第3章　「式と曲線」

極座標と極方程式

数学系　佐々木正吾
情報工学系　橋本龍徳

目次

授業の目標

- 極形式の考え方を用いて、極座標の点を具体的に図示できる。
- 直交座標(普通の座標)で書かれた点を極座標表示できる。
- 特に$r = f(\theta)$の形の極方程式に対し、θが動く毎にrが決定され、グラフが描かれていくイメージを掴むことができる。
- 極方程式から、具体的にいくつかの点をプロットすることで、曲線の概形を図示することができる。

復習

復習　媒介変数表示

- 点P (x, y) を考える
- この点Pが関数$f(\theta), g(\theta)$を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta)$$

と表されθが変化すると、この動点Pの軌跡は曲線を表すと考えられる。

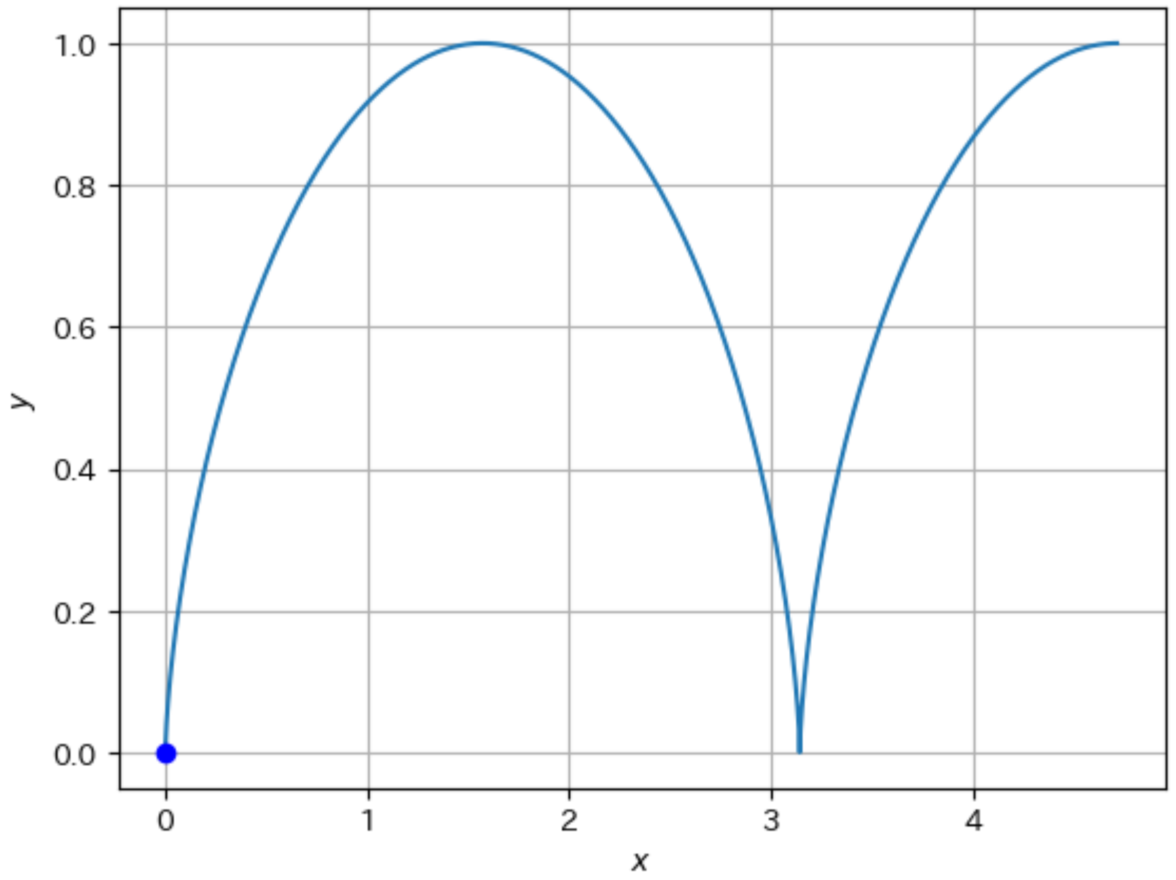
- このように曲線を表現することを**媒介変数表示**と言った。
- θを**媒介変数**または**パラメータ**と言った。

媒介変数表示の例

- サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

- 概形はサポートページを参照すること

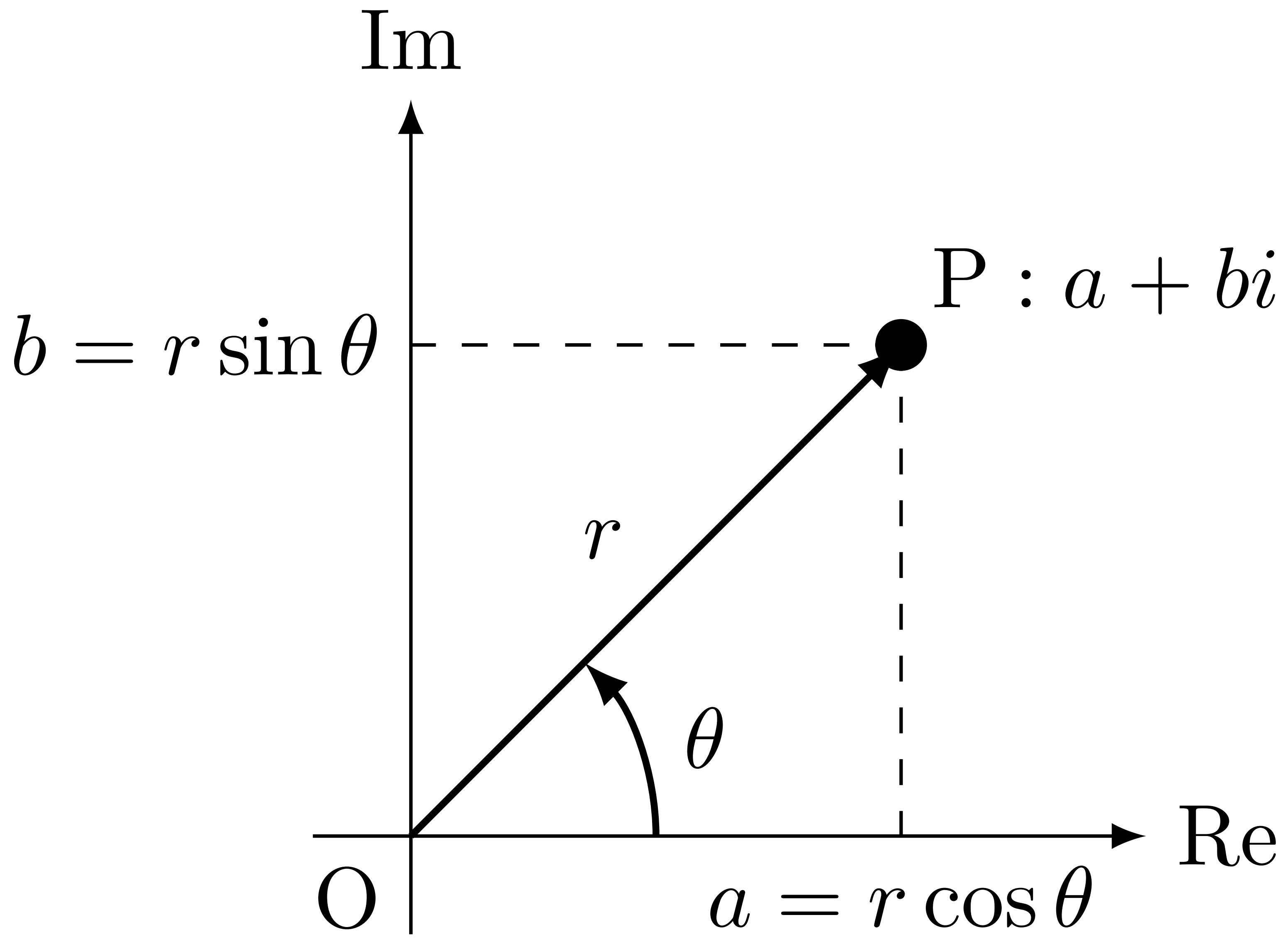


復習　極形式

- 本時に扱う極座標は本質的に極形式と同じ
- 複素数 $z = a + bi$ を考える
  - ■ z に対応する複素数平面上の点をP
  - ■ $\mathrm{OP} = r$
  - ■実軸の正の方向とのなす角をθ
- 点Pは次のように書ける。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

これを**極形式**と言った。



極形式と極座標

●複素数zの極形式$z = a + bi$から、複素数平面上の点は

■絶対値（原点からの距離）$\mathrm{OP} = r$

■偏角θ

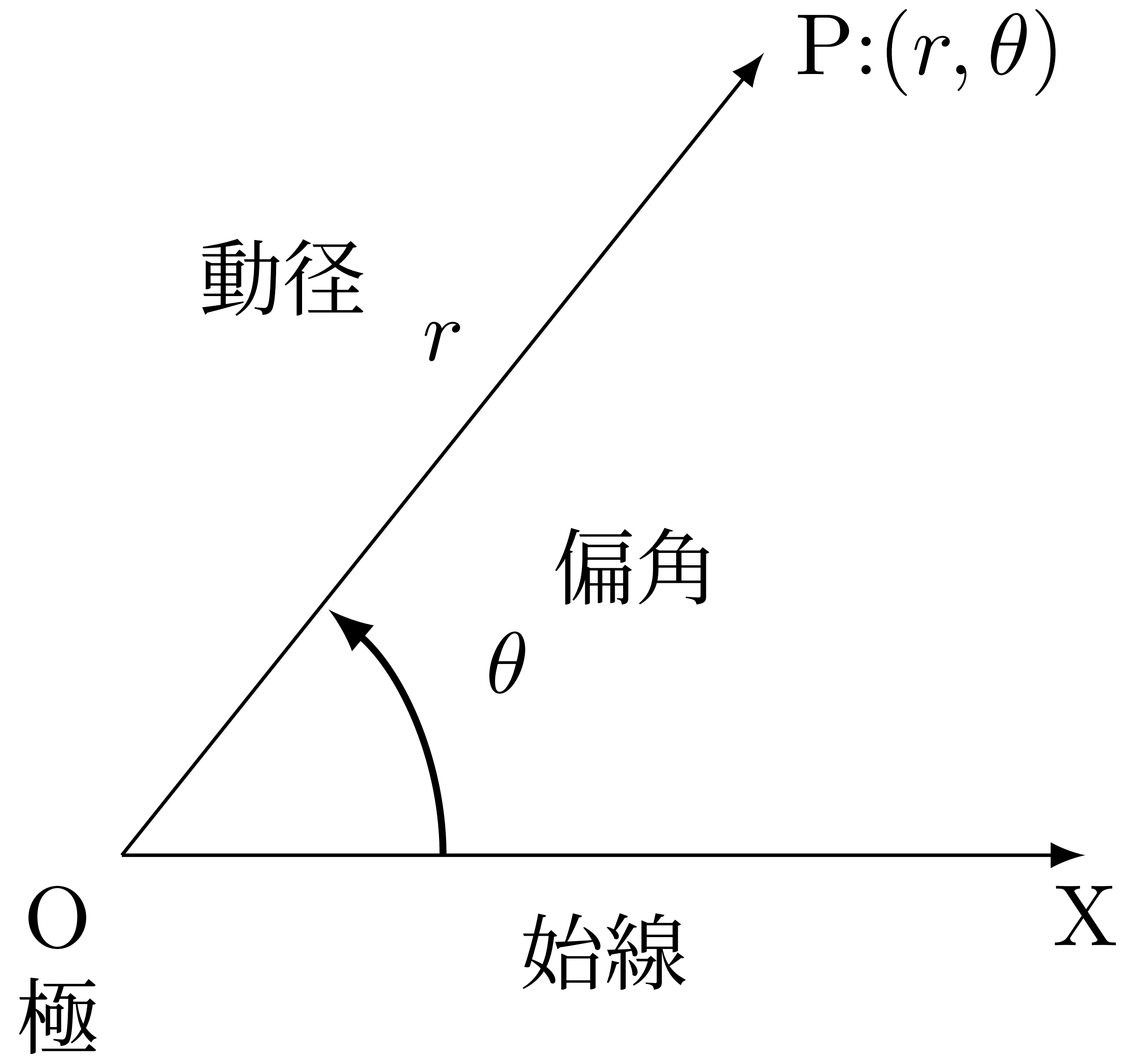
によって表されることがわかる。

●これをxy-平面上で実現しているのが**<u>極座標</u>**！！

極座標と直交座標

定義　極座標

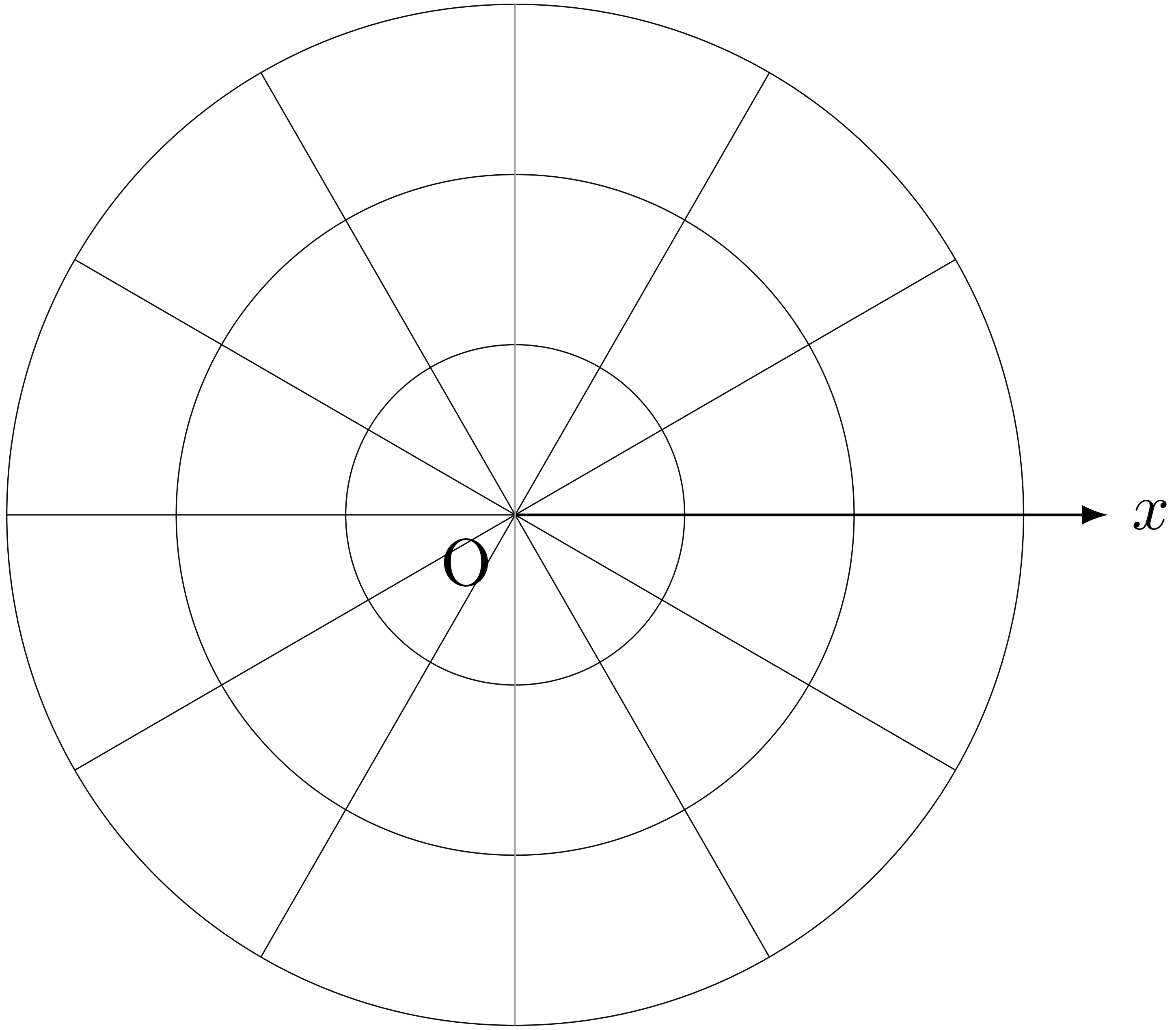
- 平面上に点Oと半直線OXを入れる
- この点OとPに対して次のように定める。
  - $\mathrm{OP} = r$
  - OXからOPへ測った角をθ
- すると、点Pの位置はr, θによって定まる。
- よって、点Pの位置を(r, θ)と表したものを**極座標**という。
- 点Oを**極**、OPを**動径**、
  半直線OXを**始線**、θを**偏角**という。



例1　極座標表示の表す点

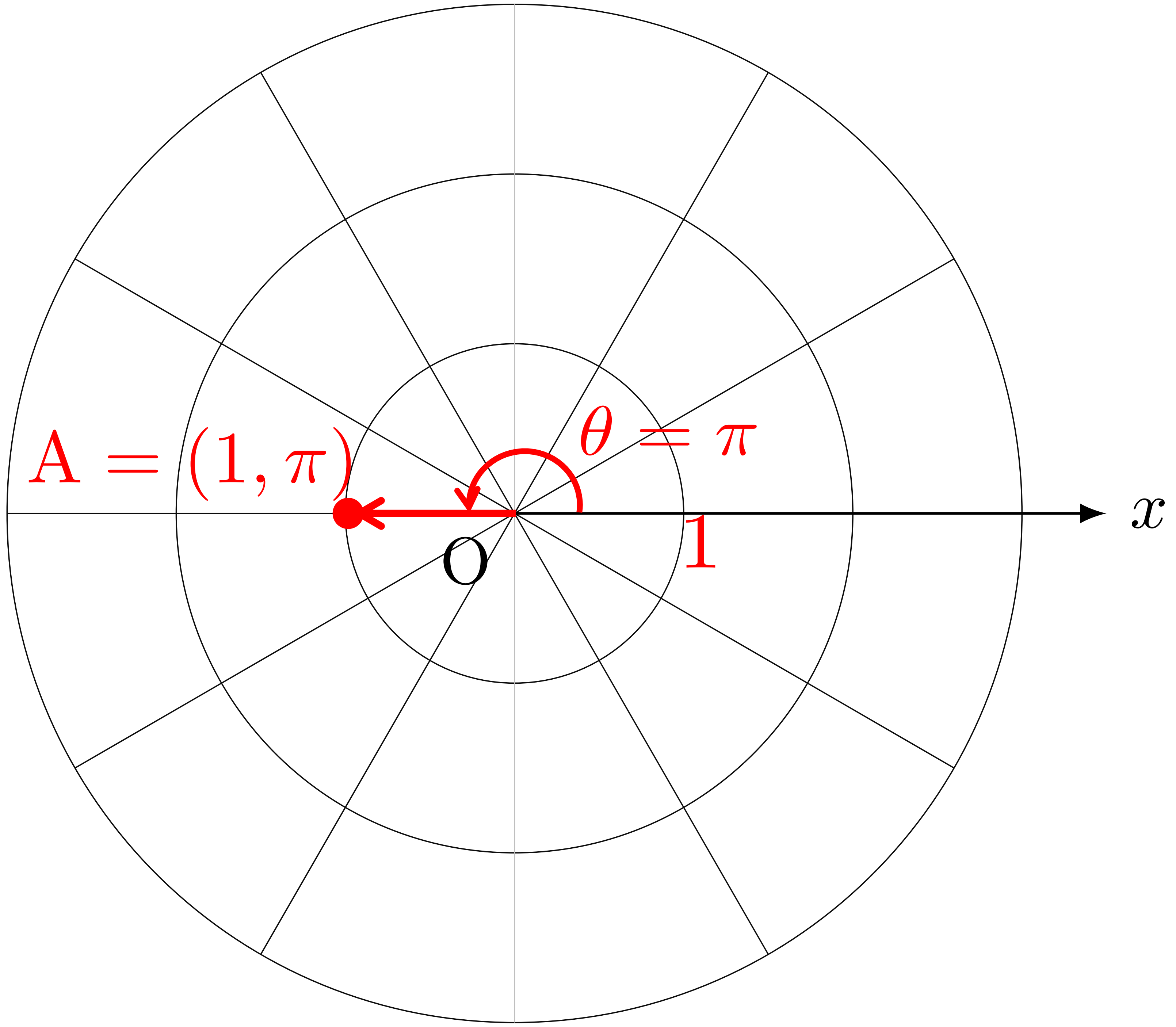
●次の点をプロットしてみる

$$\mathrm{A} = (1, \pi), \quad \mathrm{B} = \left(3, -\frac{\pi}{5}\right), \quad \mathrm{C} = \left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$$



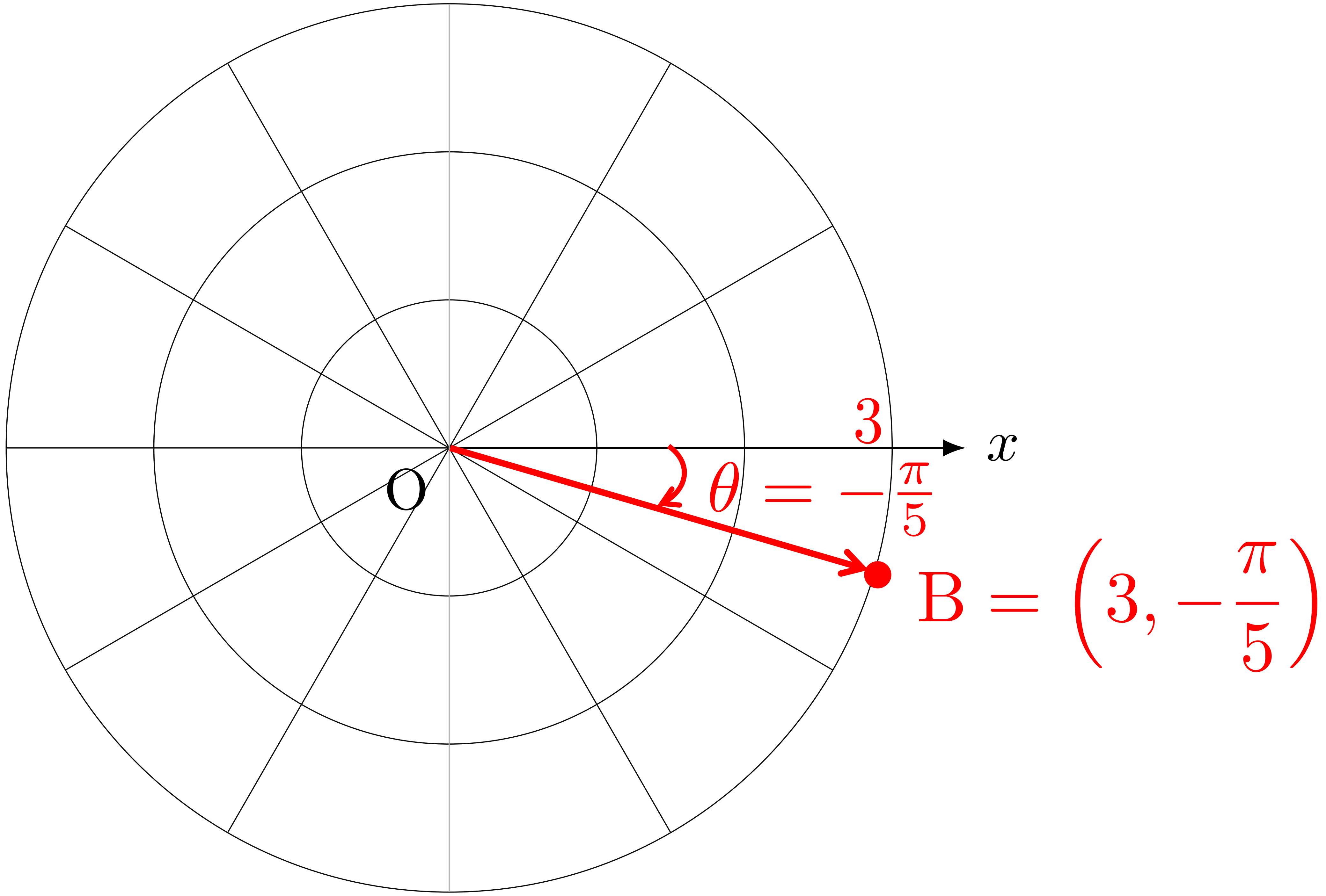
例1　極座標表示の表す点A

- $\mathrm{A} = (1, \pi)$



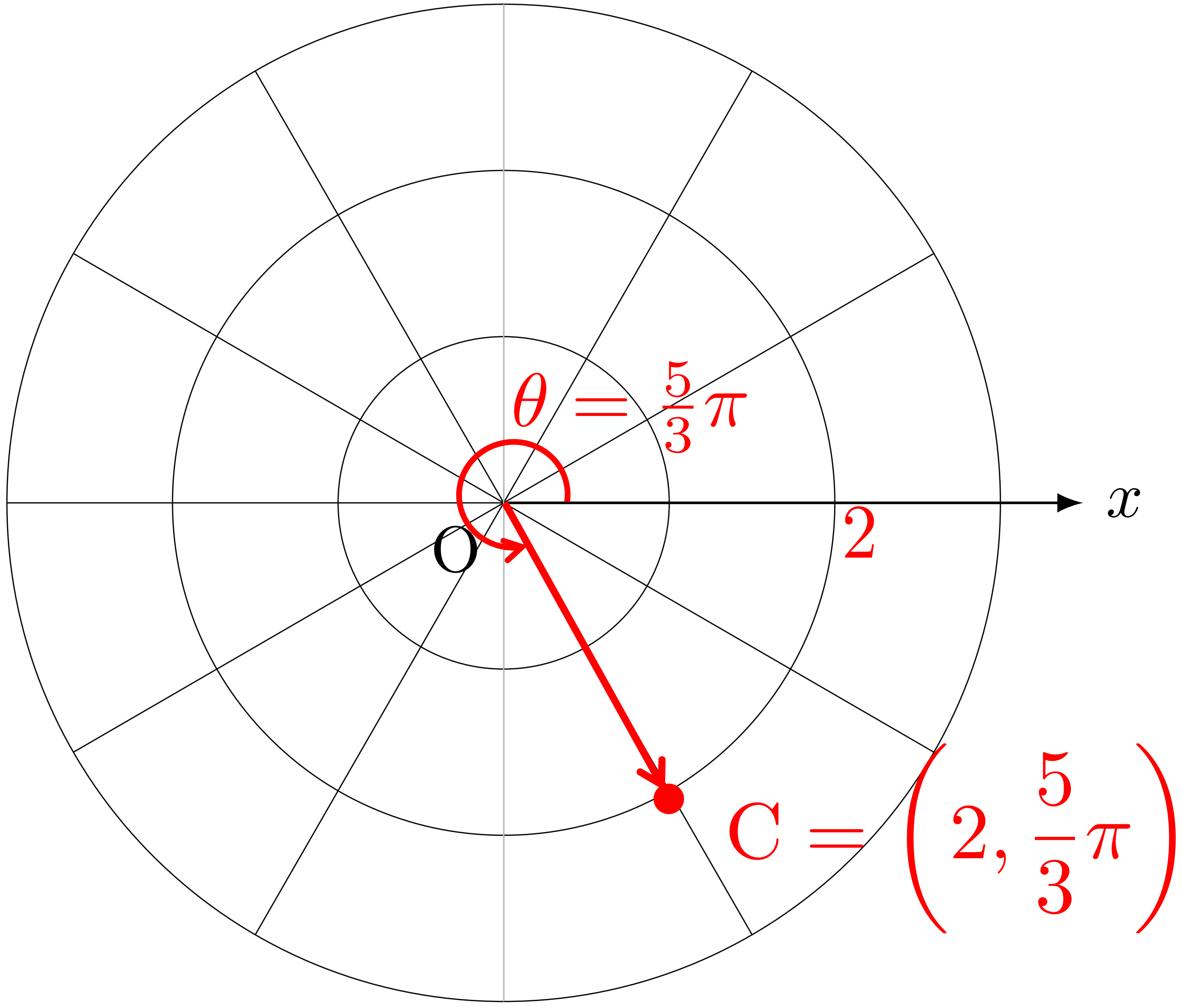
例1　極座標表示の表す点B

- $\mathrm{B} = \left(3, -\dfrac{\pi}{5}\right)$



例1　極座標表示の表す点C

- $\mathrm{C} = \left(2, \dfrac{5}{3}\pi\right)$



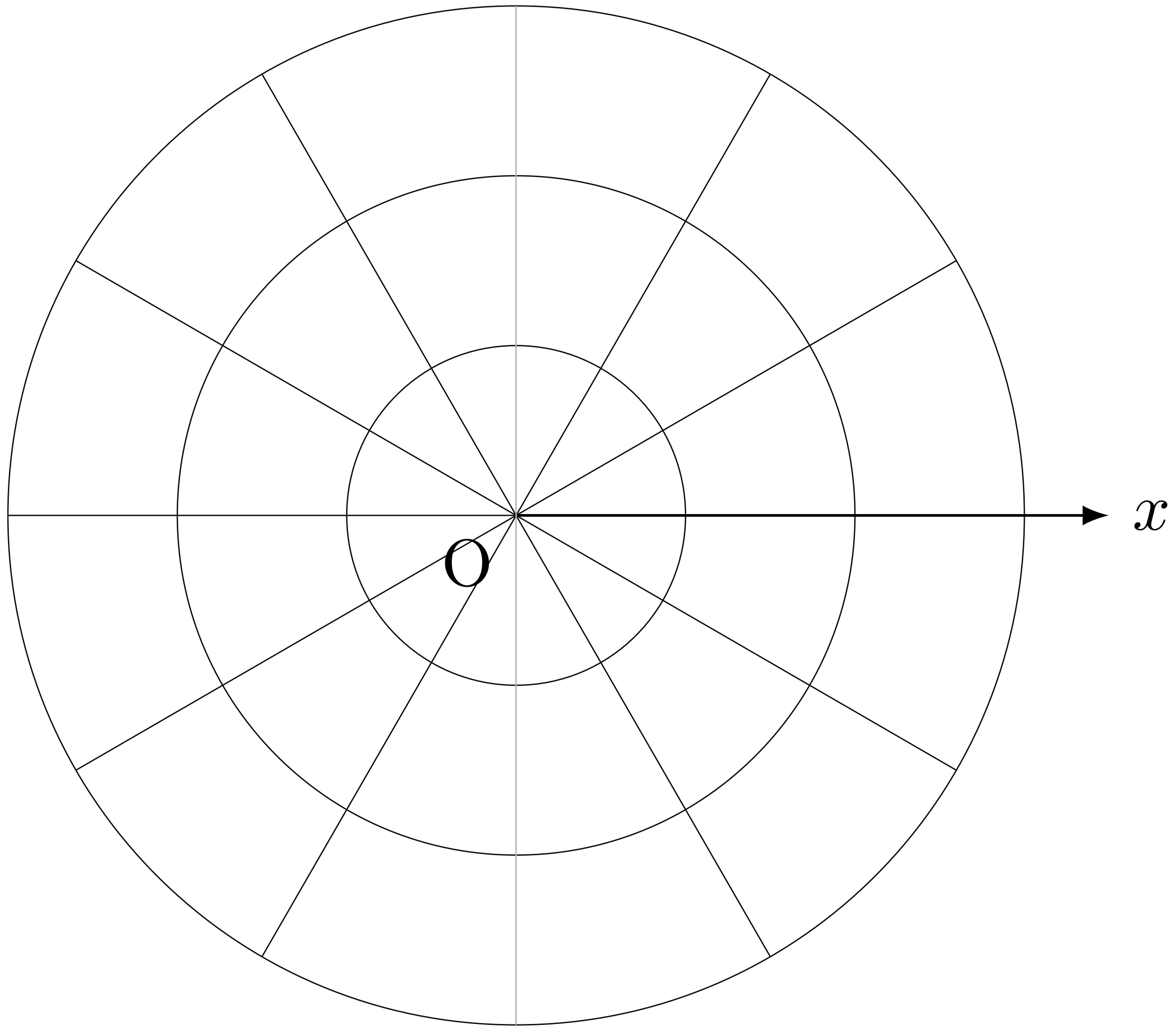
問題1　極座標の図示

●極座標が

$$\mathrm{A} = \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathrm{B} = \left(2, \frac{6}{7}\pi\right), \quad \mathrm{C} = \left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$$

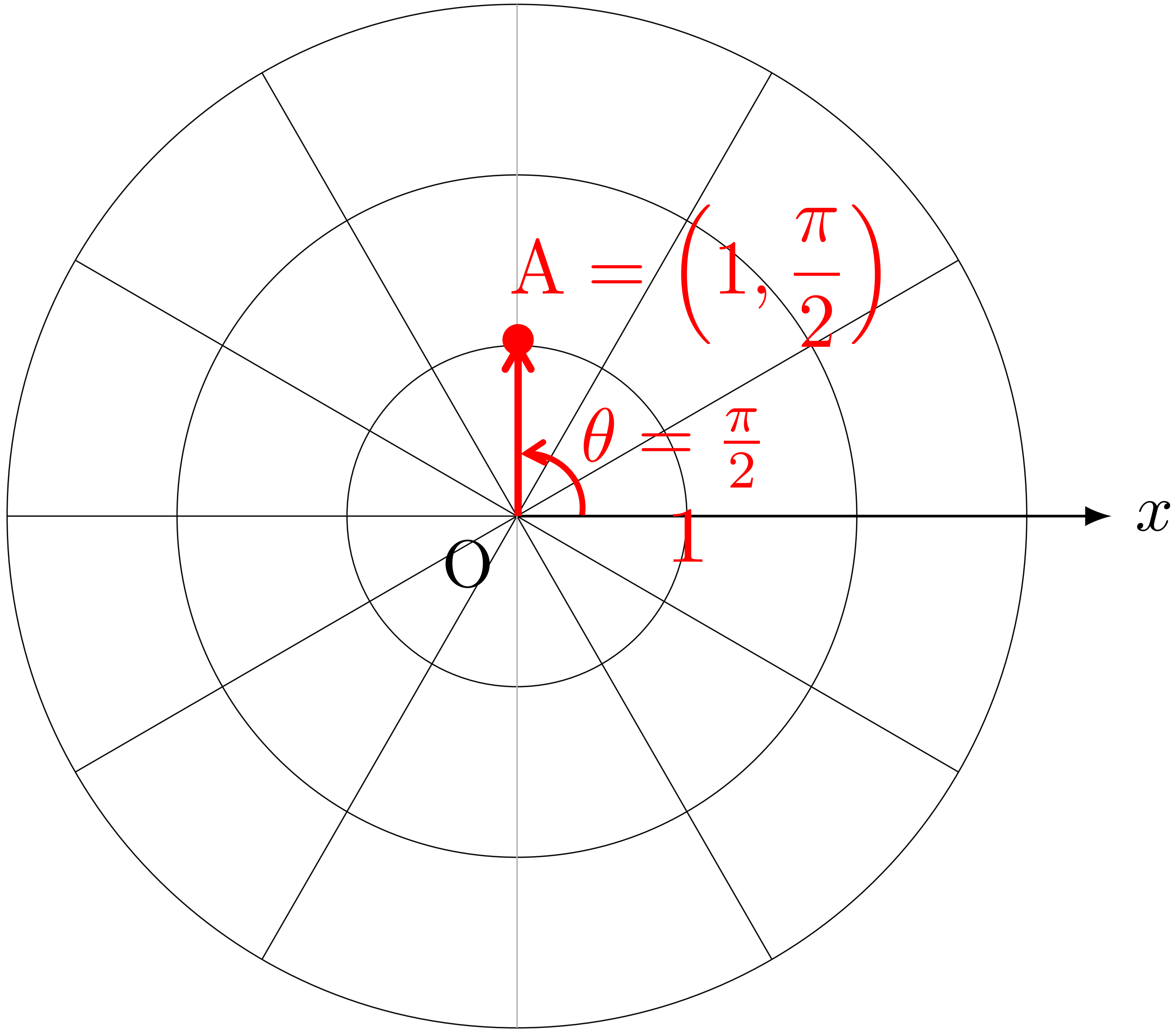
である点を図示しよう。

●解答用の図



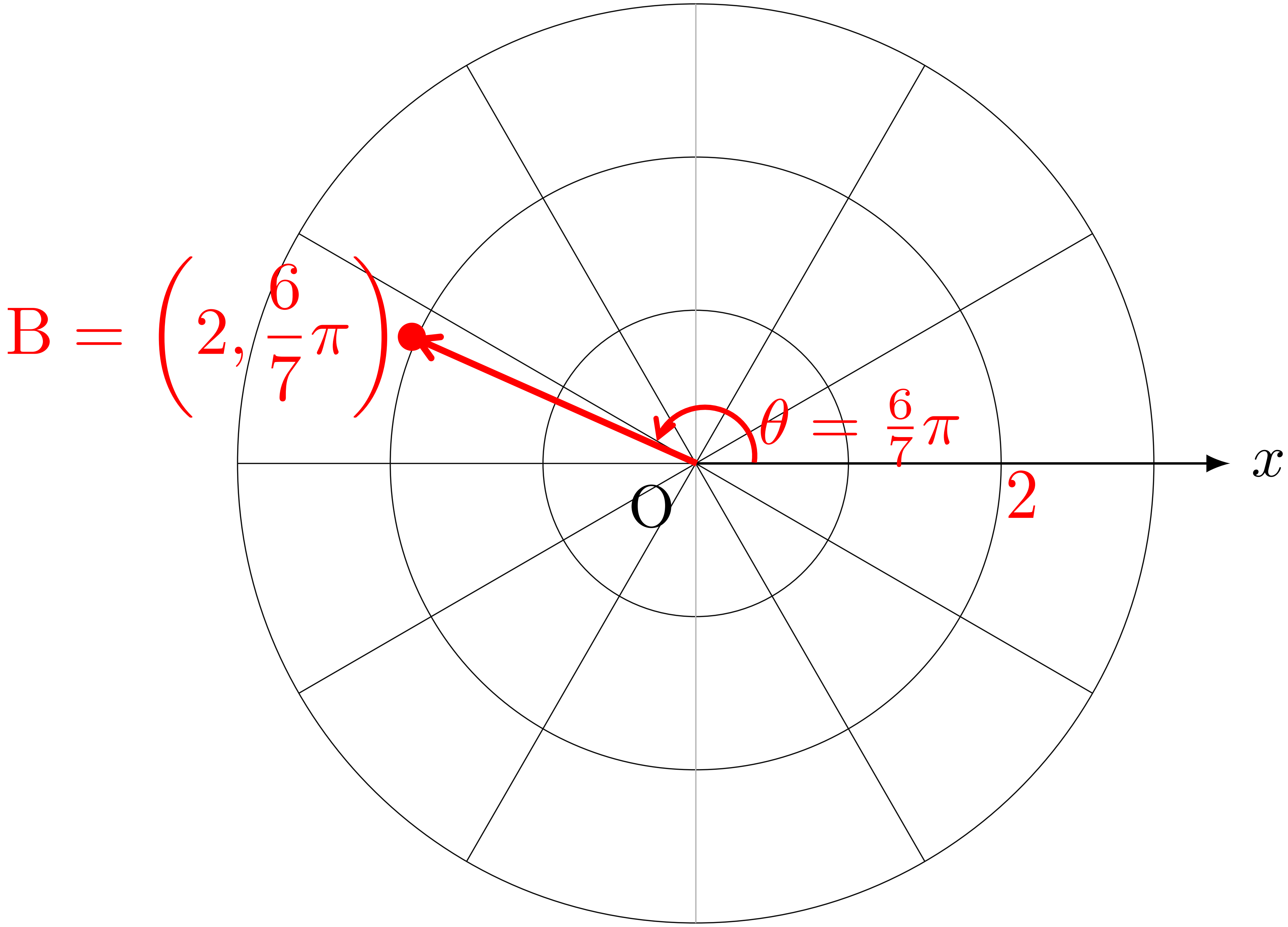
問題1　解答1

- $\mathrm{A} = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$



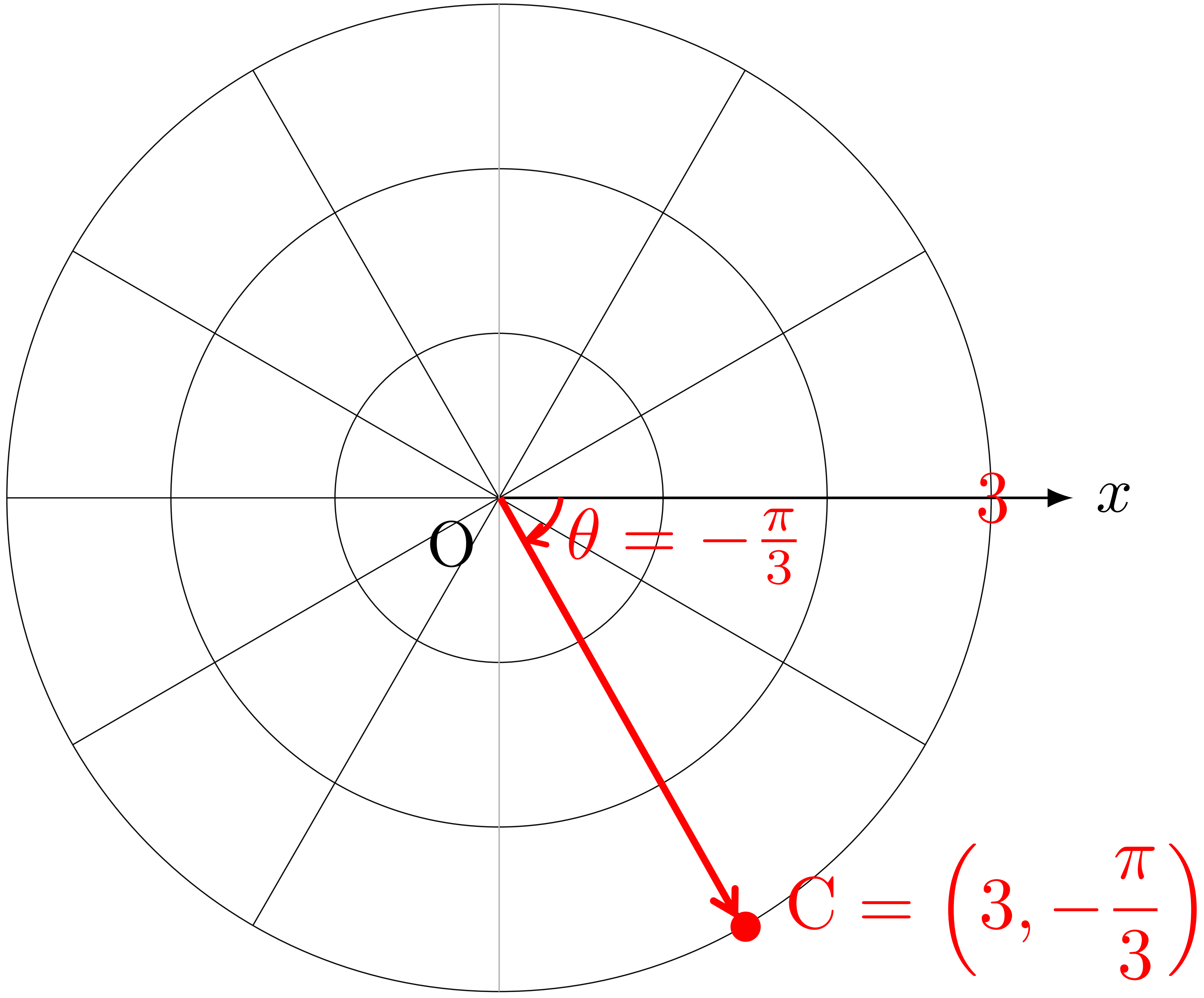
問題1　解答2

- $B = \left(2, \dfrac{6}{7}\pi\right)$



問題1　解答3

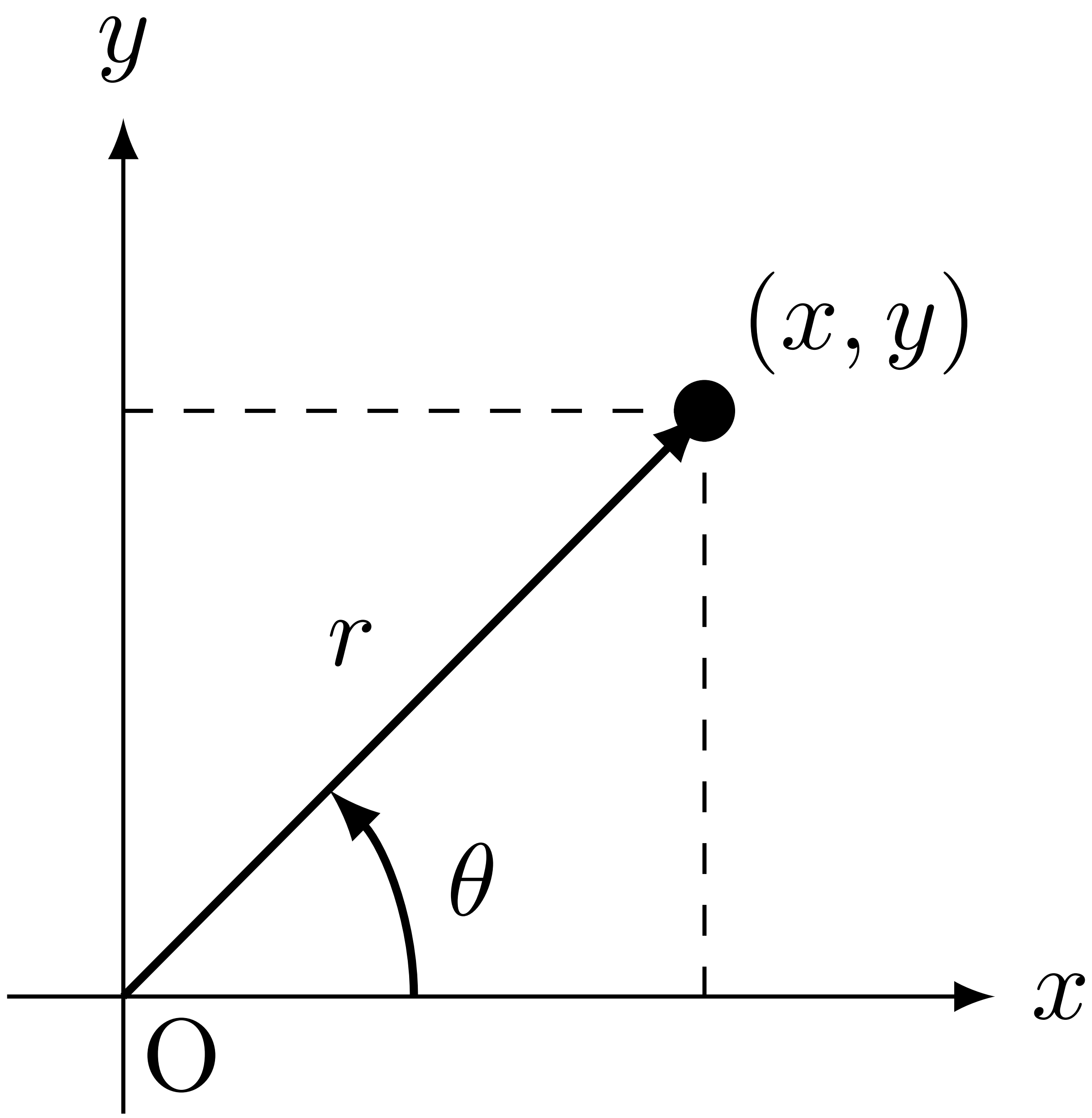
● $C=\left(3,-\dfrac{\pi}{3}\right)$



極座標と直交座標の関係

- 極座標と直交座標を重ね合わせると図のようになる
- 図から、極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には次のような関係がある

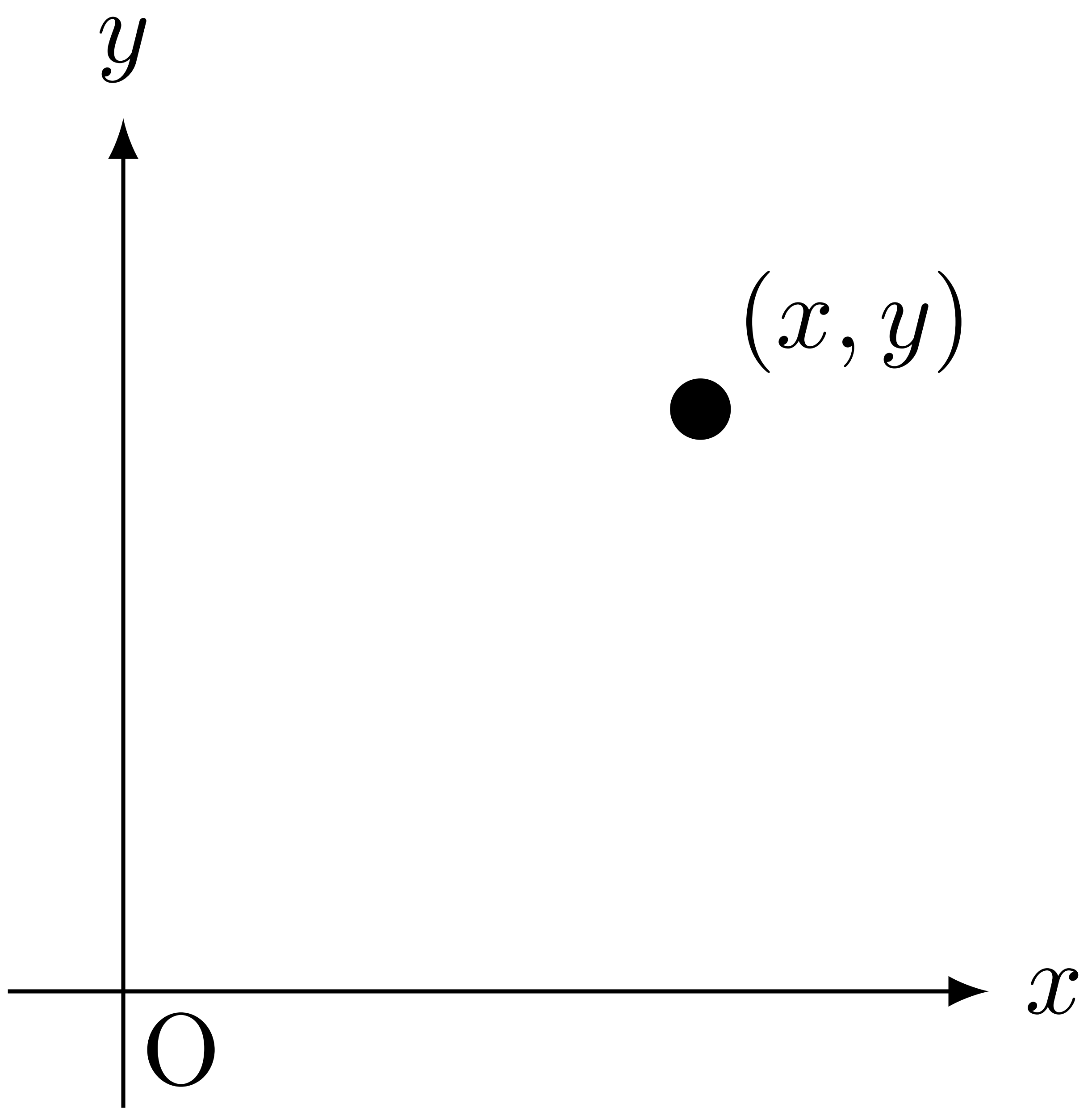
$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



極座標と直交座標の関係

- 極座標と直交座標を重ね合わせると図のようになる
- 図から、極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には次のような関係がある

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

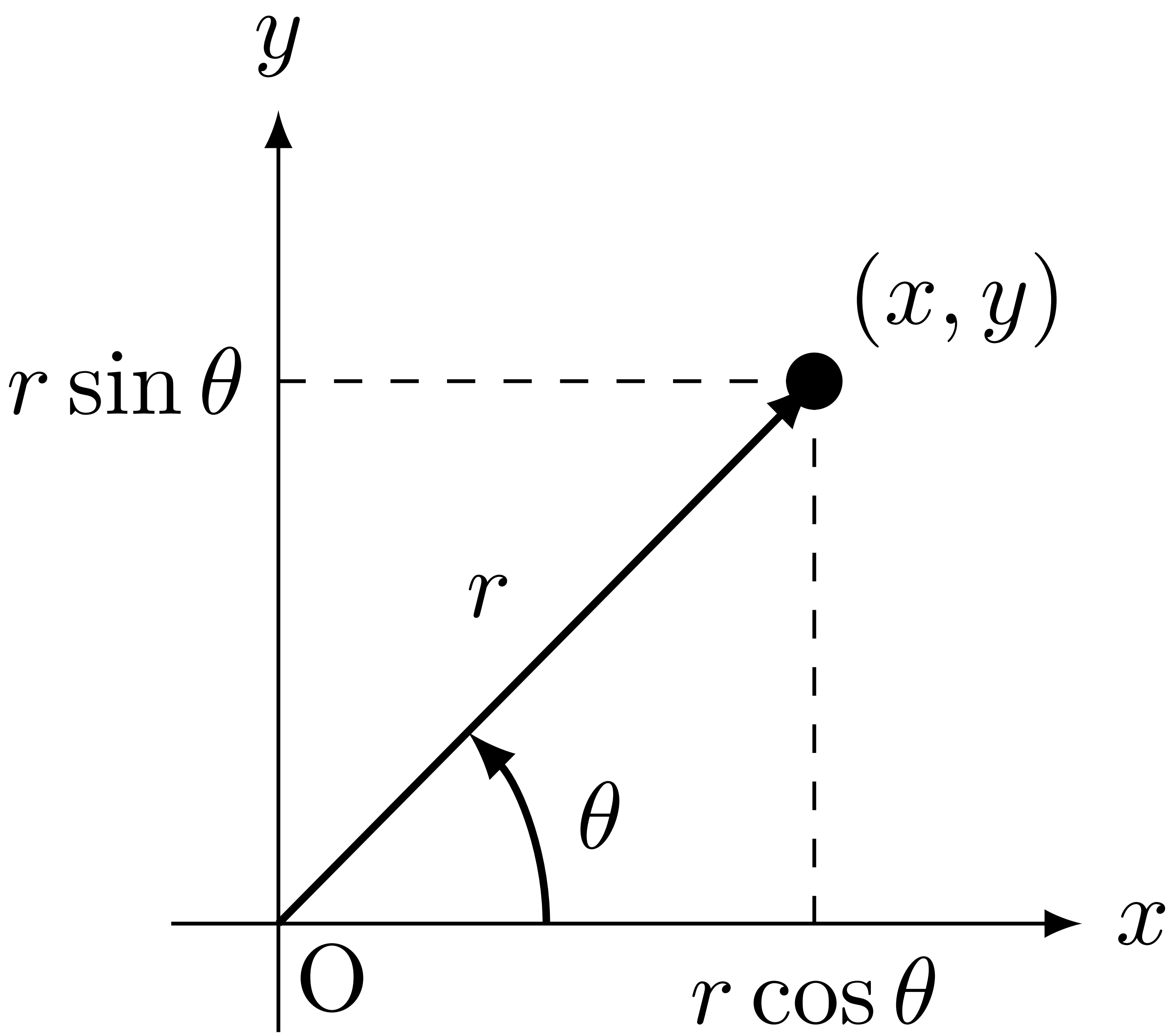


極座標と直交座標の関係

●極座標と直交座標を重ね合わせると図のようになる

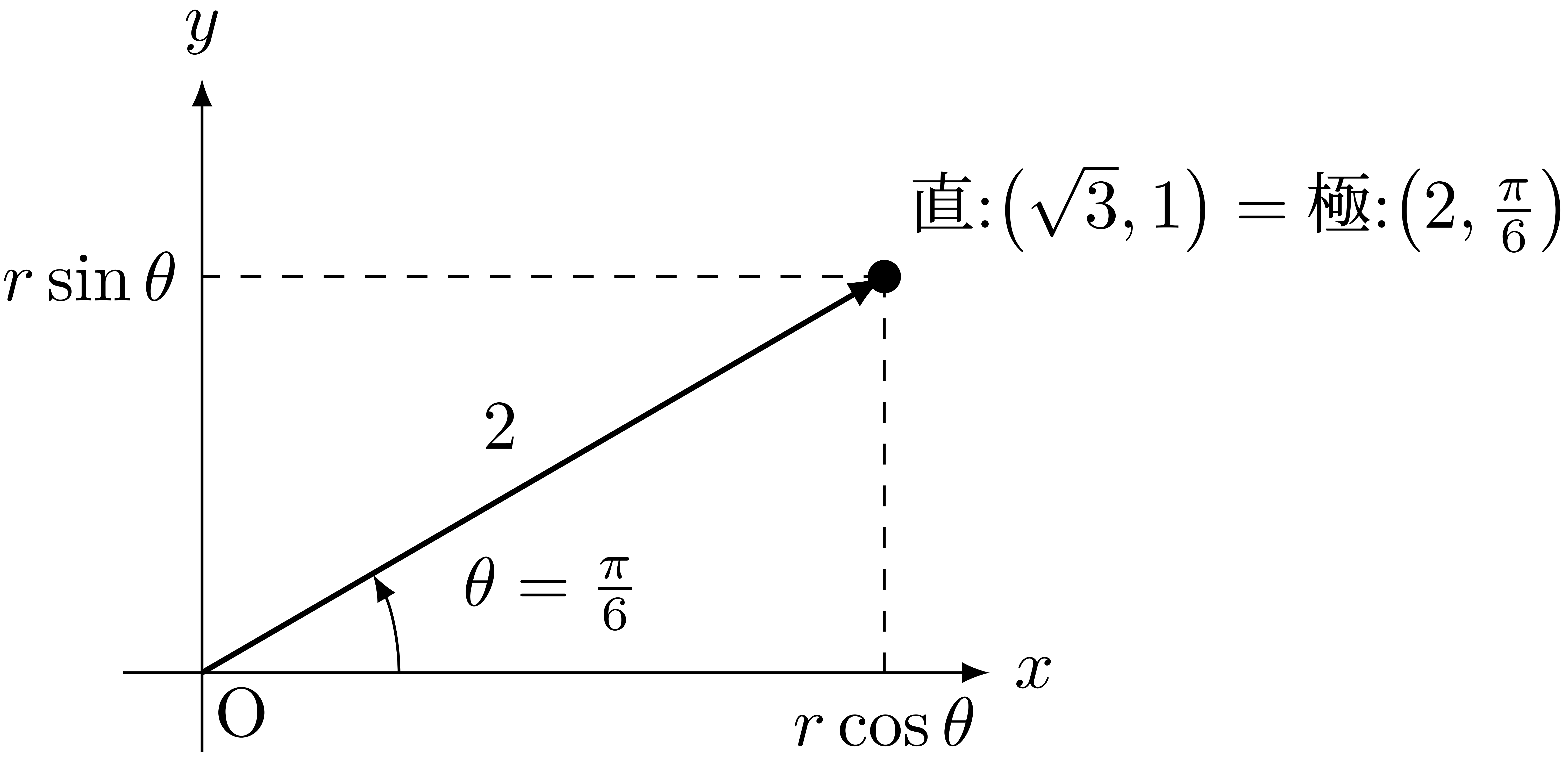
●図から、極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には次のような関係がある

$$
\begin{cases}
x = r\cos\theta \\
y = r\sin\theta
\end{cases}
$$



極座標と直交座標の変換

●直交座標で$(\sqrt{3}, 1)$ の点は極座標では$\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$



極方程式

極方程式へのモチベーション

- 平面上の点が極座標で表せた
- 平面上の曲線の方程式も、極座標に書き換えられる！

直交座標の点が極座標でかけたなら、
平面上の方程式も極座標の形でかけるんじゃね？

普通にできるで

定義　極方程式

平面上の曲線Cが極座標(r,θ)によって、

- $r=f(\theta)$
- $F(r,\theta)=0$

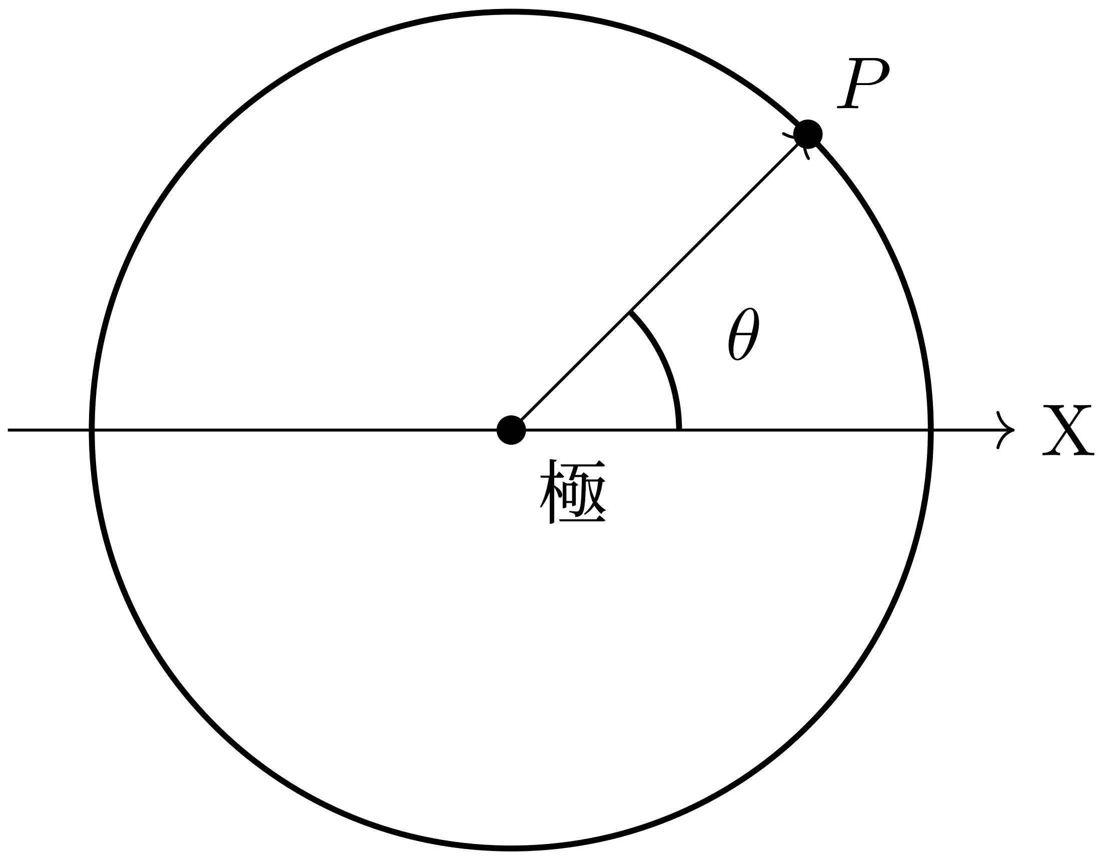
のいずれかの形で書かれるとき、この方程式をCの**極方程式**という。

極方程式の例

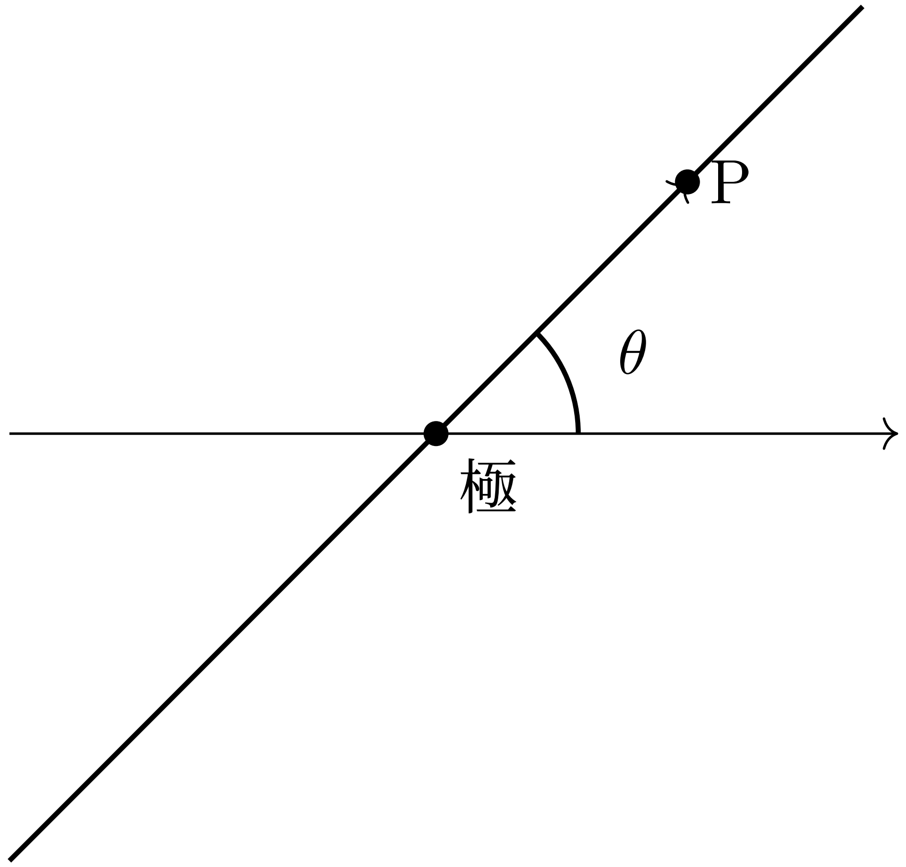
i. 極方程式$r = 1$ は極を中心とする半径1の円を表す

ii. 極方程式 $\theta = (\text{一定})$ は極を通る直線を表す

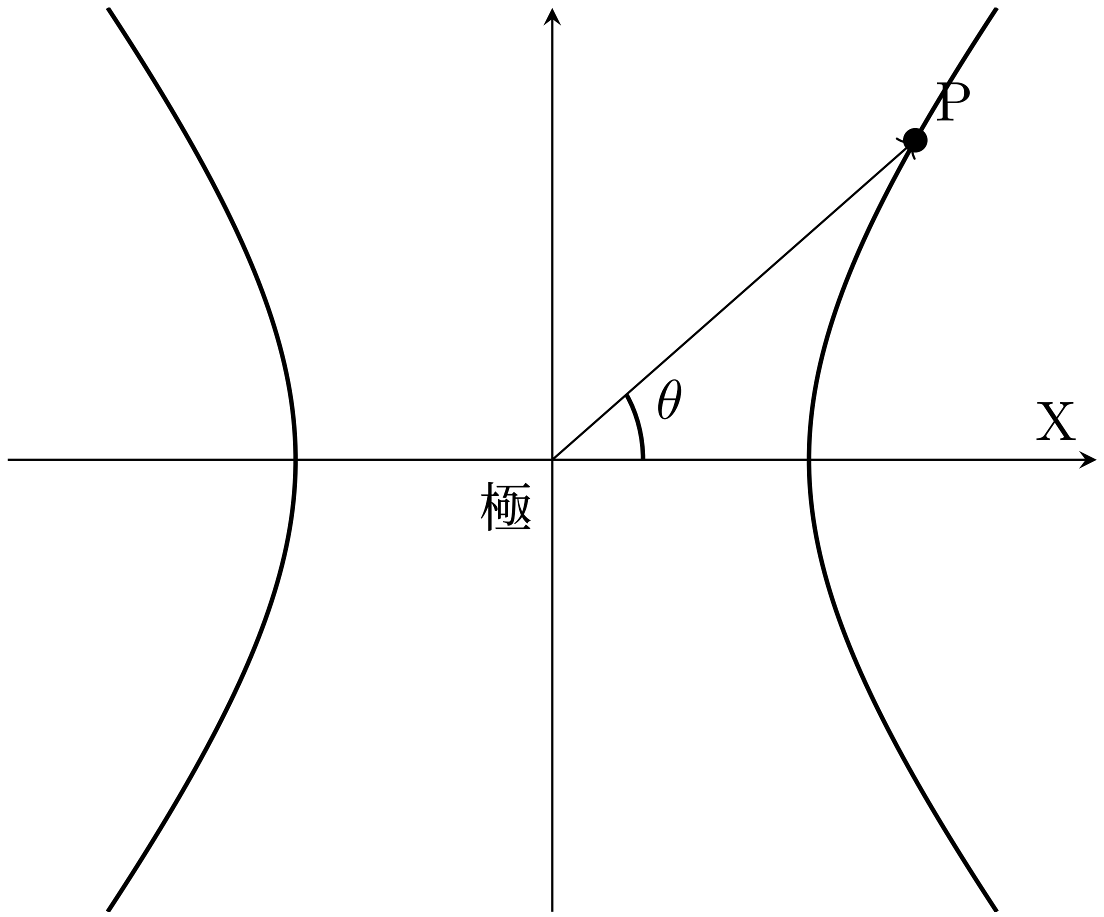
iii. 極方程式 $r^2 \cos\theta = 2$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を表す



(i)



(ii)



(iii)

極方程式が表す様々な曲線の例

- 本授業のサポートページを用いて、極方程式とそれが表す図形を視覚的に理解しよう。
- 極方程式の r と θ がグラフ上ではどのような関係を持って変化するか、実際にアニメーションを動かしながら理解しよう。
- 各図形についての説明はサポートページを参照のこと。

例10　双曲線の極方程式

双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ の極方程式を求める。まず、この式に極座標表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 2 \\ \iff \ & r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2 \end{aligned}$$

を得る。ここで倍角公式 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ より、

$$\boxed{r^2\cos 2\theta = 2}$$

を得る。

問題2　極方程式への変換

直交座標での表示が

$$y = 4x^2$$

の放物線を極方程式で表そう。

問題2　極方程式への変換

直交座標での表示が

$$y = 4x^2$$

の放物線を極方程式で表そう。

<u>ヒント.</u> (x, y)をそれぞれ極座標で表すと

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だった！

問題2　解答

$y = 4x^2$ に極座標表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を代入すると、

$$r\sin\theta = 4r^2\cos^2\theta$$

$$\iff \quad r(4r\cos^2\theta - \sin\theta) = 0$$

となる。ここで r は恒等的に0ではないので、

$$4r\cos^2\theta - \sin\theta = 0$$

$$\iff \quad r = \boxed{\frac{\sin\theta}{4\cos^2\theta}} = \boxed{\frac{1}{4}\tan\theta\sin\theta}$$

を得る。(尚、$r = 0$ の点もこの式に含まれる)

極方程式の描画

- コンピュータを使わずに極方程式が表す曲線を図示することは難しい。
- でも、問題を解く場面では曲線の概形が描ければ十分！！
- そのためには、具体的にいくつかの点をプロットして概形を予想できればOK！！

問題3　極方程式の概形予想1

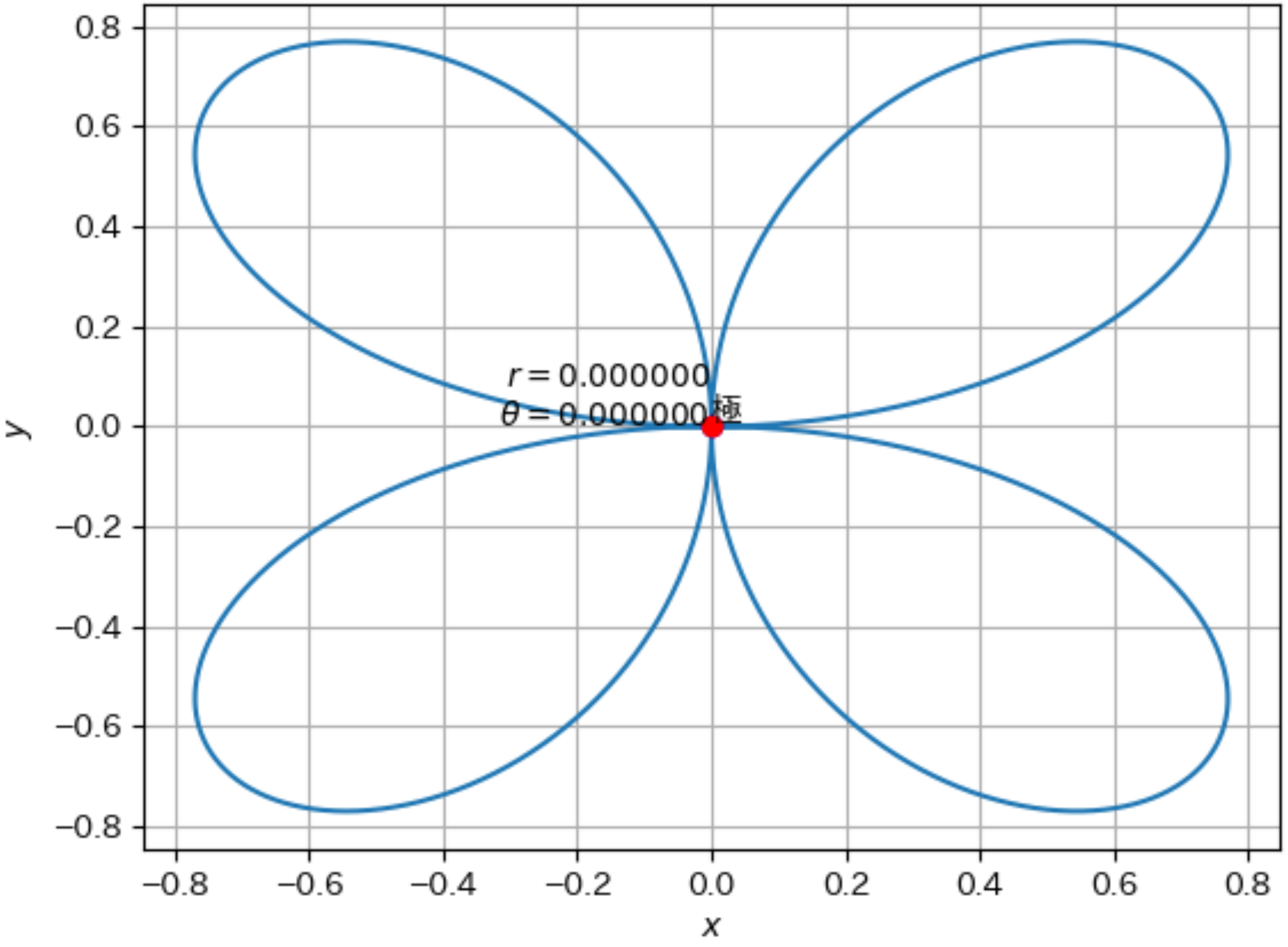
極方程式

$$r = \sin 2\theta$$

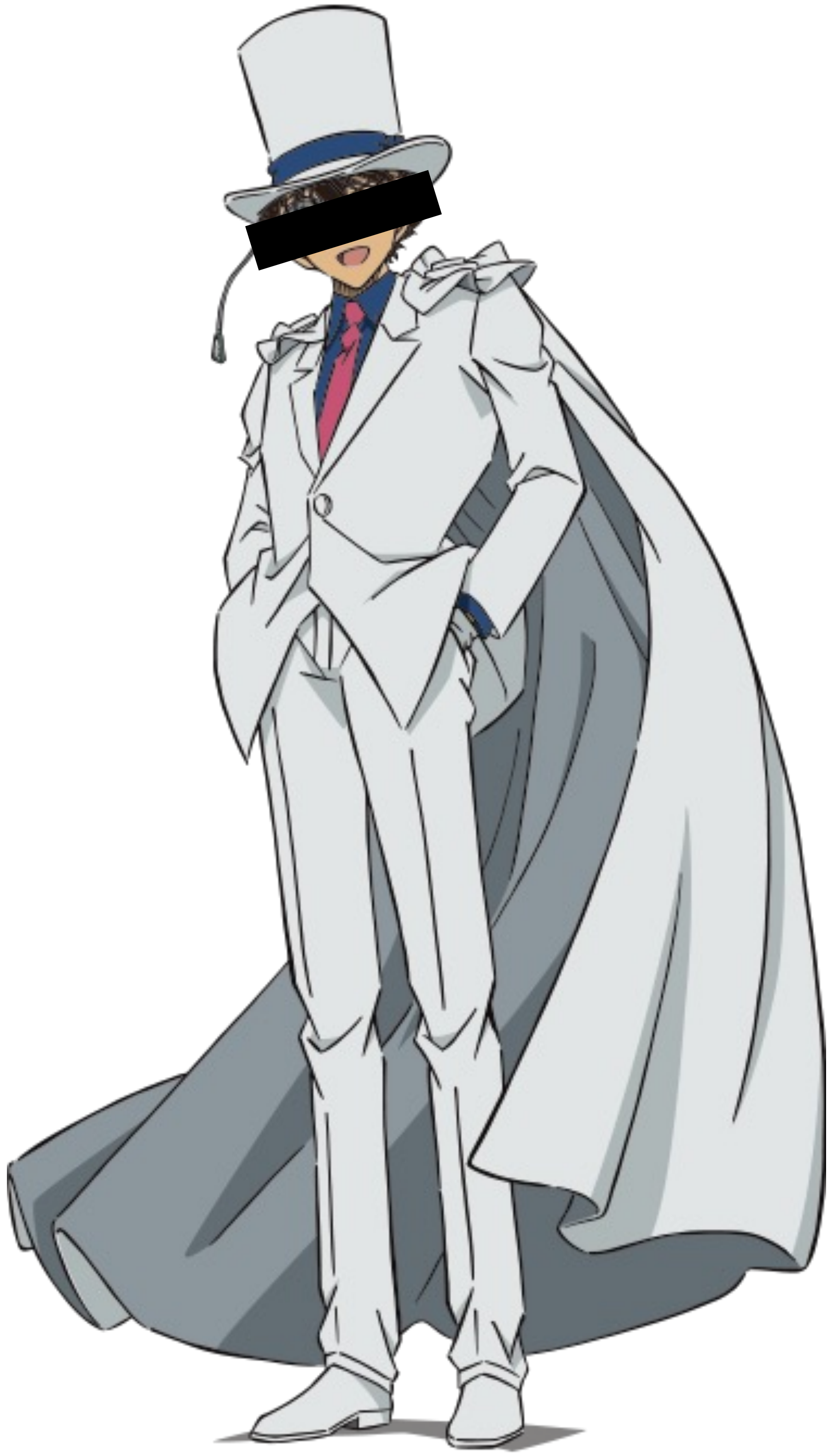
が表す曲線の概形を、具体的に複数の点の座標を計算してプロットすることによって描こう。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
r								
θ	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
r								

問題3　解答



0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
y
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
x
r = 0.000000
θ = 0.000000
極



問題4　極方程式の概形予想2

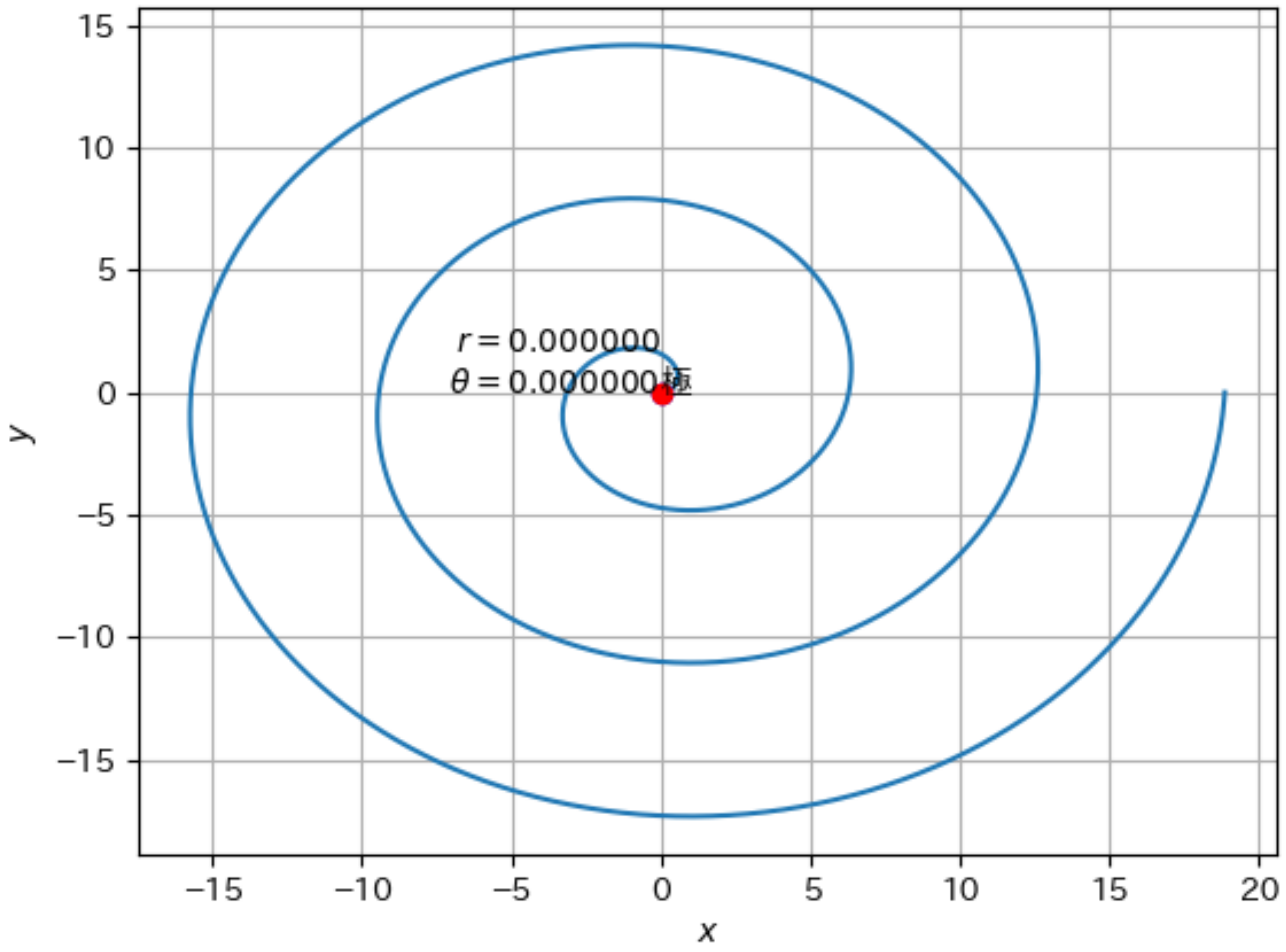
極方程式

$$r = \theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 5\pi)$$

が表す曲線の概形を図示してみよう。

ヒント．r と θ はそれぞれ何を表すかを考えると、概形が予想できる。分かり辛いと感じる時は、サポートページの他の図形のアニメーションを眺めると良い。

問題4　解答



まとめ

まとめ

●点の位置を極からの距離 r と偏角 θ で表したものを**極座標**という

●極座標と極形式は本質的には同じ

●極座標と直交座標は一対一に対応し、以下の関係がある

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

●平面上の曲線を極座標の形で表現したものを**極方程式**という

●極方程式で表された曲線を描くには

■コンピュータを使う

■複数の点をプロットして、概形を予想する

方法がある

お疲れ様でした！
(プリントを必ず提出してください)