

LỜI THAN VẤN CỦA MỘT NHÀ TOÁN HỌC

tác giả: Paul Lockhart

Một nhạc công vừa choàng tỉnh dậy khỏi một cơn ác mộng kinh hoàng nhất. Trong giấc mơ, ông thấy mình mắc kẹt trong một thế giới nơi âm nhạc đã trở thành một phần bắt buộc của hệ thống giáo dục: *"Chúng ta đang giúp các học sinh có thể cạnh tranh một cách tốt nhất, trong thế giới nơi âm nhạc đang ngày càng chiếm một vị trí lớn hơn trong cuộc sống con người"*, họ nói. Các nhà giáo dục, các hệ thống trường học, và cả các chính phủ đều tham gia vào dự án quan trọng này. Các nghiên cứu được triển khai, những cuộc hội thảo được tổ chức, và rất nhiều quyết định được ban bố - tất cả, hoàn toàn không có lấy sự tham vấn hay đóng góp của bất cứ một nhạc công hay một nhạc sĩ đang hoạt động nào.

Ai cũng biết các nhạc sĩ ghi lại ý tưởng của mình dưới dạng những nốt và khuông trên những bản nhạc, và do vậy, các ký tự đen trắng ngộ nghĩnh này được coi là thứ "ngôn ngữ của âm thanh". Bởi thế, thời nay, một trong những yêu cầu bắt buộc đối với các học sinh sinh viên khi muốn lấy bất cứ một bằng cấp gì trong ngành nhạc là phải "đọc thông viết thạo" được thứ ngôn ngữ trên. Thật vậy, sẽ là quá nực cười nếu bạn tin rằng một đứa trẻ có thể hát một bài hát, hay chơi một nhạc cụ mà không cần có một chút nền tảng kiến thức nào về ký âm hay biết sơ qua các học thuyết về nhạc lý. Không nói đến sáng tác, chỉ nghe và chơi nhạc thôi cũng đã là những hoạt động được coi là có độ khó rất cao rồi, và do vậy, chỉ được dạy trong các chương trình từ mức đại học trở lên, thường phải là cao học.

Đó là về đại học, còn về các cấp học thấp hơn như tiểu học, trung học; ở đó nhiệm vụ chính của nhà giáo dục chỉ là tập trung huấn luyện để học sinh có thể sử dụng thuần thục được thứ ngôn ngữ trên, có thể sắp xếp qua lại vị trí các ký tự dựa trên các quy luật đã được soạn sẵn: *"Đến giờ học nhạc, bọn em sẽ lấy giấy ký âm ra; khi giáo viên viết các nốt trên bảng, bọn em sẽ chép lại hoặc chuyển chúng về một khóa nhạc khác trên giấy. Quan trọng nhất là biểu tượng khóa nhạc và hình dáng các nốt phải chính xác; và cô giáo luôn yêu cầu bọn em rất kỹ rằng phải viết kín cho bằng hết tờ in khuông nhạc mới được. Một lần chữa bài tập về gam nửa cung, em đã trả lời đúng nhưng không được cô cho điểm, chỉ vì em đánh cái móc cho các nốt nhạc quay nhầm bên."*

Dần dần, các nhà giáo dục học thông thái nhận ra rằng, ngay cả các học sinh rất nhỏ cũng có thể được giao những dạng bài tập như trên. Và trên thực tế, vào thời buổi này, sẽ rất đáng xấu hổ cho thầy cô và các bậc cha mẹ nếu con

em, học trò của họ học đến lớp 3 rồi mà vẫn chưa nắm vững được lý thuyết về các khóa và tông trong luật ký âm.

"Chắc tôi phải kiểm tra gia sư nhạc cho thằng con tôi quá. Nó chẳng bao giờ chịu làm bài tập cả, nói những bài tập đó "chán òm". Suốt cả ngày, lúc nào cũng chỉ thấy nó ngồi nhìn ra ngoài cửa sổ, ngâm nga một giai điệu khi gió gù đẩy một mình, có những lúc nó còn tự bịa ra một bài hát linh ta linh tinh nào đấy nữa."

Càng học lên cao, áp lực sẽ càng lớn; suy cho cùng, các học sinh cũng cần phải được chuẩn bị để đối mặt với các kỳ thi tiêu chuẩn sắp tới, trong đó có cả bài thi đầu vào đại học, cao đẳng. Các môn học bắt buộc trong giáo trình giảng dạy thường bao gồm: Thang âm và Gam; Điệu thứ; Nhịp Phách; Kỹ thuật hòa âm, Lý thuyết đối âm học... *"Đúng là các em phải học một số lượng môn học khá lớn, tuy vậy đó là một sự chuẩn bị cần thiết; tôi tin là khi học lên các giáo trình cao hơn trong bậc đại học, yêu cầu phải trực tiếp nghe và chơi nhạc, các em sẽ thấy biết ơn tất cả những gì mình đã được học trong chương trình phổ thông..."* Tất nhiên, không mấy học sinh tiếp tục đi theo con đường âm nhạc; nên sẽ chỉ có một số rất ít các em được thực sự nghe những âm thanh mà những nốt đen đen ngọ nghĩnh các em vẫn được học ký hiệu cho. Tuy vậy, điều tối quan trọng vẫn là mỗi thành viên trong xã hội đều phải có khả năng đọc được một quãng chuyển tông hay nhận ra một nhịp thứ trong các bản ký âm, bất kể là họ có bao giờ được thực sự nghe một bản nhạc hay không. *"Nói thật với anh, phần lớn học sinh ngày nay không giỏi nhạc một chút nào hết. Chúng uể oải trong giờ học, kỹ thuật của chúng kém cỏi, và bài tập chép của chúng thì tệ đến mức gần như không đọc được nữa. Chẳng mấy đứa ý thức được tầm quan trọng của âm nhạc vào thời buổi hiện nay, tất cả chúng chỉ muốn làm quấy quá cho xong nhiệm vụ, miễn cứ kiếm đủ điểm tối thiểu để được lên lớp là xong. Tôi nghĩ đứa nào giỏi thì đã giỏi từ bé, còn những đứa đã không bẩm sinh có thiên khiếu thì có học thế chứ học nữa cũng vậy thôi. Mà, tôi biết có một cô bé giỏi lắm nhé, trời ơi, bài ký âm của nó, bài nào cũng phải nói là chuẩn cực luôn - mọi nốt đều ở đúng vị trí, mọi nét ký đều chính xác, sắc nét, rõ ràng, tất cả đều đẹp đến hoàn hảo! Chắc chắn rồi đây con bé sẽ trở thành một nhạc công vĩ đại cho mà xem!"*

Choàng tỉnh dậy trong mồ hôi lạnh vì sợ hãi, người nhạc công nhận ra rằng, may mắn thay, tất cả đó chỉ là một giấc mơ - một cơn ác mộng điên rồ! *"Tất nhiên rồi!",* ông tự trấn an bản thân, *"làm gì có xã hội nào độc ác đến mức bóp chết một trong những hình thái nghệ thuật đẹp và ý nghĩa nhất của con người thành một thứ ngớ ngẩn và vô nghĩa lý đến thế! Không một nền văn hóa nào lại có thể tàn nhẫn đến độ tước đoạt đi của trẻ em một phương cách tự nhiên nhất, tuyệt vời nhất để thăng hoa, để thỏa mãn và thể hiện cảm xúc của bản thân như vậy! Thật lố bịch, quá sức lố bịch!"*

Cùng lúc ấy, cách đó vài con phố, người họa sĩ của thị trấn cũng vừa choàng tỉnh khỏi một giấc mộng kinh hoàng tương tự...

Tôi kinh ngạc nhận ra mình đang ở trong một căn phòng học hoàn toàn bình thường - không giá vẽ, không ống mực, không có một thứ gì dùng để vẽ. "Ồ, ở đây chúng tôi không thực sự vẽ, cái đó phải đợi đến khi các em học đến cấp III kia" - một giáo viên trả lời thắc mắc của tôi. "Ở lớp bảy, chủ yếu các em học về màu vẽ và bảng pha màu". Rồi họ đưa tôi xem một tờ phiếu bài tập của học sinh. Trên mặt giấy là những ô màu, bên dưới là những dòng trống, và các học sinh được yêu cầu điền vào đó tên của màu sắc trong những ô tương ứng bên trên. "Em thích môn Mỹ thuật lắm", một học sinh hào hứng, "chỉ cần làm theo hướng dẫn là xong. Dễ nhất luôn!".

Sau giờ học, tôi tìm đến nói chuyện với giảng viên. "Vậy các học sinh của anh không được thực sự vẽ gì hay sao?", tôi hỏi. "Có chứ, sang năm các em sẽ được học lớp Dự bị bộ môn Vẽ-theo-số. Nó sẽ chuẩn bị cho các em kiến thức nền tảng để theo học các phân môn Vẽ-theo-số cao hơn trong bậc phổ thông. Sau đó, khi vào đời, các em sẽ có khả năng áp dụng những kiến thức được học bây giờ vào thực tế - nhúng cọ vào sơn, quét màu, lau khô, mấy thứ đại loại thế. Tất nhiên chúng tôi cũng theo dõi rất sát sao năng lực của học sinh. Những họa sĩ giỏi nhất - những em nắm vững nhất kiến thức về cọ vẽ, màu vẽ, giá vẽ - sẽ được thực sự vẽ sớm hơn, tất nhiên; nhiều em thậm chí đã có thể tự tin đăng ký lớp Dự Bị Đại Học để tích lũy tín chỉ cho đại học ngay từ bây giờ. Nhưng chủ yếu chúng tôi chỉ cố giúp các em có một hiểu biết căn bản nhất về hội họa, để sau này khi ra ngoài đời, nhớ có lúc phải sơn lại căn bếp hay quét vôi lại mảng tường trước nhà, các em cũng không đến mức phải bỡ ngỡ."

"Ừm, các lớp học ở phổ thông mà anh nhắc đến lúc nãy, nó là..."

"Ý anh là các lớp Vẽ-theo-số? Gần đây số lượng học sinh đăng ký học những môn đó đang tăng đột biến đấy nhé. Tôi nghĩ chúng chủ yếu đến từ các bậc cha mẹ muốn đảm bảo cho con mình sẽ vào được một trường đại học tốt. Không có gì đảm bảo cho các thí sinh tương lai tốt hơn một chứng chỉ loại giỏi môn Vẽ-theo-số trong học bạ đâu!"

"Sao các trường đại học lại đi quan tâm đến việc thí sinh của mình có biết tô màu vào đúng ô hay không?"

"Ừ thì, anh biết đấy, nó cho thấy là thí sinh có một tư duy logic... và lại nếu các em muốn được học những chuyên ngành về mỹ thuật như thiết kế thời trang hay trang trí nội thất; chẳng phải sẽ tốt hơn nếu ngay từ bậc phổ thông các em đã có thể đáp ứng đủ những yêu cầu cơ bản về hội họa hay sao?"

"Tôi hiểu rồi. Thế bao giờ thì các học sinh được vẽ tự do, trên một tấm toan trắng?"

"Anh nói cứ y như một ông giáo sư đã từng dạy tôi hồi xưa ấy! Lúc nào cũng rao giảng về việc hội họa là phải thể hiện bản thân, rồi thể hiện cảm xúc rồi các thứ này nọ... toàn những thứ huyễn hoặc, trừu tượng đầu đầu ấy! Tôi á, tôi cũng

có một bằng đại học về hội họa đấy, nhưng chẳng mấy khi tôi làm việc với một tấm toan trắng tinh không có gì cả. Tôi chỉ hay dùng những bộ dụng cụ Vẽ-theo-số được nhà trường cấp là chủ yếu thôi."

* * *

Đáng buồn thay, hệ thống giáo dục toán của chúng ta hiện nay đang giống chính xác như những cơn ác mộng kinh khủng trên. Trên thực tế, nếu bạn bảo tôi phải thiết kế ra một hệ thống hoàn hảo với mục đích tối thượng là hủy hoại hoàn toàn trí tò mò và tình yêu với việc tự phát hiện ra những quy luật của riêng mình ở trẻ em, tôi chắc chắn sẽ không thể làm tốt hơn những gì đang được làm hiện nay - Tôi chỉ đơn giản là không có đủ trí tưởng tượng để có thể nghĩ ra hàng đống những ý tưởng quá sức tàn nhẫn và vô nghĩa lý, như những cái đang tạo nên nền giáo dục toán học ngày nay!

Ai cũng biết là có gì đó không ổn ở đây. Các quan chức chính phủ nói *"Chúng ta cần những tiêu chuẩn khắt khe hơn!"*. Các nhà trường thì nói *"Chúng ta cần thêm tiền và trang thiết bị hiện đại hơn!"*. Các nhà giáo dục nói một kiểu, và các thầy cô lại nói một kiểu khác nữa. Và tất cả đều sai. Những người duy nhất thực sự hiểu chuyện gì đang xảy ra lại là những người luôn bị đổ lỗi nhiều nhất, và ít được lắng nghe nhất: các học sinh. Các em nói: *"Giờ Toán nào cũng chán ờm!"*. Và các em đã nói hoàn toàn chính xác!

* * *

Toán học và văn hóa

Đầu tiên chúng ta cần phải hiểu rằng, Toán học cũng là một môn nghệ thuật. Sự khác biệt giữa toán và các loại nghệ thuật khác, như âm nhạc hay hội họa, đấy là nền văn hóa của chúng ta không nhìn nhận nó như thế. Ai cũng biết rằng các nhà thơ, họa sĩ, nhạc sĩ sáng tạo nên những tác phẩm nghệ thuật, và tự thể hiện mình qua chất liệu của ngôn ngữ, màu sắc hoặc âm thanh. Trên thực tế, xã hội còn khá là nhân nhượng với từ "sáng tạo": đến cả những kiến trúc sư, đầu bếp, thậm chí cả đạo diễn phim truyền hình cũng có thể được coi là những "nghệ sĩ". Vậy tại sao các nhà toán học lại không thể được thừa nhận như vậy?

Một phần của vấn đề là ở chỗ, hầu như không ai hiểu một cách thực sự các nhà toán học làm gì. Quan niệm thường thấy nhất của số đông có vẻ là các nhà toán học, theo một cách nào đấy, làm những việc liên quan đến khoa học - có thể họ giúp các nhà khoa học nghĩ ra những công thức và thuật toán; hay nhập những con số rất lớn vào máy tính vì một lý do gì đấy. Không cần hỏi cũng biết, nếu có một ngày thế giới phải chia thành hai nhóm: nhóm *"những người*

mơ mộng lãng mạn” và nhóm “những người tư duy lý trí”; chắc chắn hầu hết mọi người sẽ xếp các nhà toán học vào dạng thứ hai: nhóm “những người tư duy lý trí”.

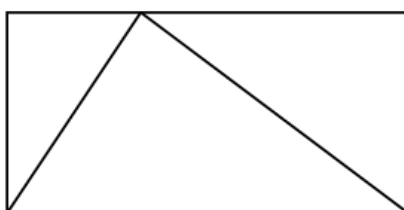
Tuy vậy, thực tế không có thứ gì thơ mộng, lãng mạn; không thứ gì cấp tiến, cách mạng; cũng không thứ gì có thể khiến người ta mê đắm, ảo mị như toán học. Nó ẩn chứa nhiều những kinh ngạc và bất ngờ không hề thua kém vũ trụ học hay vật lý (các nhà toán học đã *mường tượng* ra khái niệm hố đen từ rất lâu trước khi các nhà thiên văn thực sự tìm thấy một hố đen); và cho người ta nhiều tự do để thể hiện mình hơn thơ, họa, nhạc rất nhiều (những hình thái nghệ thuật này luôn bị phụ thuộc vào các nguyên liệu vật chất, hoặc có tính hạn định như ngôn ngữ, màu sắc, âm thanh). Toán học là hình thức nghệ thuật thuần khiết nhất, cũng là hình thức nghệ thuật bị hiểu sai nhiều nhất.

Bởi vậy xin hãy để tôi được giải thích toán học là gì, và các nhà toán học thực sự làm gì. Tôi nghĩ mình không thể làm tốt hơn lời miêu tả thực xác đáng sau đây của nhà toán học người Anh G.H. Hardy:

“Một nhà toán học, cũng như một họa sĩ hay nhà thơ, là một người tìm ra các quy luật. Nếu những quy luật của anh ta có bền vững hơn của một họa sĩ hay một nhà thơ, thì đó là vì chúng là quy luật của những ý tưởng.”

Vậy các nhà toán học ngồi một chỗ, tìm ra quy luật của những ý tưởng. Nhưng loại quy luật như thế nào? Loại ý tưởng như thế nào? Ý tưởng về loài tê giác chẳng? Không, cái đó dành cho các nhà sinh vật học. Hay ý tưởng về ngôn ngữ và các nền văn hóa? Không, hầu hết không phải là vậy. Tất cả những thứ đó đều quá phức tạp so với sở thích của một người làm toán. Nếu có một thứ có thể coi là tư tưởng thẩm mỹ chung nhất cho toán học, thì đấy là: *sự đơn giản chính là vẻ đẹp*. Các nhà toán học ưa thích nghĩ đến những thứ đơn giản hết mức có thể, và thứ đơn giản nhất, chính là những nằm trong *trí tưởng tượng* của chúng ta.

Ví dụ, nếu tôi có hứng nghĩ về các hình khối - và thường thì tôi rất hay có hứng nghĩ về chúng - tôi sẽ hình dung về một tam giác bên trong một cái hộp chữ nhật như thế này:

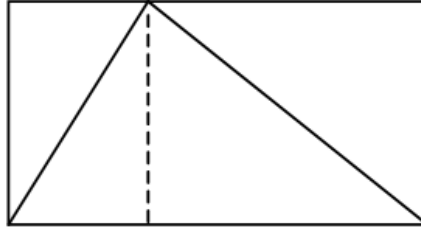


Tôi sẽ tự hỏi: cái tam giác kia chiếm bao nhiêu phần của cái hộp chữ nhật? Hai phần ba, có lẽ? Điều quan trọng cần nhớ ở đây là không phải tôi đang nói về cái *hình vẽ* trên giấy về một tam giác bên trong một hình chữ nhật. Cũng không phải tôi đang thắc mắc về một kết cấu kim loại hình tam giác trong một chi tiết dầm đỡ của một cây cầu nào đấy. Hoàn toàn không có một mục đích thiết thực nào ẩn giấu trong câu hỏi này cả. Tôi chỉ đang *chơi đùa* vậy thôi. Đấy mới là toán - tự thắc mắc, tự chơi đùa với trí tưởng tượng của chính mình. Ngay từ đầu, cái câu hỏi "*hình tam giác chiếm bao nhiêu phần của hình chữ nhật*" đã chẳng thể áp dụng nổi với bất cứ vật thể có thực nào. Kể cả những tam giác được tạo tác một cách tinh xảo, chính xác nhất; cũng vẫn là một mớ hỗn độn quá phức tạp của hàng đống những nguyên tử và phân tử, nhảy từ bên này qua bên kia, dao động qua lại liên tục trong từng tích tắc. Đấy là, trừ khi bạn chỉ đang nói đến một hệ đo lường theo kiểu *xấp xỉ*. Lúc đấy thì lại là vấn đề của mỹ thuật mất rồi. Nó không hề đơn giản, và do đó, nó là một câu hỏi rất gây ức chế, bởi phụ thuộc quá nhiều vào đủ thứ chi tiết của thế giới thực. Cứ để nó cho các nhà khoa học cho xong. Câu hỏi *toán học* ở đây là về một tam giác tưởng tượng, bên trong một hình chữ nhật tưởng tượng. Các đường biên của chúng đều thẳng một cách tuyệt đối, bởi vì tôi muốn thế - đây mới là thứ tôi thực sự thích ở toán: mọi thứ đều có đúng những đặc tính như bạn muốn nó có. Bạn có vô hạn những lựa chọn, không hề có một thực tại nào cản trở bạn hết.

Mặt khác, một khi bạn đã quyết định các đặc tính cho đối tượng của mình (ví dụ, tôi có thể cho tam giác của mình có tính đối xứng, hoặc không); từ đó trở đi các sáng tạo của bạn sẽ tự vận hành theo những nguyên tắc của riêng nó, bất kể bạn có muốn hay không. Đây mới là điều kỳ diệu nhất của những sáng tạo tưởng tượng này: chúng trả lời lại bạn! Có một con số đâu đó ngoài kia cho câu hỏi của tôi, nó có thể là hai phần ba, cũng có thể không, nhưng tôi không được phép quyết định nó là gì. Tôi sẽ phải *tìm ra nó*.

Vậy là chúng ta được thỏa sức nghĩ ra bất cứ thứ gì ta muốn, sau đó tạo ra các quy luật và đặt các câu hỏi về chúng. Nhưng làm thế nào ta có thể trả lời cho những câu hỏi kiểu này? Toán không giống như các môn khoa học: không có ống nghiệm, bình pha các kiểu để tôi có thể làm các thí nghiệm để trả lời cho câu hỏi về một thứ chỉ tồn tại trong trí tưởng tượng của tôi. Cách duy nhất để tìm được sự thật về một thứ tưởng tượng, đấy là phải dùng chính trí tưởng tượng, và đấy không phải là một công việc dễ dàng gì đâu.

Về trường hợp cái tam giác trong một hình chữ nhật, tôi có thấy một phương án rất đẹp và đơn giản thế này:



Nếu tôi “chém” một nhát dọc cái tam giác thế này, tôi có thể thấy rõ: mỗi phần bị chém đều được một cạnh bên của tam giác chia đôi thành hai nửa bằng nhau. Thế tức là phần không gian bên trong và phần không gian bên ngoài tam giác ở hai bên là bằng nhau. Tức là cái tam giác này chiếm đúng một nửa diện tích của hình chữ nhật!

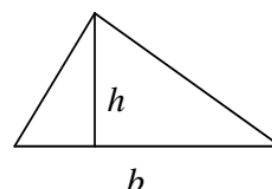
Đây mới thực sự là một bài toán. Ví dụ gần vừa rồi của tôi chính là đại diện cho nghệ thuật của một nhà toán học: đặt những câu hỏi đơn giản mà sáng suốt về một đối tượng tưởng tượng của riêng mình, và tạo ra được những câu trả lời thích đáng và thỏa mãn đến tuyệt vời cho chúng. Thực sự không có gì tuyệt như cảm giác được tung hoành trong vương quốc của những ý tưởng: nó hấp dẫn, nó lôi cuốn người ta, và nhất là, nó hoàn toàn miễn phí!

Nhưng ý tưởng cho câu trả lời đó của tôi đến từ đâu? Sao tôi lại biết phải cần kẻ thêm đường kẻ đó? Thế tại sao một họa sĩ lại biết cần nên đặt bút vào chỗ nào trước? Cảm hứng bất chợt, kinh nghiệm, thử đi thử lại nhiều lần, ăn may. Đây chính là nét nghệ thuật của nó: tạo ra những áng tuyệt thi của suy nghĩ, những bản xô-nát của ý tưởng. Có một thứ gì đó có sức lôi cuốn, sức thay đổi rất mãnh liệt ở thứ nghệ thuật này. Mối quan hệ giữa hình tam giác và hình chữ nhật kia vốn là một điều bí ẩn, rồi xuất hiện thêm một đường kẻ, và tất cả mọi thứ bỗng đột nhiên trở nên sáng rõ. Chỉ trong phút chốc, tôi đã nhìn thấy được một điều mà lúc trước tôi không thể thấy. Bằng một cách diệu kỳ nào đó, tôi đã tạo ra được một vẻ đẹp sâu sắc chẳng từ một cái gì cả, và trong cùng lúc đó tự thay đổi chính bản thân tôi. Chẳng phải nghệ thuật chính là thế hay sao?

Đó là lý do tại sao tôi đau khổ biết bao khi nhìn những gì đang được làm với toán ở trường học. Từ một chuyến phiêu lưu đầy hấp dẫn và lôi cuốn của trí tưởng tượng, toán học đã bị rút lại thành một mớ những “định luật” để học sinh ghi nhớ và một đồng các “bước”, quy trình để học sinh làm theo. Thay vì được tự mình đặt ra một câu hỏi đơn giản và tự nhiên về hai hình khối, được tự mình trải qua một quy trình tuyệt vời và đầy hưng phấn của khám phá và sáng tạo, các em học sinh lại được “chiều đãi” một thứ như thế này đây:

Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} b.h$$



"Diện tích một tam giác bằng một phần hai tích của độ dài cạnh đáy và chiều cao của nó". Học sinh được yêu cầu học thuộc công thức này, sau đó "áp dụng" lại nó, lặp đi lặp lại nhiều lần trong các "bài tập". Còn đâu sự phấn khích, sự hứng khởi, thậm chí cả những phút khổ sở, bế tắc của quá trình sáng tạo. Ở đây thậm chí còn không có một *vấn đề* nào để giải quyết nữa. Câu hỏi đã được hỏi và được trả lời cùng một lúc. Chẳng còn lại gì cho các học sinh thực sự làm cả.

Hãy để tôi nói cho rõ thứ tôi đang công kích. Không phải việc các công thức, hay việc ghi nhớ những quy tắc thú vị là có gì sai trái. Trong tình huống này phải có nó ở đó, cũng giống như học ngoại ngữ thì phải nhớ từ vựng vậy - nó giúp học sinh tạo ra được những tác phẩm hay hơn, giàu có, phong phú hơn. Nhưng thứ quan trọng nhất ở đây là *ý tưởng* "chép" đôi cái tam giác ra bằng một đường kẻ, và việc từ một đường kẻ đó có thể dẫn ra thêm bao nhiêu ý tưởng và những đột phá mới trong sáng tạo để từ đó có thể giải quyết được những vấn đề khác - những thứ mà chỉ một dòng định lý không thể nào mang lại cho ta được.

Bằng cách bỏ đi hoàn toàn quá trình sáng tạo và chỉ để lại mỗi kết quả của quá trình sáng tạo ấy, bạn vô hình chung đã tự đảm bảo chắc chắn rằng sẽ không có ai có thể thực sự hiểu rõ vấn đề. Giống như là nói với tôi Michelangelo đã tạo ra một tác phẩm điêu khắc tuyệt đẹp, nhưng lại không cho tôi được *thấy* tác phẩm đó hình dáng ra sao. Thế thì làm thế nào nó có thể khơi gợi cảm hứng cho tôi hay làm tôi rung động được? (và trong thực tế với môn toán, sự việc còn tệ hơn nữa kia - ít nhất trong cái ví dụ trên đây, tôi vẫn còn hiểu rằng thứ tôi đang không được thưởng thức là một *tác phẩm nghệ thuật*).

Bằng cách tập trung vào câu hỏi *cái gì*; mà xa rời câu hỏi *tại sao*; toán học đã bị chúng ta rút lại chỉ còn là một cái vỏ trống rỗng. Nghệ thuật của nó không nằm trong *"định lý"*, nó nằm trong cách giải thích, cách lập luận. Chính sự lập luận mới cho định lý nội dung của nó, chính lập luận mới quyết định câu nói được phát biểu, và ý nghĩa thực sự của câu nói đó. Nếu bạn từ chối cho học sinh của mình tham gia vào các hoạt động này - được tìm ra vấn đề của riêng chúng, được đưa ra những suy đoán và khám phá của riêng chúng, được sai, được vò đầu bứt tai vì không tìm ra cách giải, được bỗng dưng tìm thấy cảm hứng bất ngờ, và được đưa ra những cách kiến giải và chứng cứ của riêng chúng - thì tức là bạn đã tước đi khỏi chúng toán học đích thực. Vậy nên không, tôi không phải đang than phiền về sự có mặt của công thức và định luật trong các lớp học toán. Tôi đang than phiền về sự thiếu vắng của *toán học* trong các lớp học toán.

Nếu giáo viên mỹ thuật của bạn nói rằng hội họa đơn giản chỉ là tô màu vào những ô trống tương ứng đã được đánh số sẵn, bạn sẽ biết có gì đó không ổn ở đây. Nền văn hóa sẽ thông báo cho bạn - có hàng trăm bảo tàng và triển lãm tranh, cũng như vô số các bức tranh treo trong các hộ gia đình. Hội họa đã được xã hội hiểu rõ như một hình thức biểu đạt của tâm hồn con người. Cũng như thế, nếu giáo viên khoa học của bạn cố thuyết phục bạn rằng thiên văn học là môn nghiên cứu tương lai con người dựa vào ngày tháng năm sinh, bạn sẽ nghĩ bà giáo này hẳn bị điên - khoa học đã thấm sâu vào văn hóa đại chúng tới mức gần như tất cả mọi người đều biết về nguyên tử, thiên hà và các định luật của thiên nhiên. Nhưng nếu giáo viên toán học gây cho bạn ấn tượng, dẫu là trực tiếp hay gián tiếp, rằng toán học chỉ đơn giản là về công thức, định nghĩa và ghi nhớ các thuật toán để giải bài tập, ai sẽ là người giúp bạn nhận ra sự thật đây?

Vấn đề này của nền văn hóa là một chu trình tiếp nối đến bất tận: học sinh học toán từ các giáo viên, các giáo viên lại học toán từ các giáo viên của họ; sự thiếu trân trọng và hiểu biết về toán học trong nền văn hóa này thành ra cứ thế đã lặp đi lặp lại qua không biết bao nhiêu thế hệ. Và tệ hơn nữa, chu trình vô tận của loại "toán học giả hiệu" này - thứ toán học chỉ biết chú trọng vào những ký hiệu và biểu tượng, tuy chính xác, nhưng vô nghĩa - đã có thời gian để tạo nên nền văn hóa của riêng nó, tạo nên hệ giá trị của riêng nó. Những người đã trở nên thuần thục các kỹ năng của môn học này sẽ rất tự hào về khả năng của mình, và thứ cuối cùng trên đời họ muốn nghe là toán học thực sự phải hướng đến tính sáng tạo và sự tinh tế thẩm mỹ của từng cá nhân. Rất nhiều học sinh sau khi đã tốt nghiệp đã vô cùng thất vọng khi nhận ra, sau cả chục năm được khen là "giỏi toán", rằng mình thực tế chẳng có một chút năng khiếu toán học nào, và chỉ đơn giản là giỏi làm theo hướng dẫn. Toán không phải là việc làm lui đi theo các hướng có sẵn, toán là tự khai phá ra những con đường mới chưa từng có ai đi kia.

Và đây là tôi còn chưa nhắc đến sự thiếu vắng của công tác phê bình trong dạy và học toán ở trường học đấy. Chưa bao giờ học sinh được biết đến một bí mật: đó là toán học, cũng như bất cứ hình thức văn học nào, được tạo ra bởi con người với mục đích giải trí đơn thuần; rằng toán học cũng là đối tượng để phê bình, đánh giá; rằng người ta có thể có và phát triển dần một *khả năng cảm nhận* về toán. Một bài giải toán cũng giống như một áng thơ vậy; chúng ta có thể đặt câu hỏi rằng liệu nó có đáp ứng những yêu cầu thẩm mỹ của chúng ta không: Luận điểm có chắc chắn không? Có hợp lý không? Có đơn giản mà tinh tế không? Có giải quyết đúng trọng tâm của vấn đề không? Nhưng tất nhiên sẽ không có phê bình toán học ở trường học rồi - làm gì có tí nghệ thuật nào ở đó để mà phê bình!

Tại sao chúng ta lại không muốn con cái mình được học toán học thực sự? Có phải vì chúng ta không tin vào năng lực của chúng, vì toán học như thế có vẻ quá khó với các em? Chúng ta có vẻ đều nhất trí rằng các em hoàn toàn có đủ

khả năng để đưa ra luận điểm và tự rút ra những kết luận của riêng mình về Napoleon, tại sao điều đó lại không đúng khi đối tượng là một hình tam giác? Tôi nghĩ chỉ đơn giản là vì chúng ta, với tư cách là một nền văn hóa, chẳng biết cái quái gì về toán học thực sự cả. Ấn tượng của chúng ta về toán có vẻ là một thứ gì đó rất cao siêu, bác học, rằng hầu như không ai có thể hiểu được nó - một nhận thức sai lầm về sự thật, vô tình lại dẫn đến một kết quả đúng như thế: chẳng ai thực sự hiểu toán là gì cả.

Đã đủ tệ khi cả một nền văn hóa chẳng biết gì về toán rồi; nhưng đằng này ở đây còn tệ hơn nhiều, nhiều nữa, khi người ta thực sự tin rằng mình *biết* mục đích của toán, họ dường như đã có một hiểu lầm đáng kinh sợ rằng toán học, theo một cách nào đấy, có ích cho xã hội! Ngay ở đây đã có một sự khác biệt rất lớn trong cách xã hội đối xử giữa toán và các môn nghệ thuật khác. Toán học được xã hội nhìn nhận như kiểu một *công cụ* cho khoa học và công nghệ. Tất cả mọi người đều biết thơ ca và âm nhạc là những thứ sinh ra vì mong muốn tận hưởng thuần túy của con người, sinh ra để nâng đỡ và khiến tâm hồn con người trở nên cao khiết, trong sạch hơn (và do đó, chúng mới gần như bị loại trừ ra khỏi chương trình học). Nhưng không, toán thì khác. Toán rất *quan trọng*.

SIMPLICIO: Chẳng lẽ anh đang định nói rằng toán học thực sự không có một ích lợi hay công dụng thiết thực nào cho xã hội hay sao?

SALVIATI: Tất nhiên là không. Tôi chỉ đang nói rằng, không thể cứ vì một thứ có một hai công dụng thiết thực nào đấy mà mặc nhiên cho rằng nó sinh là chỉ để làm có thế. Âm nhạc có thể thúc đẩy bước đi của binh sĩ khi lâm trận, nhưng đấy không phải là lý do người ta viết những bản giao hưởng hay xô-nát. Michelangelo đã trang trí những bức tường và trần nhà, nhưng tôi chắc chắn trong đầu mình, ông ta có những tài năng còn quý giá hơn rất nhiều.

SIMPLICIO: Nhưng chúng ta vẫn cần người học những công dụng thiết thực đấy phải không? Chúng ta vẫn cần phải có các kế toán, thợ mộc, v...v... chứ?

SALVIATI: Có bao nhiêu người thực sự cần dùng đến những thứ "toán học thiết thực" vẫn đang được dạy và học như bây giờ chứ? Bộ anh nghĩ các thợ mộc ngoài kia cần dùng đến các công thức lượng giác sin và cos hay sao? Và anh nghĩ có bao nhiêu người lớn còn nhớ được cách chia phân thức, hay nhớ cách giải phương trình bậc hai một ẩn? Rõ ràng chương trình dạy "kỹ năng toán học thiết thực" mà chúng ta đang làm gần như chẳng giúp ích được gì cho ai hết, và lý do thì cũng rõ ràng không kém: nó chán đến đau đớn, và đằng nào thì cũng sẽ chẳng ai dùng tới mới kiến thức nó bắt người ta học cả. Thế thì tại sao ta vẫn nghĩ toán quan trọng đến thế? Tôi không thấy xã hội có được thêm tí lợi ích gì khi có những cư dân của nó đi lại quanh quẩn, với hàng đống những ký ức mờ nhạt trong đầu về công thức

đại số hay biểu đồ hàm bậc này bậc kia, và một ký ức rõ ràng về việc họ ghét toán đến thế nào. Mặc dù vậy, học toán cũng có thể đem lại một đôi chút lợi ích - đó là cho người ta được chiêm ngưỡng một thứ nghệ thuật tuyệt đẹp, và cho họ cơ hội để có thể được tận hưởng cảm giác sáng tạo, có tư duy linh hoạt, có những suy nghĩ rộng mở - những thứ mà nếu được giảng dạy đúng cách, bất cứ ai cũng có thể có được từ toán.

SIMPLICIO: Nhưng người ta cũng cần phải biết cách quản lý chi tiêu của mình sau này chứ, phải không?

SALVIATI: Tôi chắc chắn hầu hết mọi người sẽ dùng một cái máy tính bỏ túi cho những phép toán thường nhật kiểu như thế. Mà tại sao lại không chứ? Nó rõ ràng là chính xác và đáng tin cậy hơn hẳn tính tay. Nhưng ý của tôi không chỉ ở hệ thống giáo dục hiện tại tệ hại đến kinh khủng, mà còn ở việc những thứ đang thiếu vắng trong chương trình toán bây giờ chúng tuyệt đến thế nào! Toán học nên được dạy như một môn nghệ thuật, và dạy vì lợi ích nghệ thuật của nó. Những thứ "công dụng thiết thực" chán òm kia rồi sẽ tự nhiên xuất hiện như một sản phẩm phụ của quá trình chính. Beethoven chắc chắn có thể rất dễ dàng viết một bài hát quảng cáo dễ nhớ dễ nghe; nhưng động cơ thực sự khiến ông học nhạc là để tạo ra và tận hưởng vẻ đẹp của một tác phẩm nghệ thuật kia.

SIMPLICIO: Nhưng không phải ai cũng có thể trở thành những nghệ sĩ. Thế còn những đứa bẩm sinh đã "dốt" toán thì sao? Anh định nhét chúng vào đâu trong cái viễn cảnh của mình?

SALVIATI: Nếu tất cả mọi người đều được tiếp xúc với toán đúng như với bản chất thực sự của nó, với tất cả những thử thách đầy hấp dẫn và những bất ngờ thú vị mà nó mang theo, tôi tin sẽ có một sự thay đổi rất lớn ở cả thái độ học của học sinh với toán cũng như chính khái niệm của chúng ta về việc "giỏi" hay "dốt toán". Chúng ta đang mất đi quá nhiều các bạn trẻ có tiềm năng trở thành những nhà toán học tương lai - những người thông minh, sáng tạo và chắc chắn sẽ không chấp nhận thứ toán học được trình bày khiến nó trông như một môn học thật vô dụng và vô nghĩa lý kia. Họ chỉ đơn giản là quá thông minh để phí phạm thời gian vào một hoạt động vô vắn, vô nghĩa đến vậy.

SIMPLICIO: Nhưng anh không sợ rằng nếu toán được giảng dạy như một môn nghệ thuật trong trường học, sẽ có những học sinh chẳng học được gì hay sao?

SALVIATI: Thì bây giờ chúng cũng có học được cái gì đâu! Thà không có lớp học toán trong chương trình dạy còn hơn là dạy nó theo kiểu như bây giờ. Ít nhất lúc ấy biết đâu sẽ có vài người có cơ hội tự khám phá được một thứ tuyệt đẹp đến vậy theo cách của riêng mình.

SIMPLICIO: Vậy theo anh ta nên chủ trương loại bỏ hẳn toán ra khỏi chương trình học?

SALVIATI: Phần toán học thực sự đã bị loại bỏ ra khỏi chương trình từ lâu rồi! Vấn đề duy nhất chỉ còn là phải làm gì với cái vỏ trống rỗng, vô nghĩa còn lại mà thôi. Tất nhiên tôi vẫn ủng hộ nhiều hơn phương án thay thế nó bằng các hoạt động hấp dẫn và chủ động tiếp cận với các ý tưởng toán học.

SIMPLICIO: Nhưng liệu sẽ có bao nhiêu giáo viên toán biết đủ rõ về môn học của mình để có thể giảng dạy được theo cách như thế?

SALVIATI: Rất ít. Và đấy mới chỉ là phần nổi của tảng băng chìm mà thôi...

* * *

Môn Toán trong trường học

Chắc chắn sẽ không có cách nào hiệu quả hơn để tiêu diệt sự hứng thú, sự ham thích với một môn học bằng việc khiến nó trở thành một phần bắt buộc của chương trình. Biến nó thành một phần quan trọng của những bài kiểm tra được tiêu chuẩn hóa, và bạn đã vô hình chung tự đảm bảo rằng trường học sẽ hút hết mọi sự hấp dẫn ra khỏi nó. Các ban ngành lãnh đạo, các nhà giáo dục, các tác giả sách giáo khoa, các công ty xuất bản, và đáng buồn thay, cả hầu như mọi giáo viên toán nữa, chẳng ai biết toán học thực sự là gì hết. Phạm vi của vấn đề này lớn đến nỗi tôi không biết nên bắt đầu từ đâu nữa.

Hãy thử bắt đầu với sự thất bại ê chề của công cuộc “cải cách giáo dục” môn Toán. Suốt nhiều năm nay, càng ngày càng có thêm nhiều người nhận ra có gì đó không ổn trong cách môn Toán được giảng dạy. Các nghiên cứu đã được triển khai, nhiều cuộc hội thảo đã được tổ chức, và không biết bao nhiêu là các hội đồng giáo viên, các nhà xuất bản sách, và đủ các thể loại nhà làm giáo dục khác đã được tập hợp để “khắc phục và sửa chữa vấn đề”. Bên cạnh chuyện tiền đổ ra để đầu tư cải cách rốt cục cũng chỉ quay lại làm lợi cho các nhà xuất bản sách giáo khoa (những người trước giờ vẫn luôn rất nhanh nhạy kiếm lợi với mọi biến động chính trị bằng cách cho trình làng những ấn bản “mới” của đủ các thể loại ấn phẩm quái dị độc không ai hiểu nổi của họ); thì tất cả các công cuộc cải cách giáo dục này cũng chưa bao giờ chạm được đến đúng trọng tâm của vấn đề. Chương trình giảng dạy toán không có cần được cải cách, nó cần bị xóa bỏ kìa!

Tất cả những cuộc tranh luận ồm tỏi kiểu này về việc “vấn đề” nào của môn Toán nên được giảng dạy, cái nào nên được dạy trước và cái nào nên được dạy sau; rồi việc tại sao nên dùng biểu tượng này chứ không phải ký hiệu kia, hay

loại máy tính và model máy tính nào nên được sử dụng... ôi vì Chúa! - cứ như là đang cố sắp xếp lại bàn ghế trên con tàu Titanic ấy!! Toán học là âm nhạc của lý trí; làm toán là được tham gia vào những hoạt động hấp dẫn của khám phá, của suy đoán, của linh cảm và của cả cảm hứng, là lúng túng trước một vấn đề - không phải vì nó vô lý, mà vì bạn đã làm cho nó có lý, nhưng vẫn không thể nào hiểu nổi sáng tạo của bạn đang định làm gì; là bỗng nhiên có một ý tưởng đột phá, là rơi vào trạng thái tâm lý vô cùng ức chế của một nghệ sĩ, là được choáng ngợp và ngỡ ngàng trước cái đẹp đến tuyệt đỉnh, là được sống chứ, mẹ kiếp!!! Chừng nào những thứ đó còn bị loại ra khỏi toán thì các ông cứ hội thảo chán chê đủ kiểu các ông muốn đi, cũng sẽ chẳng thay đổi được gì đâu. Cứ phẫu thuật cho chán đi, hỡi các bác sĩ, bệnh nhân của các ông đã chết ngòm từ lâu rồi!!!

Điều đáng buồn nhất trong những trò "cải cách" này là những nỗ lực để khiến môn toán "thú vị hơn" và "thiết thực, gần gũi với học sinh hơn". Không cần các ông phải làm cho toán thú vị - tự thân nó đã thú vị đến hơn cả mức các ông có thể chịu được rồi!!! Và điều tuyệt diệu nhất của nó chính là ở chỗ nó hoàn toàn không liên quan gì đến đời sống thực của chúng ta hết. Chính bởi thế mà nó mới hấp dẫn đến vậy!!!

Những nỗ lực để khiến toán học trở nên gần gũi hơn với cuộc sống lẽ tất yếu đã khiến nó trở nên khiên cưỡng và đầy áp đặt: "Các em thấy đấy, nếu học đại số giỏi, các em sẽ biết được bạn Maria năm nay bao nhiêu tuổi, nếu chúng ta biết được rằng hai năm trước đây, số tuổi của Maria gấp hai lần số tuổi của bạn ấy vào bảy năm trước!"¹ (cứ như kiểu sẽ có ai biết được thứ thông tin quái dị này chứ không phải biết được tuổi thật của cô bé ấy). Đại số không phải là môn học về các phép tính thường ngày, đối tượng của nó là các con số và sự cân bằng của các đẳng thức – chỉ tự cái đó thôi cũng đã đủ là một mục đích đích đáng để theo đuổi rồi:

"Giả sử rằng tôi biết tổng và hiệu của hai số khác nhau. Làm thế nào để từ đó tôi có thể tìm ra chính xác hai số ấy là gì?"

¹ **Cách giải bài toán trên của người dịch:**

Theo giả thiết, số tuổi của Maria 2 năm trước đây bằng hai lần số tuổi của cô bé vào 7 năm trước đây. Gọi x là một số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 7, ta có cách giải như sau:

Gọi số tuổi của Maria bây giờ là x , suy ra:

+ số tuổi của Maria 2 năm trước đây là $x - 2$

+ số tuổi của Maria 7 năm trước đây là $x - 7$

Vậy $x - 2 = 2.(x - 7)$; tức $x - 2 = 2x - 14$; tức $-2 + 14 = 2x - x$; tức $x = 12$

Vậy Maria năm nay 12 tuổi. Hai năm trước bạn 10 tuổi, bảy năm trước thì bạn 5 tuổi, khớp với các dữ kiện trong giả thiết.

Đây là một câu hỏi đơn giản mà xuất sắc, và nó chẳng cần đến một tí công sức nào để làm cho nó hấp dẫn hơn. Những người Babylon cổ xưa đã rất thích thú khi làm việc với những vấn đề như thế, cả các học sinh ngày nay của chúng ta cũng vậy (và tôi hy vọng là cả bạn cũng sẽ có hứng thú suy nghĩ về nó nữa!). Chúng ta không cần nhọc công tốn sức để khiến toán trở nên gần gũi hơn. Toán đã rất gần gũi với cuộc sống rồi, theo đúng cách của một môn nghệ thuật: nó là một trải nghiệm đầy ý nghĩa của con người.

Mà hơn nữa, các vị nghĩ trẻ em thậm chí sẽ muốn học một thứ liên quan trực tiếp đến đời sống hàng ngày của chúng sao? Các vị nghĩ một thứ thiết thực như tính lãi suất tiết kiệm sẽ khiến bọn trẻ phát run lên vì phấn khích chắc? Con người ta ưa thích những thứ bay bổng kia, đấy chính là thứ mà toán học có thể cung cấp - một sự giải thoát khỏi cuộc sống thường nhật, một liều thuốc làm dịu đi những căng thẳng của thế giới quá thiết thực và bình thường mỗi ngày.

Vấn đề tương tự cũng xuất hiện khi các giáo viên và nhà xuất bản sách ngả theo kiểu "cố làm ra vẻ dễ thương". Đây chính là lúc mà người ta cố gắng chống lại cái gọi là "chứng sợ toán" của học sinh (một tập hợp các loại hội chứng mà trên thực tế *gây ra* bởi chính trường học); bằng cách cố làm cho toán có vẻ "thân thiện" hơn. Để giúp học sinh nhớ công thức tính diện tích và chu vi hình tròn, ví dụ thế, các bạn có thể nghĩ ra cả một câu chuyện về "Ông C" lái xe vòng quanh "Bà S" và khen "hai đĩa bánh bà mới làm trông ngon làm sao" (hai đĩa bánh = two pies = 2π ; công thức tính chu vi hình tròn: $C = 2\pi r$); hay "hai đĩa bánh của bác trông rất vuông" (vuông = square, cũng có nghĩa là "bình phương", bánh vuông = square pies ; ám chỉ công thức tính diện tích hình tròn: $S = \pi r^2$) hay mấy thứ vớ vẩn tương tự như thế.²

² Một ví dụ gần gũi hơn với người Việt có thể kể đến bài thơ lượng giác sau:

Sin : đi học (cạnh đối - cạnh huyền)
Cos: không hư (cạnh kề - cạnh huyền)
Tg: đoàn kết (cạnh đối - cạnh kề)
Cotg: kết đoàn (cạnh kề - cạnh đối)

Hoặc một bài thơ khác về cách nhớ công thức: $\tan(a + b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a \tan b)$ là:

*tan một tổng tầng hai cao rộng
trên thượng tầng tan cộng tan tan
dưới hạ tầng số 1 ngang tàng
dám trừ một tích tan tan oai hùng*

Hoặc nguyên tắc để 2 tam giác bằng nhau:

Con gà con , gân cổ gáy , cú cù cu
(cạnh góc cạnh, góc cạnh góc, cạnh cạnh cạnh)

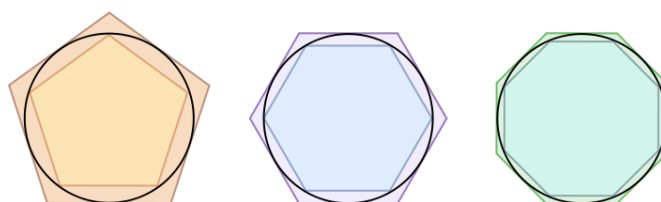
Tại sao lại không kể câu chuyện có thật ấy? Câu chuyện về bao nỗ lực và của con người mỗi khi cần đo đạc đến độ dài của những đường cong; câu chuyện về Eudoxus, về Archimedes và phương pháp “vét cạn”³; về sự siêu việt hơn hẳn của số π ? Thứ gì theo bạn nghĩ là thú vị hơn: ngồi học hơi đo đạc một cách xấp xỉ diện tích một hình gần tròn trên giấy vẽ đồ thị, sử dụng một công thức người ta đưa cho bạn mà không hề giải thích (và bắt bạn phải học thuộc và áp dụng đi áp dụng lại); hay lắng nghe câu chuyện về một trong những vấn đề đẹp nhất, hấp dẫn nhất, lôi cuốn nhất; và một trong những ý tưởng tuyệt vời và đột phá nhất trong lịch sử nhân loại? Chúng ta đang giết chết hứng thú của học sinh về hình tròn đấy, vì Chúa!!!

Chúng ta thậm chí còn không cho học sinh của cơ hội để được nghe những câu chuyện như vậy, chứ chưa nói đến chuyện cho chúng cơ hội để được thực sự làm toán, được tự nghĩ ra ý tưởng của riêng mình, được có ý kiến, thái độ của riêng mình! Có môn học nào khác trong giáo trình lại như thế không: chỉ được dạy một cách đều đặn mà không hề nhắc gì đến lịch sử, đến triết lý, đến những phát triển tư tưởng, những yêu cầu thẩm mỹ, và đến tình trạng hiện tại của nó? Có môn học nào lại đi chối bỏ chính mạch nguồn nuôi dưỡng lớn nhất của nó - những tác phẩm nghệ thuật tuyệt đẹp, tạo nên bởi những bộ óc sáng tạo nhất trong lịch sử loài người - mà chỉ biết học những sự bắt chước thô lậu từ những cuốn sách giáo khoa hạng ba không?

Vấn đề lớn nhất của toán học trong nhà trường, đấy là không có vấn đề thực sự gì để giải quyết cả! Ồ, tôi có biết về những thứ vẫn được gọi là vấn đề trong các lớp toán chứ: các thể loại “bài tập” ngớ ngẩn chứ gì! “*Đây là một dạng vấn đề. Đây là cách giải quyết nó. Ồ có, nó sẽ có trong bài kiểm tra đấy. Hãy làm các bài từ 1 đến 35 để luyện cho thuần thục đi nhé*”. Thật là một cách học toán thật đáng buồn: không khác chi một con khỉ bị huấn luyện!!!

³ Phương pháp “vét cạn” (“*The method of exhaustion*”) là một phương pháp tính gần đúng diện tích của một hình bất kỳ bắt nguồn từ thế kỷ thứ 5 trước Công Nguyên ở Hy Lạp, lần đầu tiên được nghiên cứu kỹ lưỡng bởi nhà toán học cổ Eudoxus. Archimedes (Ác-xi-mét) đã dùng phương pháp này để tính được diện tích của hình tròn, bằng cách đặt một đa giác đều nội tiếp bên trong hình tròn, một đa giác đều khác ngoại tiếp bên ngoài hình tròn, như hình dưới đây - hình tròn sẽ bị kẹp giữa hai đa giác đều đồng dạng.

Archimedes phát hiện ra rằng khi ta tăng dần số cạnh của hai đa giác, sự chênh lệch giữa chu vi của hình tròn và chu vi của hai đa giác sẽ giảm dần, và đến một lúc nào đấy, khoảng chênh lệch này sẽ nhỏ đến mức nó có thể coi là đã hoàn toàn bị “vét cạn” (quá nhỏ đến mức có thể bỏ qua). Cặp đa giác này càng có nhiều cạnh chúng sẽ càng tiến sát lại gần nhau, đồng thời chu vi của chúng cũng sẽ càng gần hơn với chu vi của hình tròn nằm giữa, khi đến một mức nào đấy con số chênh lệch giữa chu vi hai đa giác xấp xỉ bằng 0, hai đa giác sẽ gần như trùng nhau và tạo thành một đa giác gần như trùng khít với hình tròn:

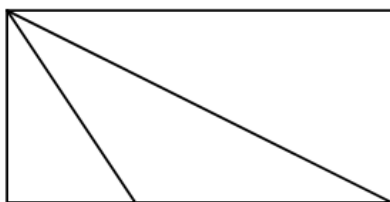


Một vấn đề đúng nghĩa phải là thứ bạn không biết *làm cách nào* để giải quyết nó. Thế mới làm nên một câu đố hay, và một cơ hội tốt. Một vấn đề tốt cũng không bao giờ ngồi đó trong đơn độc, nó giống như một tấm ván dậm nhảy để “bật” bạn đến những câu hỏi thú vị khác. Một tam giác thì có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ hình chữ nhật. Thế một khối hình kim tự tháp nằm trong một cái hộp trong không gian ba chiều thì sao, có giống thế không? Ta có thể giải quyết vấn đề này theo cách tương tự như với hai hình trên mặt phẳng kia không?

Tôi có thể hiểu sự cần thiết của việc phải huấn luyện cho các học sinh nắm vững được một số kỹ thuật nhất định – chính tôi cũng làm vậy. Nhưng không phải chỉ cứ thế là xong! Kỹ thuật trong toán, cũng giống như kỹ thuật trong bất cứ bộ môn nghệ thuật nào, nên được người học tiếp nhận trong chính lúc thực hành. Hãy cho các học sinh của bạn một vấn đề thật tốt, và để cho chúng vật vã xoay sở, ức chế khi không tìm ra được cách giải. Hãy xem chúng có thể nảy ra được những ý tưởng mới nào không. Đợi cho đến khi chúng thực sự điên lên vì cần một ý tưởng, *lúc đó* hãy cho chúng một vài kỹ thuật. Nhưng đừng nhiều quá.

Vậy nên hãy dẹp hết sang một bên những giáo trình giáo án, những máy chiếu, những đồng sách giáo khoa màu mè đáng ghét của bạn, cả những đĩa CD-ROM, và tất cả các thể loại đồ nghề rập xiếc bạn vẫn dùng trong giảng dạy hiện nay; và hãy bắt đầu cùng làm toán với các học sinh của mình đi!!! Các giáo viên mỹ thuật đâu có phí thời gian với sách giáo khoa hay chỉ tập trung rèn luyện kỹ năng cho học sinh. Họ làm những thứ tự nhiên nhất với môn học của họ - họ cho bọn trẻ vẽ tranh. Hãy đi vòng quanh lớp học, từ em này đến em khác, đưa ra những gợi ý và đề nghị được giúp đỡ:

“Em đang nghĩ về vấn đề tam giác trong cái hộp của chúng ta, và em nhận ra một điều này: nếu cái tam giác này nghiêng quá nhiều về một bên, nó sẽ không còn chiếm một nửa của hình chữ nhật nữa! Đây, thầy nhìn mà xem này!!”



“Quan sát tốt lắm! Luận điểm “chặt chém” của chúng ta mặc nhiên thừa nhận rằng đỉnh trên cùng của tam giác khi chiếu xuống sẽ luôn nằm đúng trên cạnh đáy. Giờ chúng ta cần đến một ý tưởng mới rồi.”

“Để em thử chém nó theo một kiểu khác nhé?”

"Tất nhiên. Hãy thử mọi ý tưởng mà em có. Và nói cho thầy biết ngay nếu em có ý tưởng gì mới nhé!"

* * *

Vậy làm cách nào để dạy cho các học sinh làm toán một cách thực sự? Bằng cách chọn những vấn đề tự nhiên, không khiên cưỡng, những vấn đề thực sự gây hứng thú và phù hợp với sở thích, tính cách và kinh nghiệm của các em. Bằng cách cho các em thời gian để tự khám phá và rút ra những suy đoán của riêng mình. Bằng cách giúp để lập luận của các em chặt chẽ hơn, và tạo ra môi trường học tập lành mạnh và sôi nổi trong phê bình toán học. Bằng cách linh động và rộng mở, phóng khoáng trước mọi thay đổi các em có thể hướng tới do trí tò mò dẫn dắt. Nói ngắn gọn, là có một mối quan hệ trí tuệ chân tình với học sinh và môn học của mình.

Tất nhiên thứ tôi đang vẽ ra ở đây là bất khả thi vì nhiều lý do. Kể cả có bỏ qua việc chương trình học phổ thông đồng bộ và những bài kiểm tra tiêu chuẩn hóa đã gần như không còn dành chỗ nào cho sự độc lập của giáo viên nữa; thì tôi cũng không tin rằng nhiều giáo viên thậm chí sẽ *muốn* có một mối quan hệ quá gần gũi như vậy với học sinh. Quá gần gũi tức là dễ tổn thương hơn, và nhiều trách nhiệm hơn - nói ngắn gọn lại, là quá nhiều công việc!

Sẽ dễ hơn rất nhiều nếu chỉ cần làm một vật trung gian thụ động để truyền đạt "kiến thức" từ sách vở đến học sinh, và làm theo ba bước chỉ dẫn nhanh gọn mì ăn liền: "*giảng, kiểm tra, lặp lại!*"; hơn là đào sâu suy nghĩ về vấn đề, về ý nghĩa thực sự của thứ mình đang cố dạy cho học trò, và đâu là cách tốt nhất để truyền đạt trực tiếp và chân thành nhất ý nghĩa đó đến học sinh. Chúng ta đang được khuyến khích nên bỏ qua cái công việc khó nhọc là tự đưa ra quyết định dựa vào suy nghĩ độc lập và lương tâm của mỗi cá nhân, thay vào đó là phải luôn "bám sát vào chương trình". Đó đơn giản là con đường ít phải kháng cự nhất:

NHÀ XUẤT BẢN SÁCH → GIÁO VIÊN :

- A. Công ty dược → Bác sĩ
- B. Hãng thu âm → DJ
- C. Các tập đoàn lớn → Các nghị sĩ
- D. Tất cả các phương án trên

Vấn đề là ở chỗ, cũng như vẽ tranh hay làm thơ, toán là *một công việc sáng tạo khó nhọc*. Điều đó làm cho dạy toán trở thành một công việc cực kỳ khó. Làm toán là cả một quá trình nghiền ngẫm, là phải chậm. Phải tốn nhiều thời gian

mới có thể làm ra một tác phẩm nghệ thuật, và phải cần đến một giáo viên thật giỏi mới có thể nhận ra một tác phẩm nghệ thuật như thế. Tất nhiên là ban bố một đồng quy tắc, quy ước thì dễ hơn nhiều phải hướng dẫn và khơi gợi cảm hứng ở những nghệ sĩ trẻ; cũng như viết một quyển hướng dẫn sử dụng đầu VCR thì dễ hơn nhiều viết một cuốn sách có quan điểm, có lập trường riêng vậy.⁴

Toán học là một môn *nghệ thuật*, và nghệ thuật nên được dạy bởi những nghệ sĩ đang thực sự làm việc - hoặc nếu không, ít nhất cũng phải bởi những người biết trân trọng những tác phẩm nghệ thuật, và có đủ khả năng để nhận ra khi họ được nhìn thấy một tác phẩm như thế. Bạn không bắt buộc phải học nhạc từ một nhạc sĩ chuyên nghiệp, nhưng liệu bạn có muốn mình hay con cái mình học nhạc từ một người thậm chí chưa bao giờ chơi một nhạc cụ nào, hay chưa bao giờ thực sự nghe một bản nhạc trong suốt cả đời anh ta không? Liệu bạn có chấp nhận một giáo viên mỹ thuật cả đời chưa cầm lấy cây bút chì lần nào, hay chưa bao giờ đặt chân vào một viện bảo tàng hay một triển lãm tranh nào không? Thế tại sao chúng ta lại luôn sẵn lòng chấp nhận các giáo viên Toán chưa bao giờ có một công trình toán học của riêng mình, những người hoàn toàn không biết gì về triết lý và lịch sử của môn học mình dạy, không biết gì về những thành tựu nghiên cứu gần đây, trên thực tế là không biết gì ngoài những thứ nằm trong chương trình mà họ sẽ phải dạy cho những học trò khốn khổ của họ? Kiểu giáo viên gì thế chứ? Sao một người lại có thể dạy một thứ mà trên thực tế anh ta chẳng bao giờ làm? Tôi không biết khiêu vũ, và như một lẽ tất yếu, tôi sẽ không bao giờ giả thiết rằng mình có thể dạy một lớp khiêu vũ (tôi có thể thử, nhưng kết quả chắc chắn sẽ không đẹp để chút nào). Điểm khác biệt lớn nhất ở đây là tôi *biết* mình không thể khiêu vũ. Và cũng sẽ không có ai khen tôi là giỏi khiêu vũ chỉ vì tôi biết một đồng tử và thuật ngữ của ngành khiêu vũ.

Không phải ý tôi là tất cả giáo viên toán đều cần phải là các nhà toán học chuyên nghiệp – hoàn toàn không phải thế. Nhưng ít nhất thì họ cũng phải hiểu được toán học là gì, phải giỏi toán, và phải thích thú khi làm toán chứ?

⁴ Người dịch trong lúc dịch có google cụm từ "nhà toán học", và tình cờ tìm đến trang wikipedia của giáo sư - nhà toán học Tạ Quang Bửu. Xin được trích nguyên văn một đoạn nhỏ người dịch thấy khá thú vị:

"Ông sinh ngày 23 tháng 7 năm 1910, trong một gia đình nhà giáo tại thôn Hoàn Sơn, xã Nam Hoàn, huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An. Năm 1922, ông thi vào trường Quốc học Huế và đỗ thứ 11. Sau đó ông ra Hà Nội học trường Bưởi. Năm 1929, sau khi đỗ đầu tú tài Việt và đỗ đầu tú tài Tây ban Toán, ông nhận được học bổng của Hội Như Tây Du học của Nguyễn Hữu Bài và sang Pháp học. Tại Pháp, năm 1929, ông đăng ký học lớp toán đặc biệt của trường Louis le Grand về toán học và vật lý lý thuyết, đăng ký học cử nhân toán ở Viện Henri Poincaré. Ông đã đến nghe giảng ở cả giảng đường Hermite (dành cho cử nhân) lẫn tham dự các buổi xê-mi-na ở giảng đường Darboux (dành cho những người học trên đại học). Tại đây, ông đã tiếp xúc với nhiều nhà toán học trẻ của nước Pháp, bí mật tham gia nhóm Nicolas Bourbaki. Đó là cơ sở để năm 1961, ông cho ra đời tác phẩm Về cấu trúc của Bourbaki. Ông thi đỗ vào trường Centrale Paris năm 1930, theo học chương trình cử nhân khoa học ở Đại học Sorbonne, học toán ở các Đại học Paris, Đại học Bordeaux (Pháp) từ 1930 đến 1934 và được trường Bordeaux trao đổi sang Đại học Oxford (Anh) trong một thời gian ngắn. Tại đây ông học thêm vật lý lượng tử.

Trở về nước năm 1934, ông không ra làm quan mà đi dạy toán và tiếng Anh tại trường tư, ban đầu là trường Phú Xuân, sau là trường dòng Providence (Thiên Hựu) ở Huế. Ngoài tiếng Anh và toán, lý, hóa ông còn dạy các môn khoa học tự nhiên khác theo yêu cầu của nhà trường. Các môn này (động vật, thực vật, khoáng vật) ông tự nghiên cứu trong sách chuyên ngành cao hơn nhiều so với chương trình trung học rồi lên lớp với những mẫu hiện vật tự sưu tầm."

Nếu dạy học chỉ còn bị rút ngắn lại thành việc truyền dẫn thông tin, nếu trong lớp học không còn những phút giây thầy trò cùng chia sẻ cảm giác ngỡ ngàng và phấn khích trước một tri thức mới, nếu chính các giáo viên chỉ đơn thuần là người tiếp nhận thụ động thông tin chứ không phải là người sáng tạo nên các ý tưởng mới, thì còn hy vọng gì nữa cho các học sinh? Nếu phép chia phân số với các giáo viên chỉ là một mớ các quy tắc tùy tiện ai đó nghĩ ra, mà không phải là sản phẩm của cả một quá trình sáng tạo, là kết quả của những lựa chọn và đam mê đầy tính thẩm mỹ, thì tất nhiên các học sinh tội nghiệp cũng sẽ nghĩ giống vậy rồi!

Dạy học không phải là về lượng thông tin sẽ được truyền đạt. Dạy học là có một mối quan hệ trí tuệ chân tình với học sinh của mình. Nó không cần phương pháp, không cần công cụ, và không cần được huấn luyện đào tạo chi hết. Chỉ cần khả năng chân chính, không giả tạo. Nếu anh không thể làm thế, thì anh không có quyền cưỡng ép những học sinh vô tội phải chịu đựng anh.

Cụ thể hơn, *anh không thể dạy được cách dạy*. Các "trường sư phạm" chỉ là một trò giả dối hoàn toàn. Ồ, phải, anh có thể được dạy về phát triển tâm lý ở trẻ em và kiểu thế, và anh có thể được đào tạo để dùng bảng đen "hiệu quả", và được đào tạo để biết soạn một "kế hoạch giảng dạy" khoa học (thứ, nhân tiện nói luôn, đảm bảo anh sẽ dạy những thứ đã được *lên kế hoạch*, và do đó, anh đã thất bại ngay từ đầu); anh có thể được học mọi thứ đó, nhưng anh sẽ không bao giờ là một giáo viên chân chính nếu anh không sẵn sàng làm một con người chân chính, không một chút giả tạo. Dạy học là rộng rãi, phóng khoáng, sẵn sàng tiếp nhận cái mới; là chân thành với học trò, là có khả năng chia sẻ niềm phấn khích của mình với học trò, là có một tình yêu chân thành với việc học. Nếu không có những thứ đó, tất cả mọi bằng cấp sư phạm trên thế giới này cũng không giúp được anh; và nếu có nó, thì tất cả mớ bằng cấp kia đều là không cần thiết.

Mọi thứ hoàn toàn rất đơn giản thôi. Học sinh là người chứ đâu phải sinh vật ngoài hành tinh. Chúng sẽ phản ứng với cái đẹp, với quy luật, và chúng cũng có một trí tò mò rất tự nhiên như bất kỳ ai khác. Hãy trò chuyện với chúng đi! Và quan trọng hơn nữa, hãy lắng nghe chúng đi!!!

SIMPLICIO: Được rồi, tôi hiểu rằng có khía cạnh nghệ thuật ở toán, và chúng ta đang làm không tốt gì cho lắm trong việc cho các học sinh được tiếp xúc với nó. Nhưng không phải anh đang đòi hỏi ở hệ thống giáo dục một thứ quá tách biệt và xa rời thực tế đấy chứ? Chúng ta đâu có định đào tạo các nhà hiền triết ở đây, chúng ta chỉ cần các học sinh có khả năng toán học cơ bản tối thiểu, để họ có thể vận hành tốt trong xã hội sau này thôi mà?

SALVIATI: Nhưng chúng ta đang đâu có làm thế! Toán trong trường học giảng dạy rất nhiều thứ không liên quan gì tới xã hội cả – đại số hay lượng giác chẳng hạn! Những chuyên đề này hoàn toàn chẳng có liên quan gì đến đời sống thường ngày hết! Tôi chỉ đang đơn giản gợi ý rằng nếu chẳng nào chúng ta cũng sẽ giảng dạy chúng như là phần bắt buộc trong giáo dục cơ bản cho mỗi học sinh, thì ít nhất hãy dạy chúng theo cách tự nhiên và hợp lý nhất mà thôi! Hơn nữa, như tôi đã nói ở trên lúc nãy, chỉ vì một môn học tình cờ có một vài công dụng vớ vẩn thiết thực nào đấy, không có nghĩa là chúng ta nên biến công dụng đó thành mục đích trọng tâm để giảng dạy và học tập. Đúng là anh cần phải biết đọc thì mới có thể điền vào các mẫu đơn, ký các hợp đồng, nhưng đó không phải lý do ta dạy bọn trẻ đọc sách. Ta dạy chúng biết đọc vì một mục đích cao hơn, để chúng có thể tiếp cận với những ý tưởng đẹp đẽ và đầy ý nghĩa của nhân loại. Không chỉ sẽ thật tàn nhẫn nếu dạy đọc theo kiểu như thế – bắt các học sinh lớp ba phải điền đơn đặt hàng hay biên lai thuế – mà học như thế cũng không có tác dụng! Chúng ta học một thứ gì là vì nó hấp dẫn chúng ta vào lúc này, không phải vì nó có thể có tác dụng thiết thực gì về sau. Thế nhưng đây lại chính xác là điều mà chúng ta đang đòi hỏi ở các học sinh của mình khi bắt chúng học toán.

SIMPLICIO: Nhưng chúng ta cũng cần các học sinh lớp ba biết làm toán chứ?

SALVIATI: Tại sao? Anh muốn huấn luyện để chúng biết tính $427 \text{ cộng } 389$ ⁵ bằng bao nhiêu ư? Nó đơn giản không phải là một câu hỏi mà nhiều đứa trẻ tám tuổi sẽ thắc mắc. Nếu nói về cái đấy, hầu hết mọi người lớn bây giờ còn không hiểu hết quy tắc đếm số của hệ thập phân cơ, và anh mong chờ rằng bọn trẻ sẽ hiểu rõ hơn được tí nào ư? Hay là anh không cần quan tâm xem chúng có thực sự hiểu hay không? Ở tuổi đó chỉ đơn giản là quá sớm cho kiểu đào tạo như vậy. Tất nhiên là vẫn có thể làm được, nhưng rất ráo rai, tôi thấy làm thế có hại nhiều hơn là có lợi. Tốt nhất là nên đợi đến khi bản tính tò mò tự nhiên nhất của các em về những con số tự thôi thúc chúng học toán kia.

SIMPLICIO: Vậy chúng ta nên làm gì với bọn trẻ trong những giờ toán chứ?

SALVIATI: Chơi trò chơi! Dạy chúng cờ vua và cờ vây, chơi cờ Hex, chơi Backgammon, cái gì cũng được. Tự nghĩ ra một trò chơi. Cho chúng chơi những câu đố. Hãy cho chúng tiếp xúc với những tình huống đòi hỏi phải có tư duy logic. Đừng vội lo đến biểu tượng, ký hiệu hay kỹ thuật; đầu tiên hãy giúp các em có tâm thế chủ động và sáng tạo của một nhà toán học đã.

SIMPLICIO: Có vẻ như đây là một cách làm khá nguy hiểm. Nhỡ chúng ta tập trung cho Toán ít đến mức các học sinh không biết cộng hay trừ nữa thì sao?

⁵ *Bảng 816, nếu ai có tình cờ quan tâm :)*

SALVIATI: Tôi nghĩ nguy hiểm hơn cả là việc tạo ra trường học mà thiếu vắng bất kể hoạt động sáng tạo nào, nơi mà chức năng của học sinh chỉ là ghi nhớ ngày tháng, ghi nhớ công thức, ghi nhớ từ vựng, và rồi nhai lại mớ kiến thức đó trong những bài kiểm tra tiêu chuẩn hóa – *“Hãy chuẩn bị lực lượng lao động của ngày mai ngay từ hôm nay!”*

SIMPLICIO: Nhưng chắc chắn có những phần kiến thức toán học tối thiểu mà một người có giáo dục phải biết chứ?

SALVIATI: Phải, và phần quan trọng nhất về toán học là nó là một thể loại nghệ thuật tạo ra bởi con người để thỏa mãn ham thích của chính mình! Được rồi, đúng là sẽ rất tốt nếu mọi người đều có một chút ít hiểu biết cơ bản về về hình khối hay số học, những thứ đại loại thế. Nhưng hiểu biết thực sự sẽ không đến từ việc học thuộc lòng lặp đi lặp lại, làm bài tập lặp đi lặp lại, không phải bằng nghe giảng hay bài luyện. Anh học một thứ bằng cách tự mình làm nó, và anh sẽ nhớ thứ gì gây hứng thú cho anh. Chúng ta đã có cả triệu người trưởng thành quanh quẩn khắp nơi với cụm từ *“trừ b cộng trừ căn delta trên 2a”* trong đầu, trong khi hoàn toàn không hiểu nó có nghĩa là gì rồi. Và lý do là vì họ chưa bao giờ có cơ hội được tự mình khám phá và nghĩ ra chúng. Họ chưa bao giờ được có một thử thách thực sự nào để tự suy nghĩ, để ức chế, và để khiến họ có ham muốn cần đến phương pháp và kỹ thuật giải toán. Họ chưa bao giờ được biết đến câu chuyện về mối quan hệ giữa nhân loại và các con số – không có những tấm bia đá của người Babylon, không có những mảnh giấy Papyrus từ thời Ai Cập cổ đại, không có *Liber Abaci* của nhà toán học Fibonacci, không *Ars Magna* của Girolamo Cardano. Và quan trọng hơn cả, không một cơ hội nào để họ có thể thậm chí tò mò một chút về vấn đề: những câu hỏi luôn được trả lời từ trước khi họ kịp nghĩ đến nó nữa.

SIMPLICIO: Nhưng chúng ta đâu có thời gian để cho mỗi học sinh tự mình khám phá toán học lại từ đầu? Phải mất đến hàng thế kỷ nhân loại mới phát triển được định lý Py-ta-go; làm thế nào anh mong chờ một đứa trẻ bình bình tầm trung có thể tự mình nghĩ ra nó chứ?

SALVIATI: Tôi đâu có mong chờ điều đó. Để tôi nói rõ hơn vậy. Tôi đang than phiền về việc có một sự thiếu vắng hoàn toàn nét nghệ thuật, sự phát minh, cũng như cả lịch sử, cả triết lý, bối cảnh và cả quan điểm cá nhân trong chương trình toán hiện tại. Thế không có nghĩa rằng các ký hiệu, biểu tượng, các kỹ thuật hay việc phát triển nền tảng kiến thức cho học sinh là những điều không cần thiết. Tất nhiên là chúng có cần thiết chứ! Nhưng chúng ta cần phải có cả hai. Nếu tôi phản đối về việc con lắc đang quá nghiêng về một bên, điều đó không có nghĩa là tôi muốn nó nghiêng tuốt hẳn sang phía còn lại. Nhưng sự thật là, người ta sẽ học tốt hơn nếu kiến thức họ cần học là sản phẩm từ một quá trình tư duy và nhận thức. Sự trân trọng thực sự với thơ ca không phải đến từ việc nhớ một đống các bài thơ, mà là từ việc tự viết một bài thơ của riêng mình kia.

SIMPLICIO: Đúng vậy, nhưng muốn viết được thơ thì trước hết anh phải học thuộc bảng chữ cái đã. Quá trình thì cũng phải bắt đầu từ một điểm nào đó chứ. Anh cần phải biết đi trước khi có thể chạy.

SALVIATI: Không, muốn chạy được, anh cần phải có một thứ gì để anh *chạy tới* chứ. Trẻ em có thể làm thơ và viết truyện *trong khi* chúng đang học đọc và viết. Những dòng viết của một đứa bé 6 tuổi là một tác phẩm tuyệt vời, và những lỗi chính tả hay dấu má không làm giảm đi của nó chút giá trị nào hết. Kể cả những đứa trẻ còn rất nhỏ cũng có thể sáng tác ra những bài hát, và chúng chẳng cần biết tông nhạc là cái gì, hay khóa nhạc nào chúng đang dùng nữa.

SIMPLICIO: Nhưng toán học đâu có giống thế, phải không? Chẳng phải toán học tự nó cũng đã như là một ngôn ngữ khác hẳn, với đủ các loại biểu tượng, ký hiệu mà muốn làm được thì trước hết phải học hết được chúng đã hay sao?

SALVIATI: Hoàn toàn không phải thế. Toán học không phải là một ngôn ngữ, nó là một cuộc phiêu lưu kỳ thú. Liệu các nhạc sỹ có “nói một ngôn ngữ khác hẳn” không, chỉ vì họ ký hiệu cho các giai điệu họ nghĩ ra bằng những nốt đen trắng nhỏ nhỏ kia? Nếu có đúng là thế, thì thứ ngôn ngữ đó có vẻ cũng chẳng gây chút khó khăn gì cho một đứa trẻ và bài hát tự nó nghĩ ra cả. Đúng, đã có một lượng rất lớn các ký hiệu và biểu tượng toán học được phát triển trong suốt hàng bao thế kỷ qua, nhưng chúng chưa bao giờ đóng một vai trò cốt yếu, quan trọng gì trong toán cả. Hầu hết các vấn đề toán học thực sự được giải quyết với một người bạn bên bàn cà phê, ghi nguệch ngoạc trên một tấm khăn ăn nào đấy. Toán học đã và vẫn luôn là về các ý tưởng, và một ý tưởng giá trị thì quan trọng hơn nhiều một biểu tượng vô nghĩa bạn chọn để ký hiệu cho nó. Như Gauss đã từng phát biểu: “*Thứ chúng ta cần là ý tưởng, chứ không phải biểu tượng!*”⁶

SIMPLICIO: Nhưng không phải mục đích của toán học là để dạy cho học sinh biết cách tư duy mạch lạc, logic, là giúp chúng có một “tư duy toán học” để có thể giải quyết các vấn đề thực của cuộc sống hay sao? Không phải tất cả những định nghĩa và công thức này sẽ giúp mài sắc tư duy của các học sinh sao?

SALVIATI: Không, không hề. Nếu có, thì hệ thống giáo dục hiện giờ đang có tác động hoàn toàn ngược lại: làm cùn nhụt đi tư duy của các em thì đúng hơn. Khả năng suy nghĩ sắc bén ở mọi phương diện đều đến từ việc trực tiếp giải quyết vấn đề, chứ không phải từ việc được bảo sẵn cho cách giải ngay từ đầu.

⁶ “What we need are notions, not notations.”

SIMPLICIO: Thôi được rồi, anh nói cũng có lý. Nhưng còn những học sinh muốn theo đuổi con đường làm khoa học, hay làm kỹ sư thì sao? Những đối tượng đó vẫn cần đến sự đào tạo như đang được cung cấp hiện giờ chứ? Không phải đó cũng là lý do chúng ta dạy toán trong trường học sao (để giúp đỡ các em dễ dàng học các môn khoa học) ?

SALVIATI: Có bao nhiêu học sinh đang học văn hiện giờ sau này sẽ trở thành nhà văn, nhà phê bình nghệ thuật nào? Đó không phải là lý do chúng ta dạy văn, cũng không phải là lý do bọn trẻ học nó. Chúng ta dạy là để khai sáng cho tất cả, chứ không phải chỉ để đào tạo cho một nhóm nhỏ những người sẽ làm nghề đó chuyên nghiệp trong tương lai. Mà thực sự, phẩm chất đáng giá nhất của một nhà khoa học hay một kỹ sư cũng không phải là những cái đó, mà là ở khả năng tư duy độc lập và tính sáng tạo kia. Không ai, bất kể là nghề gì, hạng gì sau này, lại muốn bị *huấn luyện* cả.

* * *

Chương trình học Toán

Thứ đầu đốn nhất về cách toán dạy toán hiện nay ở trường học không phải ở thứ đang không có mặt - sự thật là chẳng có chút toán học thực sự nào được làm trong các lớp học cả - mà ở thứ đang thế chỗ của nó: một đồng hồ lớn những thông tin sai sự thật có sức hủy diệt ghê gớm, vẫn được gọi là "chương trình học Toán". Đã đến lúc ta cần phải nhìn nhận chính xác thứ các học sinh của chúng ta đang phải đối mặt - thứ các em được tiếp xúc dưới danh nghĩa toán học, và làm thế nào mà trong quá trình đó, các em lại có thể bị hủy hoại nhiều đến thế.

Điểm nổi bật nhất của thứ vẫn-được-gọi-là-Toán này chính là ở sự rập khuôn cứng nhắc của nó. Điều này đặc biệt đúng khi các em học lên cao dần. Từ trường học tới trường học, từ thành phố tới thành phố, từ bang này tới bang kia, những thứ giống hệt nhau đang được dạy và làm bằng những cách giống hệt nhau, theo thứ tự y hệt nhau. Không những không thấy khó chịu và căm phẫn vì chế độ độc tài chuyên chế này, nhiều người còn mặc nhiên chấp nhận thứ "mô hình chuẩn" trong chương trình dạy toán này như là một khái niệm đồng nghĩa với toán học.

Điều này có quan hệ mật thiết tới thứ tôi vẫn gọi là "hiệu ứng cái thang giả hiệu" - quan niệm cho rằng toán học có thể được sắp xếp thành một chuỗi trình tự các "chủ điểm", mỗi cái lại theo cách nào đấy được coi là "nâng cao" hơn cái trước nó, như những bậc thang nối tiếp nhau. Hiệu ứng này sẽ khiến cho việc học Toán ở trường trở nên giống như một cuộc chạy đua giữa các học sinh - một vài em sẽ được coi là "vượt lên trước" so với các bạn mình, và các bậc phụ huynh sẽ luôn lo sợ là con mình sẽ bị "tụt lại phía sau". Và chính xác thì cuộc chạy đua này sẽ dẫn về đâu? Thứ gì

đang đợi các em học sinh ở vạch đích? Điều đáng buồn là nó chẳng dẫn về đâu cả. Đến cuối cùng, bạn đã bị ngăn cản đến với giáo dục toán học thực sự, mà chính bạn cũng không nhận ra được điều đó nữa.

Toán học thực sự không phải là một thứ đồ hộp bán sẵn - hoàn toàn không có thứ gì gọi là ý tưởng Đại số cấp II ⁷. Những vấn đề sẽ đưa bạn đến nơi mà chúng muốn. Nghệ thuật không phải là một cuộc đua. “Hiệu ứng cái thang” là một ấn tượng sai lầm của chúng ta về môn học, và khi bước theo “chương trình chuẩn”, mỗi giáo viên chỉ càng làm củng cố thêm niềm tin vào ấn tượng sai lầm này, và tự ngăn cản chính mình nhìn nhận Toán như một thực thể, một khối kết cấu thống nhất và đơn nhất. Và như một kết quả, chúng ta có một chương trình học Toán hoàn toàn không có quan điểm lịch sử và thiếu một chủ đề thống nhất mạch lạc; một tổ hợp gầy vụn, rời rạc của đủ các loại chủ điểm và kỹ thuật, chúng chỉ có một điểm chung duy nhất là đều được đảm bảo đủ đơn giản để có thể quy được về theo các quy tắc bước-nối-bước mà thôi.

Thay vì tìm hiểu và khám phá, chúng ta có quy tắc và quy luật. Chúng ta chưa bao giờ được nghe một học sinh nói: “Em muốn thử xem nếu ta thử lũy thừa một số với số mũ âm thì có được không, và em đã phát hiện ra có một quy tắc rất đẹp là số làm theo cách này luôn nghịch đảo với số tạo ra theo cách lũy thừa thông thường!” ⁸. Thay vào đó, chúng ta có các giáo viên và các thể loại sách giáo khoa giới thiệu “định nghĩa lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm” ⁹

⁷ **Nguyên bản: “there is no such thing as an Algebra II idea”.** Trong chương trình dạy Toán ở các nước phương Tây, học sinh cấp dưới sẽ được học “Algebra I”, sau đó khi lên cấp cao hơn, các em sẽ dần được học “Algebra II”, cao hơn nữa là “Algebra III”... đúng như một hệ thống các bậc thang, theo đó các kiến thức trong chuyên đề cấp dưới được sẽ được giảng dạy một cách “nâng cao” hơn ở cấp trên.

⁸ Ví dụ, $2^2 = 4$; nhưng nếu thay vì lũy thừa là số 2 (dương); ta cho lũy thừa là số -2 (âm); ta có $2^{-2} = \frac{1}{4}$; từ đó mới ra được quy tắc khái quát: $x^{-m} = 1/x^m$.

Cũng xin giải thích thêm một chút: Tại sao $2^{-2} = \frac{1}{4}$? Ta vẫn biết $(x^3) \cdot (x^2) = x^5$; điều này rất hợp logic vì $x^3 = (x)(x)(x)$; $x^2 = (x)(x)$ nên $(x^3) \cdot (x^2) = (x)(x)(x)(x)(x)$; tức x^5

Tương tự, khi chia, ta có $\frac{x^5}{x^3} = \frac{(x)(x)(x)(x)(x)}{(x)(x)(x)} = (x)(x) = x^2$; quy tắc ở đây bây giờ trở thành “hãy trừ hai số mũ cho nhau khi chia lũy thừa”, tất nhiên là các cơ số phải bằng nhau.

Nhưng thử xem, nếu vấn đề bây giờ lại là $\frac{x^3}{x^5}$ thì sao!? Nó sẽ trở thành $\frac{(x)(x)(x)}{(x)(x)(x)(x)(x)}$; tức x^{-2} theo đúng quy tắc ta vừa rút ra lúc này. Ta biết rằng

$\frac{(x)(x)(x)}{(x)(x)(x)(x)(x)} = \frac{1}{(x)(x)}$; hay chính là $\frac{1}{x^2}$. Vậy kết luận là gì? x^{-2} và $\frac{1}{x^2}$ rốt cục cũng đều chỉ là một mà thôi!

(Lược dịch phần trả lời của thành viên [Grampedo](http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20070815094429AAA5Ex1) trên trang hỏi-đáp của Yahoo: <http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20070815094429AAA5Ex1>)

⁹ Xin trích nguyên văn phần này trong sách giáo khoa Toán lớp 12, bản Nâng cao, bài mở đầu chương II - Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit (trang 69):

Lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm:

ĐỊNH NGHĨA 1:

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi:

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

như một thứ *chân lý vĩnh cửu* mà không hề nhắc gì đến những yếu tố thẩm mỹ đằng sau sự lựa chọn đó, hay thậm chí nhắc đến rằng nó chỉ là một sự lựa chọn.

Không có những vấn đề thực sự có ý nghĩa, những vấn đề sẽ có thể dẫn đường đến muôn vạn những ý tưởng đa dạng khác nhau, tới những lãnh địa chưa được khai phá của thảo luận và tranh luận, và tới cảm giác về một tư tưởng chủ đề thống nhất, hòa hợp trong toán học; thay vào đó chúng ta có hàng đống những bài tập tẻ ngắt và thừa thãi, chỉ chú tâm vào rèn luyện kỹ năng đang được học, và do vậy mất hẳn tính liên kết với những dạng thức khác của Toán như một thực thể thống nhất; và cả học sinh lẫn giáo viên đều chẳng biết chút gì về việc những “vấn đề” họ đang “giải quyết” từ chỗ quái nào mà ra hết.

Không có một nội dung với những vấn đề thật tự nhiên mà ở đó, học sinh có thể tự mình quyết định từ ngữ mình viết ra sẽ có ý nghĩa gì, biểu tượng mình sử dụng sẽ ký hiệu cho cái gì; thay vào đó các em phải chịu đựng hàng chuỗi những trình tự bất tận các “định nghĩa” máy móc và thiếu hấp dẫn. Chương trình học bị ám ảnh với những thuật ngữ và ký hiệu, những thứ gần như không có mục đích nào khác để tồn tại ngoài việc cho giáo viên một thứ để có thể kiểm tra các học sinh. Chẳng có nhà toán học nào trên thế giới lại phải bận tâm phân biệt những thứ vô ích như thế này: $2\frac{1}{2}$ là một “*hỗn số*”; trong khi $5/2$ là một “*phân số có tử lớn hơn mẫu*”. Vì Chúa, chúng nó *bằng nhau* cả mà! Chúng cùng là một con số, có cùng những tính chất và đặc tính hết như nhau. Ai lại phải bận tâm đến việc dùng những từ như thế ngoài chương trình lớp bốn chứ?

Tất nhiên sẽ dễ hơn rất nhiều khi ta chỉ cần kiểm tra kiến thức của một người về các định nghĩa, thay vì khơi gợi ở họ cảm hứng để họ có thể tạo ra những thứ tuyệt đẹp và tự tìm ra được ý nghĩa cũng như cách hiểu của riêng mình. Kể cả nếu chúng ta có đồng ý rằng một “*hệ từ vựng*” chung cho toán học là cần thiết, ở đây cũng không được như vậy. Thật đáng buồn biết bao khi các học sinh lớp năm được dạy phải nói “*quadrilateral*”¹⁰ thay vì “*hình bốn cạnh*”; nhưng lại chưa bao giờ có một lý do để được dùng những từ như “*conjecture*” (suy đoán) hay “*counterexample*” (phản ví dụ). Các học sinh cấp III phải học để biết cách dùng phép toán “*sec*”, “*sec x*”, mặc dầu nó cũng chỉ là một cách viết tắt cho

¹⁰ Ở Việt Nam, may mắn thay không có nhiều rắc rối đến vậy. Học sinh ở các nước nói tiếng Anh được dạy phải gọi một hình có 4 cạnh là “*quadrilateral*” - một từ gốc Latin rất khó hiểu. Ở đất nước chúng ta, một hình có 4 cạnh, 4 góc, ta gọi nó là “*hình tứ giác*”, đơn giản vô cùng.

phép cos nghịch đảo là $\frac{1}{\cos x}$ ¹¹ (một định nghĩa có sự thông minh ngang ngửa với việc quyết định dùng "&" thay cho "và"). Việc phương pháp viết tắt này – một sản phẩm của những bảng biểu hàng hải từ tận thế kỷ 15 – vẫn còn ở với chúng ta (trong khi những từ khác cùng thời như "versine" đều đã tuyệt chủng từ lâu) chỉ đơn giản là do một sự tình cờ của lịch sử, và ở trong thời đại mà tính toán hàng hải nhanh chóng và chính xác đã chẳng còn là vấn đề gì nữa, chúng hoàn toàn không còn giá trị nào hết đáng để giữ lại. Ấy vậy nhưng chúng ta vẫn nhồi đủ các loại thuật ngữ vô nghĩa đó vào các giáo trình toán, chẳng để làm gì cả.

Trong thực tế, chương trình học thậm chí còn không giống một trình tự các chủ điểm, hay ý tưởng; nó giống một trình tự của các biểu tượng hơn. Toán học có vẻ như bao gồm một danh sách mật về những biểu tượng bí ẩn và những quy tắc để có thể thao túng chúng. Các em nhỏ sẽ được giao cho "+" và "÷". Chỉ khi đã lớn hơn các em mới được tin tưởng giao cho " $\sqrt{\quad}$ ", và rồi "x" và "y"; rồi mới đến phép giả kim kỳ bí của các loại ngoặc tròn, ngoặc vuông, ngoặc nhọn. Và cuối cùng, các em được truyền thụ cho phép dùng "sin", "log", " $f(x)$ "; và nếu các em tỏ rõ được mình xứng đáng, "d" và "f". Tất cả, hoàn toàn không có lấy đâu chỉ một trải nghiệm toán học thực sự có ý nghĩa nào.

Thứ chương trình này đã được đóng khung chắc chắn tới độ các giáo viên và nhà viết sách có thể yên tâm dự đoán, thậm chí trước hàng chục năm, việc các học sinh vẫn sẽ làm trong tương lai, chính xác đến từng trang, từng dạng bài tập một. Hoàn toàn không phải chuyện gì hiếm gặp khi một học sinh học năm hai giáo trình Đại số được yêu cầu phải tính $[f(x+h) - f(x)]/h$ với một loạt các hàm f khác nhau, để đến khi học đến vi phân sau này, các em sẽ thấy là mình "đã được gặp nó" từ trước rồi. Hoàn toàn không có lý do nào được đưa ra (hay được mong chờ) cho việc tại sao một hỗn hợp các thể loại phép toán có vẻ rất ngẫu nhiên như thế lại có thể thú vị và hấp dẫn; mặc dù tôi khá chắc là sẽ có nhiều giáo viên cố gắng giải thích những ý nghĩa có thể có của một phép toán như vậy, và nghĩ rằng mình đang làm ơn cho các học trò, trong khi sự thực là họ chỉ đang cho các em thêm một dạng bài tập chán òm nữa để giải quyết quá quá cho xong. *"Họ muốn mình phải làm gì với cái này đây? Ô, chỉ cần áp dụng công thức là xong à? OK".*

Một ví dụ khác là việc huấn luyện học sinh trình bày thông tin theo những cách phức tạp không cần thiết, chỉ vì trong một tương lai xa xôi nào đấy chúng sẽ có ý nghĩa. Không biết có giáo viên dạy Toán cấp II nào hiểu dù chỉ một chút về việc tại sao anh ta bắt học sinh phải viết lại cụm "*chữ số x nằm giữa 3 và 7*" thành " $|x - 5| < 2$ " không? Không lẽ những tác giả sách giáo khoa thiếu năng lực đến vô vọng này thực sự tin rằng mình đang giúp các học sinh bằng cách chuẩn bị trước cho chúng để một ngày, không, có lẽ là một vài năm, tới đây khi chúng phải xử lý những phép toán của

¹¹ Lại một lần nữa, may mắn thay ở Việt Nam không có sự thừa thãi phức tạp và vô ích này; các học sinh chúng ta không bao giờ phải học "sec x"; khi cần sử dụng phép nghịch đảo "1 trên cos x", các em chỉ việc viết luôn $\frac{1}{\cos x}$ là xong.

hình học đa không gian hay những phép toán cao cấp khác hay sao? Tôi không nghĩ thế. Tôi tin rằng họ chỉ đơn giản đang “copy” lại lẫn nhau trong suốt hàng thập kỷ qua, có lẽ có thay đổi font chữ chỗ này một chút, in đậm chỗ kia một chút; và vênh vào lên tự hào khi một hệ thống trường học nào đấy sử dụng sách của họ, và vô tình trở thành đồng phạm với họ.

Toán học là về những vấn đề, và vấn đề phải được đặt làm trọng tâm trong sự học toán của mỗi học sinh. Mặc cho có khó khăn và ức chế đến đâu trong công việc sáng tạo, các học sinh và giáo viên vẫn luôn phải tham gia vào quá trình này - có ý tưởng, không có ý tưởng, tìm thấy những quy luật, đưa ra những suy đoán, đặt ra những ví dụ và phản ví dụ, thiết kế các lập luận, đóng góp và phê bình cho công trình của các bạn khác. Các kỹ thuật và phương pháp chuyên dụng sẽ xuất hiện một cách tự nhiên trong quá trình đó, như chúng đã làm trong lịch sử: không phải tách biệt, mà là liên hệ một cách mật thiết với, cũng như phát triển thêm từ vấn đề ban đầu mà từ đó đã làm nảy sinh ra chúng.

Các giáo viên ngôn ngữ biết rằng cách đánh vần và phát âm được học tốt nhất khi các học viên học đọc và viết. Các giáo viên lịch sử biết rằng ngày tháng và những cái tên sẽ hoàn toàn vô vị nếu bị tách ra khỏi những câu chuyện thực đằng sau mỗi diễn biến lịch sử. Tại sao giáo dục toán học lại cứ bị kẹt mãi ở thế kỷ 19 thế chứ? Hãy thử so sánh trải nghiệm của chính bạn khi học Đại số với những dòng hồi tưởng sau đây của Bertrand Russell¹² mà xem:

“Tôi bị bắt phải học thuộc lòng: ‘Bình phương của tổng hai số thì bằng với tổng các bình phương cộng hai lần tích hai số đó’¹³. Tôi không hiểu dù chỉ một chút cái thứ này nghĩa là gì; và khi tôi không thể ghi nhớ chính xác các từ ngữ, người gia sư ném quyển sách vào đầu tôi, một việc hoàn toàn không giúp tôi nâng cao trí thông minh thêm được chút nào hết.”

Mọi thứ ngày nay có thực sự khác gì không?

SIMPLICIO: Tôi không nghĩ nói thế là công bằng. Chắc chắn các phương pháp dạy học đã phải tiến bộ hơn khi đó nhiều rồi chứ.

¹² **Bertrand Arthur William Russell**, Bá tước Russell III, OM, FRS (18 tháng 5 năm 1872 – 2 tháng 2 năm 1970), là một triết gia, nhà logic học, nhà toán học người Anh của thế kỷ 20. Là một tác giả có nhiều tác phẩm, ông còn là người mang triết học đến với đại chúng và là một nhà bình luận đối với nhiều chủ đề đa dạng, từ các vấn đề rất nghiêm túc cho đến những điều trần tục. Nổi tiếp truyền thống gia đình trong lĩnh vực chính trị, ông là một người theo chủ nghĩa tự do với vị thế nổi bật, ông còn là một người dân chủ xã hội (socialist) và người hoạt động chống chiến tranh trong phần lớn cuộc đời dài của mình. Hàng triệu người coi ông như là một nhà tiên tri của cuộc sống sáng tạo và duy lý; đồng thời, quan điểm của ông về nhiều chủ đề đã gây nên rất nhiều tranh cãi. (Wikipedia).

¹³ Đây là một cách nói khác của hằng đẳng thức: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

SALVIATI: Anh đang nói đến các phương pháp *huấn luyện*. Dạy học là một mối quan hệ phức tạp của con người; nó không cần có một phương pháp. Hoặc giả tôi nên nói, nếu anh cần đến một phương pháp thì có lẽ anh vẫn chưa đủ tốt với tư cách một giáo viên. Nếu anh không có đủ tình cảm với môn học của mình để có thể nói về nó bằng cách nói của chính anh, một cách tự nhiên và ngẫu hứng, vậy anh thực sự hiểu nó được bao nhiêu? Và nhân tiện nói đến chuyện bị kẹt ở thế kỷ 19, có đáng kinh ngạc không khi biết kiểu thiết kế chương trình học này đã kẹt ở tận thế kỷ 17? Cứ nghĩ đến hàng bao nhiêu những khám phá đáng kinh ngạc cũng như những cuộc cách mạng sâu sắc trong tư duy toán học đã xuất hiện trong suốt ba thế kỷ qua mà xem! Không hề có thêm một sự đề cập nào đến chúng, cứ như thể chúng chưa bao giờ tồn tại vậy.

SIMPLICIO: Nhưng không phải anh đang đòi hỏi quá nhiều từ các giáo viên toán sao? Anh mong chờ họ phải quan tâm đến từng cá nhân trong những lớp học hàng chục học sinh, hướng dẫn chúng để chúng tự tìm thấy con đường khám phá và sự khai sáng của riêng mình, và lại còn phải liên tục cập nhật để theo kịp những thay đổi mới nhất trong giới toán học nữa?

SALVIATI: Anh có mong chờ giáo viên mỹ thuật của anh phải quan tâm tới từng cá nhân, cho anh những khuyên hữu ích phù hợp với riêng anh trong hội họa không? Anh có kỳ vọng cô giáo ấy phải biết tất cả mọi thứ về giới hội họa trong suốt 300 năm vừa qua không? Nghiêm túc thì tôi không mong chờ hay kỳ vọng điều gì hết. Tôi chỉ ước gì giá họ được như vậy.

SIMPLICIO: Vậy tức là anh trách các giáo viên toán?

SALVIATI: Không, tôi trách cái nền văn hóa đã đẻ ra những người thầy giáo như thế. Những tên ác quỷ khốn khổ đó cũng đang cố hết sức họ có thể rồi, họ chỉ đang làm những thứ mà họ đã được huấn luyện để làm thôi. Tôi chắc chắn hầu hết trong số họ đều rất yêu quý học sinh và cũng thậm chí căm ghét thứ các em đang bị bắt phải trải qua. Họ biết từ tận trong tim mình rằng nó vô nghĩa và làm mất đi tất cả những giá trị thật quý báu ở các em. Họ chắc cũng có thể mơ hồ cảm thấy mình đang là một phần của một cỗ-máy-nghiền-nát-tâm-hồn khổng lồ; nhưng họ thiếu khả năng để hiểu được bản chất thật của nó, hay thậm chí chống lại nó. Họ chỉ biết là mình phải giúp các em “sẵn sàng cho năm học tiếp theo”.

SIMPLICIO: Anh thực sự nghĩ hầu hết các em học sinh sẽ có đủ khả năng đến mức có thể tạo ra được toán học của riêng mình ư?

SALVIATI: Nếu chúng ta thực sự tin rằng tư duy sáng tạo là quá "cao" với các em học sinh, và hầu hết chúng chắc sẽ không đủ khả năng đạt tới trình độ đó, vậy tại sao chúng ta vẫn cho chúng làm những bài văn hay viết những bài luận lịch sử về Shakespeare? Vấn đề không phải ở chỗ học sinh không có đủ khả năng, mà ở chỗ chẳng có giáo viên nào đủ khả năng cả. Họ chưa bao giờ tự mình chứng minh được một thứ gì, vậy làm thế nào mà họ có thể hướng dẫn các em làm thế? Với cả dù thế nào, sở thích và năng lực của các học sinh vẫn luôn rất đa dạng, môn học nào cũng vậy thôi; nhưng ít nhất học sinh nên có quyền được thích hay không thích môn Toán vì đúng bản chất của nó, chứ không phải vì một thứ mạo danh giả hiệu như đang được giảng dạy hiện nay.

SIMPLICIO: Nhưng chắc chắn chúng ta vẫn muốn các em được học một hệ thống các kiến thức và kỹ năng cơ bản nhất định nào đó chứ. Chương trình học ra đời là vì thế; và còn về việc tại sao nó lại luôn đồng nhất như nhau ở mọi nơi – chắc hẳn sẽ có những định lý luôn đúng mà các em học sinh cần phải biết chứ: một cộng một bằng hai, tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° chẳng hạn, những thứ tương tự như thế. Chúng đâu phải là các ý kiến, hay những cảm xúc nghệ thuật ủy mị nào.

SALVIATI: Ngược lại mới đúng. Các kết cấu Toán học, bất kể có hữu dụng trong thực tế hay không, đều được sáng tạo và phát triển nên từ những vấn đề; và ý nghĩa của chúng phát triển từ những vấn đề đó. Có những lúc chúng ta muốn một cộng một bằng không (trong toán học "mod 2"); và trên bề mặt của một hình cầu tổng ba góc của một tam giác sẽ lớn hơn 180° . Không có một thứ gì tự thân nó lại là "định lý" hết; tất cả mọi thứ đều liên hệ và tương quan với nhau. Cả câu truyện thì mới có ý nghĩa, chứ không chỉ mỗi phần kết của nó.

SIMPLICIO: Tôi mệt với mấy thứ ngớ ngẩn vớ vẩn này của anh lắm rồi! Đang nói toán học cơ bản, được chứ? Anh có đồng ý rằng học sinh nên được học nó không?

SALVIATI: Cái đó còn tùy xem định nghĩa của anh về "nó" là gì. Nếu ý anh là có một sự trân trọng đúng mức với những vấn đề của tính toán và sắp xếp, biết nhìn nhận đúng lợi thế của việc phân loại và đặt tên, nhưng cũng biết phân biệt rõ sự khác biệt giữa một vật thực sự với thứ đại diện cho nó; và có một chút hiểu biết về những diễn tiến lịch sử phát triển của các con số, thì có, tôi đồng ý. Và nếu ý anh là việc chỉ học thuộc lòng nhồi nhét 18 định lý và hằng đẳng thức mà không hề có một nhận thức sáng suốt dựa trên bằng chứng nào, thì không. Nếu ý anh là khám phá ra một sự thật không phải quá hiển nhiên rằng 5 nhóm mỗi nhóm 7 phần tử thì cũng giống với 7 nhóm mỗi nhóm 5 phần tử thì có, tôi đồng ý. Nếu ý anh là tạo ra một định luật rằng $5 \times 7 = 7 \times 5$, vậy thì không. Làm toán nên luôn có nghĩa là tự khám phá ra những quy luật, và tạo ra những lời giải thích tuyệt vời, đẹp để cho từng vấn đề.

SIMPLICIO: Thế còn Hình học thì sao? Chẳng phải ở đó học sinh được tự mình chứng minh các thứ ư? Không phải Hình học ở bậc phổ thông bây giờ là ví dụ hoàn hảo cho viễn cảnh một lớp học Toán thực sự mà anh đòi hỏi hay sao?

* * *

Hình học ở bậc phổ thông: Công cụ của Ác quỷ

Không có thứ gì gây ức chế cho tác giả của một lời luận tội cay độc bằng việc được chính đối tượng mình đang công kích ủng hộ mình. Và không một con sói đội lốt cừu nào có thể xảo quyệt, không một tên bạn bè giả tạo nào có thể gian trá hơn bộ môn Hình học ở bậc phổ thông. *Chính bởi vì nó là nỗ lực của trường học để giới thiệu với học sinh nghệ thuật lập luận, mới khiến nó trở nên nguy hiểm đến vậy.*

Hiện hữu như một lĩnh vực của môn học mà ở đó, học sinh cuối cùng cũng được tham gia vào các hoạt động tư duy toán học thực sự, con virus này tấn công toán học đúng vào trái tim của nó, phá hủy căn cốt cơ bản nhất của việc lập luận bằng tư duy sáng tạo, đầu độc sự yêu thích của các em về một môn học kỳ diệu và đầy hấp dẫn, cũng như vĩnh viễn tước bỏ của các em khả năng suy nghĩ về toán theo một cách tự nhiên và trực cảm nhất của mình.

Cơ chế đằng sau của nó rất tinh vi và xảo quyệt. Các học sinh – nạn nhân trước hết bị tấn công và làm tê liệt bởi hàng mớ những định nghĩa vô ích, những mệnh đề, những ký hiệu; rồi rất từ từ và cẩn thận, các em bị cuốn ra xa dần khỏi bản tính tò mò tự nhiên, bản năng của mình về hình khối, quy luật bởi cả một hệ thống được tạo ra để ép buộc những đức tin, và bị đẩy tới một thứ ngôn ngữ khoa trương, tới những dạng thức nhân tạo vẫn được gọi là “cách chứng minh”.

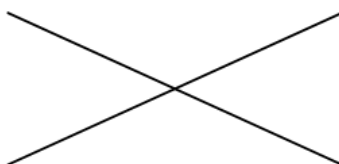
Thôi bỏ các ẩn dụ qua một bên; bộ môn hình học cho đến giờ chính là thành phần có sức hủy diệt, cả về tâm lý và cảm xúc, kinh khủng nhất của chương trình toán từ lớp 1 đến lớp 12¹⁴. Những chuyên đề Toán khác có thể chỉ giấu đi chú chim tuyệt đẹp, hoặc nhốt nó vào trong một chiếc lồng, nhưng bộ môn Hình học thì hoàn toàn là tra tấn, trực tiếp và tàn nhẫn. (Có vẻ như tôi không có khả năng bỏ tất cả các ẩn dụ qua một bên).

¹⁴ **K-12** ("**K to Twelve**") là hệ thống giáo dục phổ thông được áp dụng tại một số nước như Hoa Kỳ, Canada, Thổ Nhĩ Kỳ, Philippines và Australia. Cái tên này là cách viết tắt của **Lớp mẫu giáo - Kindergarten (K)** cho các em từ 4-6 tuổi và **Lớp 12 (12)** cho các em 18-19 tuổi, lần lượt là các cấp độ học đầu tiên và cuối cùng của học sinh trong chương trình học tại các nước trên. Về cơ bản, chương trình K-12 rất giống với chương trình giáo dục phổ thông hệ 12 năm của Việt Nam. (Wikipedia)

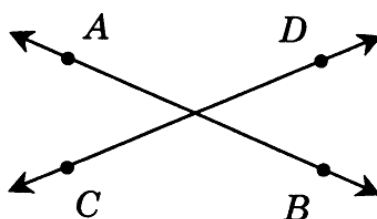
Thứ chúng ta có ở đây là cả một hệ thống đang đục khoét và xói mòn dần trực giác bản năng của học sinh. Một cách chứng minh, tức một luận điểm toán học, phải là một tác phẩm hư cấu ¹⁵ về những vấn đề tưởng tượng, là một bài thơ. Mục đích của nó là làm người viết thỏa mãn. Một cách chứng minh tốt phải giải thích được, hơn nữa phải giải thích một cách thật rõ ràng, sâu sắc, phải thật đơn giản mà tinh tế. Một luận điểm tốt, một luận điểm được tạo tác tỉ mỉ phải như một hắt nước mát, một cột sáng soi đường – nó phải làm tươi mát tâm hồn ta và khai sáng cho trí tuệ của ta. Và nó phải thật hấp dẫn.

Chẳng có gì hấp dẫn ở thứ vẫn được gọi là “cách chứng minh” trong bộ môn Hình học đang được dạy cả. Các học sinh được cung cấp cho một biểu mẫu có sẵn, đầy tính giáo điều và cứng nhắc, để chúng có thể triển khai sự “chứng minh” của mình – một thể loại biểu mẫu hoàn toàn không cần thiết và không phù hợp cũng như việc yêu cầu những học sinh muốn trồng hoa trong vườn phải gọi tên các cây hoa bằng danh pháp khoa học với đầy đủ giống, loài, phân chi sinh học vậy.

Hãy thử quan sát một vài ví dụ về sự điên rồ này. Chúng ta sẽ bắt đầu với ví dụ về hai đường thẳng cắt nhau như thế này:



Giờ thứ đầu tiên thường xảy ra là sự tự làm rối tung tùm phèng mọi thứ lên với những biểu tượng và ký hiệu không cần thiết. Có vẻ như một người không thể đơn giản chỉ gọi chúng là “hai đường thẳng cắt nhau”, anh ta hoặc cô ta phải đặt tên thật tỉ mỉ cho chúng. Và cũng không phải là những cái tên như “đường 1” hay “đường 2”, hoặc thậm chí là “a” hay “b’”. Chúng ta sẽ phải (theo lời chỉ dẫn của Hình học Phổ thông) chọn lựa trên 2 đường thẳng những điểm ngẫu nhiên và hoàn toàn không liên quan gì tới vấn đề đang được nói tới, và rồi gọi chúng bằng những “ký hiệu đường thẳng” đặc biệt như sau:

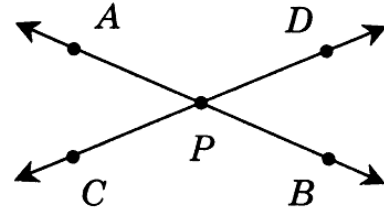


¹⁵ **Hư cấu (fiction)** hiểu theo nghĩa: viết, miêu tả và đề cập đến những vấn đề ảo, những vấn đề chỉ tồn tại trong trí tưởng tượng và được sáng tạo ra, chứ không hề hoặc không hoàn toàn có thật.

Bạn thấy đấy, giờ chúng ta được phép gọi chúng là AB và CD. Và nên nhớ là Chúa cấm bạn bỏ qua một dấu gạch ngang ở trên – viết “AB” không tức là nói đến *độ dài* của đoạn thẳng AB (ít nhất là tôi nghĩ nó hoạt động như thế). Không cần bạn tâm bao nhiêu phức tạp mà nó tạo thêm ra chẳng để làm gì cả, đây chính là cách một người phải học để làm toán. Giờ tới phiên lời phát biểu thực sự, và nó thường được nhắc đến bằng những cách ngắn gọn như sau:

MỆNH ĐỀ 2.1.1

Cho \overline{AB} giao với \overline{CD} tại điểm P . Khi đó $\angle APC \cong \angle BPD$.



Nói cách khác, hai góc ở hai bên đối diện thì bằng nhau. Thì đúng rồi chứ còn gì nữa! Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành một kết cấu đối xứng rồi còn gì! Và như thế chỉ thế này còn chưa đủ tẻ ấy, cái mệnh đề hiển nhiên về đường thẳng và góc này bây giờ còn cần được “chứng minh” nữa.

Cách chứng minh:

Phát biểu	Lập luận
1. $m\angle APC + m\angle APD = 180^\circ$ $m\angle BPD + m\angle APD = 180^\circ$	1. Tính chất cộng góc
2. $m\angle APC + m\angle APD = m\angle BPD + m\angle APD$	2. Phương pháp thế
3. $m\angle APD = m\angle APD$	3. Tính chất phản thân của đẳng thức
4. $m\angle APC = m\angle BPD$	4. Tính chất rút gọn của đẳng thức
5. $m\angle APC \cong m\angle BPD$	5. Mệnh đề về số đo hai góc đối đỉnh

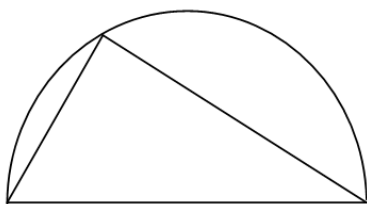
Thay vì một lập luận thông minh và hấp dẫn viết bởi một con người thực sự, và được thực hiện bằng một trong hàng nghìn các ngôn ngữ tự nhiên trên thế giới, chúng ta có thứ biểu mẫu não nề, vô hồn, quan liêu này để viết một bài chứng minh. Chuyện bé như cái tổ mối mà làm to như cả quả núi! Không lẽ chúng ta thực sự muốn gợi ý rằng một thứ có thể quan sát trực tiếp thấy ngay thế này cần đến cả một đoạn dẫn giải dài dòng đến thế kia ư? Hãy thành thật xem: vừa rồi bạn có thực sự đọc hết chỗ kia không? Dĩ nhiên là không rồi. Ai lại muốn chứ?

Hiệu quả của một sản phẩm như vậy tạo ra từ một thứ đơn giản đến thế kia là khiến cho người học dần nghi ngờ trực giác của bản thân. Đặt nghi vấn kể cả từ những cái hiển nhiên nhất, bằng cách luôn khẳng khẳng định rằng nó phải được “chứng minh cẩn thận” (cứ làm như mấy dòng trên đã đủ cẩn thận để làm một bài chứng minh tiêu chuẩn ấy), chương trình học đã nói với các học sinh: *“Cảm giác và suy nghĩ của các người đều là không đáng tin cậy. Các người cần phải nghĩ và làm theo cách của bọn ta.”*

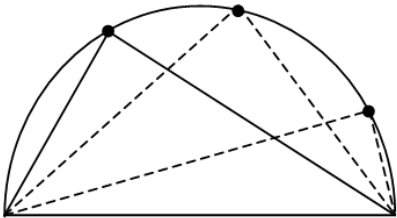
Tất nhiên có những lúc trong toán cần phải dùng đến những phép chứng minh thật chặt chẽ và cẩn thận, chuyện đấy không cần phải bàn cãi. Nhưng đó không phải là lúc một học sinh mới lần đầu tiên được tiếp xúc với nghệ thuật lập luận Toán học. Ít nhất hãy để cho người học làm quen với các đối tượng toán học đã, và hãy xem bạn có thể kỳ vọng gì ở họ, sau đó hãy trình trọng hóa mọi thứ. Chứng minh chặt chẽ, tỉ mỉ chỉ thực sự cần thiết khi có một sự khủng hoảng – khi bạn khám phá ra rằng vật thể tưởng tượng của bạn hành xử ngược với cách bạn mong đợi, khi có một nghịch lý xuất hiện ở đâu đó. Nhưng giữ vệ sinh một cách tuyệt đối cực đoan thế là hoàn toàn không cần thiết ở đây – chưa có ai bị bệnh lúc này cả! Tất nhiên khi có một cuộc khủng hoảng logic xảy ra vào một lúc nào đấy, nó nên được điều tra kỹ lưỡng, và lập luận lúc ấy cần phải chắc chắn, chính xác hơn; nhưng một quy trình như thế vẫn có thể được triển khai theo một cách ít trang trọng và nhiều trực giác hơn. Trên thực tế, cốt lõi của Toán học là ở việc một người chứng minh một mệnh đề như vậy bằng cách những chứng minh của riêng anh ta kia.

Vậy nên không chỉ hầu hết trẻ em đều lúng túng trước cung cách mô phạm quá cực đoan này – không có gì khó hiểu bằng việc phải đi chứng minh một thứ hiển nhiên – mà kể cả số ít các em học sinh mà trực giác chưa bị ảnh hưởng, sau đó cũng phải đi phiên dịch ngược trở lại những ý tưởng tuyệt vời, tuyệt đẹp của các em thành thứ chữ tượng hình ngớ ngẩn kia để được các giáo viên chấm cho là “đúng”. Người giáo viên đó sau đó sẽ tự khen ngợi bản thân rằng anh ta, theo một cách nào đó, đã giúp mài sắc thêm tư duy lý luận cho học sinh.

Với một ví dụ nghiêm túc hơn, hãy cùng thử nhìn vào trường hợp một hình tam giác bên trong một hình bán nguyệt như ở dưới đây xem:



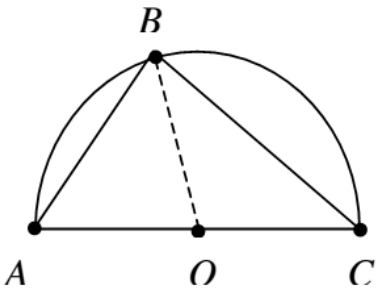
Giờ, có một quy luật rất đẹp ở đây là bất kể cái đỉnh trên cùng của tam giác này chạy có đến chỗ nào trên đường tròn đi chăng nữa, nó vẫn tạo với hai điểm kia một góc vuông rất đẹp (tôi không có vấn đề gì hết với việc dùng một thuật ngữ như “góc vuông”, nếu nó liên quan trực tiếp tới vấn đề và giúp tôi dễ thảo luận hơn. Thứ tôi phản đối không phải là bản thân các thuật ngữ, mà là ở việc dùng quá nhiều thuật ngữ khi hoàn toàn không cần thiết. Và tôi cũng luôn sẵn lòng dùng những từ như “góc nhà” hay thậm chí “chuồng lợn” nếu các học sinh thích dùng chúng hơn “góc vuông”).



Đây là một ví dụ mà ở đó chúng ta phải đôi chút nghi ngờ lại trực giác của chính mình. Có vẻ điều này chưa hẳn hoàn toàn đã đúng; thậm chí là khó có thể xảy ra – đúng ra tam giác sẽ phải thay đổi nếu tôi chuyển dịch vị trí của đỉnh chứ? Thứ chúng ta có ở đây chính là một vấn đề toán học vô cùng thú vị! Nó có thật đúng không? Nếu có, thì tại sao nó lại đúng? Đúng là một công trình tuyệt vời! Đúng là một cơ hội quá hoàn hảo để rèn luyện tính sáng tạo và khả năng tưởng tượng của học sinh! Nhưng tất nhiên là chẳng có học sinh nào được trao những cơ hội thế này hết, trí tò mò và sự ham thích của các em luôn luôn ngay lập tức bị xì cho xẹp lép bởi một thứ thế này đây:

ĐỊNH LÝ 9.5

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong một nửa đường tròn đường kính \overline{AC} .
 Khi đó $\angle ABC$ là một góc vuông.



Chứng minh:

Phát biểu	Lập luận
1. Vẽ bán kính OB . Vậy $OB = OC = OA$ 2. $m\angle OBC = m\angle BCA$ $m\angle OBA = m\angle BAC$	1. Theo như giả thiết 2. Định lý về tam giác cân

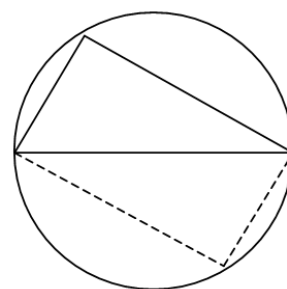
3. $m\angle ABC = m\angle OBA = m\angle OBC$	3. Định đề về tổng hai góc
4. $m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180^\circ$	4. Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180°
5. $m\angle ABC + m\angle OBC + m\angle OBA = 180^\circ$	5. Phương pháp thế (từ dòng 2)
6. $2m\angle ABC = 180^\circ$	6. Phương pháp thế (từ dòng 3)
7. $m\angle ABC = 90^\circ$	7. Tính chất rút gọn của đẳng thức
8. $\angle ABC$ là một góc vuông, điều phải chứng minh.	8. Định nghĩa góc vuông

Liệu có thứ gì xấu xí và thiếu hấp dẫn đến thế không? Có loại luận điểm nào lại ngu muội và khó đọc thế này không? Đây đâu phải là toán! Một bài chứng minh phải là một lễ đàn sinh của những vị thần, đâu phải là một bức điện được mã hóa bởi Lầu Năm Góc! Đây chính là sản phẩm của một thứ tư duy logic khắt khe đến cực đoan: *sự xấu xí*. Tinh thần của luận điểm đã bị chôn vùi dưới hàng đống hỗn loạn những luật lệ và quy tắc nặng hình thức rồi.

Không một nhà toán học nào làm việc theo kiểu này cả. Chưa từng có một nhà toán học nào làm việc theo kiểu này cả. Đây là một cách hiểu vô cùng sai lệch, hoàn toàn sai lệch về ngành toán. Toán học không phải là về việc dựng lên những hàng rào để bảo vệ chúng ta khỏi trực giác, hay làm những thứ đơn giản trở nên phức tạp hơn. Toán học là về việc gỡ bỏ tất cả những vật chướng ngại giữa ta và trực giác, và giữ cho những thứ đơn giản được đơn giản kìa.

Các bạn hãy thử so sánh đống hổ lốn khó đọc được gọi là "cách chứng minh" ở trên kia với lập luận dưới đây, viết bởi một em học sinh lớp 7 của tôi mà xem

Hãy lấy cái tam giác và xoay ngược nó lại để tạo thành một hình hộp bốn cạnh bên trong một đường tròn. Bởi tam giác đã được quay đúng nửa vòng, các cạnh của hình hộp chắc chắn phải song song, vậy nên nó là một hình bình hành. Nhưng nó không thể là một hình bình hành nghiêng được, bởi cả hai đường chéo của nó đều là đường kính của hình tròn cả. Tức là hai đường chéo đó bằng nhau, tức là hình hộp này chắc chắn phải là một hình chữ nhật. Vậy nên các góc của nó luôn phải là các góc vuông."



Có dễ chịu không? Và điều cốt yếu ở đây không phải là cách lập luận nào tốt hơn trong hai cái, mà là ở ý tưởng, ở việc ý tưởng đã chạm đến được vấn đề như thế nào kìa. (Và nói thật, ý tưởng của lập luận đầu tiên thực ra cũng rất đẹp, có điều khi đọc ta như phải nhìn nó qua một cặp kính đen u ám vậy.)

Nhưng phải nói thật, tôi đã phải biên tập lại lời chứng minh trên khá nhiều. Lời chứng minh gốc có hơi phức tạp hơn một chút, và dùng hơi quá nhiều từ không cần thiết (cũng như các lỗi chính tả và ngữ pháp). Nhưng tôi đã thấy được tinh thần của luận điểm truyền qua mình. Và những lỗi nhỏ này cũng là điều tốt cả; nó giúp cho người thầy giáo như tôi có việc để làm. Tôi đã có thể chỉ ra một vài lỗi về cách viết và logic, và em học sinh này đã có thể lập luận được một cách tốt hơn. Ví dụ, tôi không thực sự hài lòng lắm với luận điểm cả hai đường chéo đều là đường kính của đường tròn – tôi không nghĩ đây là một điều quá hiển nhiên – nhưng thế chỉ có nghĩa là có thêm nhiều thứ để nghĩ về và nhiều hiểu biết để em có thể gạt hái được từ tình huống mà thôi. Và trên thực tế, em học sinh đó đã có thể sửa lại nó một cách khá đẹp như thế này:

“Bởi tam giác đã được quay đúng nửa vòng, thế nên đỉnh của tam giác chắc chắn sẽ rơi đúng vào vị trí đối diện với vị trí ban đầu của nó. Bởi vậy đường chéo thứ hai của hình hộp này cũng là một đường kính của hình tròn.”

Thật là một công trình tuyệt vời và một vấn đề toán học tuyệt đẹp. Tôi không chắc ai là người tự hào hơn nữa, em học sinh hay tôi. Đây chính xác là thứ trải nghiệm tôi muốn các em học sinh của mình có trong những giờ học toán.

Vấn đề với chương trình hình học hiện nay là những trải nghiệm riêng tư, cá nhân của một nghệ sĩ trần trụi với vấn đề của mình đã hầu như bị xóa bỏ. Nghệ thuật chứng minh đã bị thay thế bằng những quy trình bước-từng-bước khô khan, cứng nhắc, chỉ toàn thuần túy suy luận. Các sách giáo khoa giới thiệu hàng bộ những định nghĩa, định lý và cách chứng minh; các giáo viên chép lại chúng lên bảng, và các học sinh lại chép lại chúng vào vở ghi. Sau đó các em được yêu cầu phải bắt chước lại chúng vào trong bài tập. Những em bắt kịp với quy trình này nhanh hơn sẽ được coi là “giỏi” toán.

Hậu quả là học sinh trở thành một đối tượng tiếp nhận thụ động trong quá trình sáng tạo. Học sinh viết lập luận để khớp với quy trình chứng minh đã có từ trước, chứ không phải vì tự các em *muốn* thế. Các em được huấn luyện để bắt chước thao tác lập luận mẫu, chứ không phải tự mình lập luận *theo ý định của các em*. Vậy nên các học sinh không chỉ không hiểu giáo viên đang nói cái gì, *các em còn không hiểu nổi chính mình đang nói gì nữa kia*.

Kể cả cách truyền thống mà theo đó định nghĩa được giới thiệu cũng là một lời nói dối. Trong một cố gắng để tạo sự “rõ ràng” trước khi lao vào cơn lũ ào ạt của mệnh đề và định lý, một loạt các định nghĩa được cung cấp để những luận điểm và lập luận sau này có thể được viết ngắn gọn và súc tích đến hết mức có thể. Nhìn qua thì thấy đây là một phương pháp chẳng có hại gì cho ai; tại sao không viết tắt vài chỗ đi để mọi thứ nói ra được kinh tế hơn? Nhưng vấn đề là ở chỗ các định nghĩa không vô hại, chúng có *ảnh hưởng rất lớn* tới việc học. Định nghĩa đến từ những quyết định

thăm mỹ khi người nghệ sĩ thấy đã đến lúc cần phải có một sự phân biệt rõ ràng. Và chúng là sản phẩm *tạo ra từ những vấn đề*. Viết một định nghĩa tức là tô đậm và nhấn mạnh vào một đặc điểm hay tính chất nào đấy của đối tượng. Lịch sử đã chứng minh rằng công việc này đến từ quá trình giải quyết một vấn đề, chứ không phải từ việc phục vụ như một khúc dạo đầu cho nó.

Điều quan trọng cần phải nhớ là bạn không bắt đầu từ định nghĩa, bạn bắt đầu từ vấn đề. Chưa một ai có ý nghĩ về việc một số có “vô tỷ” hay không cho đến khi Pythagoras thử đo độ dài đường chéo của một hình vuông, và phát hiện ra rằng số đo đó không thể viết được dưới dạng phân số. Định nghĩa chỉ có lý khi bạn chạm đến một điểm nào đó trong lập luận mà khi đó cần thiết phải có một sự phân biệt rõ ràng. Nếu cứ nêu định nghĩa mà không nêu rõ lý do tồn tại của nó thì chỉ càng làm cho vấn đề *thêm* khó hiểu mà thôi.

Đây lại là một ví dụ nữa cho thấy cách học sinh bị che chắn và cách ly khỏi quá trình tư duy toán học thực sự. Học sinh cần phải có khả năng tạo ra những định nghĩa của riêng mình khi cần thiết – để tự mình tạo ra những cuộc tranh luận. Tôi không muốn các em học sinh nói “định nghĩa đó, định lý đó, cách chứng minh đó”; tôi muốn nghe các em nói “định nghĩa của em, định lý của em, cách chứng minh của em” kia.

Tạm thôi không bàn đến những lời phàn nàn này nữa, vấn đề thực sự với kiểu trình bày thế này vẫn là nó *rất chán*. Tính hiệu quả và kinh tế thôi vẫn chưa đủ để làm nên một phương pháp sư phạm hiệu quả. Tôi thấy rất khó để tin rằng Euclid sẽ tán đồng phương pháp kiểu này; tôi biết chắc là Archimedes sẽ phản đối.

SIMPLICIO: Nào nào, đợi một chút đã. Tôi không biết anh thế nào, nhưng trước giờ tôi vẫn luôn *rất thích* những tiết hình học thời phổ thông. Tôi thích những kết cấu, và tôi thích cả việc chứng minh theo những biểu mẫu cứng nhắc nữa.

SALVIATI: Tôi chắc chắn là anh đã rất thích. Anh có lẽ thậm chí còn thỉnh thoảng được giải quyết những vấn đề rất đẹp nữa kìa. Rất nhiều người vẫn yêu thích các lớp Hình học (mặc dù số người ghét nó vẫn đông hơn gấp bội). Nhưng đây không phải là một điểm cộng cho chế độ dạy học hiện nay. Nói đúng hơn, đây thậm chí còn là một bằng chứng mạnh mẽ chứng minh cho sự hấp dẫn của toán học thực sự nữa. Để phá hủy hoàn toàn một thứ tuyệt đẹp đến nhường vậy là công việc rất khó; và thậm chí chỉ một cái bóng mờ nhạt của Toán học thực sự thôi cũng đã đủ để khiến môn học hấp dẫn và lôi cuốn đến nhường vậy. Rất nhiều người cũng thích môn Vẽ-theo-số nữa; nó là một hoạt động thư giãn nhẹ nhàng và đầy màu sắc. Nhưng chỉ với thế thì nó vẫn không bì được với nghệ thuật thực sự đâu.

SIMPLICIO: Nhưng tôi đã nói với anh mà, tôi đã *rất thích* chúng.

SALVIATI: Và nếu anh đã có một trải nghiệm toán học tự nhiên thực sự, anh sẽ còn thích chúng nhiều hơn nữa kia.

SIMPLICIO: Vậy ý anh là chúng ta chỉ cần cứ khởi hành trong một hành trình khám phá môn Toán, và các học sinh sẽ tự học bất cứ thứ gì chúng tình cờ học được ư?

SALVIATI: Chính xác. Vấn đề sẽ dẫn tới những vấn đề khác, kỹ thuật sẽ bắt đầu dần tự phát triển khi nó trở nên cần thiết, và những chủ đề toán học mới cũng sẽ tự nhiên xuất hiện thôi. Và nếu không có vấn đề gì nảy sinh trong suốt 13 năm học ở trường, vậy thì nó có gì quan trọng hay thú vị gì đâu chứ?

SIMPLICIO: Anh hoàn toàn điên mất rồi.

SALVIATI: Có lẽ tôi điên thật. Nhưng kể cả với những cách làm truyền thống, một giáo viên giỏi vẫn có thể dẫn dắt cuộc thảo luận và dòng chảy của các vấn đề để các em học sinh có thể tự khám phá và sáng tạo ra toán học cho riêng mình. Vấn đề thực sự là ở chỗ bộ máy giáo dục quan liêu sẽ không cho phép một giáo viên có thể làm thế. Với một loạt các chương trình học phải tuân thủ, một giáo viên sẽ không thể đóng vai trò lãnh đạo. Đúng ra không nên có tiêu chuẩn, không nên có chương trình gì hết. Chỉ có những cá nhân làm điều họ cho là tốt nhất với học sinh của mình mà thôi.

SIMPLICIO: Nhưng nếu thế thì làm thế nào nhà trường có thể đảm bảo các học sinh của mình sẽ có cùng một số kiến thức cơ bản nhất định? Làm thế nào chúng ta có thể đo đạc chính xác được giá trị kiến thức mà chúng thu được?

SALVIATI: Nhà trường sẽ không làm được, và chúng ta cũng sẽ không đo đạc được gì hết. Cũng như trong cuộc sống thực vậy. Cuối cùng thì bạn cũng sẽ phải chấp nhận rằng tất cả mọi người đều khác biệt, và điều đó là hoàn toàn không sao hết. Thì kể cả một người tốt nghiệp cấp III ra mà không biết về công thức góc chia đôi trong lượng giác (mà cứ làm như học như bây giờ thì chúng nhớ được sau này ấy), thế thì sao? Ít nhất người đó cũng sẽ ra khỏi trường với một vài hình dung tối thiểu về việc mục đích thực sự của môn học là gì, và sẽ được chứng kiến những thứ đẹp tuyệt vời trong những giờ học toán.

Kết luận....

Để điểm một dấu chấm cuối cùng cho bài phê phán của tôi về chương trình học tiêu chuẩn hóa hiện tại, và như một nghĩa vụ với cộng đồng, giờ tôi xin được giới thiệu bản catalog đầu tiên, *hoàn toàn trung thực và đầy đủ nhất*, về chương trình toán học từ lớp 1 đến lớp 12 của chúng ta:

CHƯƠNG TRÌNH TOÁN HỌC PHỔ THÔNG TIÊU CHUẨN:

TOÁN Ở BẬC TIỂU HỌC: Quá trình ép buộc đức tin bắt đầu. Các học sinh sẽ được học rằng toán không phải là một thứ bạn phải làm, mà là một thứ được làm sẵn cho bạn. Trọng tâm nhấn mạnh là ở việc học là ở việc ngồi yên, điền kín những tờ phiếu bài tập, và làm theo những chỉ dẫn. Các học sinh được kỳ vọng là sẽ làm chủ được hệ thống các thuật toán phức tạp để có thể thao túng một loạt các biểu tượng tiếng Hindi kỳ bí, hoàn toàn không có liên quan tới đam mê và trí tò mò từ phía các em, và đề cập đến toán học trong một vài thế kỷ gần đây như là những thứ quá khó so với cả một người lớn trung bình. Bảng cửu chương được đặc biệt nhấn mạnh; các giáo viên, phụ huynh và cả chính học sinh đều vô cùng căng thẳng, lo lắng.

TOÁN Ở BẬC TRUNG HỌC: Học sinh được dạy phải nhìn nhận Toán như một loạt các quy trình, không khác mấy các nghi thức tôn giáo, luôn vĩnh hằng và không thay đổi, được khắc mãi nghìn năm vào bia đá. Những phiến đá thiêng liêng này, hay còn gọi là các "Sách giáo khoa Toán", sẽ được phát tận từng tay mỗi em; và các học sinh sẽ được dạy phải gọi các bậc huynh trưởng trong giáo đạo của mình là "họ" (trong những câu như "Họ muốn mình làm gì ở đây? Họ muốn mình chia phép tính này xuống à?"). Những "vấn đề" sắp đặt và nhân tạo sẽ được giới thiệu để khiến thứ toán học vất vả cực nhọc trông có vẻ dễ chịu hơn. Học sinh sẽ bị kiểm tra một danh sách dài những thuật ngữ chuyên ngành không cần thiết, ví dụ như "số tự nhiên" hay "phân số", mà hoàn toàn không có một cơ sở hợp lý nào cho việc cần phải có mớ định nghĩa đó. Một sự chuẩn bị hoàn hảo cho môn Đại Số 1.

ĐẠI SỐ I: Để không phí thời gian suy nghĩ về những con số và các quy tắc của chúng, khóa học này thay vào đó tập trung vào các biểu tượng và những kỹ thuật cần có để thao túng chúng. Nghệ thuật dẫn chuyện uyển chuyển phát triển bởi những người Lương Hà cổ đại cho tới kỹ thuật của những nhà đại số học thời Phục Hưng, tất cả đều bị dẹp sang một bên, nhường chỗ cho thứ phong cách kể chuyện chống lại chủ nghĩa hiện đại nhằm chán và rời rạc, không có chủ đề, không có cốt truyện, không có nội dung. Việc luôn khẳng khẳng bắt buộc rằng tất cả các con số và cách diễn đạt đều phải được trình bày theo đúng những mẫu chuẩn có sẵn sẽ tạo thêm nhiều rắc rối cho ý nghĩa về đặc tính và đẳng tính của đối tượng. Các học sinh cũng phải học thêm cả các công thức về phương trình bậc hai nữa, vì một lý do bí ẩn nào đấy.

HÌNH HỌC: Tách biệt và xa rời hẳn so với các phân môn còn lại của chương trình, khóa học này sẽ mớm cho học sinh hy vọng được tham gia vào những hoạt động toán học có ý nghĩa, và sau đó là hoàn toàn dập tắt chúng. Những biểu tượng, ký hiệu phức tạp, khiến người ta mất tập trung sẽ được giới thiệu, và họ sẽ không chừa một cách nào để khiến việc đơn giản trở thành phức tạp hơn. Mục tiêu của khóa học này là để quét sạch tất cả những tàn dư gì còn lại của trực giác toán học trong học sinh, và để dọn đường chuẩn bị cho bộ môn Hình học II.

ĐẠI SỐ II: Đối tượng nhắm đến của khóa học này vẫn là cách học không có cơ sở cũng như hoàn toàn không phù hợp của bộ môn Hình học. Tiết diện hình nón được giới thiệu, trong một kết cấu được vận hành để tránh tất cả những sự đơn giản thẩm mỹ nhất của hình nón và những tiết diện của chúng. Học sinh sẽ được học cách viết lại phương trình bậc hai dưới nhiều dạng thức khác nhau theo tiêu chuẩn, hoàn toàn chẳng vì lý do gì hết. Số mũ và logarit cũng sẽ được giới thiệu trong chương trình Đại Số II, bất chấp việc chúng không phải là đối tượng của bộ môn Đại Số, đơn giản bởi vì chúng cần phải được nhét vào đâu đó, có vẻ thế. Tên của khóa học được chọn để tăng tính thuyết phục cho “Hiệu ứng cái thang”. Tại sao Hình học lại bị nhét vào giữa Đại Số I và II vẫn còn là một bí ẩn không ai giải thích nổi.

HÌNH HỌC TAM GIÁC: Hai tuần kiến thức sẽ được kéo dài ra đủ thời lượng của một học kỳ bằng cách trì hoãn với hàng đống những định nghĩa không cần thiết. Những hiện tượng thực sự thú vị và hấp dẫn, như cách các cạnh của tam giác phụ thuộc vào số đo các góc của nó, được nhấn mạnh ngang bằng với những cách viết tắt không liên quan và phương pháp truyền thống lỗi thời nặng về biểu tượng; để ngăn cản các học sinh có một cái nhìn rõ ràng đôi chút về nội dung thực sự của môn học. Học sinh sẽ được học những bài văn về ngớ ngẩn để nhớ các công thức và định nghĩa, thay vì phát triển một trực giác tự nhiên về phương hướng và tính đối xứng của chính mình. Các cách đo đạc tam giác sẽ được bàn đến mà không hề nhắc gì tới bản tính tự nhiên siêu việt của các tam giác, hay những hệ quả ngôn ngữ và vấn đề triết học khi làm những phép đo đạc như vậy. Máy tính bỏ túi được yêu cầu sử dụng, như thế để làm mù mờ thêm những vấn đề đã khó thấy sẵn rồi.

TIỀN – GIẢI TÍCH: Một món súp hỗn độn và vô nghĩa lý của hàng đống các chủ điểm rời rạc. Hầu hết là các cố gắng nửa vời để đưa những phương pháp đánh giá từ cuối thế kỷ 19 vào một bối cảnh mà chúng không hề cần thiết hay hữu ích gì hết. Những định nghĩa chuyên ngành như “giới hạn” hay “tính liên tục” được giới thiệu để làm phức tạp thêm mọi vấn đề. Và như cái tên đã gợi ý, đây là môn học để chuẩn bị cho bộ môn Giải tích, nơi mà giai đoạn cuối cùng của sự hồ lộn hóa tất cả những ý tưởng tự nhiên liên quan đến hình khối hay chuyển động sẽ hoàn toàn hoàn thiện.

GIẢI TÍCH: Bộ môn này sẽ khám phá toán học của chuyển động, và cách tốt nhất để làm thế là chôn vùi nó dưới một núi những công thức và định nghĩa không cần thiết. Mặc dầu là lần đầu tiên các học sinh được giới thiệu với vi phân và tích phân, nhưng những ý tưởng đơn giản mà sâu sắc của Newton và Leibniz sẽ bị dẹp bỏ để nhường chỗ cho cách tiếp cận dựa vào hàm số, tân tiến và phức tạp hơn, những phép toán được thiết kế ra để đối phó với những cuộc khủng hoảng cao cấp của toán giải tích mà rõ ràng không hề áp dụng gì ở đây, nhưng tất nhiên điều đó sẽ không được nhắc tới. Chỉ để sau này các em sẽ lại học lại chúng một lần nữa ở đại học, vẫn đúng y từng chữ, từng dòng như thế.

* * *

Vậy đấy, tất cả của bạn đấy. Một đơn thuốc để vĩnh viễn phá hủy tư duy của những người trẻ – một liều thuốc chữa trị vô cùng hiệu quả cho trí tò mò của từng học sinh. Họ đã biến toán học thành thứ kinh khủng gì thế này!?

Có một sự sâu sắc đến ngoạn mục và một vẻ đẹp đến choáng ngợp ở loại hình nghệ thuật cổ xưa này. Thật mỉa mai biết bao khi người ta lại bỏ qua toán học như thể nó là thứ đối nghịch hoàn toàn với sự sáng tạo. Họ đang bỏ qua một loại hình nghệ thuật còn cổ xưa hơn bất kỳ quyển sách nào, sâu sắc hơn bất kỳ bài thơ nào, và trùu tượng hơn bất cứ thứ trùu tượng nào. Và chính trường học là thủ phạm đã gây ra tất cả những điều này! Thật là một vòng luẩn quẩn đáng buồn đến bao, khi hàng ngày biết bao giáo viên ngây thơ vẫn tiếp tục đầu đọc những thể hệ học trò ngây thơ. Tất cả đã có thể vui hơn biết bao, nếu...

SIMPLICIO: Được rồi, tôi hoàn toàn tuyệt vọng rồi. Giờ sao đây?

SALVIATI: Ừm, tôi nghĩ mình vừa có một ý tưởng về một khối hình kim tự tháp trong một cái hộp vuông...

Người dịch: Nguyễn Tiến Đạt (sutucon)

Hà Nội, 01/08/2013, 23h58'