

「数学C」

第3章

極座標と極方程式

理学院数学系 S. Sasaki

情報理工学院情報工学系 T. Hashimoto

目次

- 本時の目標
- 復習 1 / 媒介変数表示
- 復習 2 / 極形式
- 極座標と直交座標
- 極方程式とそれによって表される曲線
- まとめ

授業の目標

- 極形式の考え方をを用いて、極座標の点を具体的に図示できる。
- 直交座標(普通の座標)で書かれた点を極座標表示できる。
- 特に $r = f(\theta)$ の形の極方程式に対し、 θ が動く毎に r が決定され、グラフが描かれていくイメージを掴むことができる。
- 極方程式から、具体的にいくつかの点をプロットすることで、曲線の概形を図示することができる。



復習

復習 媒介変数表示

- 点 $P(x, y)$ を考える
- この点 P が関数 $f(\theta), g(\theta)$ を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta)$$

と表され θ が変化すると、この動点 P の軌跡は曲線を表すと考えられる。

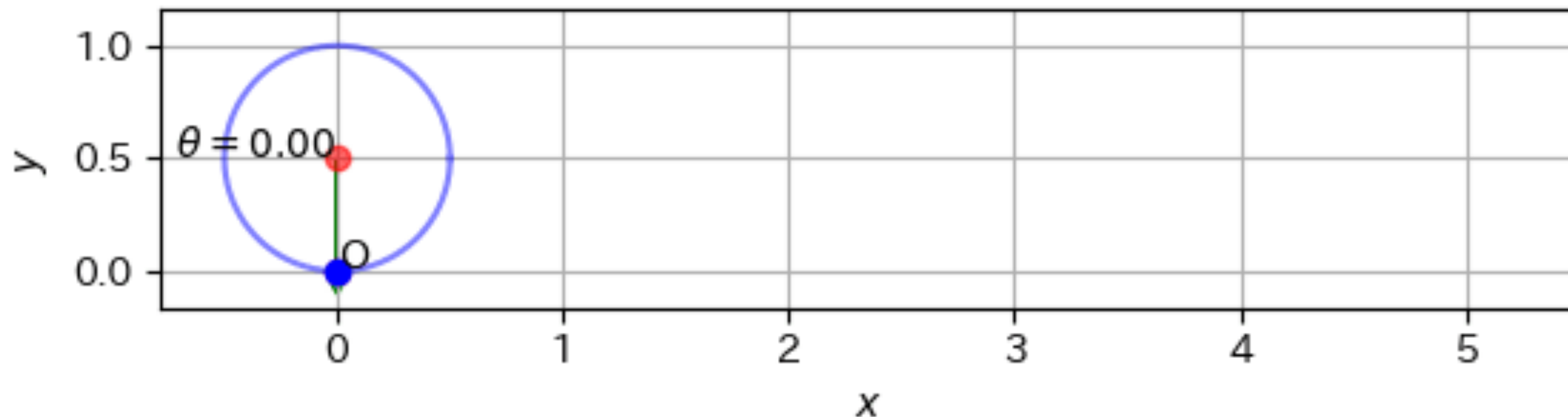
- このように曲線を表現することを **媒介変数表示** と言った。
- θ を **媒介変数** または **パラメータ** と言った。

媒介変数表示の例

- サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

- 概形はサポートページを参照すること



復習 極形式

- 本時に扱う極座標は本質的に極形式と同じ

- 複素数 $z = a + bi$ を考える

 - z に対応する複素数平面上の点をP

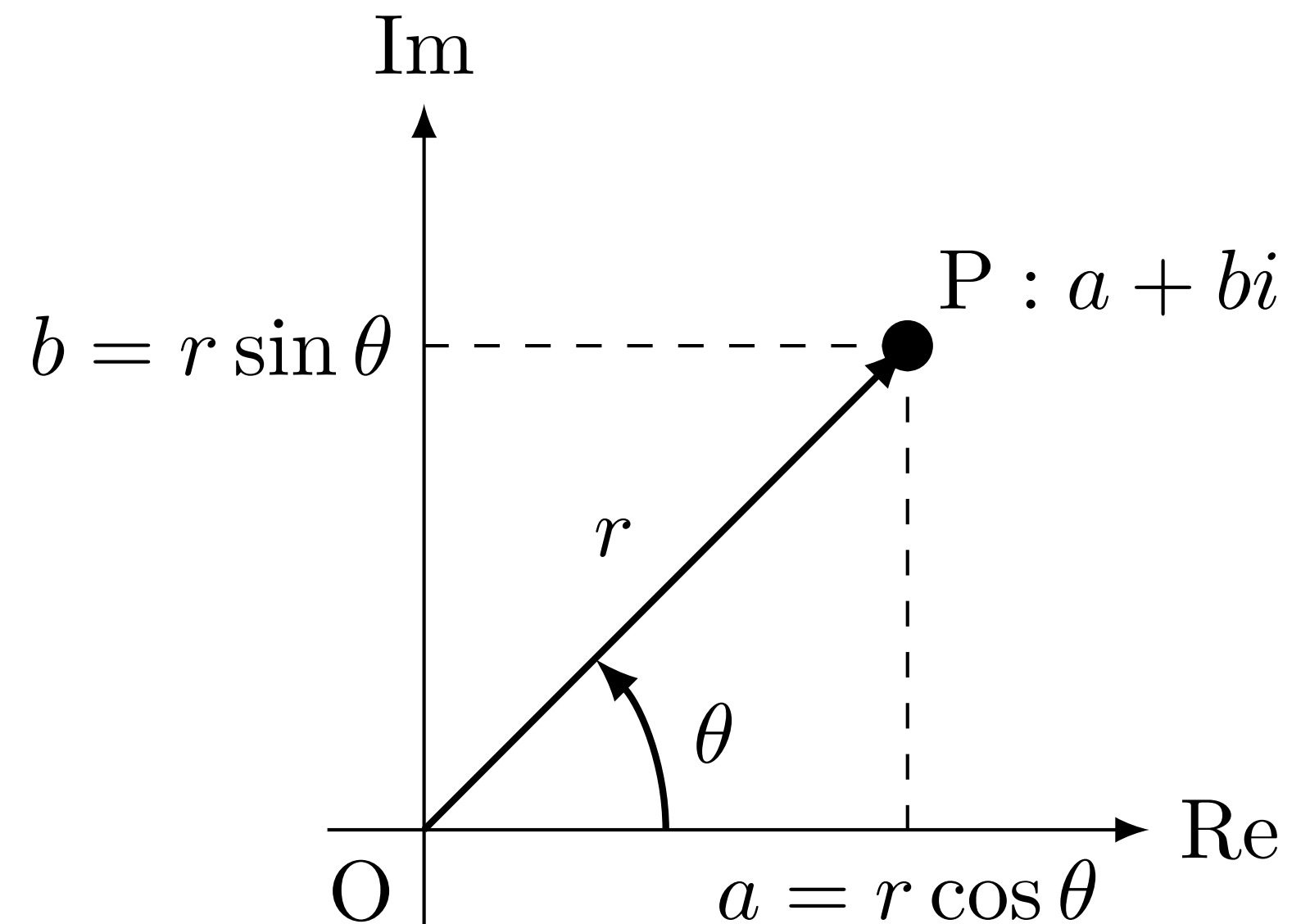
 - $OP = r$

 - 実軸の正の方向とのなす角を θ

- 点Pは次のように書ける。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

これを極形式と言った。



極形式と極座標

- 複素数 z の極形式 $z = a + bi$ から、複素数平面上の点は

- 絶対値（原点からの距離） $OP = r$

- 偏角 θ

によって表されることがわかる。

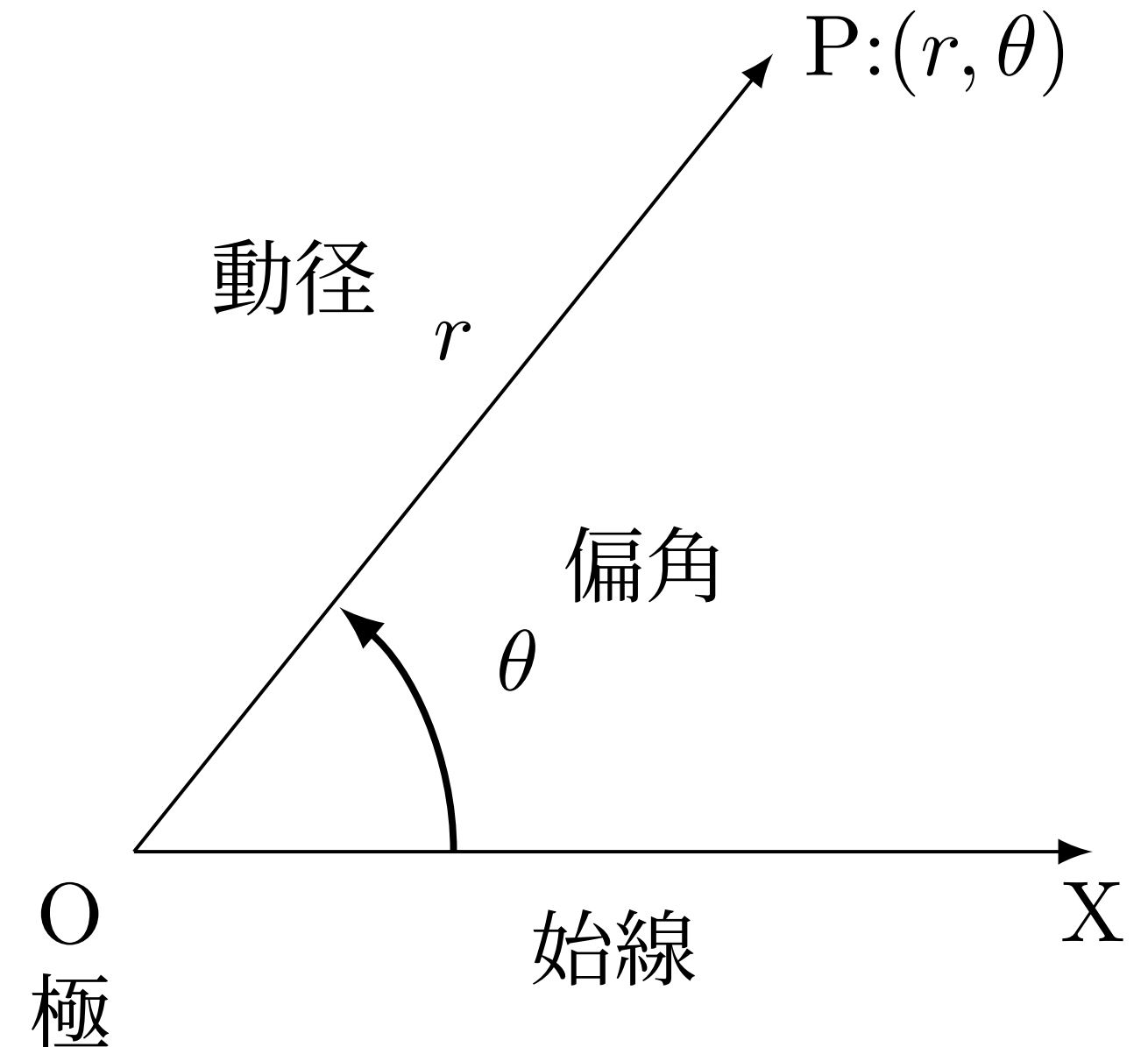
- これを xy -平面上で実現しているのが極座標！！



極座標と直交座標

定義 極座標

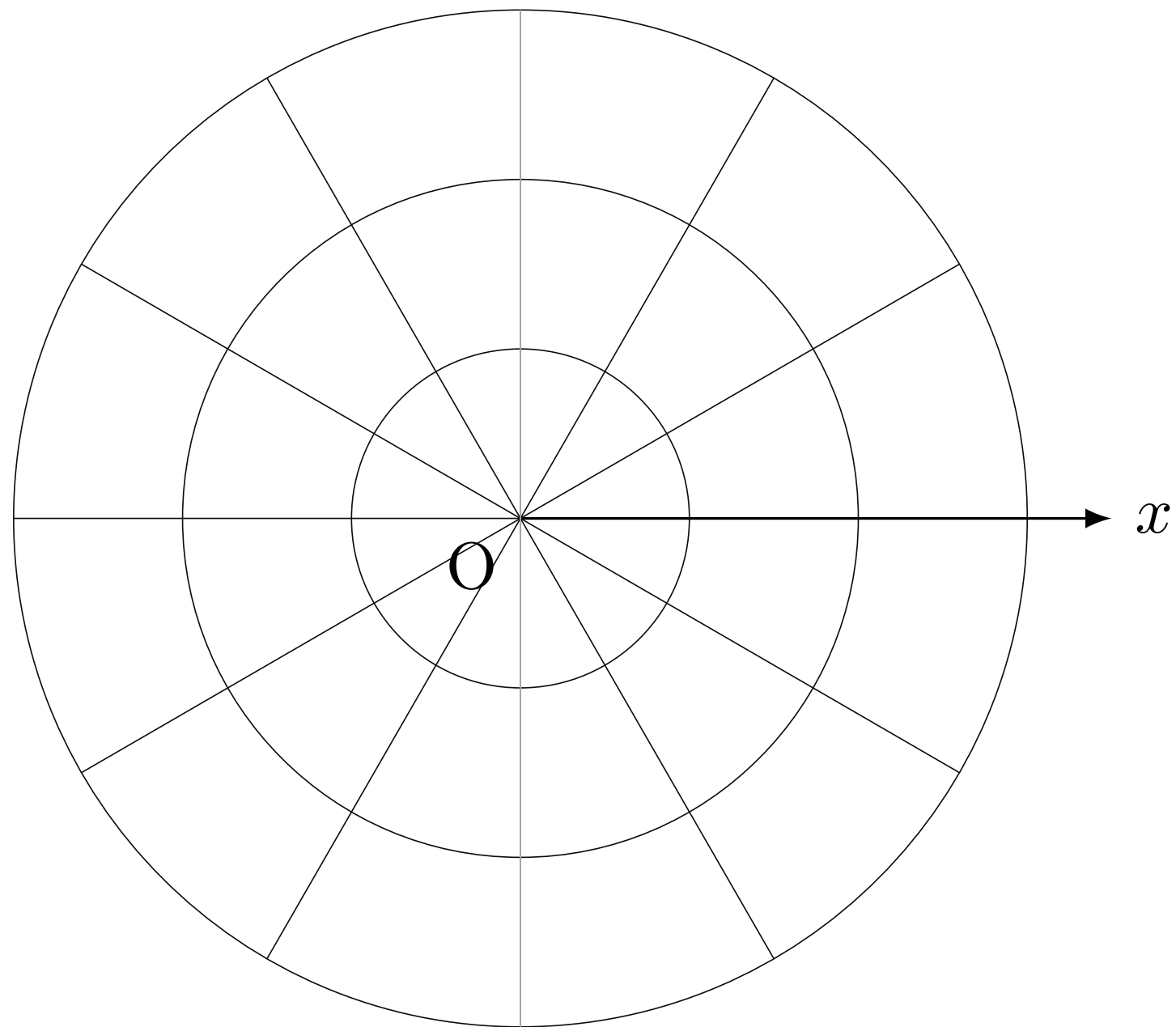
- 平面上に点Oと半直線OXを入れる
- この点OとPに対して次のように定める。
 - $OP = r$
 - OXからOPへ測った角を θ
- すると、点Pの位置は r, θ によって定まる。
- よって、点Pの位置を (r, θ) と表したものを極座標という。
- 点Oを極、OPを動径、半直線OXを始線、 θ を偏角という。



例1 極座標表示の表す点

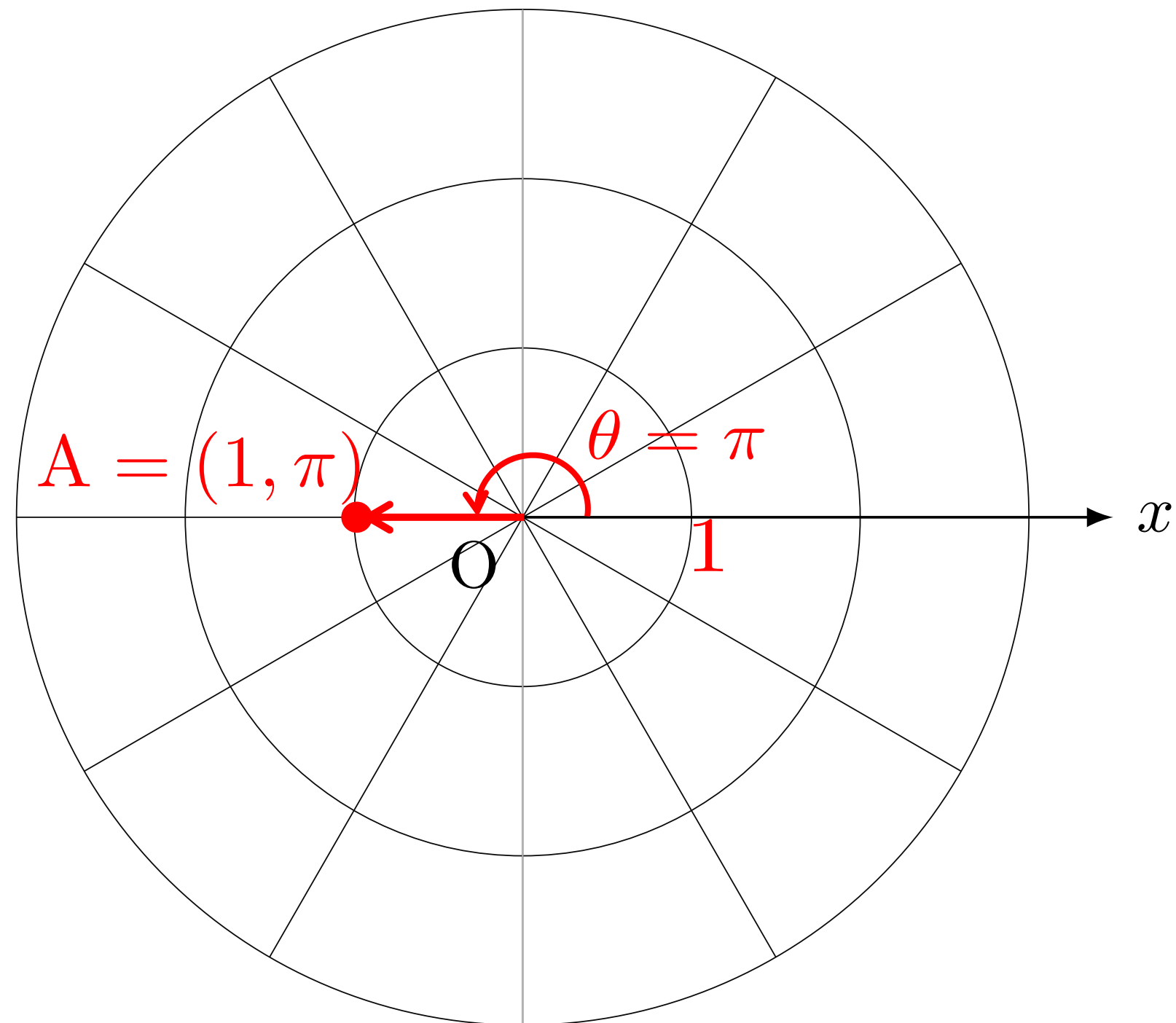
- 次の点をプロットしてみる

$$A = (1, \pi), \quad B = \left(3, -\frac{\pi}{5}\right), \quad C = \left(2, \frac{5}{3}\pi\right)$$



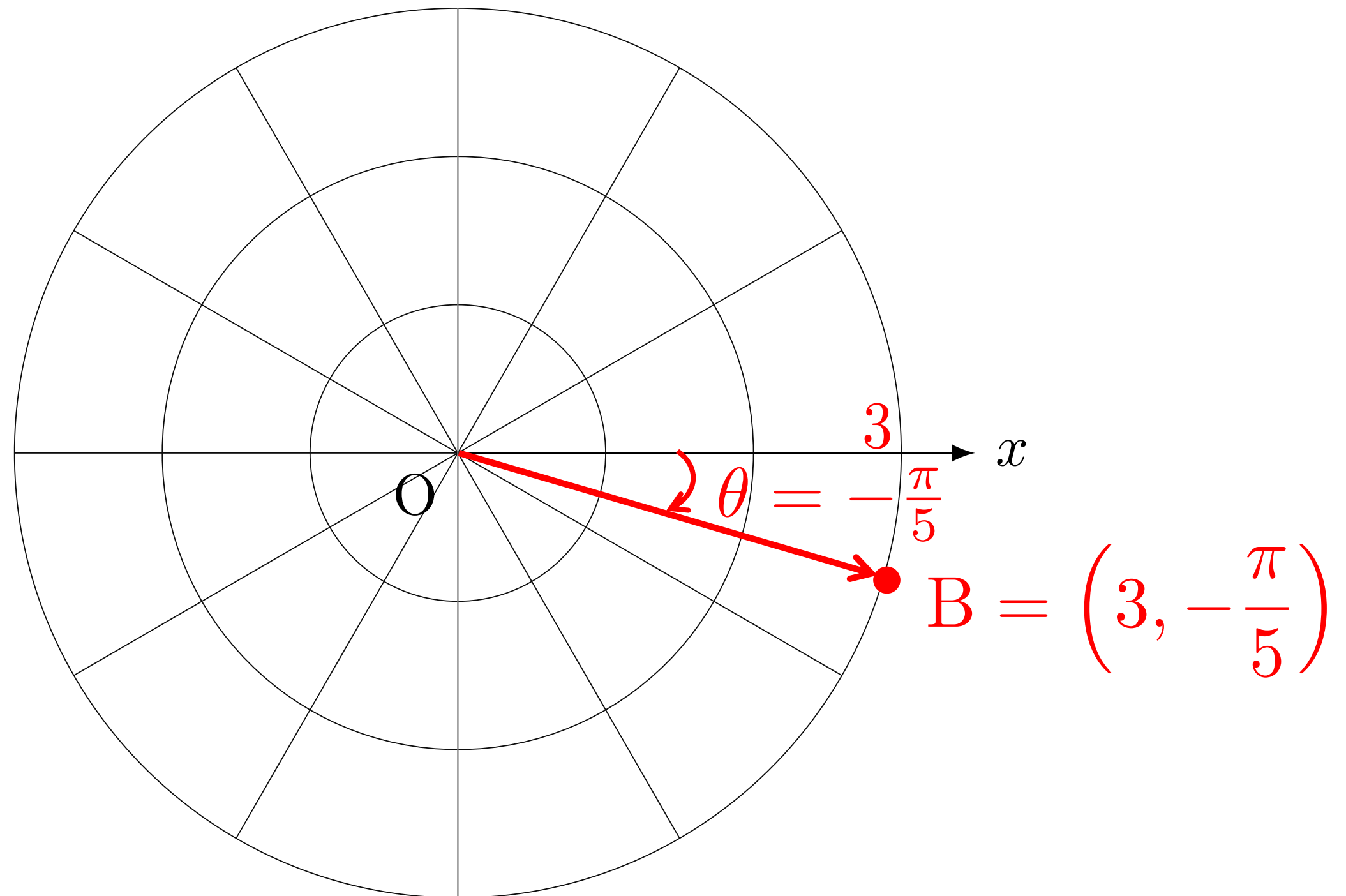
例1 極座標表示の表す点A

- $A = (1, \pi)$



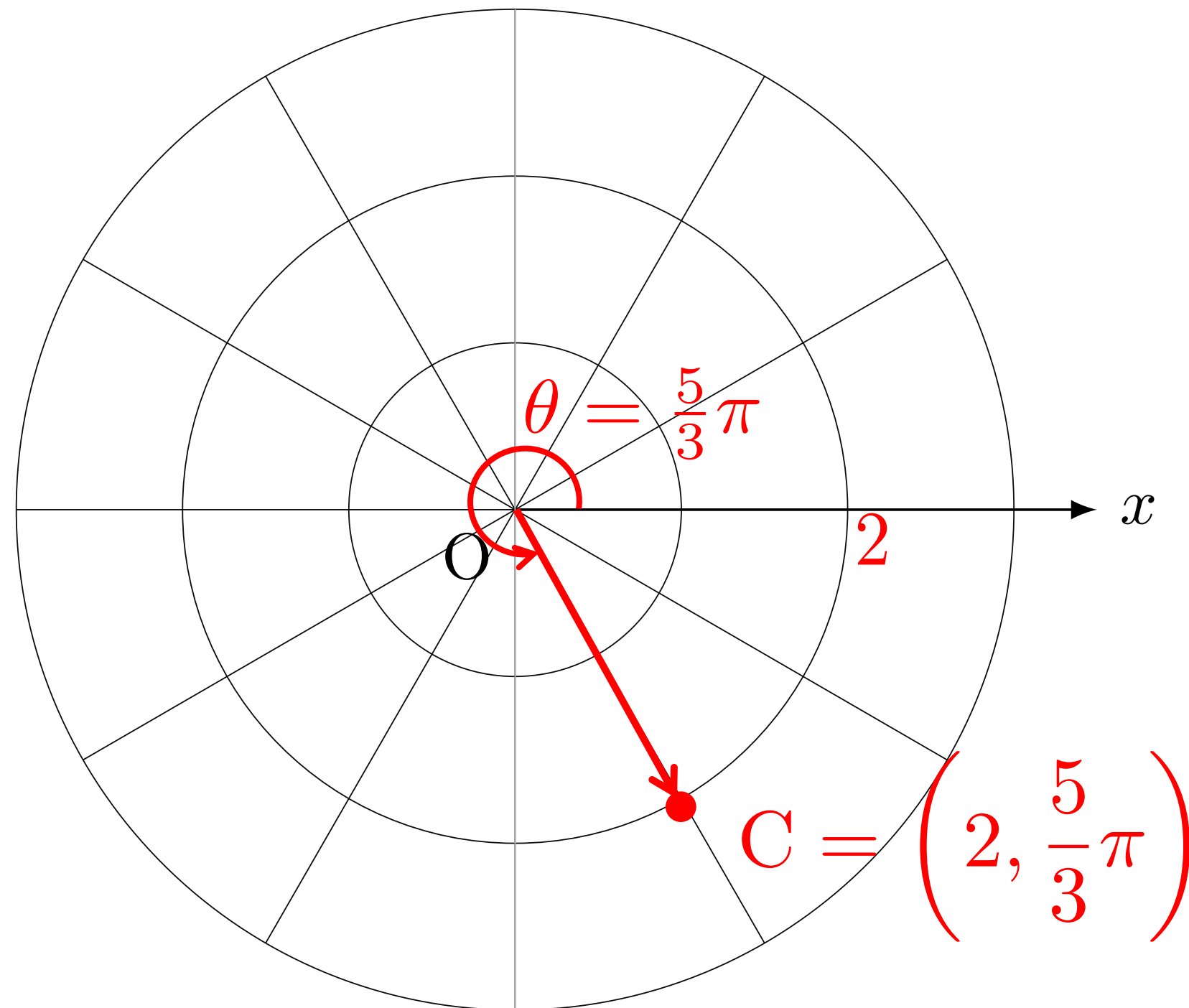
例1 極座標表示の表す点B

- $B = \left(3, -\frac{\pi}{5}\right)$



例1 極座標表示の表す点C

- $C = \left(2, \frac{5}{3}\pi \right)$



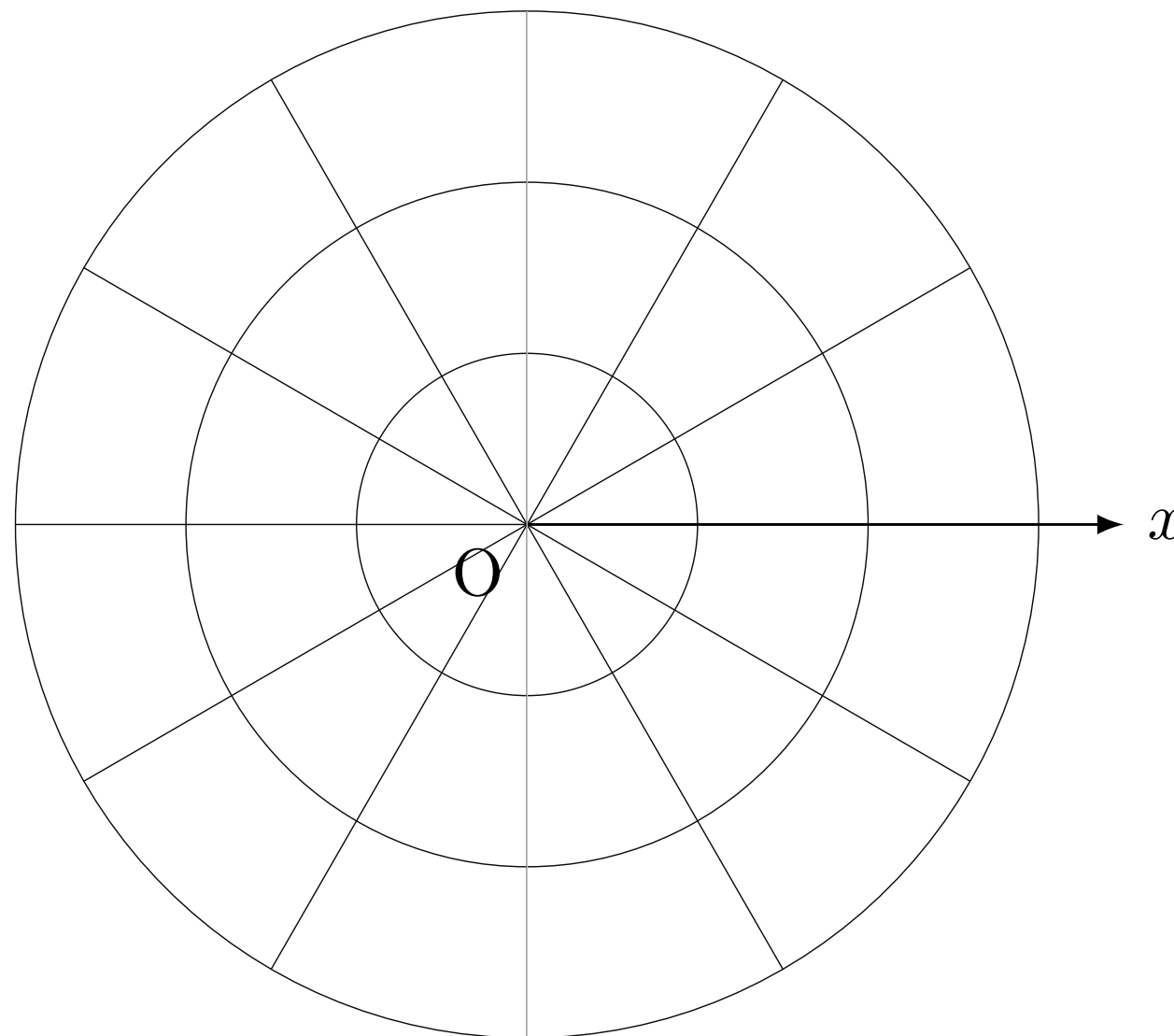
例題 極座標の図示

- 極座標が

$$A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right), \quad B = \left(2, \frac{6}{7}\pi\right), \quad C = \left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$$

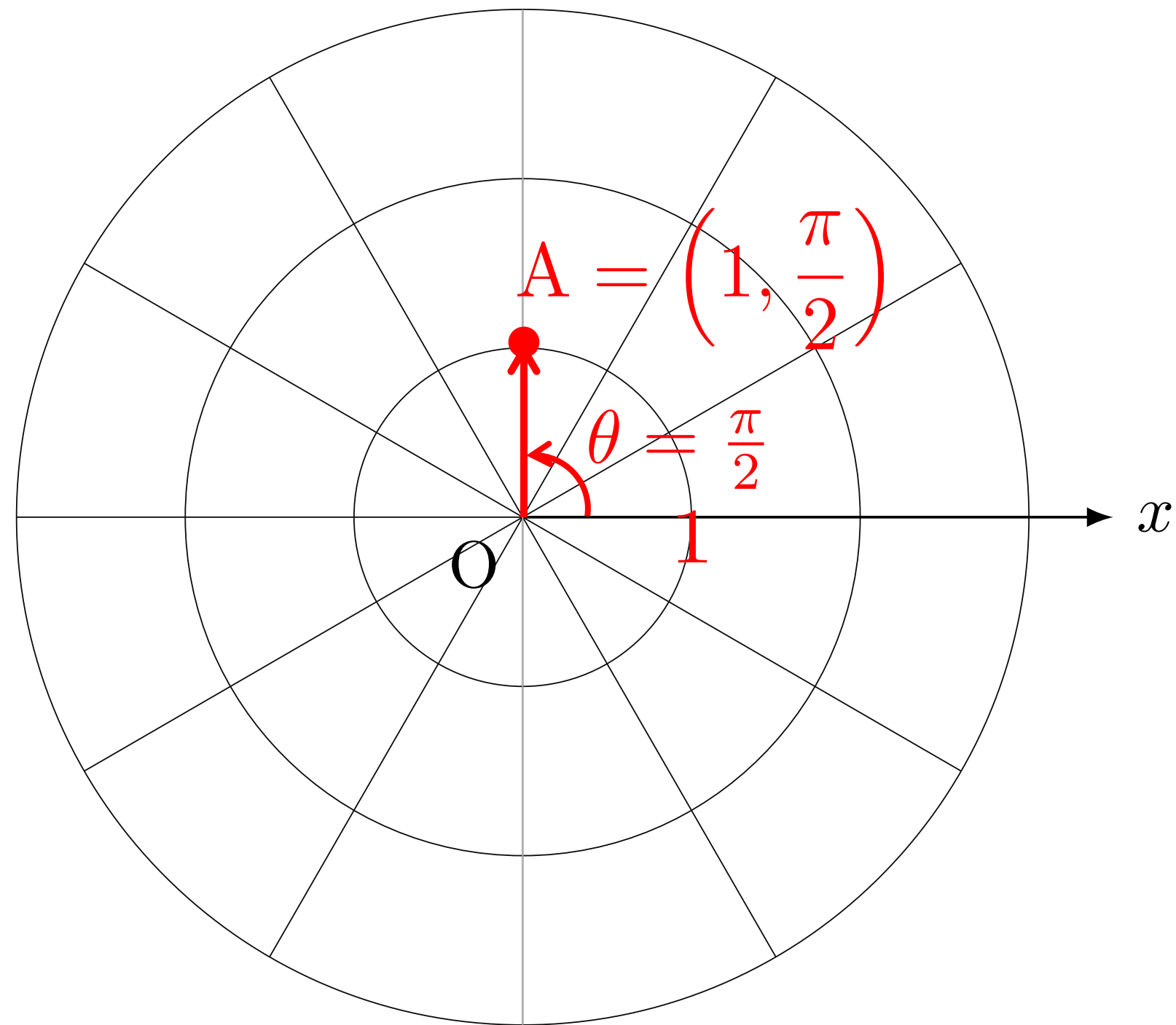
である点を図示しよう。

- 解答用の図



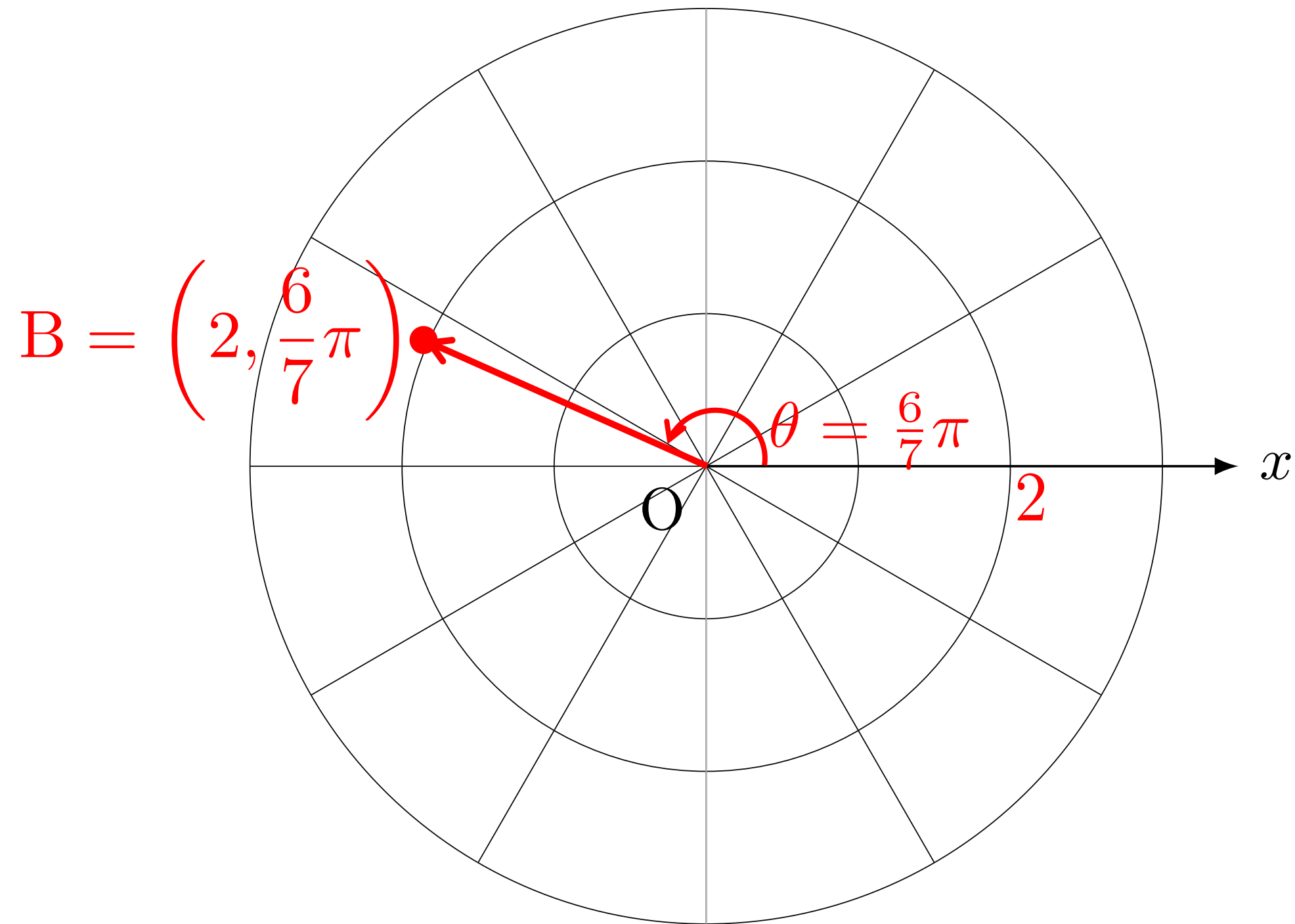
問題1 解答1

- $A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$



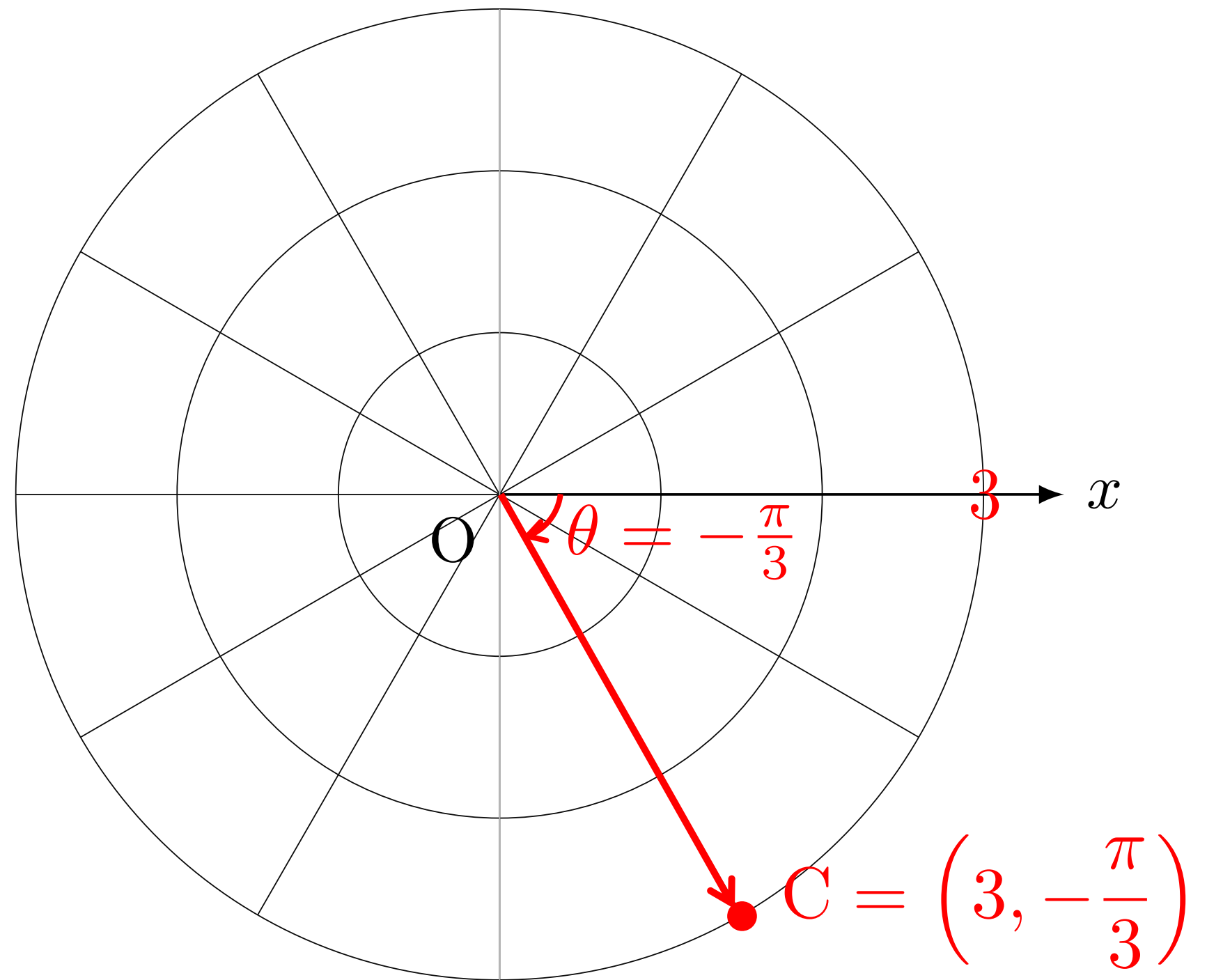
問題1 解答2

● $B = \left(2, \frac{6}{7}\pi\right)$



問題1 解答3

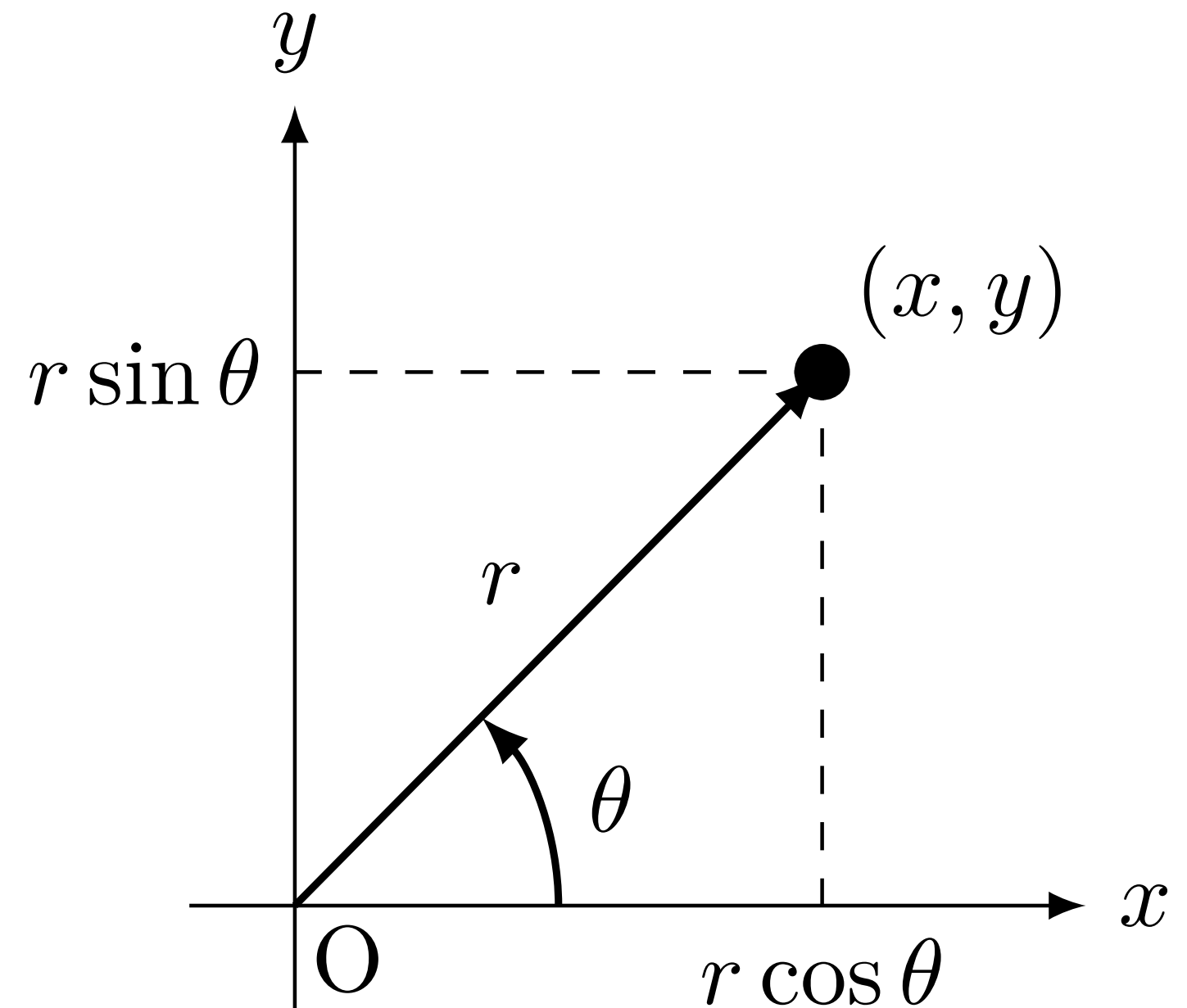
● $C = \left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$



極座標と直交座標の関係

- 極座標と直交座標を重ね合わせると図のようになる
- 図から、極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には次のような関係がある

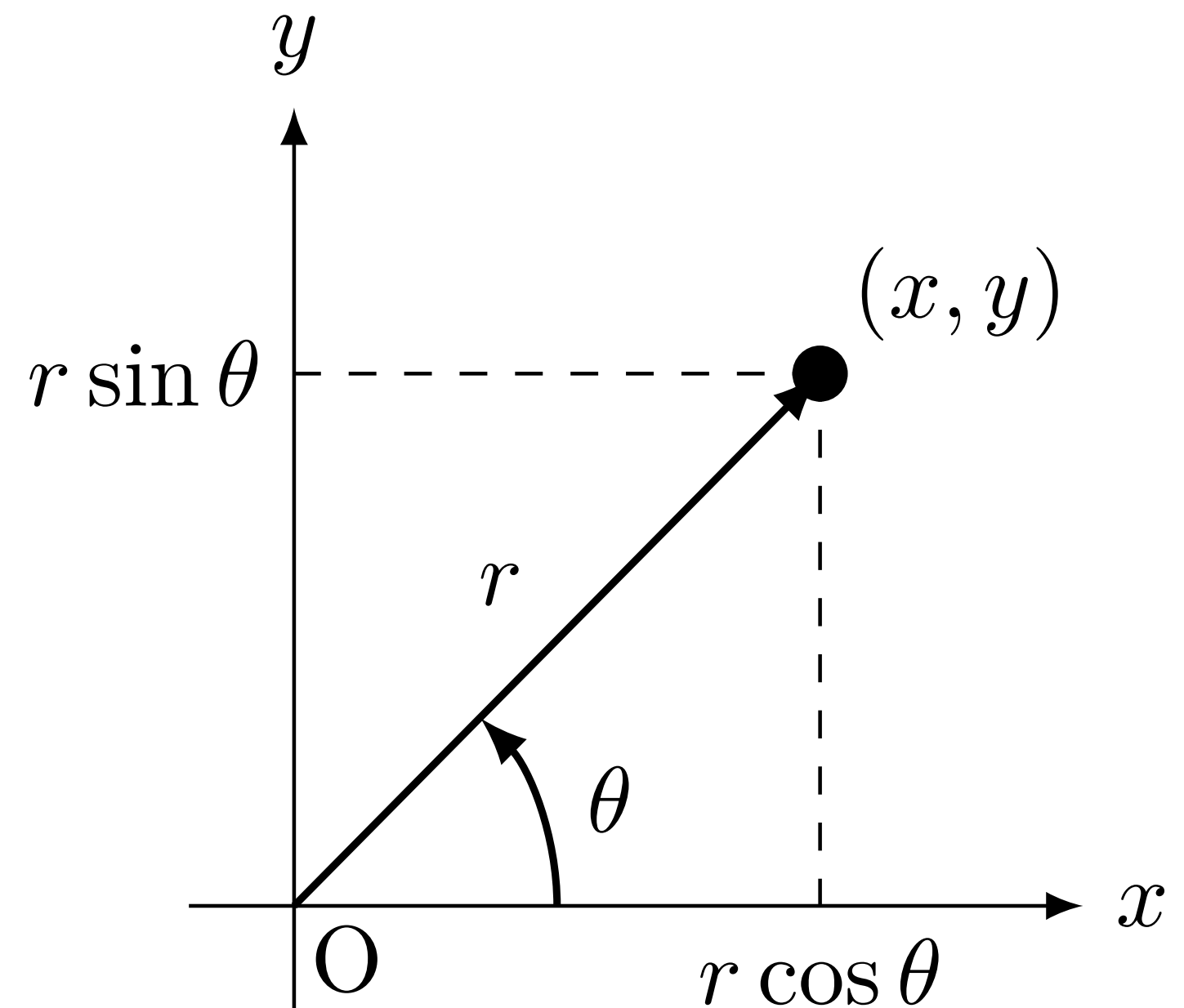
$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



極座標と直交座標の関係

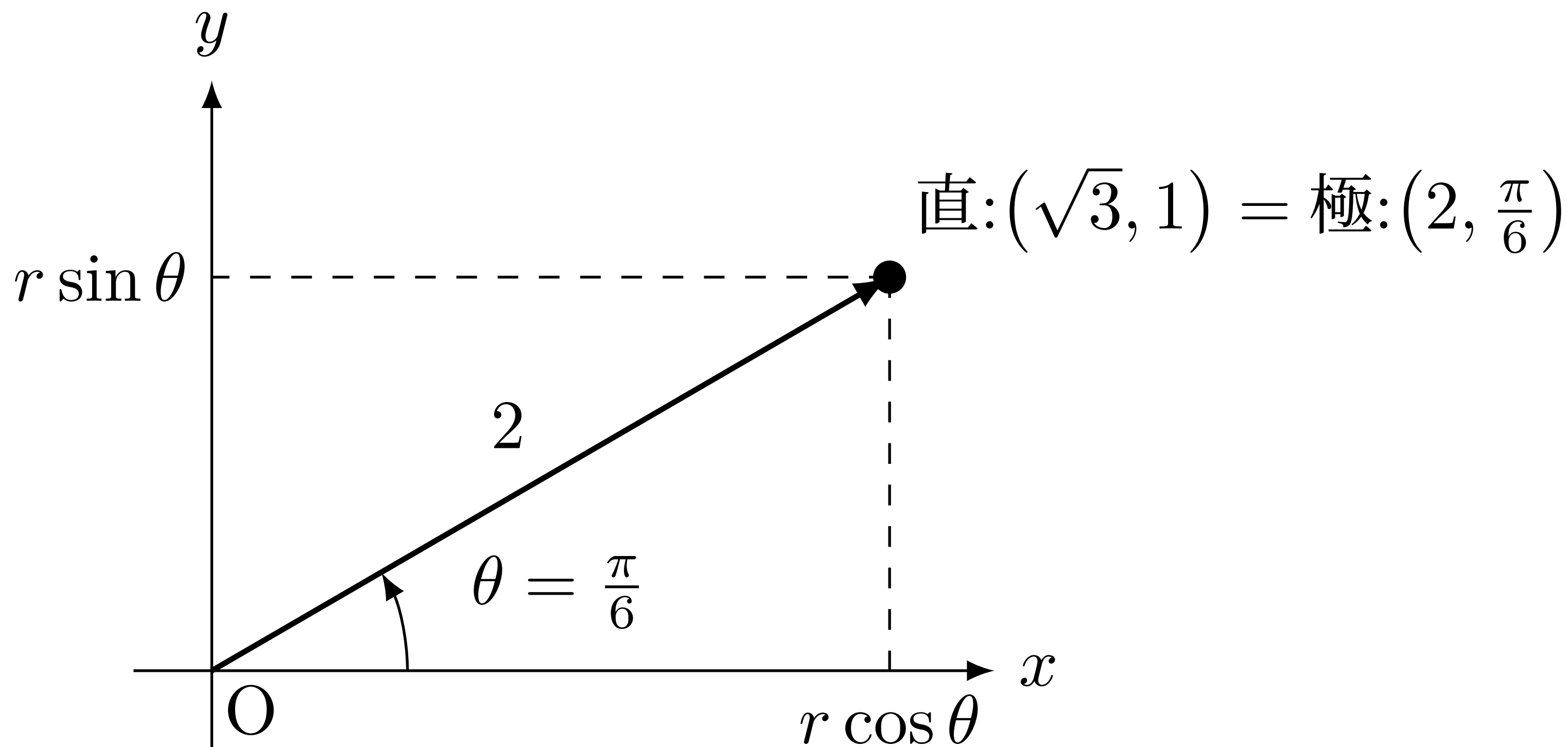
- 極座標と直交座標を重ね合わせると図のようになる
- 図から、極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には次のような関係がある

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



極座標と直交座標の変換

- 直交座標で $(\sqrt{3}, 1)$ の点は極座標では $(2, \frac{\pi}{6})$



極方程式

極方程式へのモチベーション

- 平面上の点が極座標で表せた
- 平面上の曲線の方程式も、極座標に書き換えられる！

直交座標の点が極座標でかけたなら、
平面上の方程式も極座標の形でかけるんじゃない？



普通にできるで

平面上の曲線 C が極座標 (r, θ) によって、

■ $r = f(\theta)$

■ $F(r, \theta) = 0$

のいずれかの形で書かれるとき、この方程式を C の極方程式という。



定義 極方程式

定義を見てもさっぱりわからないので、具体例をたくさん確認してイメージをつかもう。

お前何いってんの？



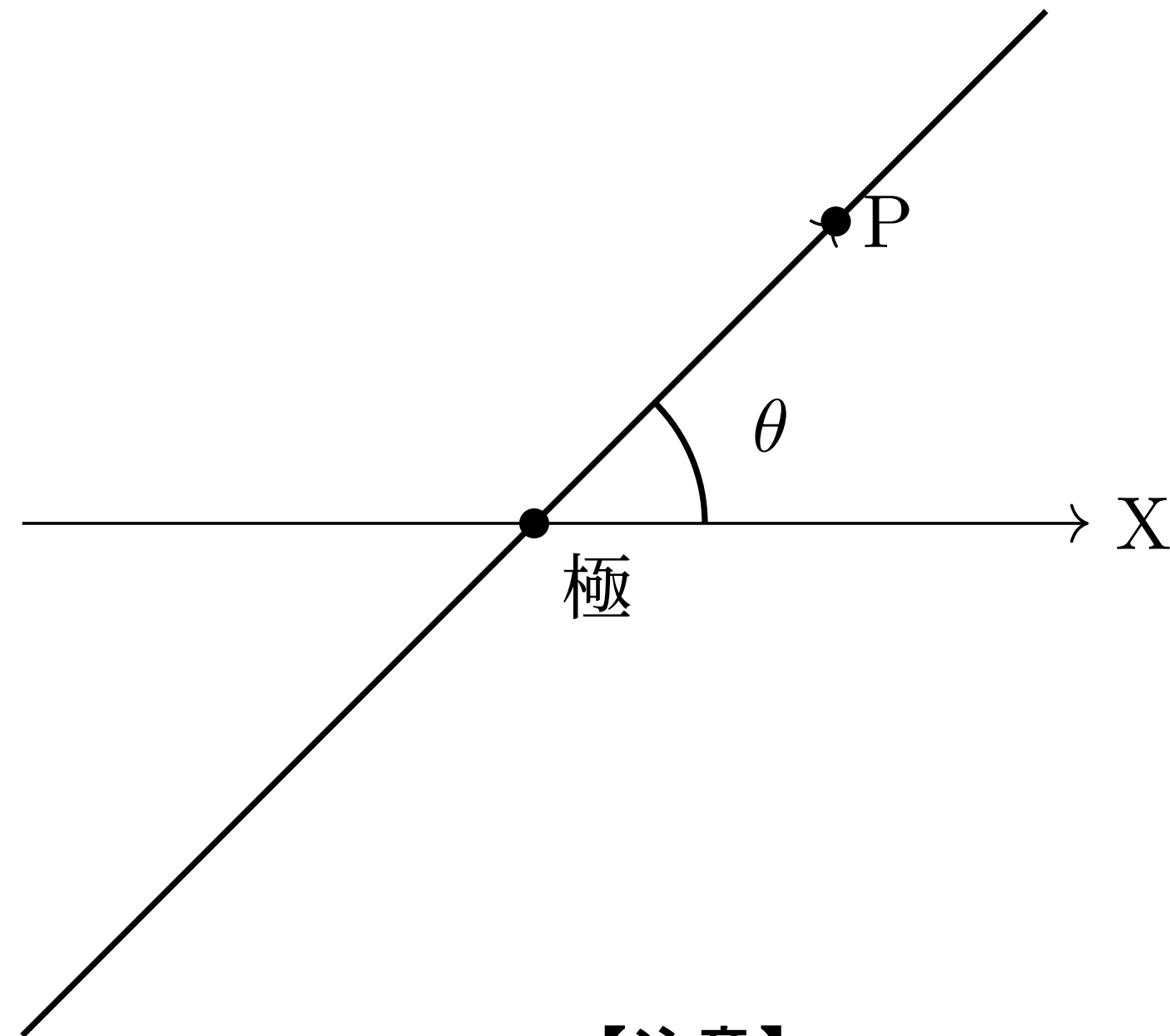
$$r = f(\theta)$$

$$F(r, \theta) = 0$$

の形をした方程式を極方程式っていうんやで

極方程式の例

- i. 極方程式 $\theta = (\text{一定})$ は極を通る直線を表す

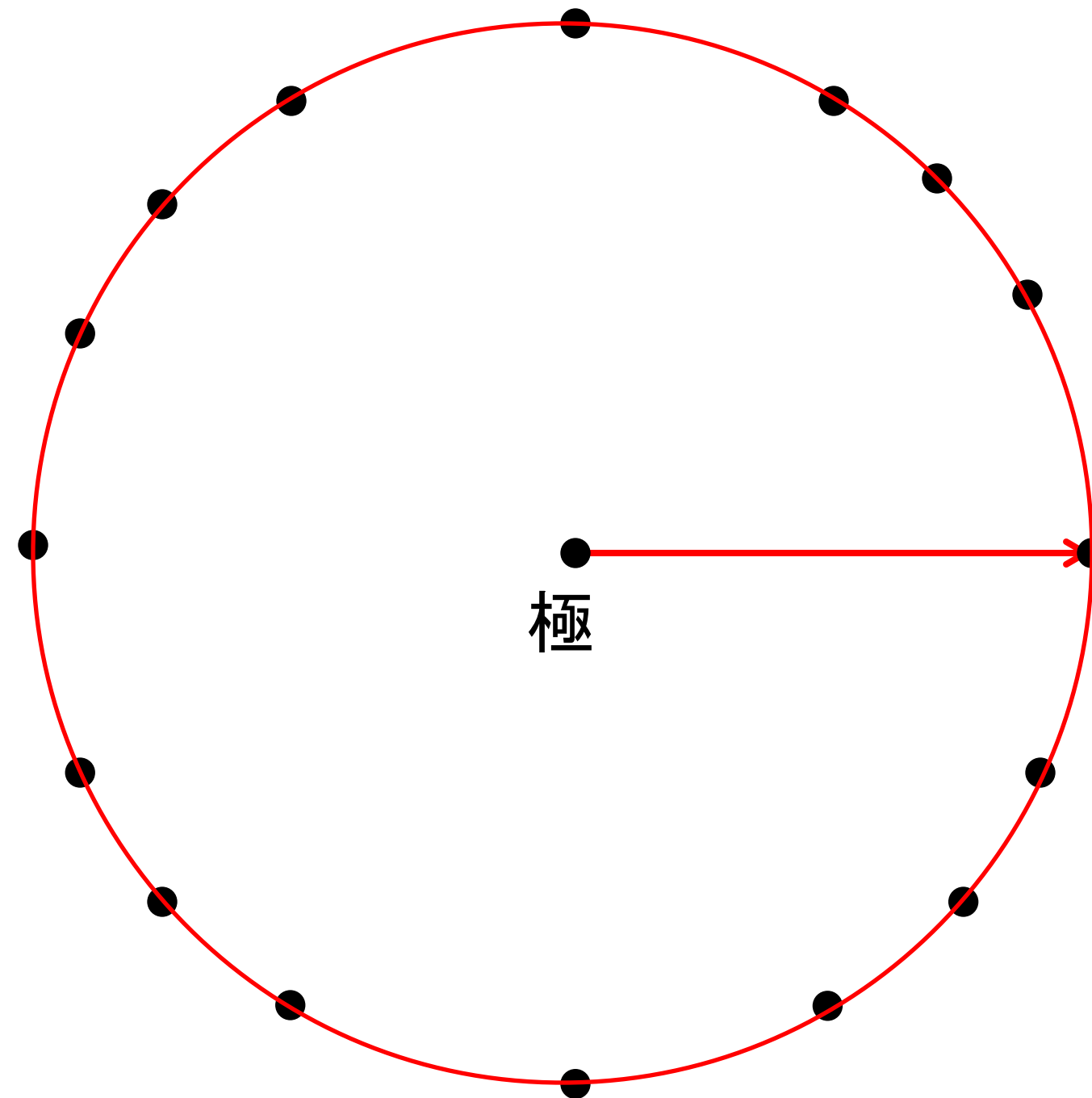


【注意】

$r < 0$ のときは, θ を $-\theta$ に取り替えた点をプロットする.

極方程式の例

- ii. 極方程式 $r = 1$ は極を中心とする半径1の円を表す。



極方程式が表す様々な曲線の例

- 本授業のサポートページを用いて、極方程式とそれが表す図形を視覚的に理解しよう。
- 極方程式の r と θ がグラフ上ではどのような関係を持って変化するか、実際にアニメーションを動かしながら理解しよう。
- 各図形についての説明はサポートページを参照のこと。

問題6.4.1 極方程式の概形予想1

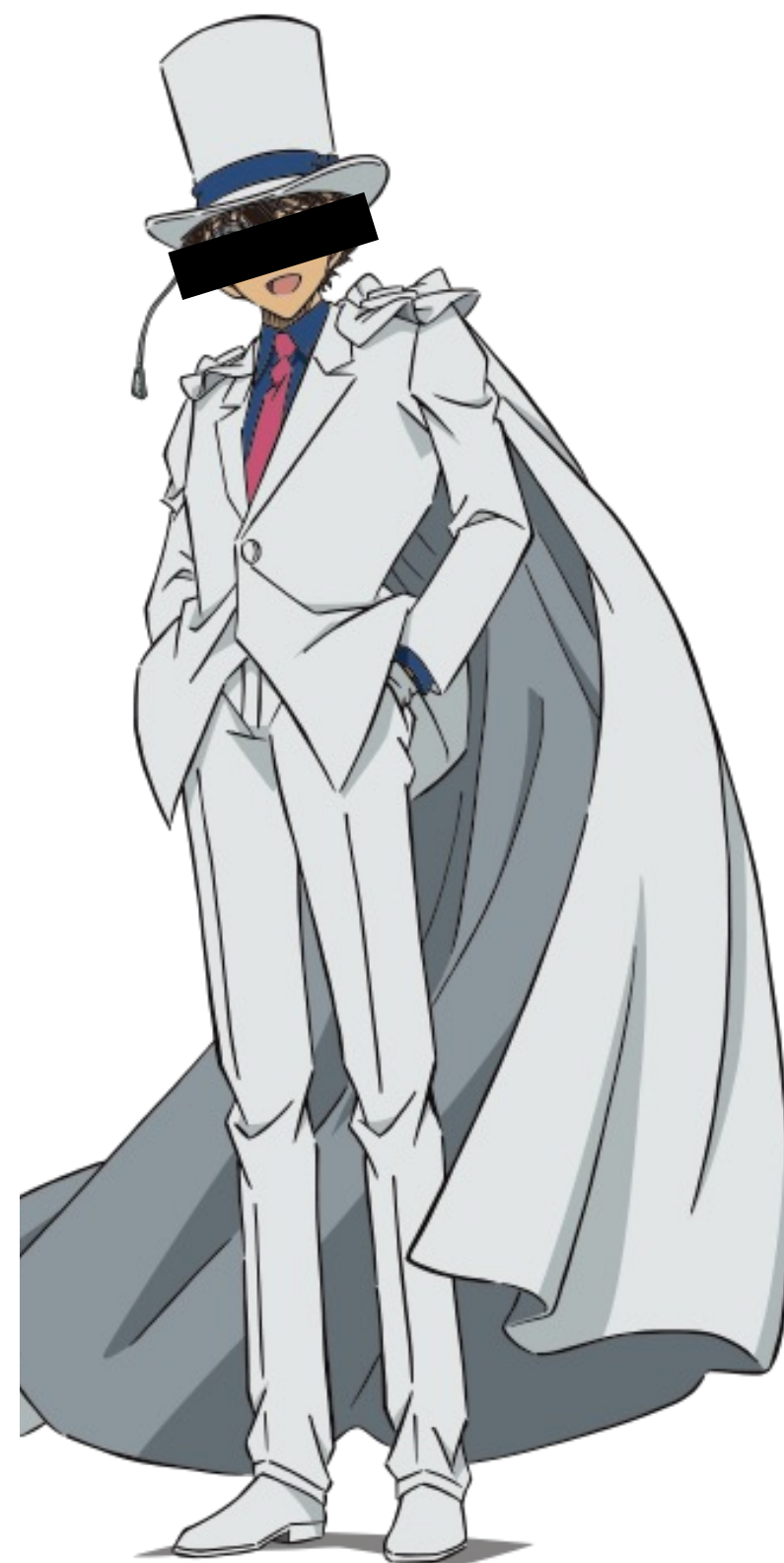
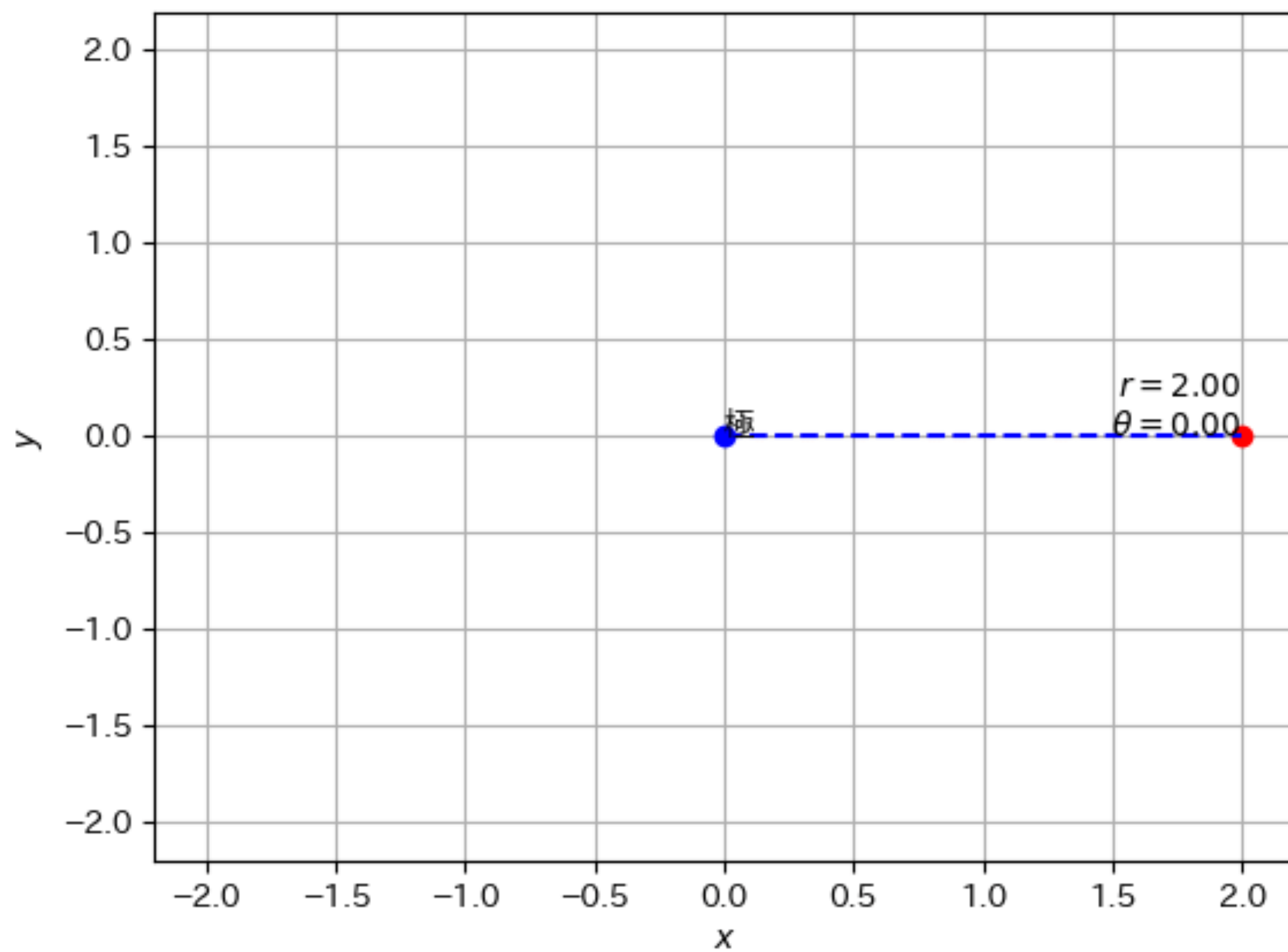
極方程式

$$r = \sin 2\theta$$

が表す曲線の概形を、具体的に複数の点の座標を計算してプロットすることによって描こう。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
r								
θ	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
r								

問題6.4.1 解答



問題6.4.3 極方程式の概形予想2

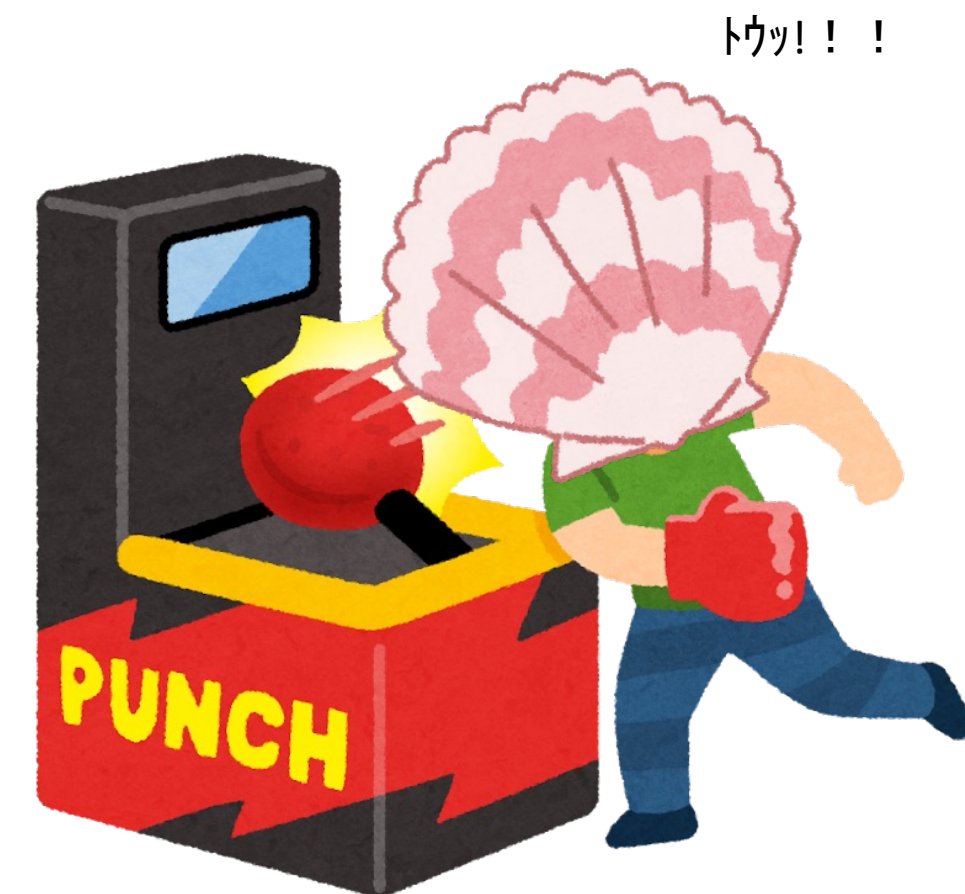
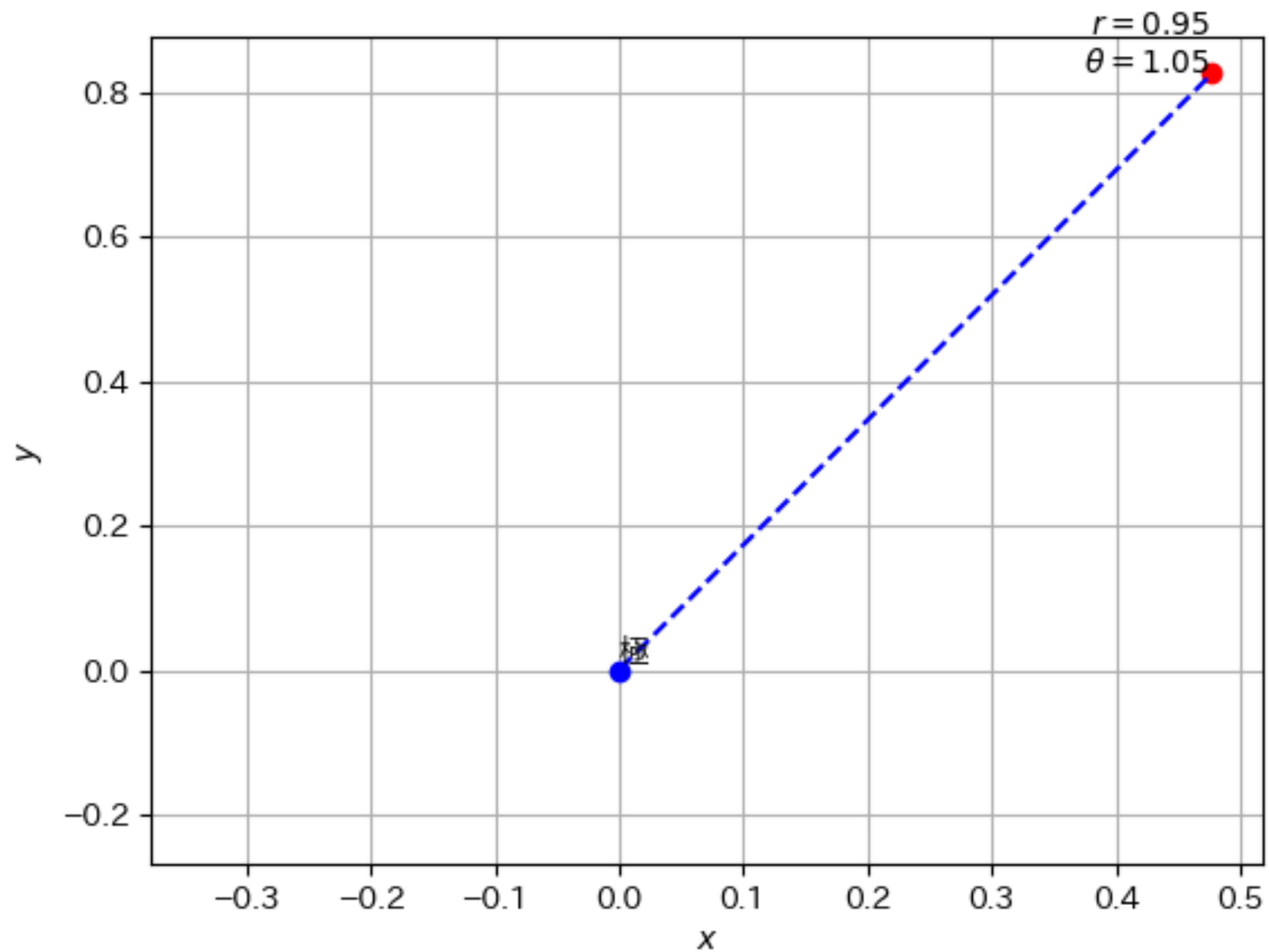
極方程式

$$r = \frac{1}{\theta} \quad (\theta > 0)$$

が表す曲線の概形を図示してみよう。

ヒント. r と θ はそれぞれ何を表すかを考えると、概形が予想できる。
分かり辛いと感じる時は、サポートページの他の図形のアニメーションを眺めると良い。

問題6.4.3 解答



例題 双曲線の極方程式

双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ の極方程式を求める。まず、この式に極座標表示

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

を代入すると、

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 2$$

$$\iff r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2$$

を得る。ここで倍角公式 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ より、

$$\boxed{r^2 \cos 2\theta = 2}$$

を得る。

問題6.4.4 極方程式への変換

直交座標での表示が

$$4y = x^2$$

の放物線を極方程式で表そう。

問題6.4.4 極方程式への変換

直交座標での表示が

$$4y = x^2$$

の放物線を極方程式で表そう。

ヒント. (x, y) をそれぞれ極座標で表すと

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

だった！

問題6.4.4 解答

$4y = x^2$ に極座標表示

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

を代入すると、

$$4r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$$

$$\iff r(r \cos^2 \theta - 4 \sin \theta) = 0$$

となる。ここで r は恒等的に0ではないので、

$$r \cos^2 \theta - 4 \sin \theta = 0$$

$$\iff r = \boxed{\frac{4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}} = \boxed{4 \frac{\tan \theta}{\cos \theta}}$$

を得る(尚、 $r = 0$ の点もこの式に含まれる)。



極方程式の描画

- コンピュータを使わずに極方程式が表す曲線を図示することは難しい。
- でも、問題を解く場面では曲線の概形が描ければ十分！！
- そのためには、具体的にいくつかの点をプロットして概形を予想できればOK！！

まとめ

まとめ

- 点の位置を極からの距離 r と偏角 θ で表したものを極座標という
- 極座標と極形式は本質的には同じ
- 極座標の点と直交座標の点は一対一に対応し、以下の関係がある

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

- 平面上の曲線を極座標の形で表現したものを極方程式という
- 極方程式で表された曲線を描くには
 - コンピュータを使う
 - 複数の点をプロットして、概形を予想する方法がある



お疲れ様でした！
(プリントを必ず提出してください)