

# Nekaj o invariantnih podprostorih

Beno Učakar

Naj bosta  $V_1$  in  $V_2$  vektorska prostora ter  $L: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \times V_2$  linearni preslikavi na zunanji direktni vsoti prostorov  $V_1$  in  $V_2$ . Potem lahko na naraven način definiramo linearni preslikavi  $L_1: V_1 \rightarrow V_1$  in  $L_2: V_2 \rightarrow V_2$ , da velja  $L(x_1, x_2) = (Lx_1, Lx_2)$ . Kaj pa, če gledamo notranjo direktno vsoto? Tu bomo naleteli na pojem invariantnega podprostora.

**Definicija 1.** Vektorski podprostor  $U$  je *invarianten podprostor* linearne preslikave  $L$ , če velja  $L(U) \subseteq U$ .

Vidimo torej, da če je prostor  $U$  invarianten, bo obnašanje preslikave  $L$  nekako ostalo v prostoru  $U$ . Primer: če je  $v \in V$  lastni vektor preslikave  $L$  za lastno vrednost  $\lambda$ , je prostor  $U = \text{Lin}\{v\}$  invarianten podprostor linearne preslikave  $L$ .

## Reducirajoči podprostori

Naj bo sedaj prostor  $V$  notranja direktna vsota podprostorov  $U_1$  in  $U_2$ , torej  $V = U_1 \oplus U_2$ . Potem lahko vsak vektor  $x \in V$  lahko na enoličen način zapišemo kot  $x = x_1 + x_2$ , kjer je  $x_1 \in U_1$  in  $x_2 \in U_2$ . Če sta oba podprostora  $U_1$  in  $U_2$  še invariantna podprostora preslikave  $L$ , ju imenujemo reducirajoča podprostora. Definirajmo linearni preslikavi

$$L_1 = L|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_1 \quad \text{in} \quad L_2 = L|_{U_2}: U_2 \rightarrow U_2.$$

Ker sta prostora  $U_1$  in  $U_2$  oba invariantna za preslikavo  $L$ , sta preslikavi  $L_1$  in  $L_2$  dobro definirani. Za poljuben vektor  $x \in V$  lahko potem zapišemo

$$\begin{aligned} Lx &= L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2 = L_1x_1 + L_2x_2 = (L_1 \oplus L_2)(x_1 + x_2) = \\ &= (L_1 \oplus L_2)x, \quad (1) \end{aligned}$$

torej velja  $L = L_1 \oplus L_2$ . Če preslikavo  $L$  zapišemo matrično glede na razcep  $V = U_1 \oplus U_2$ , vidimo, da je

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix},$$

torej smo preslikavo  $L$  bločno diagonalizirali.

Za nadaljnje branje priporočamo učbenik Sheldona Axlerja, *Linear Algebra Done Right* [1].

## Literatura

- [1] Sheldon Jay Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1997.