Solucion de ecuaciones de una variable e interpolacion

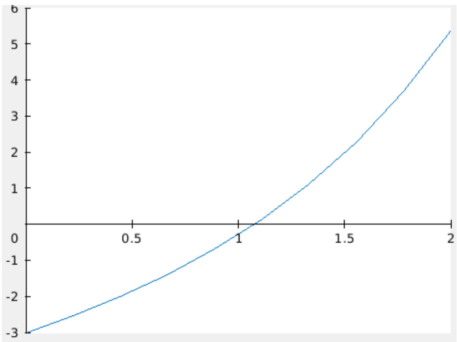
Santiago Aillon, Daniel Estrada, Carolina Rojano

February 2024

1. Problema 1

Nota: Para cada numeral de este problema se eligieron los puntos/intervalos después de analizar el/los puntos en donde la gráfica intersecta con el eje x

a. $e^x - 4 + x = 0$



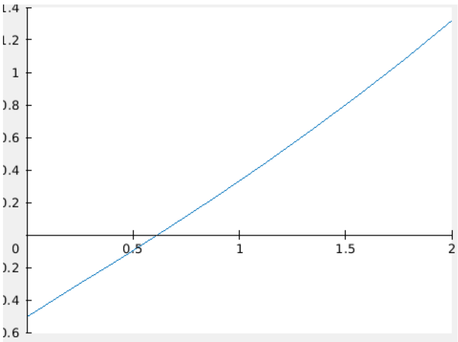
Bisección
Puntos escogidos: $[0, 2]$
Resultado: 1.0737
Numero de iteraciones: 14

Newton-Raphson
Puntos escogidos: $P_0 = 0$
Resultado: 1.0737
Numero de iteraciones: 5

Secante
Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 2$
Resultado: 1.0737
Numero de iteraciones: 7

Falsa posición
Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 2$
Resultado: 1.0737
Numero de iteraciones: 10

b. $x - 0{,}2sin(x) - 0{,}5 = 0$



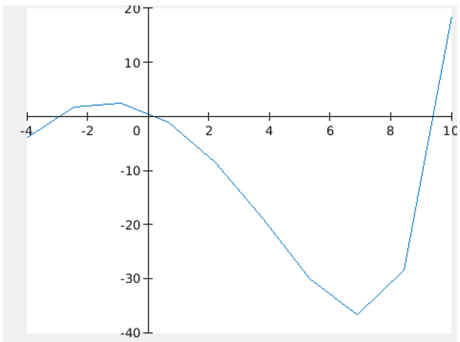
Bisección
Puntos escogidos: $[0, 1]$
Resultado: 0.6154
Numero de iteraciones: 13

Newton-Raphson
Puntos escogidos: $P_0 = 0$
Resultado: 0.6155
Numero de iteraciones: 3

Secante
Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 1$
Resultado: 0.6155
Numero de iteraciones: 5

Falsa posición
Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 1$
Resultado: 0.6155
Numero de iteraciones: 5

c. $e^{x/2} - x - 3x = 0$



Bisección
Puntos escogidos: $[-4, 10]$
Resultado: 9.5856
Numero de iteraciones: 17

Puntos escogidos: $[-4, 1]$
Resultado: -3.0702
Numero de iteraciones: 15

Puntos escogidos: $[0, 2]$
Resultado: 0.3560
Numero de iteraciones: 14

Newton-Raphson
Puntos escogidos: $P_0 = -4$
Resultado: -3.0702
Numero de iteraciones: 4

Puntos escogidos: $P_0 = 8$
Resultado: 9.5856
Numero de iteraciones: 7

Puntos escogidos: $P_0 = 0$
Resultado: 0.3560
Numero de iteraciones: 4

Secante

Puntos escogidos: $P_0 = -4, P_1 = 10$
Resultado: -3.0702
Numero de iteraciones: 8

Puntos escogidos: $P_0 = 8, P_1 = 10$
Resultado: 9.5856
Numero de iteraciones: 6

Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 2$
Resultado: 0.3560
Numero de iteraciones: 6

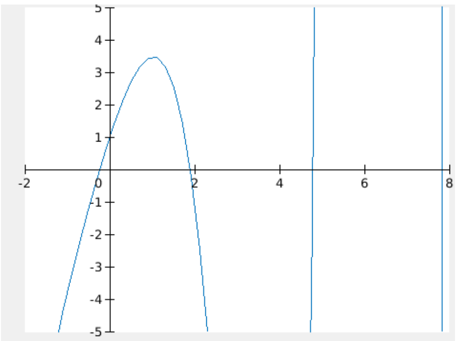
Falsa posición

Puntos escogidos: $P_0 = -4, P_1 = 10$
Resultado: -3.0702
Numero de iteraciones: 1

Puntos escogidos: $P_0 = 8, P_1 = 10$
Resultado: 9.5856
Numero de iteraciones: 8

Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 2$
Resultado: 0.3560
Numero de iteraciones: 9

d. $e^x cos(x) - x^2 + 3x = 0$



Bisección

Puntos escogidos: $[-2, 8]$
Resultado: 4.7838
Numero de iteraciones: 16

Puntos escogidos: $[1, 2]$
Resultado: 1.8923
Numero de iteraciones: 13

Puntos escogidos: $[-1, 0]$
Resultado: -0.2370
Numero de iteraciones: 13

Newton-Raphson

Puntos escogidos: $P_0 = -2$
Resultado: -0.2369
Numero de iteraciones: 4

Puntos escogidos: $P_0 = 2$
Resultado: 1.8923
Numero de iteraciones: 3

Puntos escogidos: $P_0 = 5$
Resultado: 4.7838
Numero de iteraciones: 4

Secante

Puntos escogidos: $P_0 = -2, P_1 = 8$
Resultado: -0.2369
Numero de iteraciones: 9

Puntos escogidos: $P_0 = 1, P_1 = 2$
Resultado: 1.8923
Numero de iteraciones: 6

Puntos escogidos: $P_0 = 5, P_1 = 6$
Resultado: 4.7838
Numero de iteraciones: 7

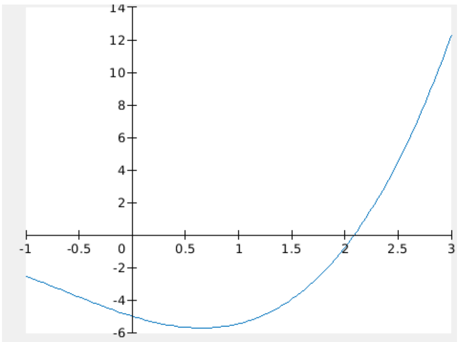
Falsa posición

Puntos escogidos: $P_0 = -2, P_1 = 8$
Resultado: -0.2370
Numero de iteraciones: 10

Puntos escogidos: $P_0 = 1, P_1 = 2$
Resultado: 1.8923
Numero de iteraciones: 6

Puntos escogidos: $P_0 = 5, P_1 = 6$
Resultado: 4.7838
Numero de iteraciones: 8

e. $0{,}53x + x - 2x - 5 = 0$



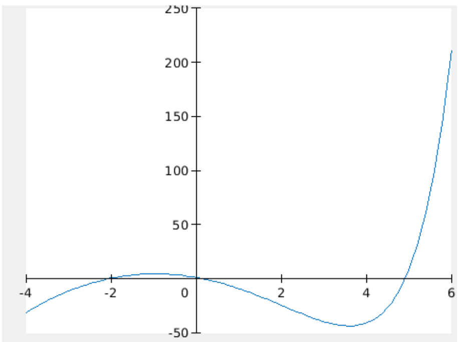
Bisección
Puntos escogidos: $[1, 3]$
Resultado: 2.0871
Numero de iteraciones: 14

Newton-Raphson
Puntos escogidos: $P_0 = 1$
Resultado: 2.0871
Numero de iteraciones: 7

Secante
Puntos escogidos: $P_0 = 1, P_1 = 3$
Resultado: 2.0871
Numero de iteraciones: 8

Falsa posición
Puntos escogidos: $P_0 = 1, P_1 = 3$
Resultado: 2.0871
Numero de iteraciones: 11

f. $e^x - 4x - 8x = 0$



Bisección
Puntos escogidos: $[-4, 6]$
Resultado: 4.9108
Numero de iteraciones: 16

Puntos escogidos: $[0, 1]$
Resultado: 0.1340
Numero de iteraciones: 13

Puntos escogidos: $[-3, -1]$
Resultado: -2.0165
Numero de iteraciones: 14

Newton-Raphson
Puntos escogidos: $P_0 = -4$
Resultado: -2.0165
Numero de iteraciones: 5

Puntos escogidos: $P_0 = 0$
Resultado: 0.1339
Numero de iteraciones: 3

Puntos escogidos: $P_0 = 4$
Resultado: 4.9108
Numero de iteraciones: 8

Secante
Puntos escogidos: $P_0 = -4, P_1 = 6$
Resultado: -2.0165
Numero de iteraciones: 8

Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 1$
Resultado: 0.1339
Numero de iteraciones: 6

Puntos escogidos: $P_0 = 4, P_1 = 6$
Resultado: 4.9108
Numero de iteraciones: 9

Falsa posición
Puntos escogidos: $P_0 = -4, P_1 = 6$
Resultado: -2.0164
Numero de iteraciones: 19

Puntos escogidos: $P_0 = 0, P_1 = 1$
Resultado: 0.1339
Numero de iteraciones: 8

Puntos escogidos: $P_0 = 4, P_1 = 6$
Resultado: 4.9107
Numero de iteraciones: 17

Con un criterio de convergencia de $\epsilon < 10^{-4}$, en todos los numerales, con pocas excepciones, el método de Newton-Raphson resultó ser el que convergía considerablemente más rápido. En los casos en los que este método no resultaba ser el más rápido, era con una diferencia de máximo 2 iteraciones, por lo que se puede concluir que este es el método que mas rápido converge de los cuatro.

2. Problema 2

La velocidad de una paracaidista se define como:

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{1}$$

Teniendo presente que el valor aproximado de la gravedad es de $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$, emplee el método de bisección y de falsa posición, con un error inferior a $Err \leq 0{,}02\,\%$ para:

a. Calcular el valor de la masa m para una velocidad v = 36 m/s con un coeficiente de resistencia c = 15 kg/s en un tiempo t = 10s.

   Con el método de bisección hemos obtenido un valor de m = 9.99. Sin embargo, al reemplazar dicha aproximación en nuestra ecuación original vemos que este valor no es el correcto, ya que no satisface la ecuación con un error menor o igual a 0.02 %.

$$36 = \frac{9{,}81 \times 9{,}99}{15}\left(1 - e^{-\frac{15}{9{,}99}\times 10}\right) \tag{2}$$
$$36 = 6{,}46 \tag{3}$$

   Nótese que con el método de falsa posición hemos conseguido aproximar m a un valor de 59.9592. El cual al reemplazarlo en la ecuación original obtenemos

$$36 = \frac{9{,}81 \times 60}{15}\left(1 - e^{-\frac{15}{60}\times 10}\right) \tag{4}$$
$$36 = 35{,}999 \tag{5}$$

   Con lo cual podemos concluir que para dicho caso el método de falsa posición ha logrado aproximar correctamente la raíz, mientras que el de bisección no.

b. Calcular el valor del coeficiente de resistencia c para que un paracaidista de 82 kg tenga una velocidad de 36 m/s después de 4s de caída libre.

   Para este en caso, hemos obtenido un valor aproximado de c = 3.59 tanto para el método de bisección y el método de falsa posición.Nótese que al reemplazar la aproximación en la ecuación original igualada a 0 obtenemos lo siguiente.

$$0 = \frac{9{,}81 \times 82}{3{,}59}\left(1 - e^{-\frac{3{,}59}{82}\times 4}\right) \quad (6)$$

$$0 \approx 0 \quad (7)$$

Por lo tanto podemos concluir que ambos métodos han logrado estimar con éxito el valor de C.

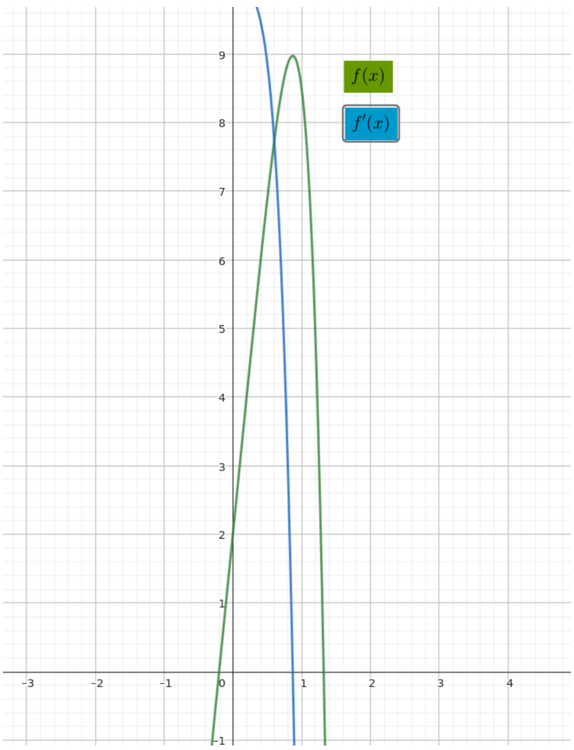
3. Problema 3

Encuentre el máximo de la función $f(x) = -2x^6 - 1{,}5x^4 + 10x + 2$ con un error inferior al 0,05 %

Nota: Teniendo en cuenta que estos métodos son para encontrar el punto en donde f(x) = 0, se necesitara sacar la derivada de la función para que los algoritmos retornen el punto máximo de f(x)

$$f(x) = -2x^6 - 1{,}5x^4 + 10x + 2$$

$$f'(x) = -12x^5 - 6x^3 + 10$$



a. Utilizando el método de iteración de falso punto

Con $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$

Resultado: 0.8714
Numero de iteraciones: 9

Ahora, haciendo $f(0{,}8714)$

$$f(0{,}8714) = -2(0{,}8714)^6 - 1{,}5(0{,}8714)^4 + 10(0{,}8714) + 2 = 8{,}9734$$

El punto máximo es 8.9734

b. Utilizando el método de iteración de Newton-Raphson

Con $P_0 = 1$

$$f''(x) - 60x^4 - 18x^2$$

Resultado: 0.8714
Numero de iteraciones: 4

Ahora, haciendo $f(0{,}8714)$

$$f(0{,}8714) = -2(0{,}8714)^6 - 1{,}5(0{,}8714)^4 + 10(0{,}8714) + 2 = 8{,}9734$$

El punto máximo es 8.9734

c. Utilizando el método de iteración de secante

Con $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$

Resultado: 0.8714
Numero de iteraciones: 8

Ahora, haciendo $f(0{,}8714)$

$$f(0{,}8714) = -2(0{,}8714)^6 - 1{,}5(0{,}8714)^4 + 10(0{,}8714) + 2 = 8{,}9734$$

El punto máximo es 8.9734

La técnica mas adecuada para este problema es el método de Newton-Raphson pues se demoro considerablemente menos intentos que los otros dos.

4. Problema 4

Dada la tabla de datos:

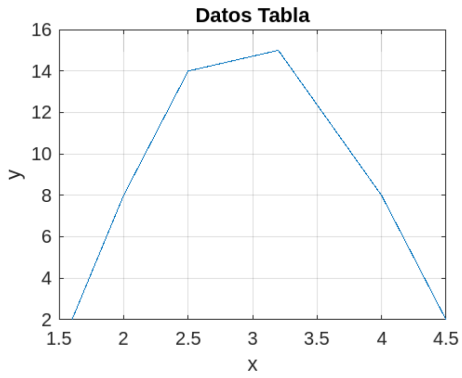
x	$f(x)$
1.6	2
2	8
2.5	14
3.2	15
4	8
4.5	2

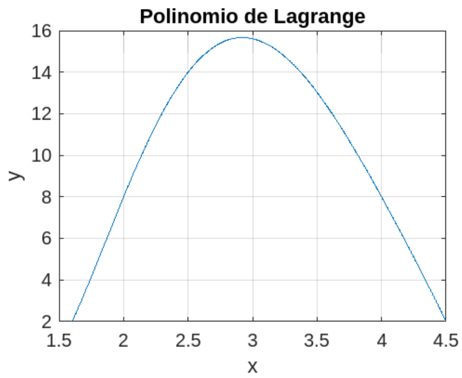
a. Encuentre el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos de la tabla de datos.

Utilizando el algoritmo interpolador de Lagrange hemos encnontrado el siguiente polinomio interpolador.

$$\text{poly(x)} = -0{,}4812x^5 + 8{,}2470x^4 - 53{,}7673x^3 + 159{,}8360x^2 - 204{,}5234x + 91{,}2857 \tag{8}$$

b. Grafique la tabla de datos y el polinomio interpolador obtenido





c. Calcule el valor de f(2.8)

Notése que el valor de poly(2.8) = 15.52

5. Problema 5

a.

Considerando la siguiente tabla de datos:

x	$f(x)$
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5

es decir $a_j = \{2{,}5, 1{,}0, 2{,}5, 0{,}5\}$

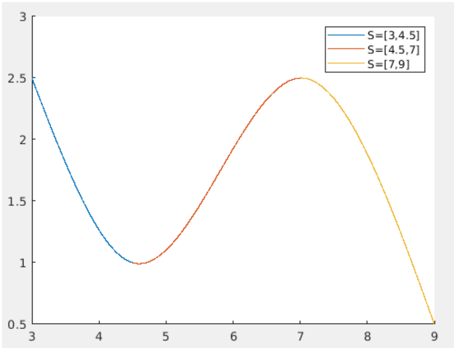
Ahora, corriendo el algoritmo con los puntos dados y teniendo en cuenta que $n = 3$, tenemos de resultado:

$$a_j = \{2{,}50, 1{,}00, 2{,}50\}$$
$$b_j = \{-1{,}41, -0{,}16, 0{,}02\}$$
$$c_j = \{0{,}00, 0{,}83, -0{,}76\}$$
$$d_j = \{0{,}18, -0{,}21, 0{,}12\}$$

Poniéndolo en la forma del polinomio cubico tenemos que:

$$S_0 = 6{,}75 - 1{,}41x + 0{,}18(x-3)^3$$
$$S_1 = 1{,}72 - 0{,}16x + 0{,}83(x-4{,}5)^2 - 0{,}21(x-4{,}5)^3$$
$$S_2 = 2{,}34 + 0{,}02x - 0{,}76(x-7)^2 + 0{,}12(x-7)^3$$

Y su gráfica seria:



Por ultimo, para el valor estimado en $x = 5$, tenemos que utilizar S_1 pues 5 está en el intervalo [4.5, 7]

$$S_1(5) = 1{,}72 - 0{,}16(5) + 0{,}83(5-4{,}5)^2 - 0{,}21(5-4{,}5)^3$$
$$S_1(5) = 1{,}72 - 0{,}8 + 0{,}83(0{,}5)^2 - 0{,}21(0{,}5)^3$$
$$S_1(5) = 1{,}72 - 0{,}8 + 0{,}20 - 0{,}02$$
$$S_1(5) = 1{,}1$$

b.

Teniendo en cuenta la siguiente tabla de datos:

x	$f(x)$
1	3
2	6
3	19
5	99
7	291
8	444

es decir $a_j = \{3, 6, 19, 99, 291, 444\}$

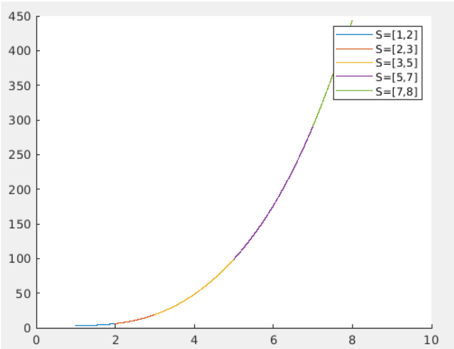
Ahora, corriendo el algoritmo con los puntos dados y teniendo en cuenta que $n = 5$, tenemos de resultado:

$$a_j = \{3{,}00, 6{,}00, 19{,}00, 99{,}00, 291{,}00\}$$
$$b_j = \{1{,}19, 6{,}61, 20{,}34, 62{,}69, 136{,}86\}$$
$$c_j = \{0{,}00, 5{,}42, 8{,}30, 12{,}87, 24{,}20\}$$
$$d_j = \{1{,}80, 0{,}96, 0{,}76, 1{,}88, -8{,}06\}$$

Poniéndolo en la forma del polinomio cubico tenemos que:

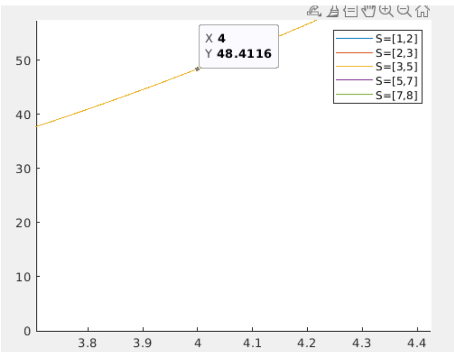
$$
\begin{aligned}
S_0 &= 1{,}80 + 1{,}19x + 1{,}8(x-1)^3 \\
S_1 &= -7{,}23 + 6{,}61x + 5{,}42(x-2)^2 + 0{,}96(x-2)^3 \\
S_2 &= -42{,}03 + 20{,}34x + 8{,}30(x-3)^2 + 0{,}76(x-3)^3 \\
S_3 &= -214{,}49 + 62{,}69x + 12{,}87(x-5)^2 + 1{,}88(x-5)^3 \\
S_4 &= -667{,}02 + 136{,}86x + 24{,}20(x-7)^2 - 8{,}06(x-7)^3
\end{aligned}
$$

Y su gráfica seria:



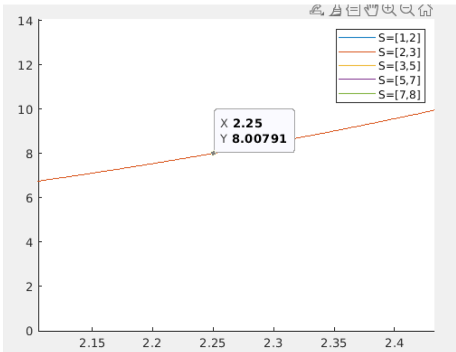
Para el valor estimado en $x = 4$, tenemos que utilizar S_2 pues 4 está en el intervalo [3, 5]

$$
\begin{aligned}
S_2(4) &= -42{,}03 + 20{,}34(4) + 8{,}30(4-3)^2 + 0{,}76(4-3)^3 \\
S_2(4) &= -42{,}03 + 81{,}36 + 8{,}30(1)^2 + 0{,}76(1)^3 \\
S_2(4) &= -42{,}03 + 81{,}36 + 8{,}30 + 0{,}76 \\
S_2(4) &= 48{,}39
\end{aligned}
$$



Por ultimo, para el valor estimado en $x = 2{,}25$, tenemos que utilizar S_1 pues 2,25 está en el intervalo [2, 3]

$$
\begin{aligned}
S_1(2{,}25) &= -7{,}23 + 6{,}61(2{,}25) + 5{,}42(2{,}25-2)^2 + 0{,}96(2{,}25-2)^3 \\
S_1(2{,}25) &= -7{,}23 + 14{,}87 + 5{,}42(0{,}25)^2 + 0{,}96(0{,}25)^3 \\
S_1(2{,}25) &= -7{,}23 + 14{,}87 + 0{,}33 + 0{,}01 \\
S_1(2{,}25) &= 7{,}99
\end{aligned}
$$

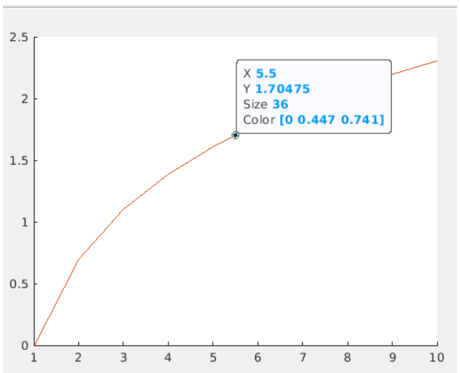


6. Problema 6

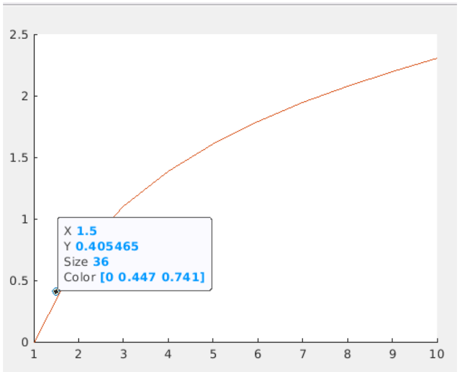
Desarrolle un código que permita calcular el valor de intermedio en una tabla de datos a partir de Polinomios de Lagrange. El código debe recibir dos arreglos unidimensionales que representan x y $f(x)$ y un valor que se desee estimar a partir de la información contenida en dichos arreglos. El código debe encontrar el intervalo en donde se localiza el valor que se desea estimar y luego aproximarlo mediante polinomios cúbicos de Lagrange. Para los intervalos primero y último emplee polinomios cuadráticos y para valores fuera del rango de datos indique la presencia de un error en la información suministrada. Una vez realizado el código puede probarlo con $f(x) = ln(x)$ siendo $x = 1, 2, 3, ..., 10$.

Ahora, con x y $f(x)$ vamos a probar el código con diferentes valores para estimar y compararlos con la gráfica de $ln(x)$ y así determinar si el código es capaz de estimar un punto.

- Con el valor a estimar como 5,5 tenemos que:
  - Resultado: 1.7047
  - Comparación gráfica:



- Con el valor a estimar como 1,5 tenemos que:
    - Resultado: 0.4035
    - Comparación gráfica:



- Con el valor a estimar como 11 tenemos que:
    - Resultado:

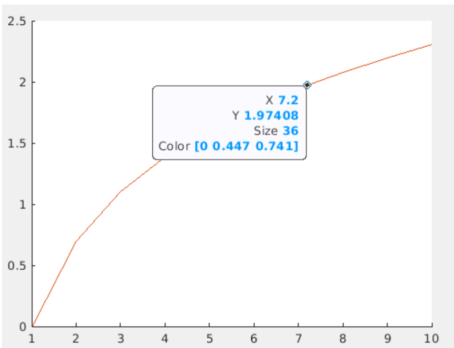
```
y =

  function_handle with value:

    @(x)log(x)

Error: El valor a estimar está fuera del rango de datos.
```

- Con el valor a estimar como 7,2 tenemos que:
    - Resultado: 1.9741
    - Comparación gráfica:



7. Problema 7

Para la función:

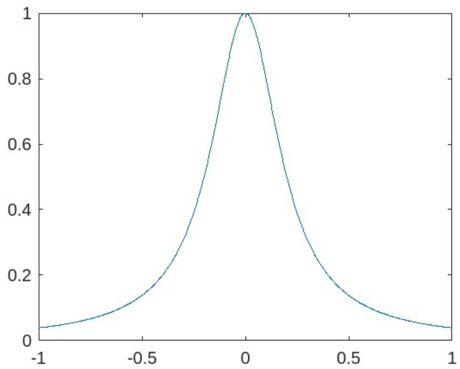
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

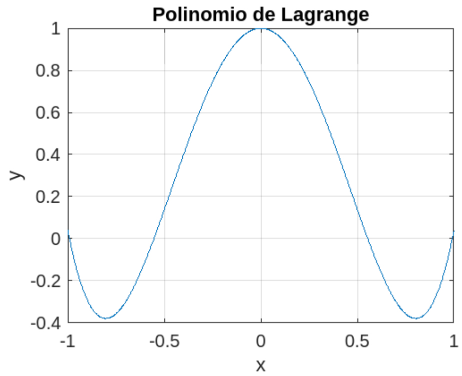
a. Grafique la función en el intervalo $x = [-1, 1]$

b. Obtenga y grafique el polinomio de Lagrange usando valores equiespaciados $x = [-1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1]$

Usando el algoritmo de Lagrange obtuvimos el polinomio

$$\text{poly(x)} = 3{,}3156x^4 - 4{,}2772x^2 + 1{,}0000 \tag{9}$$



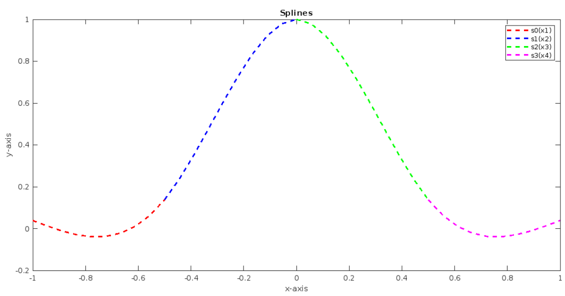


el cual si graficamos se ve de la siguiente manera:

y como podemos observar el polinomio interpolador de lagrange si lo evaluamos en los puntos originales x y comparando los resultados con los valores y originales de f(x) estos corresponden.

c. Repita b) empleando splines cúbicos

Haciendo uso de los splines cubicos obtuvimos la siguiente aproximacion:



d. Explique los resultados obtenidos

Para el caso de la aproximacion usando Lagrange se obtuvo una funcion de grado 4, a diferencia de la aproximacion mediante splines, donde se obtuvieron 4 funciones s_i de grado 3 para cada intervalo considerado. Observando ambas imagenes podemos ver que aunque ambas aproximaciones son buenas, la aproximacion mediante splines logro accercarse mas a la funcion original, esto es especialmente cierto en los extremos de la funcion donde los splines asemejan mejor el comportamiento de la funcion original.