumed to be a discrete-time Markov Chain observable at each sampling time  $k$ .

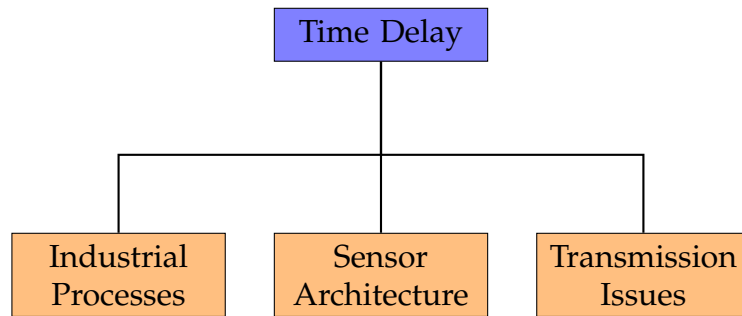


Figure 2.2: Irregular sampling diagram, showing the main causes (in orange) and effects (in blue) of irregularities

Acho que não seria necessário dar mais detalhes da descrição, uma vez que já foi falado na formulação

Falta: incluir casos de OOSM e burst arrivals. A ideia seria continuar explicando como acontecem e uma breve descrição de acordo com uma referência

Os atrasos podema ainda provocar OOSM (*Bar-Shalom, 2000; Challa et al., 2003; Anxi et al., 2005; Choi et al., 2009; Moayedi et al., 2011; Peñarrocha et al., 2012; Westenberger et al., 2013*), de single-lag, multiple-lag ou mixed-lag. Na ocorrência de múltiplos atrasos, as informações podem chegar em conjuntos, burst arrivals (*Moayedi et al., 2011*).

### 2.1.2 Packet Loss

A ideia seria continuar nos mesmos moldes que para o time delay, explicando as diferentes formas que cada irregularidade pode aparecer e como ela é tratada na literatura.

A falta de dados pode ser por packet dropout (), quando a informação é perdida na transmissão. Os dropouts podem ser single ou multiple (*Sun, 2011; Zhu et al., 2013; Shuli Sun et al., 2008; Sahebsara et al., 2007*), tendo o número de dropouts consecutivos ser limitado ou não.

### 2.1.3 Uncertain Observation

Para alguns sistemas, como de target tracking, medições feitas em intervalos discretos podem ser consideradas como existentes ou não (lack of target), com certa probabilidade. Pode ser que, para casos dados como existentes, na verdade não houve medição e a observação é composta apenas por ruído - uncertain observation (*Hadidi and Schwartz, 1979; Sun, 2011; Nahi, 1969*).

### 2.1.4 Aperiodic Sampling

A maioria dos efeitos mencionados consideram amostragem periódica, mas irregular. Há também os casos em que as amostragem são feitas de forma aperiódica (ou modeladas como tal). Sejam elas causadas por amostragem baseada em eventos ou para aproximar os intervalos de tempo aleatórios causadas por uma grande rede de sensores (*Micheli and Jordan, 2002; Yan et al., 2017*). A falta de periodicidade também pode ser entendida como um intervalos de tempo com ruído (*Shen et al., 2016*).

Random jitter Random Jitter, also called Gaussian jitter, is unpredictable electronic timing noise. Random jitter typically follows a normal distribution[citation needed] due to being caused by thermal noise in an electrical circuit or due to the central limit theorem. The central limit theorem states that composite effect of many uncorrelated noise sources, regardless of the distributions, approaches a normal distribution.

Sampling jitter In analog to digital and digital to analog conversion of signals, the sampling is normally assumed to be periodic with a fixed period?the time between every two samples is the same. If there is jitter present on the clock signal to the analog-to-digital converter or a digital-to-analog converter, the time between samples varies and instantaneous signal error arises. The error is proportional to the slew rate of the desired signal and the absolute value of the clock error. Various effects such as noise (random jitter), or spectral components (periodic jitter)[specify] can come about depending on the pattern of the jitter in relation to the signal. In some conditions, less than a nanosecond of jitter can reduce the effective bit resolution of a converter with a Nyquist frequency of 22 kHz to 14 bits. This is a consideration in high-frequency signal conversion, or where the clock signal is especially prone to interference.

### 2.1.5 Multi-Rate Sampling

Caso típico de processo industrial, com medições laboratoriais e sensores online. (Fatehi and Huang, 2017)

## 2.2 Sensor Fusion

Explicar brevemente sobre os tipos de fusão sensorial: possibilistic, fuzzy reasoning, evidential belief e probabilistic (Khaleghi et al., 2013). Focar no probabilistic.

### 2.2.1 Probabilistic Sensor Fusion

Entrar em maiores detalhes do probabilistic, explicando KF e o PF (caso seja utilizado no trabalho).

### Kalman Filters

### Particle Filters

## 2.2.2 Sensor Fusion Techniques

Para fusão de informações múltiplas de observações, explicar os quatro grandes grupos: parallel filter (multi-output system, multi-output KF), sequential filter (kfusing first output as the prediction for the second output), outputs fusion (outputs are fused using the noise covariance) e track-to-track fusion (single-output KFs fused considering correlation). (Willner et al., 1976; Fatehi and Huang, 2017)

Tentar agrupar os principais métodos de filtragem, por tipo de irregularidade (possivelmente uma grande tabela)



# Simulation Methods and Assumptions

## 3.1 State Estimation with Irregular Sampling

Um esquemático ilustrativo é apresentado na Fig., onde  $\alpha = 5$ , i.e. a taxa média de amostragem das observações  $1/\lambda$  é cinco vezes mais lenta que a frequência de amostragem  $1/T$  dos sensores que disponibilizam informações de entrada. A cada  $T$  segundos, ou seja no intervalo de tempo entre dois instantes de amostragem das entradas pode haver ou não informações de observação. No cenário ilustrado pela letra **A** na Fig. 3.1, não há medições disponíveis. Durante o intervalo **B** há apenas uma medição, ao passo que em **C** há mais de uma observação disponível.

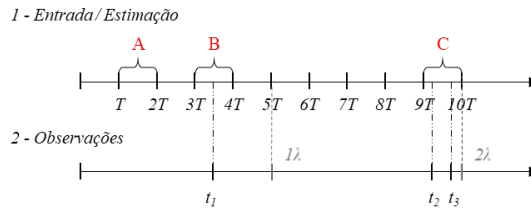


Figure 3.1: Exemplos de instantes de amostragem da entrada e das estimações (1) e das observações (2). Os instantes múltiplos de  $\lambda$ , igual ao intervalo médio de amostragem das observações são apresentados em cinza escuro, para referência.

### 3.1.1 Input Irregular Sampling

Em caso de amostragem irregular também na entrada, um esquemático dos instantes de estimação, amostragem e entrada pode ser observado na Fig. 3.2

Para atrasos de transmissão:

Nas próximas subseções é apresentado como os algoritmos de estimação tratam os cenários **A**, **B** e **C** para os casos em que o carimbo de tempo está e não está disponível.

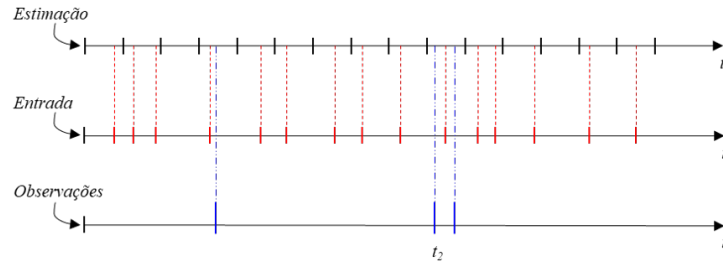


Figure 3.2: Exemplos de instantes de amostragem de estimação(1), da entrada (2) e das observações (3). Os instantes múltiplos de  $\lambda$ , igual ao intervalo médio de amostragem das observações são apresentados em cinza escuro, para referência.

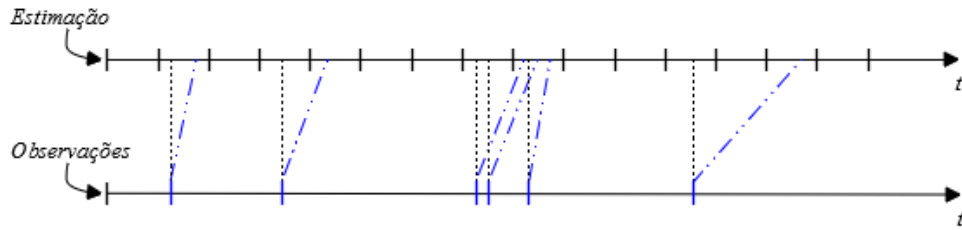


Figure 3.3: Exemplos de instantes de amostragem de estimação(1), da entrada (2) e das observações (3). Os instantes múltiplos de  $\lambda$ , igual ao intervalo médio de amostragem das observações são apresentados em cinza escuro, para referência.

## 3.2 With Timestamp

Sabendo o momento exato  $t_k$  em que as observações são medidas, é possível assimilá-las no instante correto, considerando intervalos de tempo variáveis para o algoritmo de filtragem. Para isso, o modelo matemático em () é discretizado a uma taxa  $\delta t_j^*$  variável. Para a simulação deste artigo, os valores de  $\delta t_j^*$  são calculados a partir da união de todos os instantes de tempo correspondentes às chegadas de sinais de entrada ou de medição em um único vetor, de forma ordenada. Por meio da subtração de dois instantes consecutivos, é possível obter os intervalos de tempo de integração  $\delta t_j^*$  correspondente. No caso de uma versão *online*, a integração das equações diferenciais é executada a medida que um sinal de entrada ou um sinal de medição de saída é recebido. Nesses momentos, são utilizados o intervalo de tempo entre o último sinal recebido e o instante atual. Além disso, quando o sinal recebido é um sinal de entrada, é executada apenas a etapa de predição. E, quando o sinal for de medição, acontecem



as duas etapas de predição e assimilação de dados, considerado um segurador de ordem zero para a entrada. O fluxograma da Fig. 3.4 representa o passo a passo desse algoritmo, apresentando as etapas executadas quando o sinal é de entrada ou de observação.

Dessa forma, no cenário **B** da Fig. 3.1, o algoritmo executa uma etapa completa de predição e assimilação de dados dos instantes  $3T$  até  $t_1$ , considerando o intervalo  $\delta t_4^* = t_1 - 3T$  (note que há 3 intervalos de tempo  $\delta t_j^*$ , antes o instante  $t_1$ ). Em seguida é feita uma etapa de predição entre  $t_1$  e  $4T$ . Durante o intervalo de tempo de integração entre  $t_1$  e  $4T$ , considerou-se que a entrada permaneceu constante desde a sua última atualização em  $3T$ . Ou seja, assume-se que não houve variação na entrada para essa etapa de predição. Caso mais de uma observação seja medida entre duas entradas (cenário **C**), são executadas etapas completas de filtragem para cada observação disponível e, ao final, uma etapa de predição entre a última observação e a próxima entrada.

### 3.3 Without Timestamp

Quando não há carimbo de tempo nas medições, o algoritmo de filtragem não sabe o momento exato da medição  $t_k$ . Assim, o instante de tempo considerado para a etapa de assimilação de dados é sempre o próximo instante múltiplo de  $T$ , i.e. quando a próxima informação de entrada está disponível. Existem apenas dois cenários de estimação nesse caso. Primeiro, quando não há medições disponíveis entre duas entradas, o estimador executa apenas a etapa de predição entre os intervalos de tempo  $iT$  e  $(i+1)T$ , conforme cenário **A** da Fig. 3.1. Segundo, nos casos representados pela letra **B**, o estimador considera que a observação foi feita no próximo instante múltiplo de  $T$  em que há informações de entrada. No exemplo da Fig. 3.1, a medição feita no instante  $t_1$  é assimilada no instante  $4T$ . Caso haja mais de uma observação entre duas entradas (cenário **C**), a mais antiga é descartada. Os passos de discretização do modelo utilizados pelo UKF são sempre  $\delta t = T$ , havendo ou não observações disponíveis.

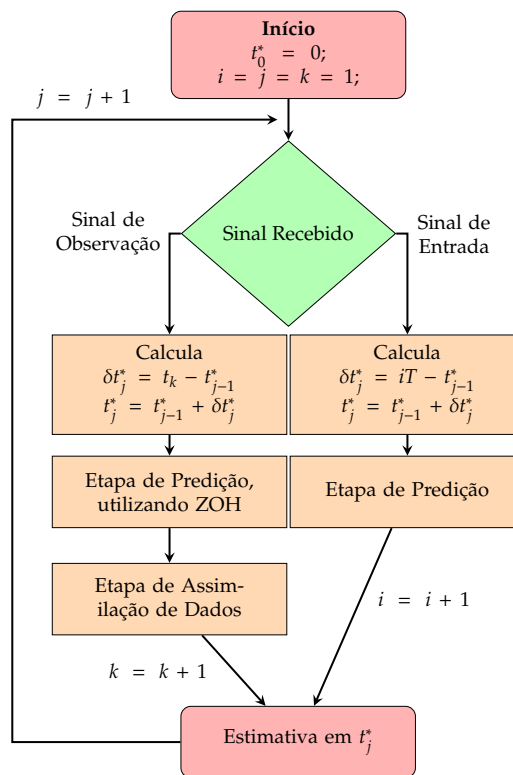


Figure 3.4: Diagrama ilustrativo da versão *online* do estimador que considera o carimbo de tempo. Os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  representam, respectivamente os contadores dos sinais de entrada, estimação e da saída.

# Results

## 4.1 Unicycle Position Estimation

### 4.1.1 System Description

Considere um robô móvel não-holonômico, cujo modelo de processo cinemático é dado por

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= v \cos(\theta), \\ \dot{p}_y &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= u_1(t), \\ \dot{v} &= u_2(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que  $p_x$  e  $p_y$  são as coordenadas de posição,  $\theta$  a orientação angular,  $v$  a velocidade linear e as entradas  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente, a velocidade angular ( $\omega$ ) e a aceleração linear ( $a$ ).

O sistema descrito por 4.1 é discretizado por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e o vetor de estados  $x_i$  é dado por  $x_i \triangleq [p_{x,i} \ p_{y,i} \ \theta_i \ v_i]^T$ .

O modelo de observações é dado por

$$y(t_k) = \begin{bmatrix} p_x(t_k) \\ p_y(t_k) \end{bmatrix} + v(t_k),\tag{4.2}$$

em que  $v(t_k) \sim \mathcal{N}(0, R_{t_k})$  é o ruído de observação com média nula e covariância  $R_{t_k}$ . Para o cenário sem carimbo de tempo, o vetor de observações é aproximado por  $\tilde{y}_i \approx y(t_k)$ , em que  $i$  é o índice do próximo instante de tempo múltiplo de  $T$ .

O vetor de entradas  $u_i = [\omega_i \ a_i]^T$ , é medido por meio de girômetro e acelerômetro, respectivamente. Assume-se que

$$u_i = \tilde{u}_i - w_i, \quad (4.3)$$

em que  $\tilde{u}$  é o valor medido pelos sensores e  $w \sim \mathcal{N}(0, Q_i)$  representa o ruído correspondente, de média nula e covariância  $Q_i$ .

São considerados 60 segundos de simulação, com um passo de integração  $\delta t_{\text{sim}} = 10^{-4}$ . Para simular a amostragem irregular, os intervalos de tempo  $h_k$  são calculados por meio da função de distribuição exponencial do MatLab<sup>TM</sup> e aproximados para o instante de tempo mais próximo, dentre as 600.000 amostras. As entradas utilizadas para a simulação são apresentadas na Fig. 4.1. A Fig. 4.2 apresenta o deslocamento do robô no plano  $xy$  partindo do ponto  $(0,0)$ , uma realização de medições ruidosas com relação sinal-ruído  $\text{SNR}_y = 30$  dB e  $\lambda = 0.3$  s e a estimativa de deslocamento do UKF, considerando carimbo de tempo e um  $\alpha = 5$ .

Para comparar a qualidade das estimativas obtidas, o seguinte índice de desempenho é utilizado

$$J = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{(\hat{p}_{x,i} - p_{x,i})^2 + (\hat{p}_{y,i} - p_{y,i})^2}}{N} \quad (4.4)$$

em que  $\hat{p}_{x,i}$  e  $\hat{p}_{y,i}$  são as estimativas de posição em intervalos regulares  $T$ ,  $\hat{p}_{x,i}$  e  $\hat{p}_{y,i}$  as coordenadas verdadeiras do robô, também em intervalos regulares  $T$  e  $N$  é a quantidade total de estimativas. Esse índice representa a média dos erros de deslocamento no plano  $xy$  obtidos pelos estimadores.

Uma realização da evolução do índice  $J$  para os dois estimadores, considerando  $\lambda = 0.5$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\text{SNR}_y = 60$  dB e  $\text{SNR}_u = 20$  dB pode ser observada na Fig. 4.1.1, no intervalo de 0 a 1.3 segundos. Os pontos pretos representam os instantes regulares  $kT$  e os asteriscos marcados no eixo das abcissas representam os instantes de medição  $t_k$ . É possível observar que, antes das primeiras observações serem assimiladas, o índice  $J$  de ambos estimadores é igual. Na primeira observação  $t_1$ , realizada próximo do instante 0.4 s, não há diferença significativa entre a mudança no índice  $J$  para os dois

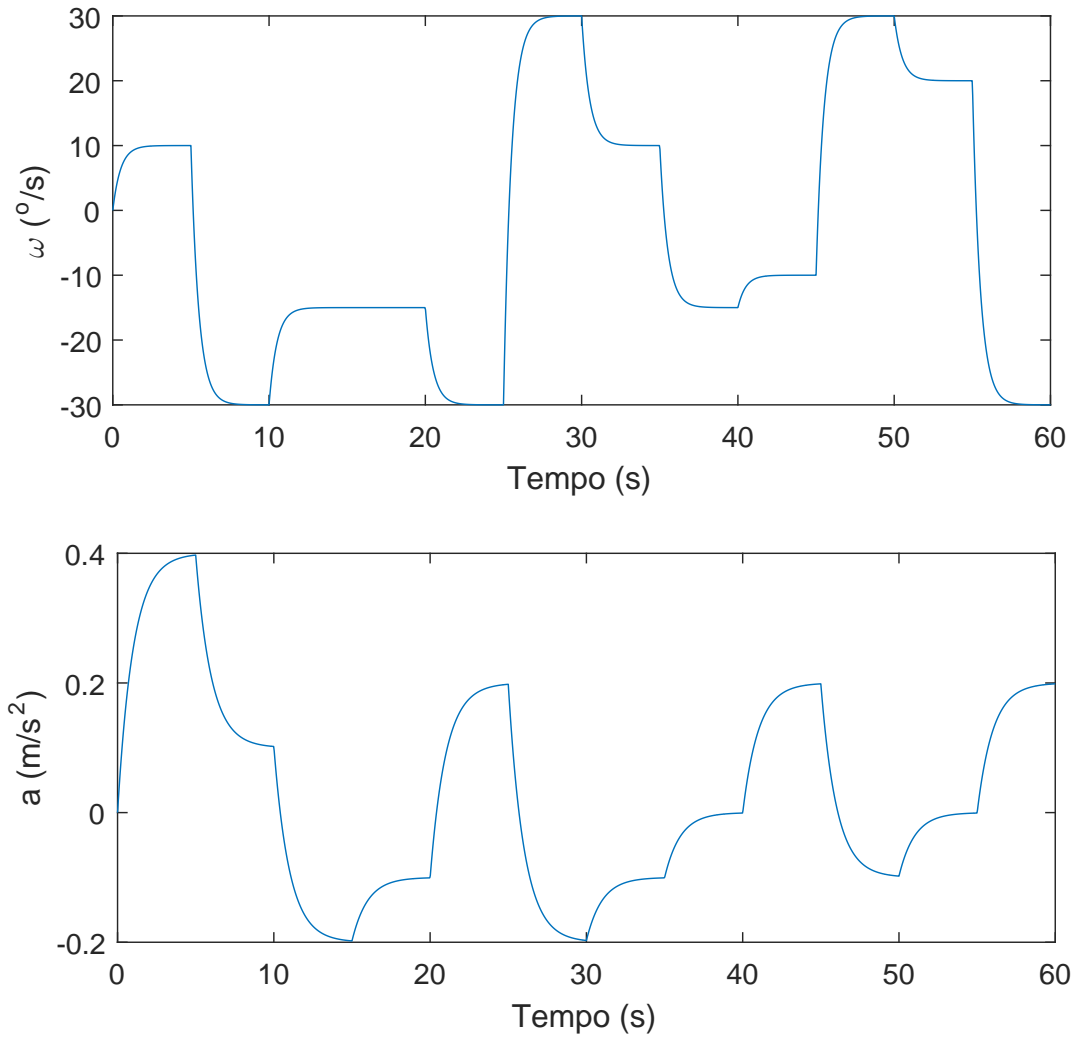


Figure 4.1: Entradas utilizadas para a simulação. A sequência temporal da velocidade angular  $\omega$  é mostrada em (a), e da aceleração linear  $a$  é apresentada em (b).

estimadores, pois o instante de tempo real de medição foi muito próximo do instante de entrada e, desta forma, o erro da aproximação  $\tilde{y}_i \approx y(t_k)$  é desprezível. No instante  $t_2$ , no entanto, a diminuição do índice  $J$  para o estimador que faz a assimilação no instante correto é visivelmente maior e acontece no momento exato da medição. Esse mesmo efeito pode ser observado no instante  $t_4$ , após 1 segundo, quando há uma diferença significativa entre o instante de medição  $t_k$  e o instante em que a próxima informação de entrada está disponível.

Para a análise de resultados desse artigo, foram feitas 3 simulações distintas, em que

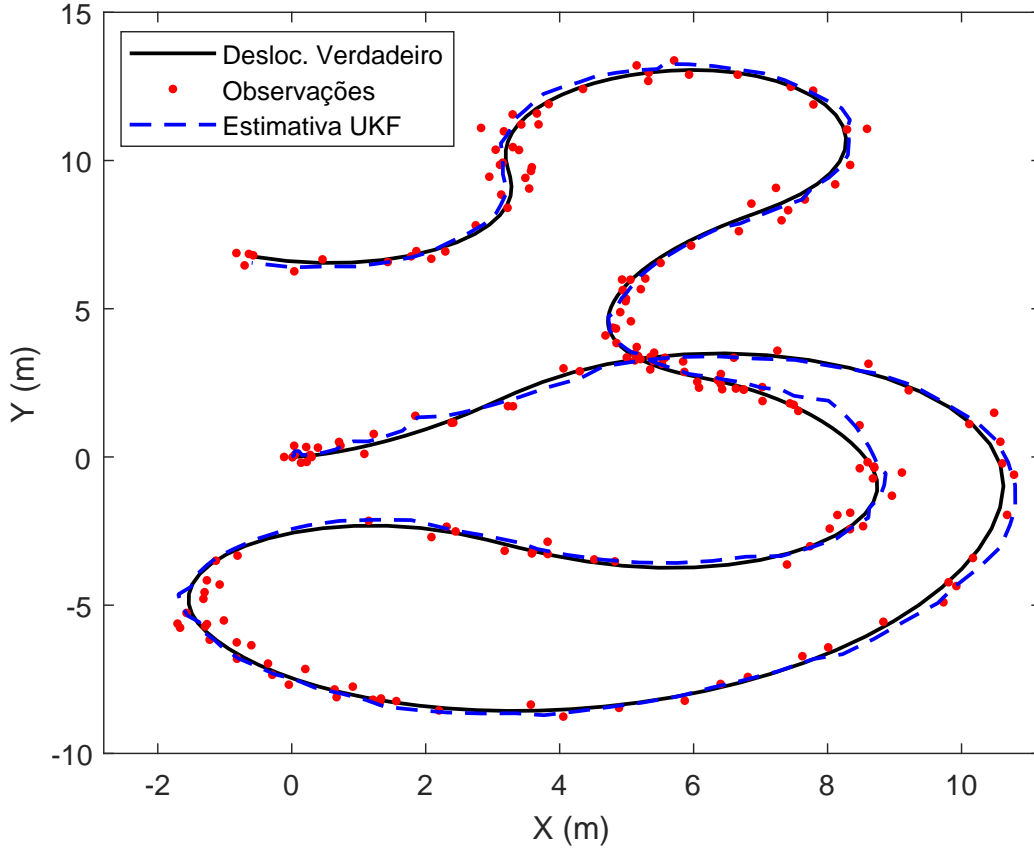
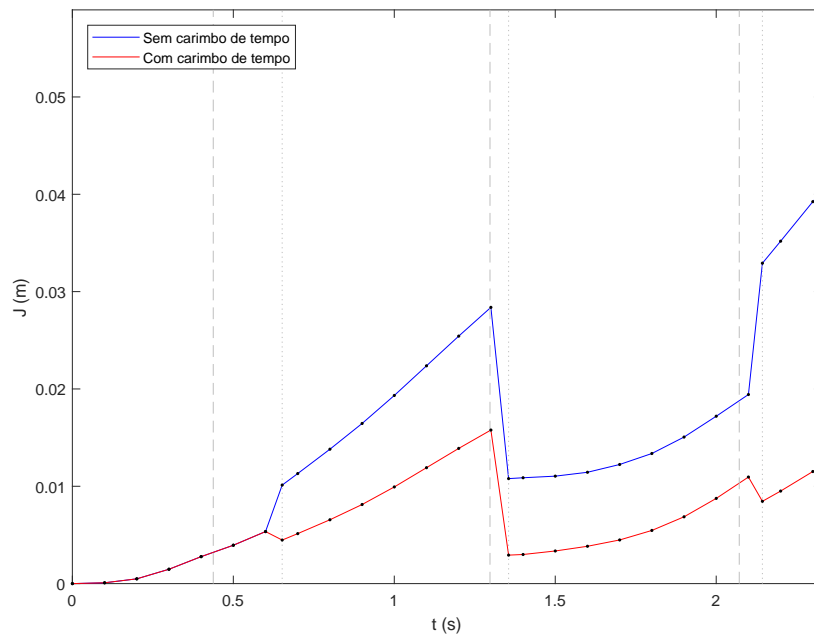
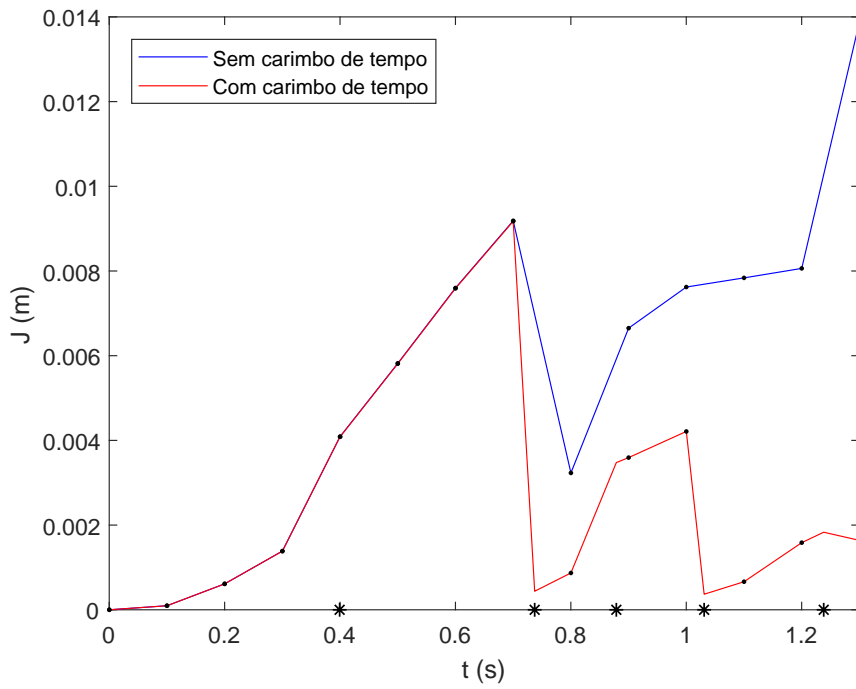


Figure 4.2: Deslocamento verdadeiro, medições ruidosas e estimativa do UKF considerando o carimbo de tempo, para nível do ruído de medição igual a  $\text{SNR}_y = 30 \text{ dB}$ ,  $\lambda = 0.3 \text{ s}$  e  $\alpha = 5$ .

um parâmetro diferente foi variado para cada uma delas e os outros foram mantidos fixos. Em todos os casos foram simuladas 100 realizações para cada filtro e para cada parâmetro. Os valores médios do índice de desempenho  $J$  para cada caso, assim como os intervalos de confiança de 95% são apresentados na Fig. 4.3. As próximas subseções apresentam uma discussão sobre os resultados.

#### 4.1.2 Measurement Signal-to-Noise Ratio Variation

Inicialmente, o efeito do nível de ruído de observação no desempenho dos filtros com e sem carimbo de tempo foi avaliado. A relação sinal ruído dos sensores de entrada e o intervalo de tempo médio das observações são mantidos fixos,  $\text{SNR}_u = 20$



dB e  $\lambda = 0.1$  s.

Variou-se a relação sinal-ruído das observações conforme  $\text{SNR}_y = \infty, 80, 60, 40, 20, 10$  dB. Ou seja, inicialmente considera-se que não há ruído nas observações e em seguida o nível de ruído é aumentado gradativamente. A Fig. 4.1.1 apresenta os resultados

obtidos.

É possível observar que o estimador que considera o carimbo de tempo possui desempenho estatisticamente superior apenas para baixos níveis de ruído da observação. Quando  $\text{SNR}_y$  é igual a  $\infty$  e 80 dB, o índice de desempenho  $J$  do filtro com carimbo de tempo é aproximadamente 1.25 e 1.26 cm, respectivamente, mais preciso do que sem carimbo de tempo e com variância pequena. Quando a relação sinal ruído se aproxima de 40 dB, no entanto, não é possível distinguir estatisticamente o efeito de se considerar ou não carimbo de tempo.

### 4.1.3 Average Sampling Rate Variation

Em seguida, variou-se o intervalo de tempo médio das observações, conforme  $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  s, mantendo-se o nível de ruído das entradas e das observações fixos em, respectivamente,  $\text{SNR}_u = 20$  dB e  $\text{SNR}_y = 40$  dB. Os resultados são apresentados na Fig. 4.1.1.

Os resultados obtidos demonstram que a diferença no desempenho dos filtros é mais significativa para intervalos de tempo mais espaçados, mantendo-se a dinâmica do sistema e os outros parâmetros fixos. Inicialmente, para valores pequenos de  $\lambda$ , não há diferença estatística entre o desempenho dos estimadores, mas a medida que o intervalo cresce, ela aparece, chegando a aproximadamente 3.1 cm para um  $\lambda = 0.6$  s. Uma interpretação possível é que, se o intervalo de tempo médio das observações for muito pequeno em comparação com a velocidade em que a dinâmica do sistema varia, o erro de aproximação do instante de amostragem das observações  $t_k$  é reduzido. O ruído do sensor pode acabar sendo mais relevante do que o erro devido ao tempo incorreto de assimilação.

### 4.1.4 Regular and Average Irregular Time Interval Relation Variation

Finalmente, o valor de  $\alpha$ , i.e. a relação entre o intervalo de tempo regular das entradas  $T$  e o intervalo de tempo médio das observações  $\lambda$ , foi alterado entre  $\alpha = 10, 5, 2, 1$ . Os resultados são apresentados na Fig. 4.1.1.



Nota-se que, quando o carimbo de tempo é considerado, não há diferença significativa em se variar o  $\alpha$  no desempenho do filtro, com o índice de desempenho  $J$  se mantendo pouco abaixo dos 3 cm. Ou seja, não importa a relação entre as frequências de amostragem da observação e das entradas. Por outro lado, quando não se considera o carimbo de tempo, essa relação se torna relevante para o índice de desempenho do estimador. Quanto mais lento a frequência da entrada em comparação com a frequência da saída, maior o erro obtido. Para o caso mais extremo utilizado,  $\alpha = 1$ , a diferença no índice  $J$  foi mais do que o dobro. Esse resultado era esperado, uma vez que quanto maior o valor de  $\alpha$ , mais rápida é a taxa de discretização do modelo de processo em relação à frequência dos sensores de observação. Consequentemente, o erro obtido na aproximação  $\tilde{y}(i) \approx y(t_k)$  diminui.

## 4.2 Other system 1

## 4.3 Other system 2

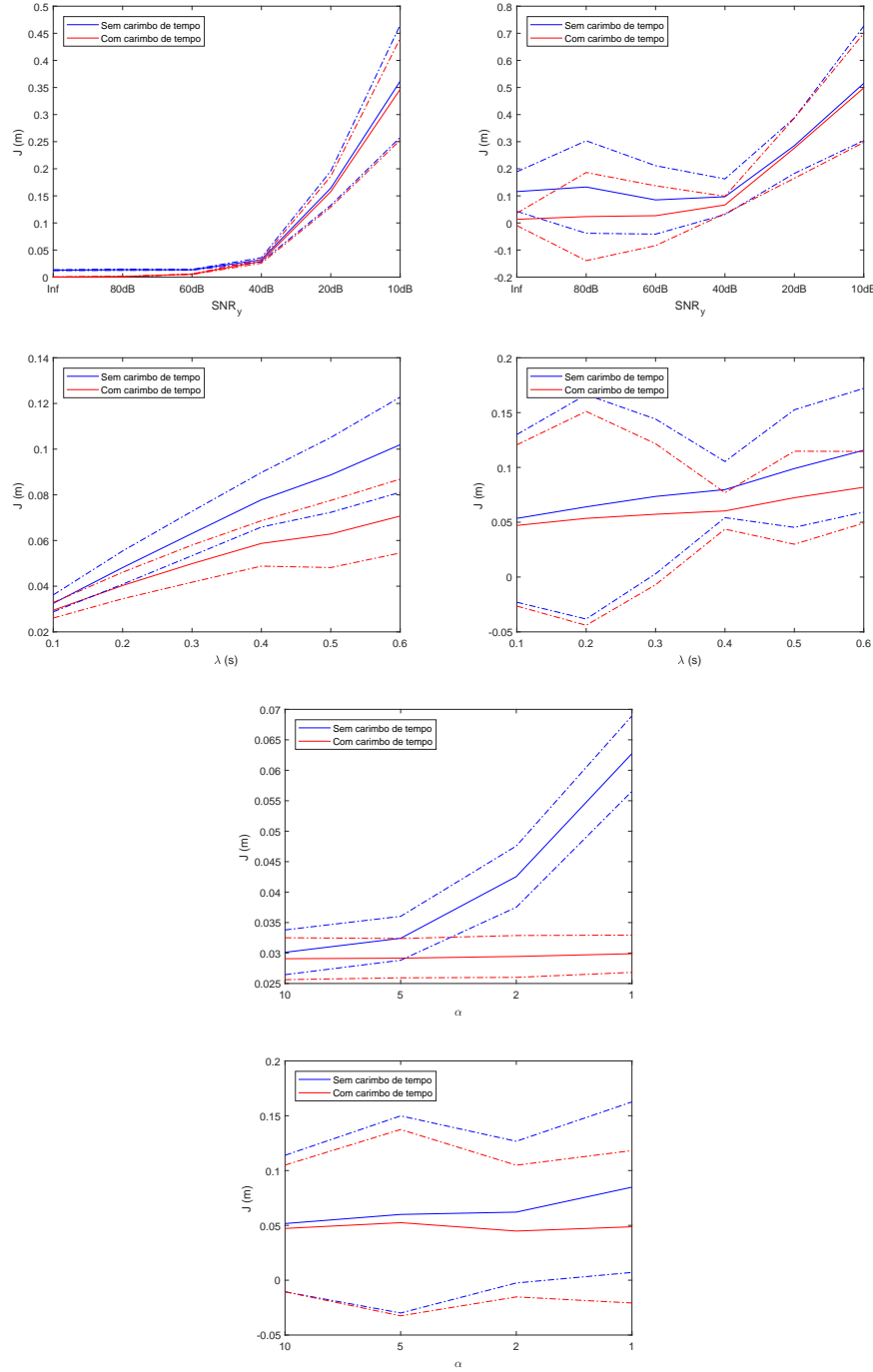


Figure 4.3: Variação do índice desempenho  $J$  em função de (a) redução da relação sinal-ruído das observações  $SNR_y$ , (b) aumento do intervalo de tempo médio das observações  $\lambda$  e (c) relação entre o intervalo de tempo de entrada  $T$  e o valor de  $\lambda$ , dado por  $\alpha$ . O lado esquerdo representa entrada regular e o direito entrada irregular

Falta ajustar o posicionamento das figuras. Estou tendo dificuldades no LaTeX e provavelmente vou posicionar as figuras no matlab. Também preciso verificar se o algoritmo para irregularidade na entrada está correto, pois para 100 simulações, a variabilidade está muito grande. Também serão colocadas em escalas semelhantes.

# Conclusions

---

## 5.1 Project Overview

Investigou-se isso e aquilo... (caso algum leitor pule direto para a conclusão)

## 5.2 Main Results

Como os resultados corroboram os objetivos perseguidos. O que é relevante dizer sobre cada objetivo descrito no capítulo 1, com o que foi feito no trabalho.

Autocrítica sobre o trabalho: alguma hipótese foi pouco realista? o que não foi feito tão bem? o que foi feito bem?

## 5.3 Future Work

Talvez uma lista itemizada Trabalhos futuros podem vir diretamente da autocrítica.



---

# Bibliography

---

- Anxi, Y., Diannong, L., Weidong, H., and Zhen, D. (2005). A unified out-of-sequence measurements filter. In *IEEE National Radar Conference - Proceedings*, pages 453–458.
- Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear / Non-Gaussian Bayesian Tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174–188.
- Bar-Shalom, Y. (2000). Update with out-of-sequence measurements in tracking: Exact solution. *Proceedings of SPIE*, 4048(3):769–778.
- Challa, S., Evans, R. J., and Wang, X. (2003). A Bayesian solution and its approximations to out-of-sequence measurement problems. *Information Fusion*, 4:185–199.
- Chen, B., Yu, L., Zhang, W.-A., and Liu, A. (2013). Robust Information Fusion Estimator for Multiple Delay-Tolerant Sensors With Different Failure Rates. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 60(2):401–414.
- Choi, M., Choi, J., Park, J., and Chung, W. K. (2009). State Estimation with Delayed Measurements Considering Uncertainty of Time Delay. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3987–3992, Kobe, Japan.
- Dasarathy, B. (2001). Information Fusion - what, where, why, when, and how? *Information Fusion*, 2(2):75–76.
- Elmenreich, W. (2002). An introduction to sensor fusion. Research report, Vienna University of Technology.

- Fatehi, A. and Huang, B. (2017). Kalman filtering approach to multi-rate information fusion in the presence of irregular sampling rate and variable measurement delay. *Journal of Process Control*, 53:15–25.
- Fridman, E. (2014). Introduction to time-delay and sampled-data systems. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 1428–1433. IEEE.
- Gopalakrishnan, A., Kaisare, N. S., and Narasimhan, S. (2010). Incorporating delayed and infrequent measurements in Extended Kalman Filter based nonlinear state estimation. *Journal of Process Control*, 21:119–129.
- Hadidi, M. and Schwartz, S. (1979). Linear recursive state estimators under uncertain observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):944–948.
- Han, C. and Zhang, H. (2009). Linear optimal filtering for discrete-time systems with random jump delays. *Signal Processing*, 89(6):1121–1128.
- Hu, R. J., Wang, Z., Alsaadi, F. E., and Hayat, T. (2017). Event-based filtering for time-varying nonlinear systems subject to multiple missing measurements with uncertain missing probabilities. *Information Fusion*, 38:74–83.
- Hyberts, S. G., Robson, S. A., and Wagner, G. (2013). Exploring signal-to-noise ratio and sensitivity in non-uniformly sampled multi-dimensional NMR spectra. *Journal of Biomolecular NMR*, pages 167–178.
- Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME – Journal of Basic Engineering*, 82:35–45.
- Khaleghi, B., Khamis, A., Karray, F. O., and Razavi, S. N. (2013). Multisensor data fusion: A review of the state-of-the-art. *Information Fusion*, 14(1):28–44.
- Kunoh, F. M. (2015). *Procedimento para Detecção de Falseamento via Amostragem Não Uniforme*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Liu, Q., Wang, Z., He, X., and Zhou, D. H. (2014). A survey of event-based strategies on control and estimation. *Systems Science and Control Engineering*, 2(1):90–97.
- Lu, X., Zhang, H., Wang, W., and Teo, K. L. (2005). Kalman filtering for multiple time-delay systems. *Automatica*, 41(8):1455–1461.
- Menegaz, H. M. T., Ishihara, J. Y., Borges, G. A., and Vargas, A. N. (2015). A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10):2583–2589.
- Micheli, M. and Jordan, M. I. (2002). Random sampling of a continuous-time stochastic dynamical system. In *in Proc. of the 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2002)*, (University of Notre Dame, South).
- Moayedi, M., Foo, Y. K., and Soh, Y. C. (2011). Filtering for networked control systems with single/multiple measurement packets subject to multiple-step measurement delays and multiple packet dropouts. *International Journal of Systems Science*, 42(3):335–348.
- Nahi, N. (1969). Optimal recursive estimation with uncertain observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 15(4):457–462.
- Peñarrocha, I., Sanchis, R., and Romero, J. A. (2012). State estimator for multisensor systems with irregular sampling and time-varying delays. *International Journal of Systems Science*, 43(8):1441–1453.
- Phillips, C. L. and Nagle, H. T. (1995). *Digital control system analysis and design*. Prentice-Hall, Inc.
- Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694.
- Sahebsara, M., Chen, T., and Shah, S. L. (2007). Optimal filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations. *International Journal of Control*, 80(2):292–301.

- Schenato, L., Sinopoli, B., Franceschetti, M., Poolla, K., and Sastry, S. S. (2007). Foundations of Control and Estimation Over Lossy Networks. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):163–187.
- Shen, B., Wang, Z., and Huang, T. (2016). Stabilization for sampled-data systems under noisy sampling interval. *Automatica*, 63:162–166.
- Shuli Sun, Lihua Xie, Wendong Xiao, and Nan Xiao (2008). Optimal Filtering for Systems With Multiple Packet Dropouts. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 55(7):695–699.
- Sivrikaya, F. and Yener, B. (2004). Time Synchronization in Sensor Networks: A Survey. *IEEE Network*, 18(4):45 – 50.
- Sun, S. (2011). Optimal Linear Estimators for Systems With Random Sensor Delays , Multiple Packet Dropouts and Uncertain Observations. *IEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, 59(11):5181–5192.
- Wang, Z., Ho, D. W., Liu, Y., and Liu, X. (2009). Robust  $H_\infty$  control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements. *Automatica*, 45(3):684–691.
- Westenberger, A., Waldele, S., Dora, B., Duraisamy, B., Muntzinger, M., and Dietmayer, K. (2013). Multi-sensor fusion with out-of-sequence measurements for vehicle environment perception. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Willner, D., Chang, C. B., and Dunn, K. P. (1976). Kalman filter algorithms for a multi-sensor system. In *IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes*, volume 15, pages 570–574.
- Yan, B., Lev-Ari, H., and Stankovic, A. M. (2017). Networked State Estimation with Delayed and Irregularly-Spaced Time-Stamped Observations. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 5870(c):1–1.



- Zhu, C., Xia, Y., Xie, L., and Yan, L. (2013). Optimal linear estimation for systems with transmission delays and packet dropouts. *IET Signal Processing*, 7(9):814–823.
- Zou, L., Wang, Z.-D., and Zhou, D.-H. (2017). Event-based Control and Filtering of Networked Systems: A Survey. *International Journal of Automation and Computing*, 14(3):239–253.

