Preview

- 本授業のサポートページ
- QRコードのリンク先からご覧いただけます
- サポートページにスライドもおいてあります

第3章　「式と曲線」

極座標と極方程式

数学系　佐々木正吾
情報工学系　橋本龍徳

復習

復習：極座標

●座標平面上の点は

・原点からの距離 r

・x軸の正の方向から測った角θ

で記述できた。

これを用いて座標平面上の点を(r, θ)と表したものを**極座標**といった。

極方程式

極方程式へのモチベーション

- 平面上の点が極座標で表せた
- 平面上の曲線の方程式も、極座標に書き換えられる！

直交座標の点が極座標でかけたなら、
平面上の方程式も極座標の形でかけるんじゃね？

普通にできるで

定義　極方程式

平面上の曲線Cが極座標(r, θ)によって、

- $r = f(\theta)$
- $F(r, \theta) = 0$

のいずれかの形で書かれるとき、この方程式をCの**極方程式**という。

定義　極方程式

定義を見てもさっぱりわからないので、具体例をたくさん確認して
イメージをつかもう。

$$r = f(\theta)$$

$$F(r, \theta) = 0$$

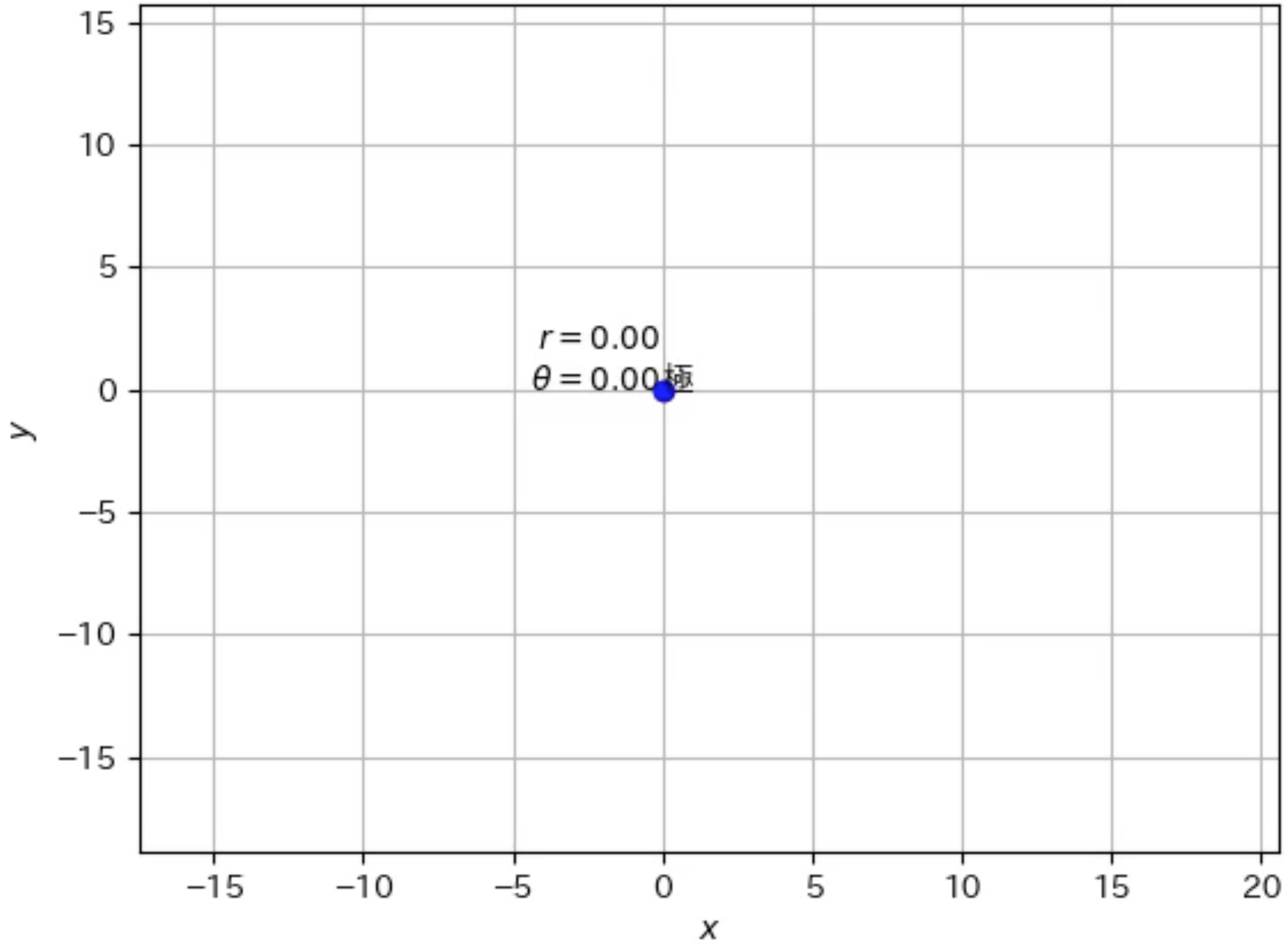
お前何いってんの？

の形をした方程式を極方程式っていうんやで

極方程式の例１：アルキメデスの螺旋

極方程式 $r = \theta\ (0 \leqq \theta \leqq 6\pi)$ は次のような螺旋を表す。

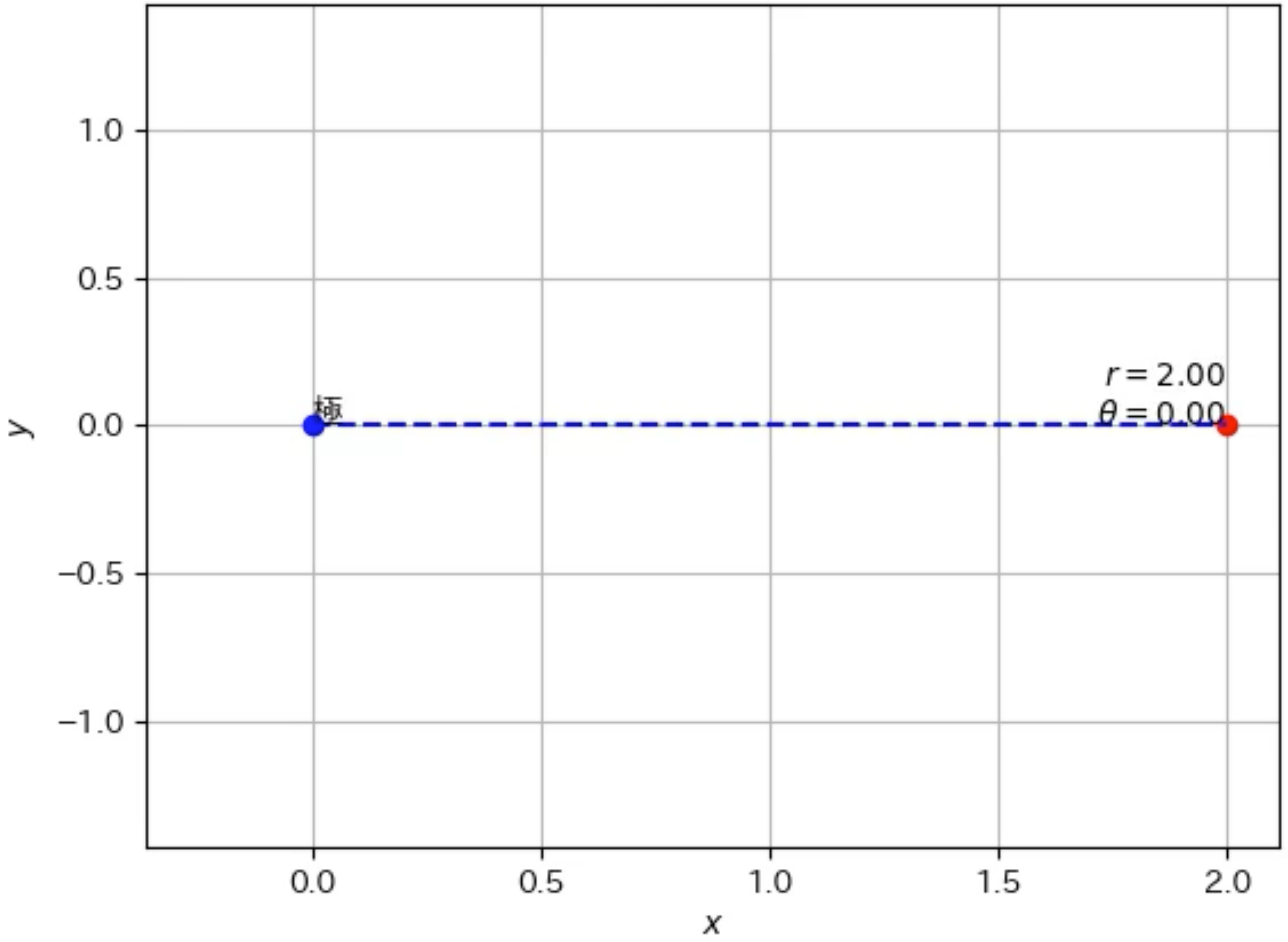
この曲線をアルキメデスの螺旋という。



極方程式の例２：カージオイド

極方程式 $r = 1 + \cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ は次のような曲線を表す。

この曲線をカージオイドという。



極方程式の例３：正葉曲線

では、極方程式 $r = \sin 2\theta$ が表す曲線の概形はどうなるだろうか？

極方程式から人力で曲線の概形を調べるには…

◎ 各 θ に対して具体的にいくつかの点をプロットして形を予想する

ことが有効だ。

極方程式の例３：正葉曲線

●有名角での $r(=\sin 2\theta)$ を具体的に計算してみよう。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
r								
θ	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
r								

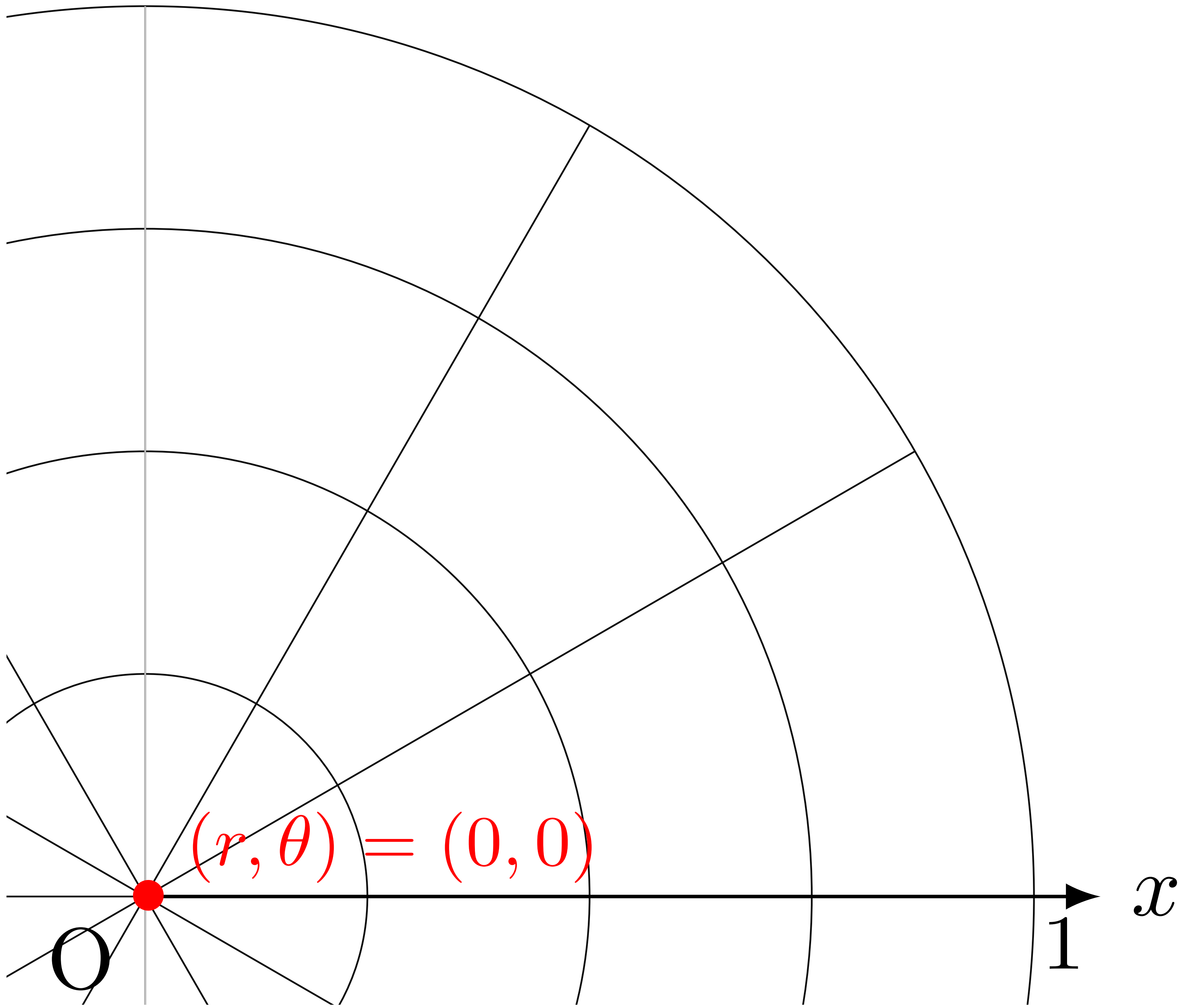
極方程式の例３：正葉曲線

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	-1	-$\frac{1}{2}$
θ	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

極方程式の例３：正葉曲線

●各 (r, θ) に対応する点をプロットする

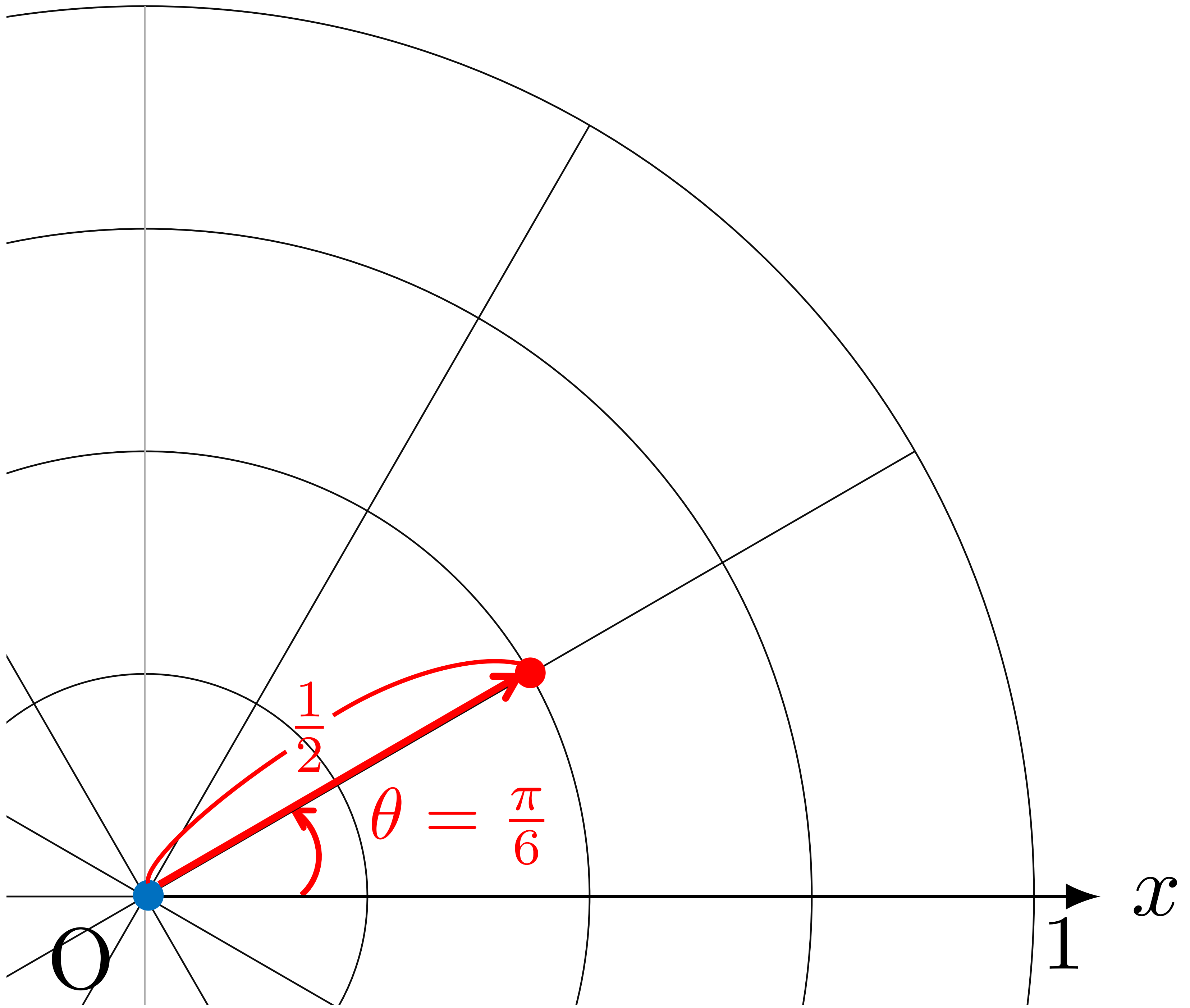
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



極方程式の例３：正葉曲線

●各 (r, θ) に対応する点をプロットする

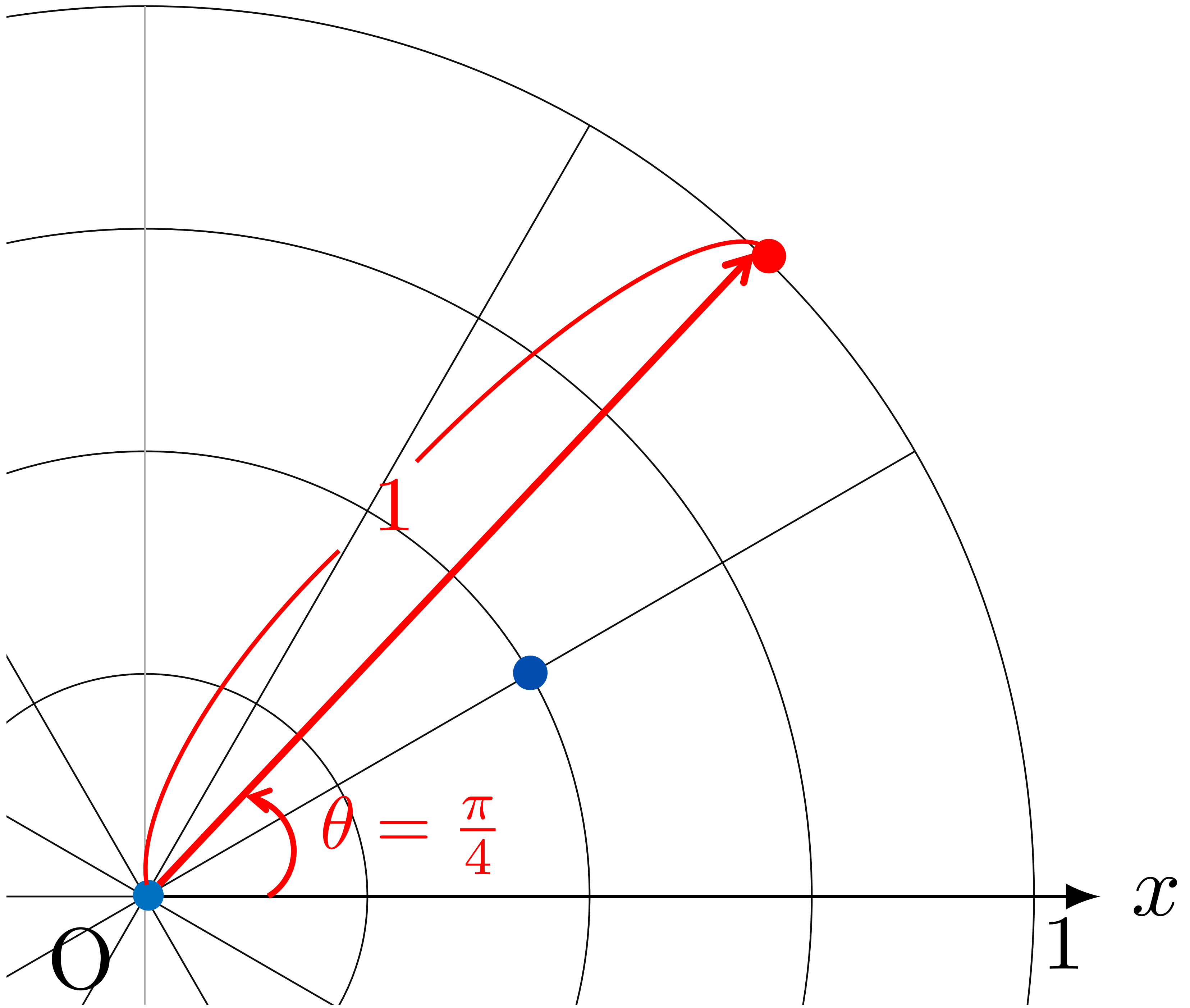
θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
r	0	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{1}{2}$	0



極方程式の例３：正葉曲線

●各 (r, θ) に対応する点をプロットする

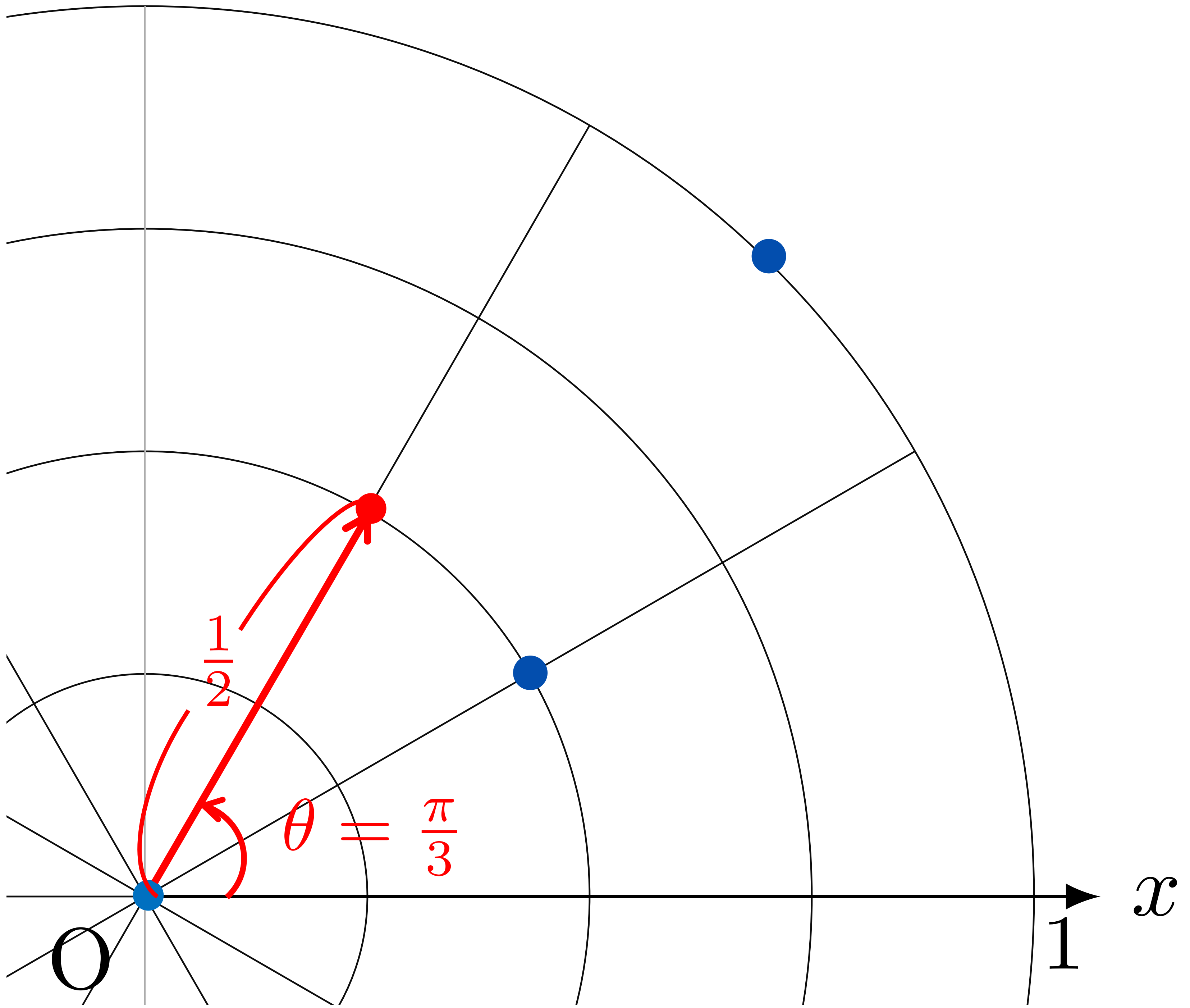
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



極方程式の例３：正葉曲線

●各 (r, θ) に対応する点をプロットする

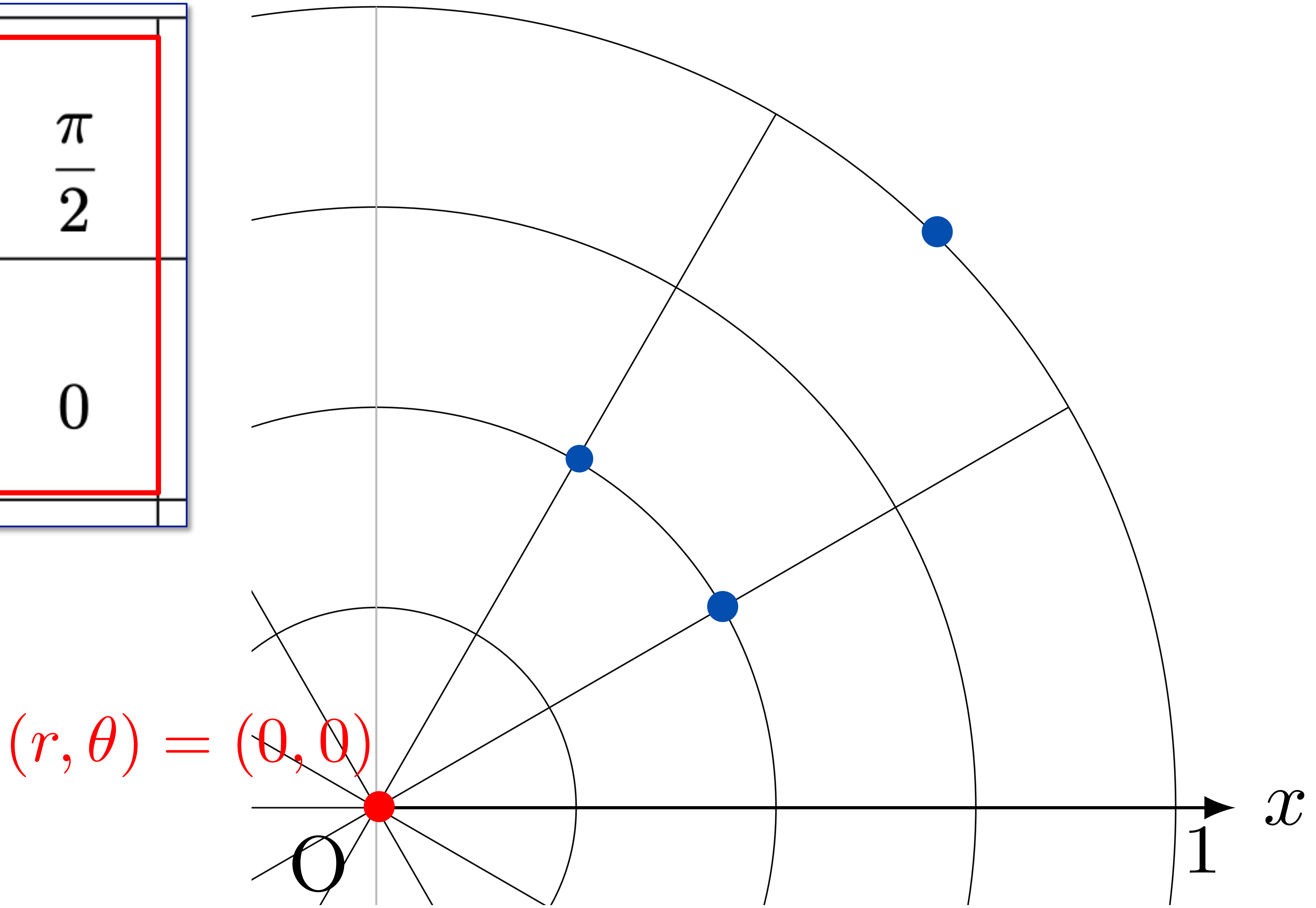
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



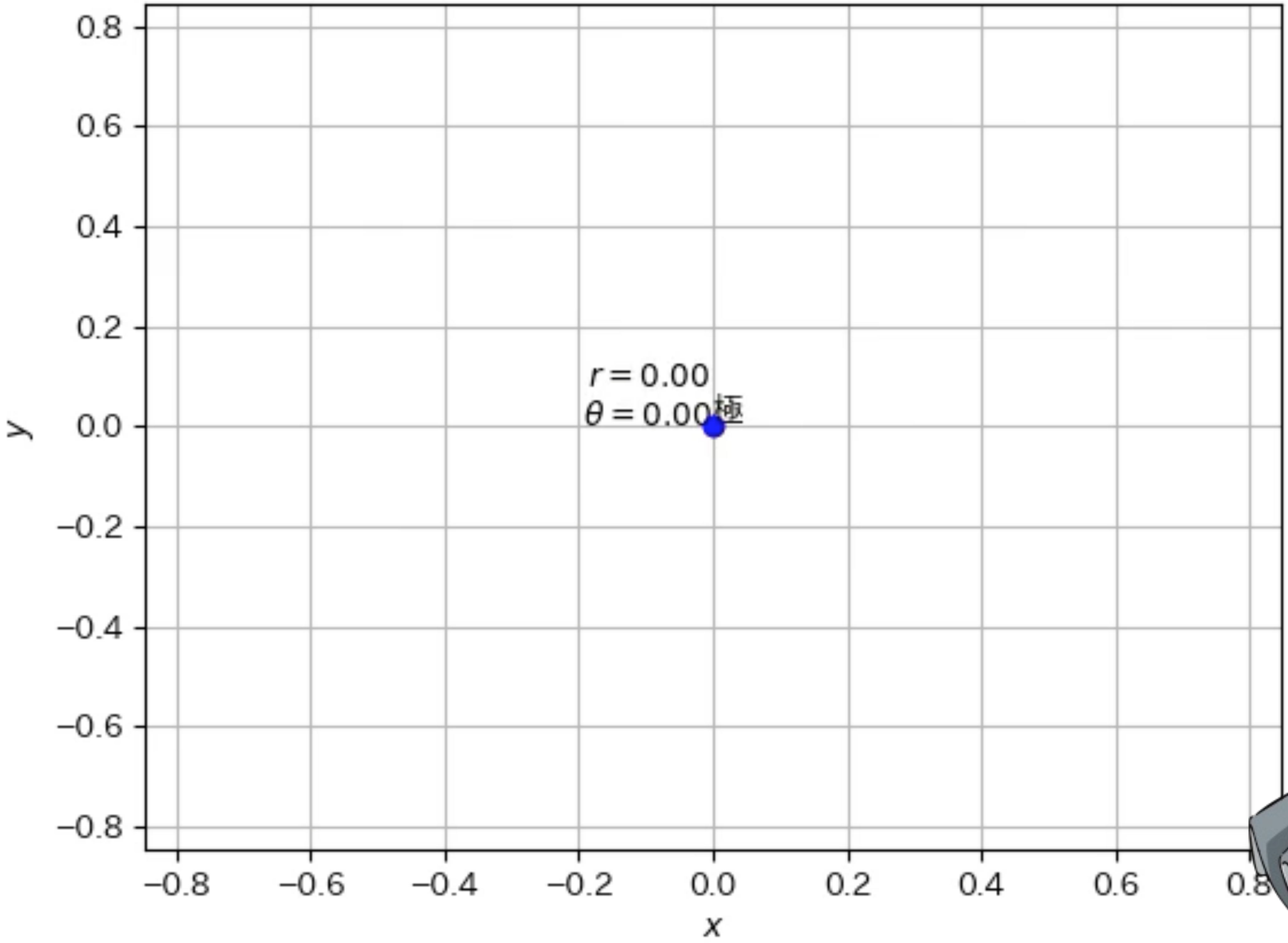
極方程式の例３：正葉曲線

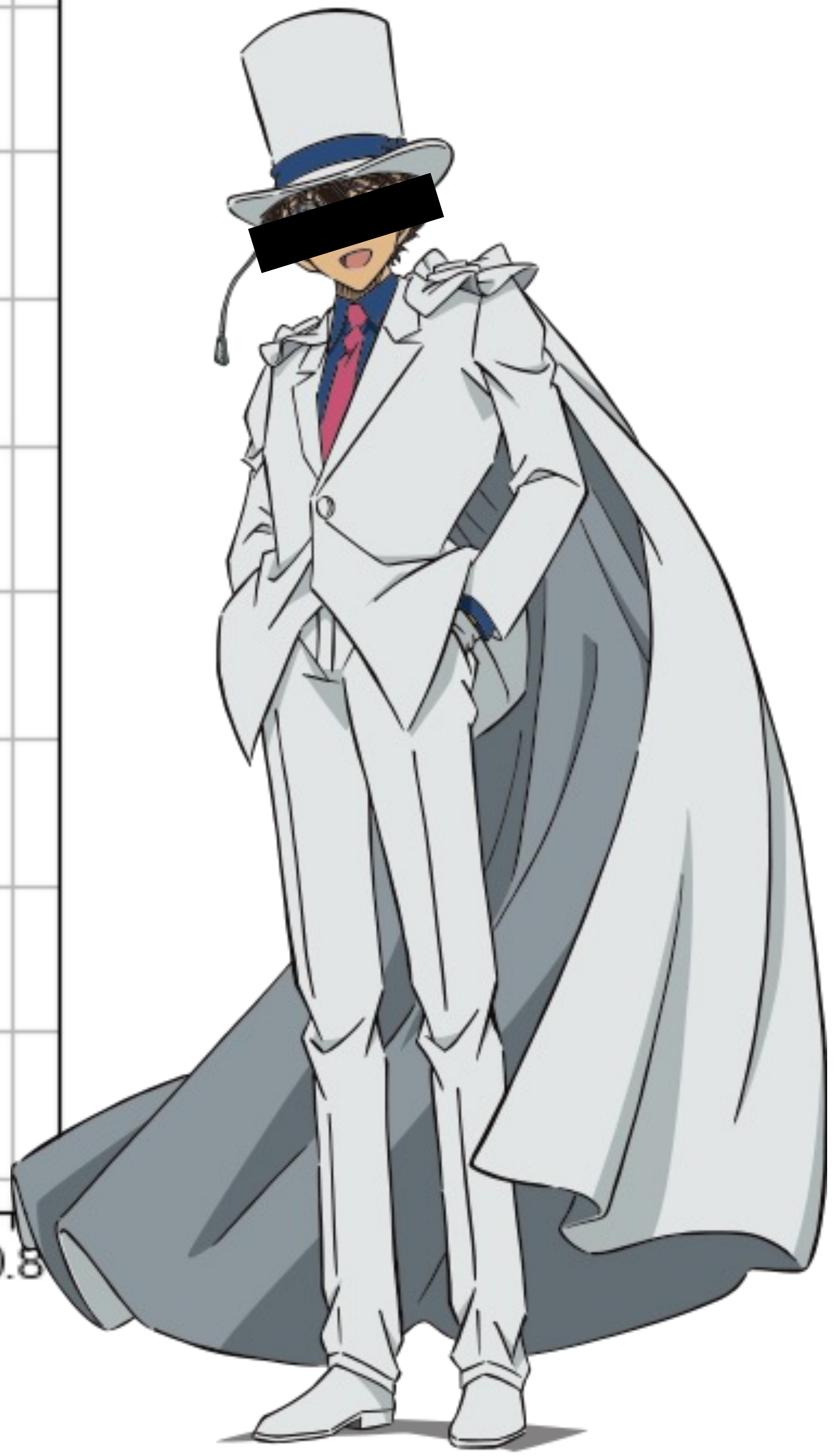
●各(r,θ)に対応する点をプロットする

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



極方程式の例：正葉曲線





問題演習(20分)

- 次は自分の手で色々な曲線を描いてみよう。
- A問題とB問題をペアで分担。解けたらお互いに説明し合ってみよう。
- 例題と似た曲線なので、困ったら例題のアニメーションを参考にしよう。
- A問題とB問題で描いた曲線を比較・考察する際は次のような観点で考えると良いかもしれない
  - 二つの図を比較して、パラメータにはどのような関係がある？
  - 楽に描く工夫で思いつくものはある？
  - もし、この曲線をx, yの方程式で表そうとするとどの様な感じになりそう？

まとめ

まとめ

◎平面上の曲線を極座標の形で表現したものを**極方程式**という。

◎極方程式で表された曲線を描くには

■コンピュータを使う

■複数の点をプロットして、概形を予想する

方法がある。

お疲れ様でした！
(プリントを必ず提出してください)