# Matematični izrazi in uporaba paketa `beamer`

*Matematičnih* nalog ni treba reševati!

Fakulteta za matematiko in fiziko

## Kratek pregled

Paket `beamer`

Paketa `amsmath` in `amsfonts`

Matematika, 1. del

Stolpci in slike

Paket `beamer` in tabele

Matematika, 2. del

# Paket `beamer`

# Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico,

## Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico, postopno odkrivanje prosojnic,

## Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico, postopno odkrivanje prosojnic, ter nekateri drugi ukazi, ki jih najdemo v paketu `beamer`.

# Posebnosti prosojnic

Za prosojnice je značilna uporaba okolja `frame`, s katerim definiramo posamezno prosojnico, postopno odkrivanje prosojnic, ter nekateri drugi ukazi, ki jih najdemo v paketu `beamer`.

**Primer**

Verjetno ste že opazili, da za naslovno prosojnico niste uporabili ukaza `maketitle`, ampak ukaz `titlepage`.

# Poudarjeni bloki

**Opomba**

Okolja za poudarjene bloke so `block`, `exampleblock` in `alertblock`.

**Pozor!**

Začetek poudarjenega bloka (ukaz `begin`) vedno sprejme dva parametra: okolje in naslov bloka. Drugi parameter (za naslov) je lahko prazen.

# Tudi v predstavitvah lahko pišemo izreke in dokaze

**Izrek**

*Praštevil je neskončno mnogo.*

**Dokaz.**

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo $p$ največje praštevilo.

# Tudi v predstavitvah lahko pišemo izreke in dokaze

**Izrek**

*Praštevil je neskončno mnogo.*

**Dokaz.**

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo $p$ največje praštevilo.
- Naj bo $q$ produkt števil $1, 2, \ldots, p$.

# Tudi v predstavitvah lahko pišemo izreke in dokaze

**Izrek**

*Praštevil je neskončno mnogo.*

**Dokaz.**

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo $p$ največje praštevilo.
- Naj bo $q$ produkt števil $1, 2, \ldots, p$.
- Število $q + 1$ ni deljivo z nobenim praštevilom, torej je $q + 1$ praštevilo.

# Tudi v predstavitvah lahko pišemo izreke in dokaze

**Izrek**

*Praštevil je neskončno mnogo.*

**Dokaz.**

Denimo, da je praštevil končno mnogo.

- Naj bo $p$ največje praštevilo.
- Naj bo $q$ produkt števil $1, 2, \ldots, p$.
- Število $q + 1$ ni deljivo z nobenim praštevilom, torej je $q + 1$ praštevilo.
- To je protislovje, saj je $q + 1 > p$. $\square$

# Paketa `amsmath` in `amsfonts`

# Matrike

Izračunajte determinanto

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

V pomoč naj vam bo Overleaf dokumentacija o matrikah:

▸ Matrices

# Okolje `align` in `align*`

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili $a$ in $b$ in za vsako naravno število $n$ velja

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \dots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}
$$

# Okolje `align` in `align*`

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili $a$ in $b$ in za vsako naravno število $n$ velja

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

# Okolje `align` in `align*`

Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili $a$ in $b$ in za vsako naravno število $n$ velja

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)& \\
&= a^n + na^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k
\end{aligned}
$$

# Še ena uporaba okolja `align*`

Nariši grafe funkcij:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3|x| + 2 & y &= 3\sin(\pi + x) - 2 \\ y &= \log_2(x-2) + 3 & y &= 2\sqrt{x^2+15} + 6 \\ y &= 2^{x-3} + 1 & y &= \cos(x-3) + \sin^2(x+1) \end{aligned}$$

# Okolje `multline`

Poišči vse rešitve enačbe

$$(1 + x + x^2) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9 + x^{10}) = \\ = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.$$

## Okolje `cases`

Dana je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0), \\ a; & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Določi $a$, tako da izračunaš limito $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$.
- Izračunaj parcialna odvoda $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$.

# Matematika, 1. del

## Analiza, logika, množice

## Logika in množice

1. Poišči preneksno obliko formule ??.
2. Definiramo množici $A = [2, 5]$ in $B = 1, 2, 3, 4, \ldots$. V ravnino nariši:
   2.1 ??
   2.2 ??
3. Dokaži:
   - ??
   - ??

# Analiza

1. Pokaži, da je funkcija ?? enakomerno zvezna na ??.
2. Katero krivuljo določa sledeč parametričen zapis?

$$x(t) = a\cos t, ??y(t) = b\sin t, ??t \in [0, 2\pi]$$

3. Pokaži, da ima ?? inverzno funkcijo in izračunaj ??.
4. Izračunaj integral ??
5. Naj bo *g* zvezna funkcija. Ali posplošeni integral ?? konvergira ali divergira? Utemelji.

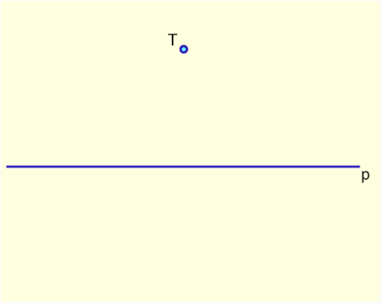
# Kompleksna števila

1. Naj bo $z$ kompleksno število, $z \neq 1$ in ??. Dokaži, da je število $i\,\frac{z+1}{z-1}$ realno.
2. Poenostavi izraz: ??

# Stolpci in slike

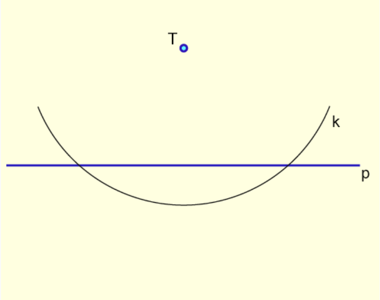
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.



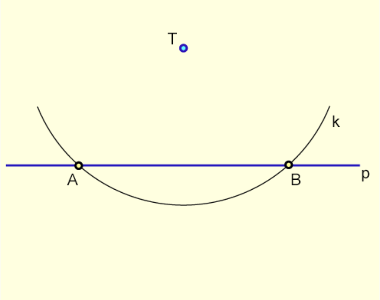
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.



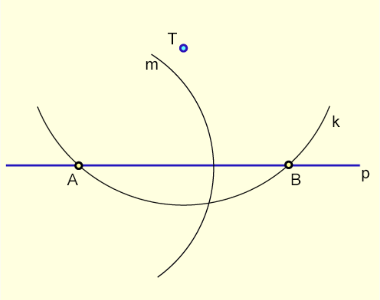
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.



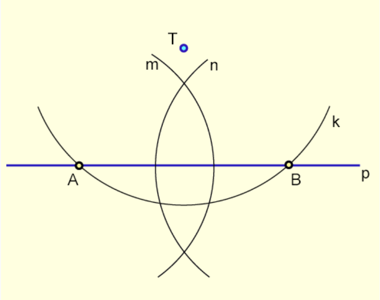
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.



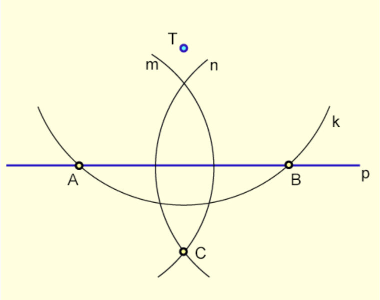
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.



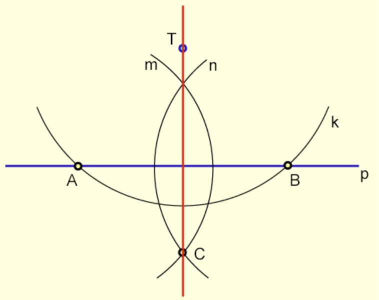
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki $C$.



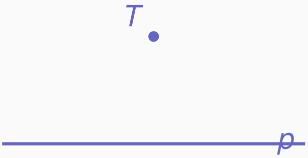
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki $C$.
- Premica skozi točki $T$ in $C$ je pravokotna na $p$.



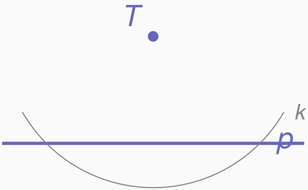
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.



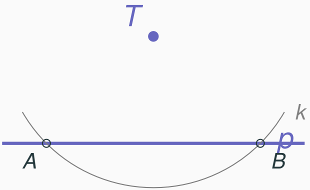
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.



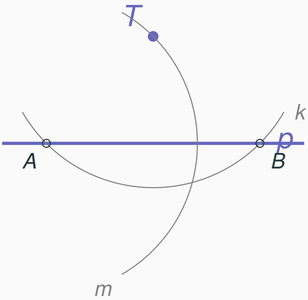
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.



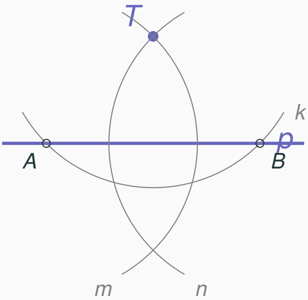
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.



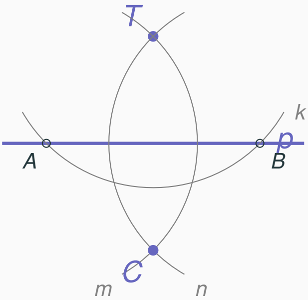
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.



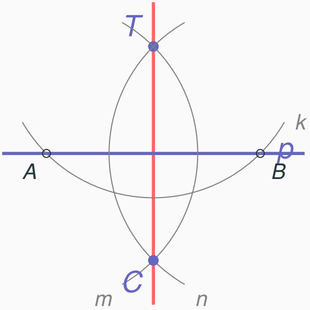
# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki $C$.

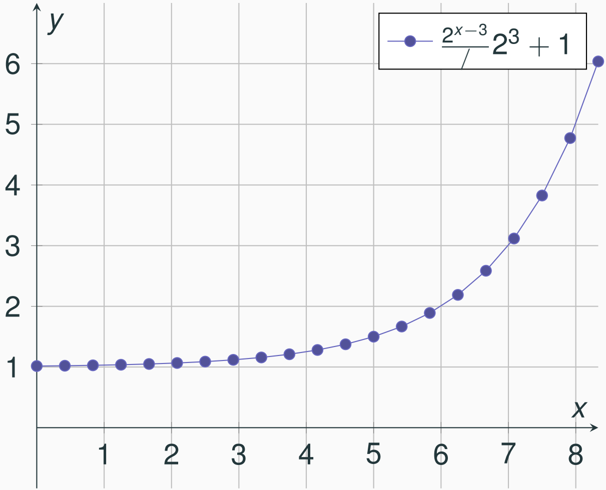


# Konstrukcija pravokotnice na premico $p$ skozi točko $T$

- Dani sta premica $p$ in točka $T$.
- Nariši lok $k$ s središčem v $T$.
- Premico $p$ seče v točkah $A$ in $B$.
- Nariši lok $m$ s središčem v $A$.
- Nariši lok $n$ s središčem v $B$ in z enakim polmerom.
- Loka se sečeta v točki $C$.
- Premica skozi točki $T$ in $C$ je pravokotna na $p$.



# Graf funkcije s TikZ



# Paket `beamer` in tabele

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

| Oznaka | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

| Oznaka | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

| Oznaka | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Y | 3 | 4 | 5 | 6 |

# Odkrivanje tabele po vrsticah

Včasih pride prav, da tabelo odkrivamo postopoma po vrsticah.

| Oznaka | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Y | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | 5 | 6 | 7 | 8 |

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

| Oznaka | |
|---|---|
| X | |
| Y | |
| Z | |

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

| Oznaka | A | |
|---|---|---|
| X | 1 | 2 |
| Y | 3 | 4 |
| Z | 5 | 6 |

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

| Oznaka | A | B | |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 |
| Y | 3 | 4 | 5 |
| Z | 5 | 6 | 7 |

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

| Oznaka | A | B | C |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 |
| Y | 3 | 4 | 5 |
| Z | 5 | 6 | 7 |

# Odkrivanje tabele po stolpcih

Tabelo lahko odkrivamo tudi po stolpcih, čeprav ni najlažje.

| Oznaka | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Y | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | 5 | 6 | 7 | 8 |

# Matematika, 2. del

## Zaporedja, algebra, grupe

1. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $a_n \neq -1$. Dokaži, da je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ absolutno konvergentna.
2. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x-1} - \sin\sqrt{x})$$

3. Za dani zaporedji preveri, ali sta konvergentni.

$$\underbrace{a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} \qquad \underbrace{b_n = \sin(\sin(\ldots(\sin 1)\ldots))}_{n \text{ sinusov}}$$

1. Vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ sta pravokotna in imata dolžino 1. Določi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
2. Izračunaj $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-2000}$

# Velika determinanta

Izračunaj naslednjo determinanto $2n \times 2n$, ki ima na neoznačenih mestih ničle.

$$
\begin{vmatrix}
1 & & & & 1 & & & & \\
 & 2 & & & 2 & & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & n-1 & n-1 & & & & \\
1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\
 & & & & n+1 & n+1 & & & \\
 & & & & n+2 & & n+2 & & \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & & & & 2n & & & & 2n
\end{vmatrix}
$$

# Grupe

Naj bo

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; z = 2^k \left( \cos(m\pi\sqrt{2}) \right), \; k, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Pokaži, da je $G$ podgrupa v grupi $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje.
2. Pokaži, da je $H$ podgrupa v aditivni grupi $(\mathbb{R}^2, +)$ ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah.
3. Pokaži, da je preslikava $f : H \to G$, podana s pravilom

   $$(x, y) \mapsto 2^x \left( \cos \left( y\pi\sqrt{2} \right) \right) + \mathrm{i} \sin \left( y\pi\sqrt{2} \right)$$

   izomorfizem grup $G$ in $H$.