

第1章 単振動の解法とエネルギー

この章では単振動の定義とパラメータを説明した後、単振動に対応する微分方程式を導出し、一般解を2つの方法で求める。また、単振動には異なる表示法があることを述べ、さらに単振動のエネルギーについて調べる。

1.1 単振動とは

一直線上を運動する質点の変位 x が時間 t の関数 $x = x(t)$ として

$$x = a \cos(\omega t + \delta) \quad \text{ここで、} a, \omega, \delta : \text{定数} \quad (1.1)$$

または

$$x = a \sin(\omega t + \delta') \quad \text{ここで、} \delta' = \delta + \pi/2 \quad (1.2)$$

と表されるとき、これを単振動 *simple harmonic oscillation* と言い、このような運動をする質点を1次元調和振動子 *1-dimensional harmonic oscillator*¹ と呼ぶ。単振動はあらゆる物理現象に見られる最も基本的な現象である。

(1.1) または (1.2) から容易に分かるように、変位 x については、

$$-a \leq x \leq a \quad (1.3)$$

であるから、定数 a は変位の最大値を定めるので、振幅 *amplitude* と呼ぶ。 $\omega t + \delta$ は位相 *phase* と呼ばれ、特に δ は $t = 0$ での位相を与えるので、初期位相 *initial phase* (もしくは位相定数 *phase constant*) と呼ぶ。

三角関数 \cos, \sin は、位相 $\omega t + \delta$ について 2π の周期性を持つので、

$$t' = t + \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega t' - \omega t = 2\pi) \quad (1.4)$$

に対して、

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t'} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t} \end{cases} \quad (1.5)$$

が成立するから、

¹このテキストでは単振動という用語を用いるが、調和振動という言葉で言い換えられることもあるし、調和振動子は広く使用される用語である。

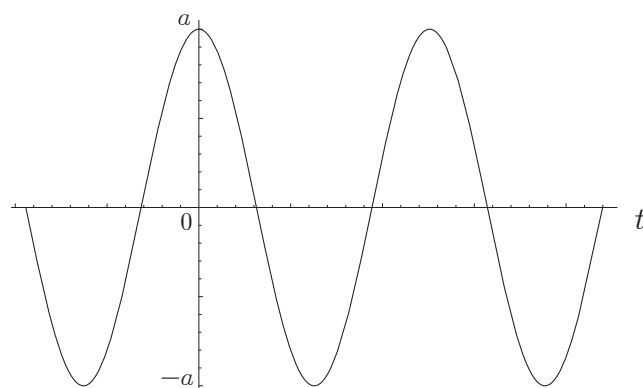


図 1.1: 単振動

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.6)$$

ごとに同じ運動を繰り返すことになる。この T を周期 *period* という。周期の逆数

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.7)$$

を振動数 *frequency* と呼び、単位時間内に繰り返される運動の回数を示す。なお、 ω は本来、角振動数 *angular frequency* と呼ばれる量であるが、本講義では簡単のため ω のことを振動数と呼ぶ。

1.2 単振動の運動方程式

1次元のバネの運動方程式から、単振動を導いてみよう。バネの質量を m 、バネ定数を k 、質点の変位 $x = x(t)$ とすれば、バネに加わる力（復元力）は $-kx$ なので、Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.8)$$

と書くことが出来る。整理して

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \text{where} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ は振動数} \quad (1.9)$$

となる。これは2階線形常微分方程式である。バネだけでなく、微小振幅の単振り子など様々な振動現象に対して同様な微分方程式が得られる。その意味でこの微分方程式は単振動を記述する基本的な方程式である。ただし、振動数 ω の形 (1.9) は問題に応じて変わってくる²。

2階常微分方程式は独立な2つの解（特解という）(f, g とする）が求まれば、2つの積分定数 (c_1, c_2 とする）をかけて、足し合わせれば、一般解は $c_1 f + c_2 g$ として求めることができる。2つの積分定数は

²たとえば微小振幅の単振り子の場合、長さを l 、重力加速度を g として、 $\omega \equiv \sqrt{g/l}$

2つの初期条件によって決められる。通常はある初期時刻における位置と速度という2つの初期条件により積分定数が決まり、時間の関数として変位は完全に決まる。このことをいいかえると、運動方程式に従う粒子の運動は一般解と2つの初期条件がわかれば無限の将来まで決まることを意味する。

1.3 単振動の微分方程式の解法1：エネルギー積分

最初に、2階線形定数係数常微分方程式 (1.9) を解くために、エネルギー積分と呼ばれる方法で解く。この方法は運動方程式からエネルギー保存則を導く一般的な方法を用いる。この方法は後のもっと複雑な問題に対するエネルギー保存則にも適用できる方法である。

(1.9) の両辺に、 dx/dt をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} (m \frac{dv}{dt} + kx) \frac{dx}{dt} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0 \\ \therefore \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} &\equiv E_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (1.10)$$

ここで2行目に移るときに時間で積分しており、2階微分方程式が1階微分方程式になっている。これを解釈すると、(1.10) 式左辺第1項は質点の運動エネルギー、第2項は位置エネルギーを表す。したがって (1.10) は力学的エネルギー $E_0 = \text{運動エネルギー} + \text{位置エネルギー}$ が保存されることを表す。一般解を求めるためには (1.10) をもう一度時間積分しなければならない。(1.10) を $v = dx/dt$ について整理して

$$\begin{aligned} v^2 + \omega^2 x^2 &= \frac{2E_0}{m} \equiv a^2 \omega^2, \quad \text{where} \quad a \equiv \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E_0}{m}} \\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{a^2 - x^2} \omega \end{aligned} \quad (1.11)$$

両辺を $\sqrt{a^2 - x^2}$ で割って、 t_0 から t まで t で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dx}{dt} dt &= \omega(t - t_0) \\ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{a \cos \theta} a \cos \theta d\theta = \theta - \theta_0 = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \theta_0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = a \sin\{\omega(t - t_0) + \theta_0\} = a \sin(\omega t + \delta'), \quad \text{ここで} \quad \delta' \equiv -\omega t_0 + \theta_0 \quad (1.12)$$

この最後の式は任意の時間 t における変位 $x(t)$ を与えていて、かつ2つの積分定数=任意定数を含んでおり、しかも上記の導き方は逆にさかのぼることができるゆえもとの微分方程式を満たしている（疑問に感じる人は直接代入して確認せよ）ので、一般解である。

ここで a と δ' は初期条件で決まる2つの積分定数である。2階の常微分方程式である (1.9) は時間 t で1回積分するごとに積分定数は1個現れるので、一般解には常に2個の積分定数が含まれることになり、序論で述べた「2階常微分方程式は2個の積分定数を持つ」という一般論と一致する。

上のエネルギー保存則の導き方からわかるように、力学的エネルギーを与えることは初期条件を1つ与えることに相当する。したがってもし力学的エネルギーがわかっているならば、残りの初期条件は1つだけとなる。

また、(1.9) の形の微分方程式は必ず単振動 (1.12) の解を持つことが分かる。このため (1.9) は単振動の微分方程式と呼ばれている。

振動数 ω は、質量とバネ定数が決まれば 1 つに決まってしまう単振動の基本的な定数である。バネの場合には (1.9) で与えられるので、質量が小さいほど、またバネ定数が大きいほど振動数は大きくなる、すなわち素早く振動する。

1.4 単振動の微分方程式の解法 2：指数関数を用いる方法

微分方程式 (1.9) を求める第 2 の方法は指数関数 \exp を用いる方法である。第 1.2 節でも述べたが、単振動の微分方程式 (1.9) (2 階線形常微分方程式) の一般解を求めるためには 2 つの独立な特解を求めればよい。2 階線形定数係数常微分方程式の特解は指数関数 \exp を用いる事によって簡単に得ることが出来る。この方法は簡単であり、より複雑な振動にも³、さらには波動の場合にも適用できる有力な解法である。

まず解を

$$x = e^{i\lambda t} \quad (1.13)$$

の形に仮定する。ただし λ は一般に複素数である。(1.13) を (1.9) に代入して

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \omega^2)e^{i\lambda t} &= 0 \\ \therefore \lambda &= \omega \quad \text{or} \quad \lambda = -\omega. \end{aligned} \quad (1.14)$$

2 つの独立な特解が

$$x = e^{i\omega t} \quad \text{or} \quad x = e^{-i\omega t}$$

とえられたので、一般解は

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (1.15)$$

となる。ここで、 C_1, C_2 は複素数の積分定数である。

ただし元の微分方程式 (1.9) は実係数で、変位 x は実数 (観測される量はいかなる場合にも実数である) でなければならないから、複素共役を $*$ で表して、 $x^* = x$ 、したがって、

$$(C_2)^* = C_1 \quad (1.16)$$

でなければならない。書き換えると

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{i\omega t} + (C_1)^* e^{-i\omega t} \\ &= \text{Re}\{C e^{i\omega t}\} \quad \text{where } C \equiv 2C_1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$= a \cos(\omega t + \delta) \quad \text{where } a \equiv |C|, \quad \delta \equiv \arg(C) \quad (1.18)$$

と、一般解が求められる。当然のことながら独立な実数積分定数の数は (1.12) と同じ 2 つである。

大抵の場合、実部をとることは暗黙の了解として、単純に

$$x = C e^{i\omega t} \quad (1.19)$$

と解を置いてしまうことも多いのである⁴。ただし、この形におく時、複素定数 C には初期位相 δ があること、 $C = |C|e^{i\delta}$ を忘れないように注意。

³第 6 章以降で議論する連成振動や基準振動でも通用する

⁴(1.18) や (1.19) において、一般に、複素積分定数 $C = |C|e^{i\delta}$ であるから、積分定数はもちろん 2 個である。

なお「2つの解を重ね合わせることや複素数に拡張して最後に実数部を取る」が成り立つのは単振動の方程式が線形であり、重ね合わせの原理が成り立っているからである。

1.5 単振動の三角関数表示と指数関数表示の同等性

上の (1.12) で得た単振動を正弦関数 \sin で表す式は三角関数の性質 $\sin(\omega t + \delta) = \cos(\omega t + \delta - \pi/2)$ より、 $\delta - \pi/2$ を改めて δ と定義し直せば

$$x = a \cos(\omega t + \delta) \quad (1.1)$$

と余弦関数 \cos で書き直すことができる。

また、三角関数の加法定理を用いれば (1.1) は、

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (1.20)$$

と書くこともできる。ただし $A_1 = a \cos \delta$, $A_2 = -a \sin \delta$ である。

さらに、単振動の指数関数表示 (1.17) もオイラーの公式 *Euler's formula*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.21)$$

を用いれば

$$x = C_1 e^{i\omega t} + (C_1)^* e^{-i\omega t} = (C_1 + (C_1)^*) \cos \omega t + i(C_1 - (C_1)^*) \sin \omega t$$

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t. \quad (1.22)$$

ただし、 $A_1 \equiv 2\text{Re}\{C_1\}$, $A_2 \equiv -2\text{Im}\{C_1\}$ である。

このように単振動は、三角関数による表現 (1.1), (1.2), (1.20) と、指数関数による表現 (1.17) または (1.19) のどの表現をとっても良く、物理的に同じ内容を表している。

すなわち

$$\begin{cases} x = a \sin(\omega t + \delta') = a \cos(\omega t + \delta) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \\ = \text{Re}\{C e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}(C e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}) \end{cases} \quad (1.23)$$

である。

1.6 単振動のエネルギー論

すでに、エネルギー積分で解く方法 (1.10) のところで、エネルギー保存則を示したが、再度導いておく。振動子に働く復元力 F の位置エネルギーを $U(x)$ とすると、

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (1.24)$$

であるから、 $F = -kx = -m\omega^2 x$ であることを使ってこれを積分すると、

$$U(x) = - \int_0^x F(x) dx = +m\omega^2 \int_0^x x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (1.25)$$

もちろん、 $x = x(t)$ なので、 $U = U(t)$ である。

一方、質点の運動エネルギー K は $K = mv^2/2$ であるから、

$$K(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (1.26)$$

【問い】

質点の運動が (1.1) 式 $x = a \cos(\omega t + \delta)$ で表されるとき、

1. 位置エネルギーと運動エネルギーの和を E で表すと、 $E = U(t) + K(t)$ は時間と共にどのような振舞いをするか？
2. ある物理量 A の一周期にわたる時間平均 \bar{A} を

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T A dt \quad (1.27)$$

の様に定義するとき、 \bar{U}, \bar{K} はいくらか？ また、互いの大小関係はどうか？

【答え】

1. 今の場合、 $x = a \cos(\omega t + \delta)$ であるから (1.25) と (1.26) に代入して、

$$\begin{cases} U = \frac{m\omega^2}{2} a^2 \cos^2(\omega t + \delta) \\ K = \frac{m}{2} (-a\omega \sin(\omega t + \delta))^2 = \frac{m\omega^2}{2} a^2 \sin^2(\omega t + \delta) \end{cases} \quad (1.28)$$

従って、全エネルギー $E = U + K$ は

$$E = U + K = \frac{m\omega^2}{2} a^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{m\omega^2}{2} a^2 \sin^2(\omega t + \delta) = \frac{m\omega^2}{2} a^2 = \text{const} \quad (1.29)$$

となり、全エネルギー $E = U + K$ は時間に依存せず一定値 $m\omega^2 a^2/2$ をとり続ける。つまり (1.9) に従う単振動の力学的エネルギーは厳密に保存されている。

全エネルギーの値 $E = m\omega^2 a^2/2$ は復元力を決める定数（今の場合 $m\omega^2$ であるが、 $F = -kx$ と書かれるバネの場合などでは $k(= m\omega^2)$ ）と、運動の初期条件から決まる振幅 a によって定まる。このように単振動の全エネルギーは振幅の 2 乗と振動数の 2 乗に比例する。これは単振動のエネルギーの重要な特徴で以後新たな形でたびたび出てくる。

2. 次に時間平均を求めよう⁵。

$$\bar{U} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \overline{\cos^2(\omega t + \delta)}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2(\omega t + \delta)} &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \delta)}{2} dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、結局

$$\bar{U} = \frac{m\omega^2 a^2}{4} \quad (1.30)$$

同様に、

$$\bar{K} = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \overline{\sin^2(\omega t + \delta)} = \frac{m\omega^2 a^2}{4} \quad (1.31)$$

(1.30)(1.31) から

$$\bar{U} = \bar{K} = \frac{m\omega^2 a^2}{4} \quad (1.32)$$

つまり時間平均された位置エネルギーと運動エネルギーは等しい。

時間平均の公式

同じ振動数 ω で単振動する 2 つの量 x, y が、次のように指数関数で表示されているものとする。

$$x = \operatorname{Re}\{X e^{i\omega t}\}, \quad y = \operatorname{Re}\{Y e^{i\omega t}\} \quad (1.33)$$

このとき、2 つの量の積の 1 周期平均値 \overline{xy} は次の式で与えられる。

$$\overline{xy} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{XY^*\} \quad (1.34)$$

この公式を用いると、

$$x = a \cos(\omega t + \delta) = \operatorname{Re}\{a e^{i\delta} e^{i\omega t}\}$$

ならば

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} m \omega^2 \overline{x^2} = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a e^{i\delta} \cdot a e^{-i\delta}\} = \frac{1}{4} m \omega^2 a^2 \\ \bar{K} &= \frac{1}{2} m \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{i\omega a e^{i\delta} \cdot (-i\omega) a e^{-i\delta}\} = \frac{1}{4} m \omega^2 a^2 \end{aligned}$$

というように、時間平均値が容易に計算できる。

【問題】

公式 (1.34) を証明せよ。

⁵位置エネルギーは基準をどこにとってもよいので、定数を足しても引いてもよいという不定性が常にある。ここで考えている位置エネルギーやその平均は (1.25) からわかるように単振動の振幅が 0 になったときに 0 となるように定義していることに注意。

第2章 減衰振動

前章で扱った単振動は、どれだけ時間が経っても一定の周期で運動を繰り返す理想化されたものであったが、現実には空気による粘性抵抗や摩擦などによって振動の振幅は次第に小さくなって行き、最後には止まってしまうのである。これは振動子を構成するミクロの粒子集合体が、外界（例えば空気）を構成しているミクロの粒子集合体が行っている無秩序な熱運動の前にさらされていて、両者の衝突によって振動子の持つ「秩序だったエネルギー」が次第に外界へ分け与えられて行く過程と見ることができる。

この問題を厳密に考えると、振動子という巨視的な系とミクロの粒子集合体の系を同時に扱う必要があり、巨視的な位置や速度に関する物理量を扱うという意味での力学だけでは扱うことはできず、本来は力学と熱学の方程式を両方同時に扱うべきものである。そこではもちろん全エネルギーの保存則が厳密に成立している。しかしそうすると手におえないほど問題が複雑になりすぎる。以下では現実世界の粘性抵抗や摩擦が近似的に速さに比例するというに着目して力学の世界だけで問題が解けるように簡単化する。さらに粘性抵抗や摩擦は厳密に速さに比例すると理想化して取り扱う。この取り扱いにおいては力学的エネルギーは保存されないことになる。

それでは減衰振動 *damped oscillation* を簡単に見て行こう。

2.1 速さに比例する粘性抵抗

ここでは速さ $v(=dx/dt)$ に比例する抵抗力 F_v が働く場合を考えよう。

一般に流体中でゆっくり運動する物体に働く抵抗力 F_v は物体の運動の速さ v に比例する（ストークスの法則）し、その向きは運動の方向とは逆である。従って、抵抗係数を $\Gamma > 0$ とすると、

$$F_v \equiv -\Gamma \frac{dx}{dt} \quad (2.1)$$

これは図 2.1 のように流体中で振動子を運動させた場合に対応すると考えておけばよいだろう。

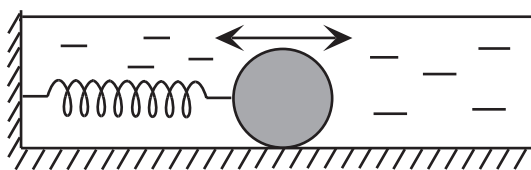


図 2.1: 速さに比例する抵抗力が働く振動子

運動方程式は、働く力が復元力と抵抗であるから、系の固有振動数を ω_0 とすると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \Gamma \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

2.2 減衰項を持つ運動方程式の解法

運動方程式は (2.2) であるが、扱いやすいように少し整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0, \quad \text{where } \gamma \equiv \Gamma/2m \quad (2.3)$$

(2.3) を解くには指数関数の解の形を仮定するのが簡単である。

ただし、単振動の場合には振動することを前提として初めから指数部分を純虚数の $i\omega t$ の様に置いたが、(2.3) では1階微分の項を新たに含んでいるので指数としては複素数を仮定して、

$$x = e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

と置こう。これを (2.3) に代入すれば、

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \therefore \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

従って、これを満たす λ は容易に求められて、

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} \lambda_1 (= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \\ \lambda_2 (= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \end{cases} \quad (2.6)$$

この2つの λ を用いると、一般解は両者の線形結合として

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (2.7)$$

と一応書くことができるが、 γ と ω_0 の大小関係によって減衰振動の様相は大きく異なってくる。つまり、指数 λ が複素数か実数かということによってである。

【問い】

抵抗係数 γ と固有振動数 ω_0 の大小関係を以下のように場合分けして解の振舞いを論ぜよ。

1. 抵抗が小さくて $\gamma < \omega_0$ となる場合
2. 抵抗が大きくて $\gamma > \omega_0$ となる場合
3. 丁度 $\gamma = \omega_0$ となる場合

なお、1. の場合には $\tilde{\omega}$ として

$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

を定義すると議論し易いだろう。初期条件は、例えば $x(0) = x_0$, $dx/dt(0) = 0$ とせよ。

【答え】

1. 抵抗が小さくて $\gamma < \omega_0$ となる場合：減衰振動 *damped oscillation*

λ の根号内 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ が負となり、 λ は複素数となる。見易くするために、 $\tilde{\omega}$ を使えば、

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\gamma + i\tilde{\omega} \\ \lambda_2 = -\gamma - i\tilde{\omega} \end{cases} \quad (2.8)$$

と λ が陽に複素数であることを記述できる。

この時の一般解は (2.7) から

$$x = Ae^{-\gamma t + i\tilde{\omega}t} + Be^{-\gamma t - i\tilde{\omega}t}$$

となるわけだが、 $\exp(-\gamma t)$ を括りだして整理すれば、 a, δ を定数として、次のように書けることになる。

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \delta) \quad (2.9)$$

初期条件を与えれば、次の関係が成り立つ。

$$a \cos \delta = x_0, \quad -a(\gamma \cos \delta + \tilde{\omega} \sin \delta) = 0$$

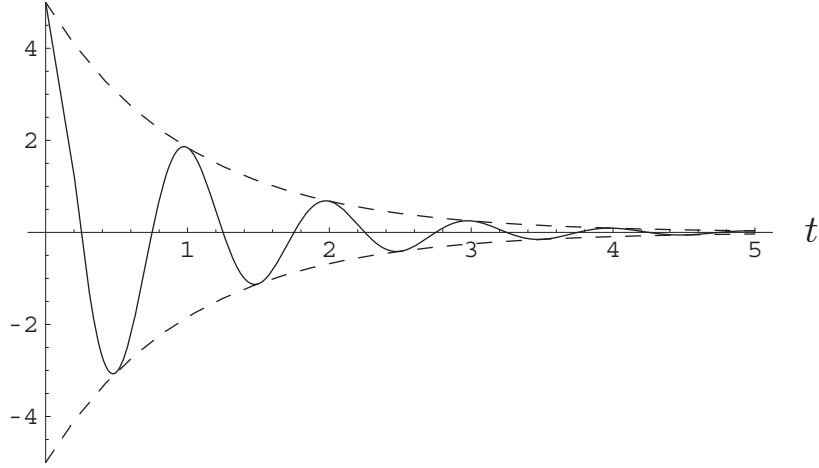


図 2.2: 減衰振動の例

これを解けば、 a, δ は

$$a = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\tilde{\omega}}\right)^2}, \quad \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\tilde{\omega}}\right)^2}}, \quad \sin \delta = \frac{-\frac{\gamma}{\tilde{\omega}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\tilde{\omega}}\right)^2}} \quad (2.10)$$

と定まる。運動の様子は図 2.2 のようなもので、振幅が減衰しながら振動を行う**減衰振動** *damped oscillation* となる。

振幅が最初の振幅の $1/e$ になる時間 τ は (2.9) より $\tau = 1/\gamma$ となる。この時間 τ は**減衰の時定数**と呼ばれる。また、解曲線が $\pm a \exp(-\gamma t)$ に接するところは $\cos(\tilde{\omega}t + \delta) = \pm 1$ となるところで、これらの位置における x の値を順に x_1, x_2, x_3, \dots とすれば、1 周期後の振幅比は

$$\frac{x_{n+2}}{x_n} = e^{-\gamma T} = \text{const.} \quad \text{ここで} \quad T \equiv \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (2.11)$$

となり、時間に無関係な定数となる。この定数に関しては、その指数部分 γT を

$$\Lambda \equiv \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (2.12)$$

と定義し、対数減衰率 *logarithmic decrement* と呼ぶことがある。対数減衰率を用いれば、減衰振動の振幅は一周ごとに $1/(\exp \Lambda)$ 倍ずつ減少していくと言える。

減衰の時定数 τ が小さいほど、または対数減衰率 Λ が大きいほど、振動の振幅がすぐに減衰し、逆ならば振動は長続きする。 $\gamma = 0$ なら時定数は無限大となり、対数減衰率は 0 となり、もちろん抵抗がない場合の結果と一致する。

2. 抵抗が大きくて $\gamma > \omega_0$ となる場合：過減衰 *over damping*

$\gamma > \omega_0$ なので、(2.6) の λ_1, λ_2 いずれも実数である。従って、一般解 (2.7) の λ, A, B も単に実数として扱えばよい。これは時間とともに減衰するだけで振動は全く起こらない。

ただし、振動は起こらないと言っても減衰係数の大きさや初期値の与え方によっては極小や極大が生じることはある（図 2.3 参照）。

この様な解は過減衰 *over damping* と呼ばれる。

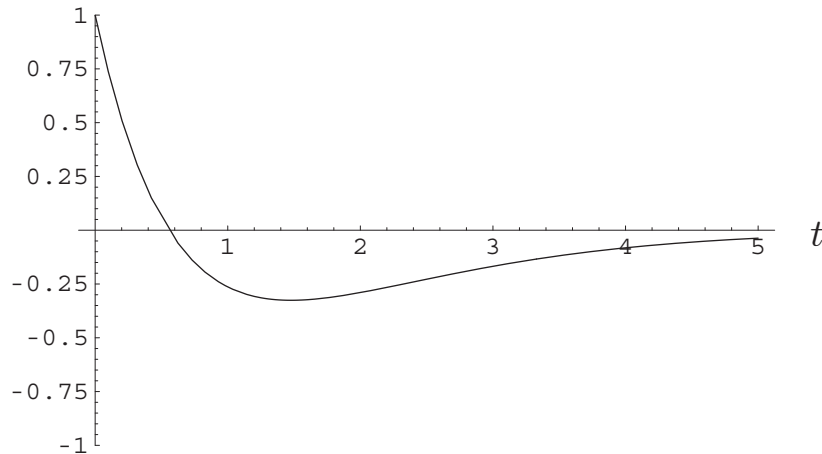


図 2.3: 過減衰の例

3. 丁度 $\gamma = \omega_0$ となる場合：臨界減衰 *critical damping*

この場合、(2.6) は重根となるので、(2.7) は $x = A \exp(-\gamma t)$ のみしか与えず、任意定数 2 つを含む一般解とはならない。この様なときには新たに解を設定してやらなければならないわけだが、次の 2 通りのやり方がある。

1. 減衰振動の解の利用

一般解 (2.9) は、(2.8) を (2.7) に入れて実部を取り、任意定数 A, B をまとめて a, δ にしたものであるが、(2.8) を (2.7) に入れたときの実部と虚部はそれぞれ

$$e^{-\gamma t} \cos \tilde{\omega} t, \quad e^{-\gamma t} \sin \tilde{\omega} t \quad (2.13)$$

であるから、これらを独立な解と見なしても良い。

今の場合、 $\gamma \rightarrow \omega_0$ を考えるので、(2.13) で $\tilde{\omega} \rightarrow 0$ を調べれば、

$$\cos \tilde{\omega} t \rightarrow 1, \quad \sin \tilde{\omega} t \rightarrow \tilde{\omega} t \quad (2.14)$$

なので、(2.13) の 2 つの解は

$$e^{-\gamma t}, \quad t e^{-\gamma t} \quad (2.15)$$

に漸近する。(2.15) の 2 つ目の解が新しい独立な解である。従って、一般解は

$$x = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t} \quad (2.16)$$

で与えられる。

2. 定数変化法

λ が重根となってしまうために $x = A \exp(-\gamma t)$ しか残らないと書いたが、ここで登場した定数係数 A を時間 t の関数と見直して解を見つけようと言うのが定数変化法である。

仮に一般解を

$$x = u(t) e^{-\gamma t} \quad (2.17)$$

と置いてみよう。これを (2.3) に代入し、 $u(t)$ が満たすべき条件を調べてみよう。(2.3) に代入して、 $\gamma = \omega_0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2\gamma \frac{du}{dt} + \gamma^2 u + 2\gamma \left(\frac{du}{dt} - \gamma u \right) + \omega_0^2 u &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 u}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

が $u(t)$ が満たすべき条件となる。明らかに

$$u(t) = Ct + D \quad \text{ここで } C, D : \text{定数} \quad (2.19)$$

であればよい。(2.19) を (2.17) に代入すれば、一般解として (2.16) を得る。

臨界減衰の解は過減衰の解と同様に振動をせずに減衰して行くわけだが、(2.16) を見れば容易にわかるように時間 t に比例する項を含むので、減衰の仕方は少し緩やかになる。

2.3 減衰振動系のエネルギー論

この節の最後に減衰振動系のエネルギーについて調べておこう。単振動系では力学的エネルギーは保存されていた。なお、前章の単振動でのエネルギー論では単純に運動エネルギーと位置エネルギーから考察したが、ここでは減衰させる力が働いている一般的な場合となっているので、調べる方法もより一般的な「運動方程式から仕事率 $Power$ を求める」やり方で議論しよう。

運動方程式 (2.2) 式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \Gamma \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

の両辺に dx/dt をかけると、

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = -m\omega_0^2 x \left(\frac{dx}{dt} \right) - \Gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

変形して

$$m \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} + m\omega_0^2 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} = -\Gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

よって

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right\}}_{\text{=力学的エネルギーの時間変化率}} = \underbrace{-\Gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}_{\text{=減衰抵抗の仕事率}} \quad (2.20)$$

と力学的エネルギー（＝運動エネルギー＋振動子の位置エネルギー）の時間変化を記述する方程式が得られる。

明らかに、右辺の減衰抵抗の仕事率は**負確定** *negative definite* なので、(2.20) は

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad (2.21)$$

つまり、この速さに比例する粘性抵抗を持つ減衰振動系では必ず力学的エネルギー E は減少することを示している¹。

¹この章の最初に述べたように、この減少した力学的エネルギーは熱エネルギーなどに変換されており、熱エネルギー等まで含めた全エネルギーはもちろん保存されている。

第3章 強制振動

いままではバネなどの復元力以外の力は働かないと振動を考えてきた。この章では外力が働く場合の単振動（強制振動）を抵抗や粘性も考えながら調べていく。強制振動では共鳴という極めて重要な現象が現れてくる。この章では強制振動の振幅や位相がどのように決まるか、また強制振動のエネルギーはどうなっているかを調べていく。

数学的には強制振動の運動方程式は新しい形の微分方程式である非斉次微分方程式となるので、この解法も物理数学の復習となるであろうが、学んでいく。

3.1 強制振動の微分方程式：斉次方程式と非斉次方程式

これまでの章で扱った運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (1.9)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2x - \Gamma \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

であるが、いずれも係数を整理したり、変数変換を行うことによって

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (3.1)$$

の形に変形できる。(3.1) は、従属関数 $x(t)$ とその微係数のみを含む微分方程式で斉次（同次）方程式 *homogeneous equation* と呼ばれる。一方、従属関数 $x(t)$ 以外の関数 $f(t)$ を含む

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = f(t) \quad (3.2)$$

は、非斉次（非同次）方程式 *inhomogeneous equation* と呼ばれる¹。以後では $f(t)$ は簡単のために時間について周期的な関数だけを考える²。この関数 $f(t)$ は物理的に考えると外力となる。関数 $f(t)$ は変位 $x(t)$ を全く含んでいない。つまりバネの変位の状態には無関係に時間的に変動するので、外力となるのである。ということで「振動子の系に周期的な外力が加わる」強制振動 *forced oscillation* は、まさに、この(3.2)の非斉次方程式で記述されるのである。

非斉次方程式を解く上で、対応する斉次方程式（つまり、その方程式の右辺=0）の一般解を求めることおよび非斉次方程式の特解の両方が必要である。両者が求めれば非斉次方程式の一般解は次のように与えられる³：

$$(\text{非斉次方程式の一般解}) = (\text{斉次方程式の一般解}) + (\text{非斉次方程式の特解}). \quad (3.3)$$

¹重ね合わせの原理かどうかの判断はもちろん斉次方程式による。

²あとで学ぶフーリエ級数、フーリエ変換を使えば、周期的な関数だけを考えれば良いことがわかる。

³以下この式の導出。非斉次方程式(3.2)の特解を x_e とすれば、 $\frac{d^2x_e}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_e}{dt} + \omega_0^2x_e = f(t)$ 。(3.2)とこの式を辺ごとに引き算すると、 $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2y = 0$ 。ただし、 $y \equiv x - x_e$ 。この $y \equiv x - x_e$ に関する斉次方程式の一般解は既に求まっている： $x = y(\text{斉次方程式の一般解}) + x_e(\text{特解})$ 。すなわち、非斉次方程式の一般解は(3.3)によって与えられる。

一般に n 階 (n は $n \geq 1$ の整数) の常微分方程式の一般解は n 個の積分定数を含んでいけばよい。(3.3) は n 個の積分定数を含んでいて、しかも第 2 項が非斉次方程式の特解なので、(3.2) の一般解になるのである。

斉次方程式の一般解は既に学んだから、非斉次方程式の特解を見つければ強制振動の問題は解けることになる。ただし、気をつけなければならないのは、しばしば特解の分母に系のパラメータの取り方によっては特異 *singular* (解が発散する) となる状況が含まれる。これについては、少し具体的な問題設定をして見ていくことにしよう。

3.2 粘性がない場合の強制振動

手始めに、粘性による抵抗力なし ($\gamma = 0$) で、周期的な外力 ($f(t) = f_0 \cos \omega t$) が加わる場合について考えてみよう。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (3.4)$$

右辺の強制項の振動数 ω は一般に振動子系の固有振動数 ω_0 とは異なることに注意してほしい。

例えば、滑らかな水平面上にばね定数 k のばねを置き、一方の端に質量 m の質点をつなぎ、他方の端の位置 x_0 を

$$x_0 = \frac{mf_0}{k} \cos \omega t$$

のように単振動させると、質点の釣合の位置からの変位 x はこの方程式にしたがって時間変化する。

3.2.1 非斉次方程式の解法

(3.4) の右辺が 0 である斉次方程式の一般解は良く知っているように

$$x = a \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (3.5)$$

である。我々がやるべきことは (3.4) の特解を見つけることだが、右辺の強制項は振動数 ω で振動するわけであるから、きっと振動子もこの振動数に引きずられて振動するであろうことは想像に難くない。従って、特解として

$$x = A \cos \omega t \quad (3.6)$$

と仮定してみよう。(3.4) にこれを代入すれば、

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)A \cos \omega t = f_0 \cos \omega t \quad \therefore \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.7)$$

つまり $\omega \neq \omega_0$ の場合には、 A が (3.7) を満たせば、(3.6) は (3.4) の特解となる。従って、(3.4) の一般解は

$$x = a \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (3.8)$$

第 2 項の強制力に対応する特解は、(3.4) の右辺の外力項と較べて、分母にある $\omega_0^2 - \omega^2$ が異なっている。符号のみに注目すると、 $\omega < \omega_0$ の時には同位相 (同符号) であり、 $\omega > \omega_0$ の時には逆位相 (逆符号) である。

【問題】

強制振動において、 $\omega \ll \omega_0$ の時には力と同じタイミングで変位が変動し、 $\omega \gg \omega_0$ の時には力と変位が逆符号になる理由を考察せよ。

一方 $\omega = \omega_0$ の場合には、(3.7) は解が存在しない、つまり (3.6) はそのままでは適当でない。そこで 14 ページでも用いた定数変化法と呼ばれる微分方程式の解法を用いよう。(3.6) の場合、定数変化法とは定数 A を時間 t の関数と考えるのである。ただし、計算の簡単化のために指数関数表示を用いる：

$$x = \text{Re}\{A(t)e^{i\omega t}\}. \quad (3.9)$$

ここで A は複素数である。前と同様にこれを (3.4) に代入すれば、 $\omega = \omega_0$, $\cos(\omega_0 t) = \text{Re}(e^{i\omega_0 t})$ に注意して

$$\text{Re}\left[\left\{\frac{d^2 A}{dt^2} + 2i\omega_0 \frac{dA}{dt} - f_0\right\}e^{i\omega_0 t}\right] = 0. \quad (3.10)$$

この式が任意の t に対して成立するためには

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 2i\omega_0 \frac{dA}{dt} - f_0 = 0. \quad (3.11)$$

でなければならない⁴。定数変化法ではこの微分方程式の特解を求めればよいので、一番簡単な解を探すことにする。 $B = dA/dt$ を使って書き換えると

$$\frac{dB}{dt} + 2i\omega_0 B = f_0$$

B が時間によらないとすれば

$$\frac{dA}{dt} = B = \frac{f_0}{2i\omega_0}$$

時間積分して積分定数を 0 とおけば

$$A = \frac{f_0}{2i\omega_0} t$$

$$\therefore x = \text{Re}\left\{\frac{f_0}{2i\omega_0} t e^{i\omega_0 t}\right\} = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

となる。

したがって $\omega = \omega_0$ の場合の一般解は

$$x = a \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{f_0 t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} \quad (3.12)$$

と与えられる。この特解の振幅は時間とともに限りなく振幅が増加することが分かる。

⁴たとえば $\text{Re}\{Be^{i\omega_0 t}\} \equiv \{Be^{i\omega_0 t} + B^*e^{-i\omega_0 t}\}/2 = 0$ という式が、任意の t に対して成立するためには $B = 0$ と $B^* = 0$ となるが、第 1 式から第 2 式は導かれるので、結局 $B = 0$ となる。

【問い】

1. 初期条件として $x = 0, dx/dt = 0$ at $t = 0$ が与えられたとき、(3.8) の解はどの様になるか。
2. 例えば、 $\omega = 0.8\omega_0, f_0 = 4\pi^2$ のときの解の振舞いの概略を図示せよ。なお、簡単のために $\omega_0 = 2\pi$ とせよ。
3. $\omega = \omega_0$ での x の振舞いはどうなるか？

【答え】

1. 初期条件は $x = 0, dx/dt = 0$ at $t = 0$ であるから、

$$\begin{cases} x(0) = a \cos \delta + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\omega_0 a \sin \delta = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

よって、

$$\delta = 0, \quad a = \frac{-f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.14)$$

従って、

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (3.15)$$

2. (3.15) は三角関数の公式を使って

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} 2 \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t \right) \quad (3.16)$$

与えられた条件は $\omega = 0.8\omega_0, f_0 = 4\pi^2, \omega_0 = 2\pi$ なので、これを代入すれば

$$x = \frac{1}{1 - 0.8^2} 2 \sin \left(\frac{0.2}{2} 2\pi t \right) \sin \left(\frac{1.8}{2} 2\pi t \right) = \frac{50}{9} \sin \left(\frac{\pi t}{5} \right) \sin \left(\frac{9\pi t}{5} \right) \quad (3.17)$$

図 3.1 に示されるように、唸り beat⁵ が生じている。

3. $\omega = \omega_0$ の一般解は (3.12) で与えられるので、初期条件を与えれば

$$x = \frac{f_0 t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} \quad (3.18)$$

となる⁶、つまり、系の固有振動数で振動する解が得られるのだが、その振幅は(粘性がない場合には) 時間に比例して線形的に増大して行く。この様に外力 $f(t)$ の強制振動数 ω が、系の固有振動

数 ω_0 に一致して、振幅が増大することを共鳴（共振）*resonance* と言う。

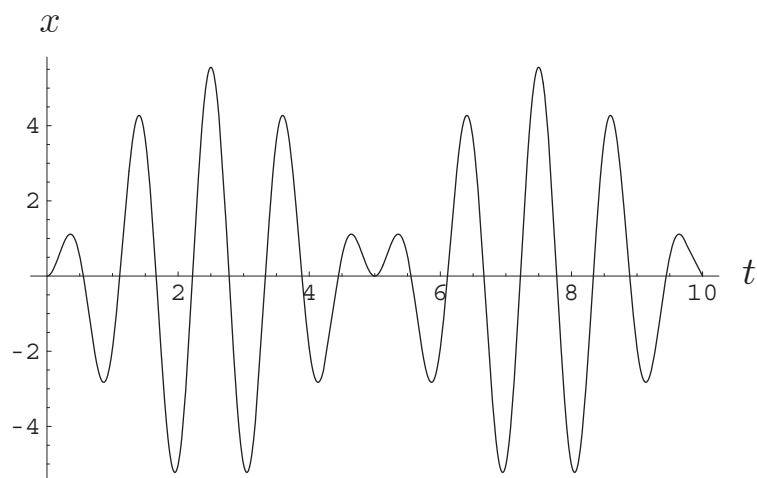


図 3.1: 強制振動 : $\omega = 0.8 \omega_0$

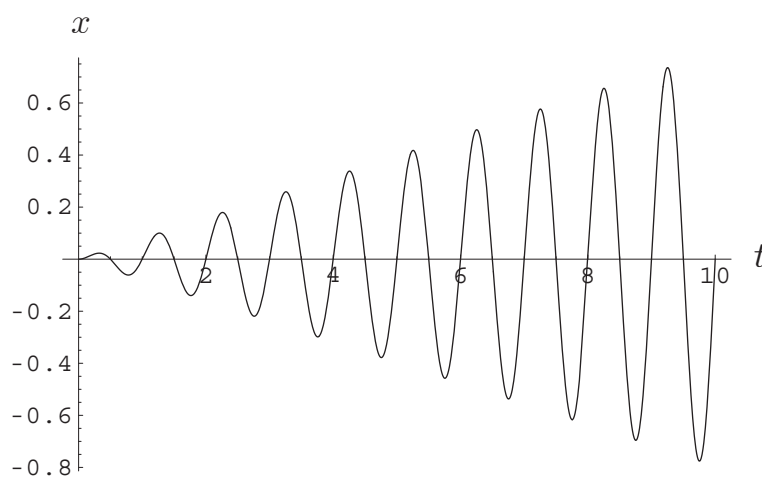


図 3.2: 共鳴 : $\omega = \omega_0$ の時の解の振舞い

⁵ 喰りは 2 つの振動数の和と差が大きく離れているときに生じる。

⁶ 得られた解 (3.15) で単純に $\omega = \omega_0$ とすれば $x = 0/0$ の不定形となるが、ロピタルの定理

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を使えば、次のように (3.18) と同じ式がえられる。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{-f_0 t \sin \omega t}{-2\omega} \right] \\ &= \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

共鳴が生じると、振幅が増大することは図 3.2 からよくわかるだろう。

振幅が無限に増大するのはエネルギー的に見ると、外力から仕事を強制され（エネルギーを供給され）、エネルギーを消費する過程を考えていないからである。

ここの議論で用いている線形非粘性の理論の範囲内では、振幅が時間に比例するので解はいずれ発散してしまうことになるわけだが、実際には近似の中で無視していた粘性が振幅の増大と共に無視できなくなって、解が発散するということはない。ただし、粘性の効果については次の節で議論する。

なお、共鳴現象は、振動数の等しい音叉同士の間で簡単に実験することができるし、ラジオやテレビのチューナーなどに共振回路として広く利用されているが、高層建築物・橋・機械の一部の共振破壊 *resonant destruction* と言った困った面も持っている。次ページに共振破壊の有名な例としてタコマ橋の崩壊の図を示す。この様なことが起こったのは、自励振動が風によって励起され、その振動数が橋の固有振動数と一致し、共振破壊に至ったと考えられている。

3.3 粘性が存在する場合の強制振動

前節で示した非粘性の場合の強制振動では、 $\omega \neq \omega_0$ の場合には唸りが永遠に続くことになるし、 $\omega \rightarrow \omega_0$ の共鳴の場合には振動子の振幅が時間と共に単調に増加して行くことになる。この結果は理想化された状況での結果で、現実の状況とは異なるものである⁷。

【粘性の存在】現実には振動子の運動に対する非粘性の仮定は近似でしかない。空気中で振らす振り子には空気による抵抗力が働くし、LC 回路でも回路自体にわずかながら抵抗 R が存在する。従って、永遠に唸りを繰り返したり、振動子の振幅が無限に増加するということはない。それならば、粘性が存在するときの解は具体的にどうなるのか？ 以下の節で考えよう。

ここでは線形の範囲内で強制力と粘性抵抗がバランスし、一定の振幅の振動に落ち着く場合を考えることにしよう。

3.3.1 粘性が存在する場合の運動方程式

バネの場合を例として運動方程式を考えてみよう。

質量 m の質点がバネ定数 k のバネに結ばれており、速度に比例する抵抗（抵抗係数 Γ ）をうけ、 $m f_0 \cos(\omega_0 t)$ という外力を受けて運動している。この時の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \Gamma \frac{dx}{dt} + m f_0 \cos \omega t. \quad (3.19)$$

前とおなじように $\omega_0^2 \equiv k/m$, $2\gamma \equiv \Gamma/m$ を定義して、整理すれば

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (3.20)$$

となって、非斉次方程式の形になる。

⁷現実の状況で考えなければならないもう1つのことは非線形性である。非線形性は実際の現象を取り扱う際には無視できないが、振動波動論の講義では非線形性に深入りせず、その近似的解法の程度にとどめる。その理由は広範な現象が線形理論に基づいて理論的に説明される事と同時に、線形理論なくして非線形現象も理解できないからである。



図 3.3: 共振破壊の例（米国ワシントン州タコマ橋 1940 年 11 月 7 日）

3.3.2 粘性が存在する場合の強制振動の解

解法は前と全く同じで、斉次方程式の一般解（ γ と ω_0 の大小によって減衰振動、臨界減衰、過減衰）に非斉次方程式の特解を加えればよい。既に斉次方程式の一般解は求めているので、ここでは (3.20) の特解を求める作業を行おう。

【特解】

強制項は振動数 ω で系を振動させようとする。一方、系自身は固有振動数として ω_0 を持っているで、系外から ω で揺さぶられたとしても直ぐに ω で振動するわけではなく、前節のような非粘性の場合には永久に唸りを繰り返して「抵抗」するわけである。しかし、今のような粘性が働いている場合には、系の固有振動は次第に減衰して行き、結局は系を揺さぶる強制力の振動数 ω での振動して残らなくなるだろう。従って、特解の振動数は ω として、解の形を

$$x = Ce^{i\omega t} \quad (3.21)$$

と仮定する。ここで、 C は複素数であることに注意。

仮定した解 (3.21) を (3.20) に代入すると⁸、

$$C(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)e^{i\omega t} = f_0e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

つまり、

$$\{C(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2) - f_0\}e^{i\omega t} = 0 \quad (3.23)$$

任意の時刻 t でこれが成立するには指数関数の係数部分 $\{ \} = 0$ とすれば良いから、

$$C = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma] \quad (3.24)$$

(3.24) で一応 C は求まったわけだが、 $C = |C|e^{i\theta}$ であることを使って更に変形すると

$$C = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} e^{-i\phi} \quad (3.25)$$

ここで、 ϕ は次のように定義される位相差 phase lag で、

$$\phi \equiv \tan^{-1} \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \sin \phi = \frac{2\omega\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \right) \quad (3.26)$$

外力の位相と系の振動の位相の差を表す。

よって、非斉次方程式の特解は、(3.25) を (3.21) に代入し、実部をとって、

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3.27)$$

⁸(3.21) を (3.20) にそのまま代入すると

$$\operatorname{Re} \{ C(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)e^{i\omega t} \} = f_0 \cos \omega t$$

であるが、右辺と左辺の形式が違うと取り扱いが面倒なので、形式を揃えて、

$$\operatorname{Re} \{ C(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)e^{i\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ f_0 e^{i\omega t} \}$$

更に実部をとることを暗黙の前提として簡略化して書いたのが (3.22) である。

【一般解】

以上から粘性が存在する場合の強制振動の解は、斉次方程式の一般解を $\tilde{x}(t; \gamma, \omega_0)$ と書くと、

$$x = \tilde{x}(t; \gamma, \omega_0) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3.28)$$

例えば、 $\gamma < \omega_0$ の減衰振動の場合には、(2.9) から

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3.29)$$

(3.29),(3.26) で、粘性係数を $\gamma \rightarrow 0$ と 0 に近づければ (3.8) に近づくので、粘性がない場合の結果と一致する。

【具体例】

具体例を示しておこう。図 3.4 は、 $\gamma < \omega_0$ の減衰振動する場合の解を計算したもので、系の固有振動数 ω_0 と強制振動数 ω の違いをはっきりとさせるためにパラメータを

$$\gamma = 1, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad \omega = 0.2\omega_0, \quad a = 5, \quad f_0 = 50 \quad (3.30)$$

と設定したものである。上図が「斉次方程式＝減衰振動」の一般解で減衰振動を表し、中図が特解で、振幅は一定である。下図は両者の和であり、強制振動の一般解を表す。

上でも述べたように、粘性の存在は系自体が持つ固有振動数 ω_0 での振動を減衰させ、圧倒的なエネルギーを持つ外部強制力の振動数 ω での振動へと系を従属させるのである。粘性が存在しなかった場合の解の振舞いとの違いに注意してほしい。

なお、今のパラメータ設定では $\omega_0 = 2\pi$ と大きめの値にしていることおよび強制振動数の値が $\omega = 0.2\omega_0$ と相対的に小さいため、強制振動に対する系の応答の振幅は強制的振幅が $f_0 = 50$ であるにも関わらず、およそ 1.3 程度と大変小さくなっている。

3.3.3 粘性の存在と振幅共鳴

前の結果を見れば、粘性は、ある意味で系の固有振動数 ω_0 の存在を忘れさせてしまうものに見えるかもしれない。しかし、 $\omega \simeq \omega_0$ 付近においては、やはり共鳴が生じる。ただし、面白いことに、粘性の効果が大きくなるにつれ、共鳴の最大振幅を与える強制振動数の値 ω_{\max} は次第に ω_0 からはずれて行くのである。系が受け取るエネルギーについては次節で述べるが、ここでは粘性の存在が振幅共鳴 *amplitude resonance* 一すなわち振幅が最大となる共鳴一に与える影響についてまず調べておこう。

【共鳴曲線】

図 3.4 で見たように、減衰振動の部分は時間が経つにつれ減少する過渡的なもので、充分時間が経った後の解は、特解 (3.27) に収束して行く。従って、平衡状態の振幅を議論するには、特解 (3.27) の振幅 $|C|$ について調べればよい。 $|C|$ を改めて書くと、

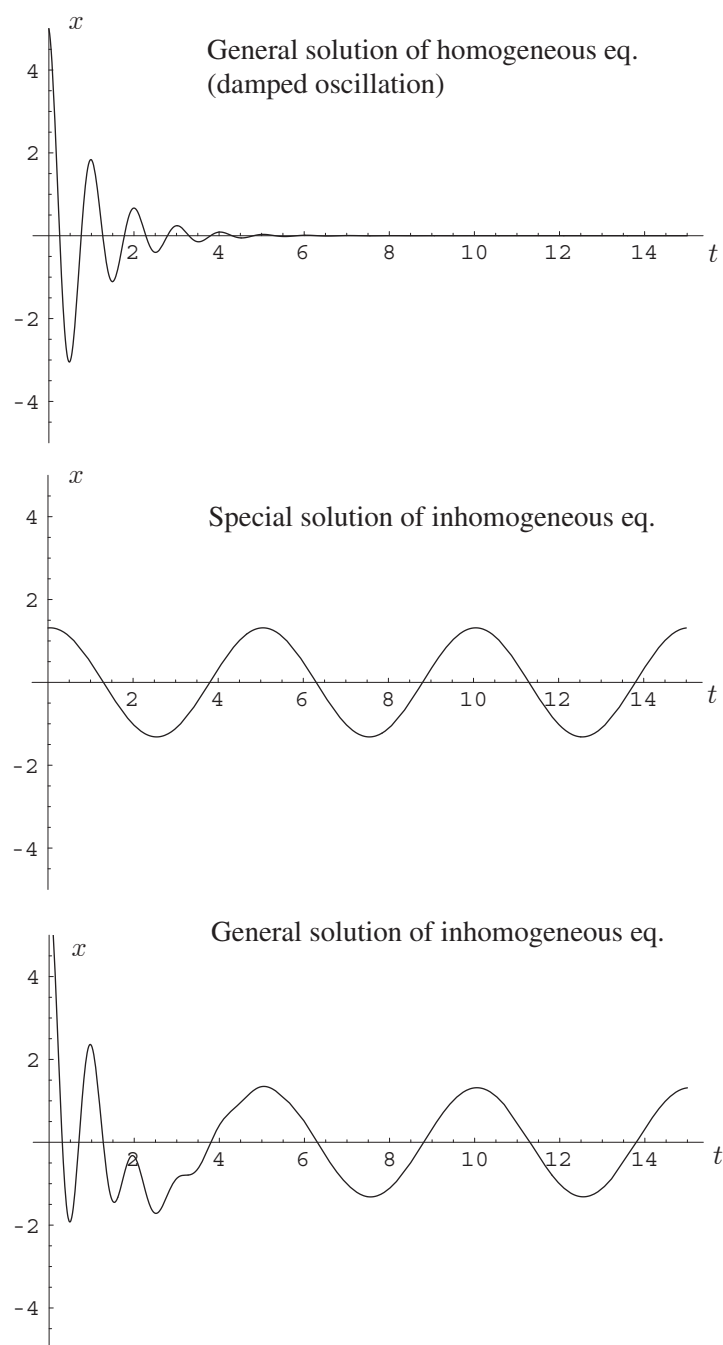


図 3.4: 粘性が存在する場合の強制振動の解の例
上から順に、斉次方程式の一般解（減衰振動）、非斉次方程式の特解、非斉次方程式の一般解

$$|C| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}} \quad (3.31)$$

図 3.5 は、様々な γ/ω_0 の値に対する $|C|$ の ω/ω_0 依存性をプロットしたもので、 $\omega = \omega_0$ が非粘性の時に共鳴が生じる振動数である。系の振動の振幅と強制振動数との関係を示すこれらの曲線は共鳴曲線 *resonant curve* と呼ばれている。

【問い】

共鳴曲線の最大値を与える ω_{\max} を求め、 ω_{\max} の γ/ω_0 に対する依存性を議論せよ。

【答え】

共鳴曲線の方程式は分かっているから、最大値を求めるには

$$\frac{d}{d\omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} = 0$$

等を計算すればよい。

$$\frac{d}{d\omega} \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} = -\frac{1}{2} \{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2\}^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\omega\{\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)\}$$

なので、最大値を与える強制振動数を ω_{\max} と書いてやることにすれば、

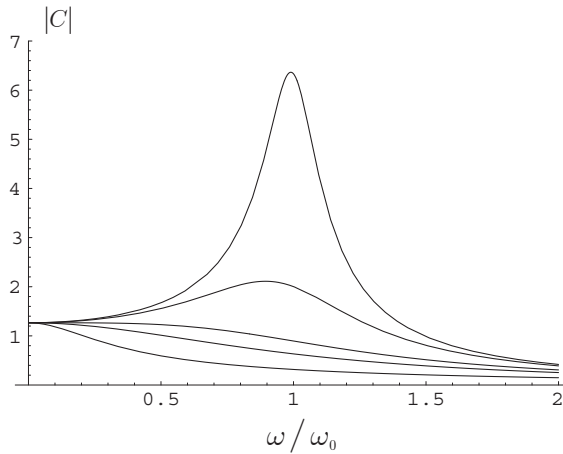


図 3.5: 粘性が存在する場合の強制振動の共鳴曲線：上から順に、 $(\gamma/\omega_0)^2 = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$

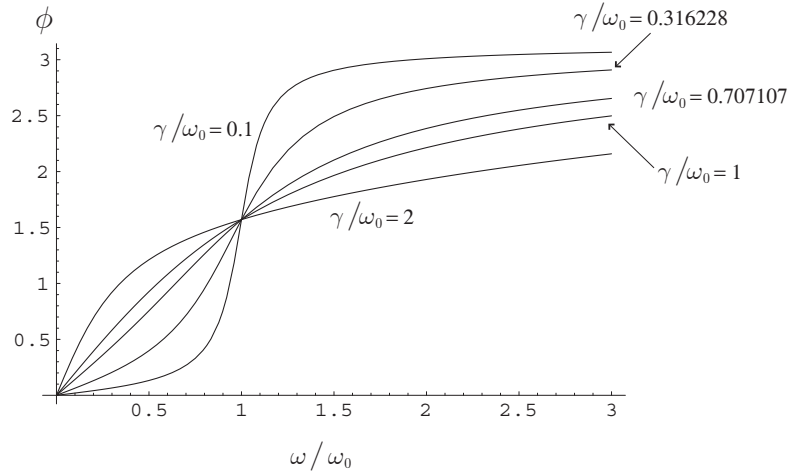


図 3.6: 強制振動と系の振動の位相差 ϕ : それぞれ $(\gamma/\omega_0)^2 = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$ に対応

$$\begin{cases} \omega_0^2 > 2\gamma^2 \quad \left(\frac{\gamma}{\omega_0} < \frac{1}{\sqrt{2}} \right) : & \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \\ \omega_0^2 \leq 2\gamma^2 \quad \left(\frac{\gamma}{\omega_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) : & \omega_{\max} = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

この様に、粘性の存在は、非粘性の場合の共鳴（ $\omega = \omega_0$ ）での発散という非現実的な結果を回避するだけでなく、共鳴による最大振幅を与える振動数にも影響を及ぼすのである。

粘性のない場合と比べて、粘性のある場合の最大振幅を与える振動数は小さくなる。これは速度に比例する摩擦力が働くので、速く振動（振動数が大きくなることに対応）すると、摩擦力が大きく働くことになるためである。 γ が大きいほど、振幅が最大となる周波数が ω_0 より小さくなる。ついには、一定（周波数が 0）の力のとき、最大に変位するようになる。

3.3.4 粘性の存在と位相差

上では粘性の存在によって非粘性の場合とは異なってきたものの手始めとして共鳴の最大振幅を与える強制振動数と系の固有振動数の関係を議論した。

もう一つ大事なものに強制力の振動と系の振動の位相差 *phase lag* ϕ がある。先に求めた位相差 ϕ の関係式をもう一度示すと、

$$\phi \equiv \tan^{-1} \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \left(\frac{\gamma}{\omega_0} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad (3.26)$$

これを様々な γ/ω_0 の値に対する ϕ の ω/ω_0 依存性をプロットしたのが図 3.6 である。

図 3.6 からいろいろなことが分かる。例えば、 $\gamma/\omega_0 = 0.1$ の比較的粘性が小さい場合には、 $\omega/\omega_0 \ll 1$ の付近では $\phi \simeq 0$ である⁹が、 $\omega/\omega_0 \simeq 1$ 付近で急速に位相差 ϕ は増大し、 $\omega/\omega_0 = 1$ で $\phi = \pi/2$ と

⁹(3.20) に特解 (3.27) を代入すると、 $\omega/\omega_0 \ll 1$ の時には、(3.20) の右辺の外力とつり合うのは第 3 項の復元力の項である。外

なる。 $\omega/\omega_0 > 1$ では $\phi \simeq \pi$ に直ぐに漸近してゆく。位相差 ϕ は、充分時間が経って平衡に達した解 x_e (外力と同じ振動数 ω で振動する)

$$x_e \simeq \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3.33)$$

と外力自体 $f_0 \cos \omega t$ との位相の差を表しているから、 $\omega/\omega_0 \gg 1$ の $\phi \simeq \pi$ とは系の振動が外力と逆位相 *anti-phase*¹⁰ となっていることを示している。

γ/ω_0 の値が大きくなれば、次第に位相差 ϕ の ω/ω_0 に対する変化は緩やかとなるが、いずれの場合でも必ず $\omega/\omega_0 = 1$ で $\phi = \pi/2$ ¹¹ となっている。

3.4 強制振動系のエネルギー論

ここでは強制されている系（固有振動数 ω_0 ）が外部強制（振動数 ω ）から受け取るエネルギー E は ω/ω_0 によってどう変化するのか、つまり、受け取るエネルギーが最大となるエネルギー共鳴 *energy resonance* について調べて見る。

エネルギー共鳴のおきる振動数 ω は計算しなくても振幅共鳴の振動数と一致すると考えたくなるが、これは正しくなくてエネルギー共鳴のおきる振動数は単振動の固有振動数 ω_0 に等しくなる。この理由を考えていこう。

3.4.1 エネルギーと仕事率

運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (3.20)$$

の両辺に dx/dt をかけると、エネルギー変化率と仕事率に関する次の式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right\} = -2\gamma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + f_0 \cos \omega t \frac{dx}{dt} \quad (3.34)$$

3.4.2 平衡状態におけるエネルギーと仕事率

粘性抵抗が存在する場合の強制振動では初期に系の固有振動が残るものの、充分時間が経った後には強制振動の振動数と同じ振動だけが生き残ることを以前に見た。この様な充分時間が経った後の平衡状態におけるエネルギーの振舞いについて見てみよう。例えば $\gamma < \omega_0$ の減衰振動を含む強制振動の場合の解は、次のようなものであった。

力が非常にゆっくり振動するので、(3.20) 左辺第1項の慣性項、第2項の摩擦項は無視されて、バネが外力に応じて伸びたり、縮んだりする。つまり、 $\phi \simeq 0$ である。

¹⁰(3.20) に特解 (3.27) を代入すると、 $\omega/\omega_0 \gg 1$ の時には、(3.20) の右辺の外力とつり合うのは第1項の慣性項の項である。外力が非常に早く振動するので、(3.20) 左辺第2項の摩擦項、第3項の復元力は無視されて、慣性項だけが残る。つまり、質点に周期的外力だけが実質的に働いている。この時には逆位相 $\phi \simeq \pi$ しかありえない。

¹¹(3.20) に特解 (3.27) を代入すると、 $\omega = \omega_0$ の時には、(3.20) の左辺第1項の慣性項と第3項の復元力はキャンセルする。したがって、外力と釣り合うのは第2項の摩擦力の項である。外力が正で一番大きい時には摩擦力は負で一番大きくならなければならないので、速度は正の最大、変位では増加しながら0となる。つまり、 $\phi \simeq \pi/2$ である。

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3.29)$$

右辺第 2 項は充分時間が経った後の平衡解 x_e を与え、周期運動になっている。この平衡解を (3.21) と (3.24) に戻って指数関数で表すと、次のようになる。

$$x_e = Re \left[\frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} \right] \quad (3.35)$$

(3.35) と公式 (1.34) を用いて、平衡解の平均エネルギー

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \overline{x_e^2} \quad (3.36)$$

の各項を評価すると

$$\begin{aligned} \overline{x_e^2} &= \frac{1}{2} Re \left[\frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \\ \overline{\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2} &= \frac{1}{2} Re \left[\frac{i\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} \frac{-i\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \end{aligned}$$

したがって

$$\bar{E} = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{4} \quad (3.37)$$

となり、当然のことながらエネルギーの平均値 \bar{E} は時間に依らず一定である。系が貯め込むエネルギー \bar{E} は前述の系の振幅 $|C|$ の自乗に $(\omega_0^2 + \omega^2)/4$ がかった形をしている。図 3.7 は (3.37) のエネルギーの平均値 \bar{E} の ω/ω_0 依存性を示した例で、図 3.5 とよく似た依存性を示していることがわかる。

このとき (3.34) を 1 周期 で平均すると

$$0 = \underbrace{-2\gamma \overline{\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2}}_{P_{\text{fric}}} + \underbrace{\overline{f_0 \cos \omega t \frac{dx_e}{dt}}}_{P_{\text{force}}} \quad (3.38)$$

となる。右辺第 1 項は粘性抵抗がする仕事率 P_{fric} 、第 2 項は外力が行う仕事率 P_{force} を表している。

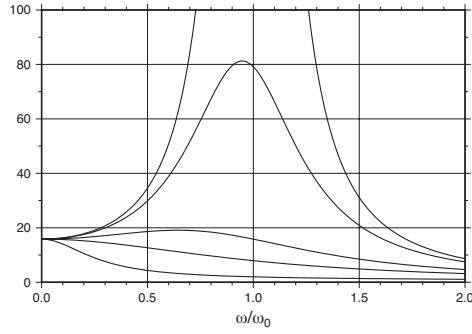


図 3.7: 粘性-強制振動系の平衡状態での平均エネルギー \overline{E} 。曲線は上から順に、 $(\gamma/\omega_0)^2 = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$ なお、 $\omega_0 = 2\pi$ 、 $f_0 = 50$ としている

【問い】

充分時間が経った後の平衡状態 $x = x_e$ で、

1. 粘性抵抗力がする単位時間あたりの平均の仕事 = 仕事率 $\overline{P_{\text{fric}}}$ はどれだけか？
2. 外力がする単位時間あたりの平均の仕事 = 仕事率 $\overline{P_{\text{force}}}$ はどれだけか？
3. 系が外力から受け取る単位時間あたりのエネルギー $\overline{PW_{in}}$ は、外力の仕事率 $\overline{P_{\text{force}}}$ に等しくなる。 $\overline{PW_{in}}$ が最大となる ω の値を求めよ。

【答え】

1. 粘性抵抗力がする平均の仕事率 $\overline{P_{\text{fric}}}$ は (3.38) の第 1 項であるから、公式 (1.34) を用いて

$$\begin{aligned}
 \overline{P_{\text{fric}}} &= -2\gamma \overline{\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2} \\
 &= -\gamma \text{Re} \left[\frac{i\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma} \frac{-i\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} \right] \\
 &= -\frac{\gamma\omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

2. 外力がする平均の仕事率 $\overline{P_{\text{force}}}$ は、(3.38) の第 2 項である。 $\cos \omega t = \text{Re}[e^{i\omega t}]$ であることに注意して、公式 (1.34) を用いると

$$\begin{aligned}
 \overline{P_{\text{force}}} &= f_0 \cos \omega t \frac{dx_e}{dt} \\
 &= \frac{f_0}{2} \text{Re} \left[1 \cdot \frac{-i\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\gamma} \right] \\
 &= \frac{\gamma\omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

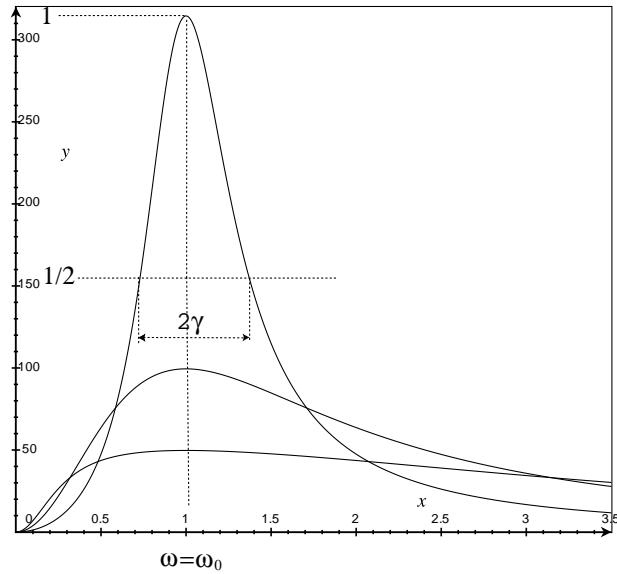


図 3.8: 粘性-強制振動系が外力から受け取る単位時間あたりの平均エネルギー \overline{PW}_{in} 曲線は上から順に、 $(\gamma/\omega_0)^2 = 0.1, 1.0, 4.0$ 横軸は ω/ω_0 。なお、 $\omega_0 = 2\pi$ 、 $f_0 = 50$ としている。
半値幅 2γ を $(\gamma/\omega_0)^2 = 0.1$ に対して示している。

3. 系が外力から受け取る単位時間あたりの平均のエネルギーを \overline{PW}_{in} と書くと、 \overline{PW}_{in} は外力が系にする仕事率 \overline{P}_{force} に等しい。したがって、 \overline{P}_{force} が最大となる ω の値を求めるには、微分して極値を求めても良いし、次のように変形しても良い¹²。

$$\overline{PW}_{in} = \frac{f_0^2}{4\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2} \quad (3.41)$$

明らかに最大値を与えるのは

$$\omega = \omega_0 \quad (3.42)$$

で、最大値

$$\max\{\overline{PW}_{in}\} = \frac{f_0^2}{4\gamma} \quad (3.43)$$

をとる。

図 3.8 は、(3.41) の \overline{PW}_{in} をプロットしたものである。上の計算結果からも明らかなように、系が外力から受け取る単位時間あたりの平均エネルギー \overline{PW}_{in} は、 γ/ω_0 の値に依らず、 $\omega = \omega_0$ で最大となる。

上の問題の結果をいいかえれば

¹²なお、(3.41) を $X = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$ で書き換えると $\frac{1}{1+X^2}$ 型となる。これはローレンツ型 *Lorentz shape* と呼ばれ、共鳴の付近での関数形でしばしば登場する。

粘性の大きさに関係なく $\omega = \omega_0$ で系を強制すれば、
最大のエネルギーを系に与えることが出来る

わけである。もちろん $\omega = \omega_0$ で系が受け取るエネルギーも最大となっている。

要するに、系に多くのエネルギーを与えたければ、系の固有振動数 ω_0 で強制してやればよい。逆に、外力の振動数 ω がわかっているときには、系の固有振動数 ω_0 の方を調節して系が受け取るエネルギーを最大にしてやる事が出来るわけである。ラジオのチューナーは、可変コンデンサー（LC 回路では、 $\omega_0^2 = 1/LC$ ）を用いて固有振動数を調節して放送局からの電波をキャッチしているのである。

【問題】

なぜ振幅共鳴とエネルギー共鳴の振動数が一致しないのか、考察せよ。

最後に系が受け取るエネルギーを基準として、共鳴の鋭さを示す量を考えよう。これまで議論してきたように $\omega = \omega_0$ で系は最大のエネルギーを受け取る。共鳴点から少し離れた振動数のところで、

$$\omega = \omega_0(1 + \Delta), \quad |\Delta| \ll 1 \quad (3.44)$$

とおいて (3.41) に代入すれば、

$$\overline{PW}_{\text{in}} \propto \frac{1}{1 + (\frac{\omega_0 \Delta}{\gamma})^2} \quad (3.45)$$

となる。 $\overline{PW}_{\text{in}}$ の値が最大値の半分になる振動数は $\omega = \omega_0 \pm \gamma$ になるときである。

2γ を共鳴曲線の半値幅 (full width at half maximum) といい、 ω_0 と半値幅の比 $Q = \omega_0/2\gamma$ を Q -値 (Q -value) とよんでいる。ともに共鳴の鋭さを表す量で 2γ が小さいほど、また Q -値が大きいほど共鳴が鋭いことになる。(3.41) の場合 2γ は抵抗係数に比例するので、この値が小さいほど共鳴は鋭くなる。

なお、 $\omega = \omega_0$ のときの平衡解の持つ平均エネルギーは、(3.37) より

$$\overline{E} = \frac{f_0^2}{8\gamma^2} \quad (3.46)$$

で与えられる。一方、外力が系に 1 周期あたりになす仕事 W は、(3.43) より

$$W = \frac{f_0^2}{4\gamma} \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3.47)$$

となるので、このときの平衡解には

$$\frac{\overline{E}}{W} = \frac{\omega_0}{4\pi\gamma} = \frac{Q}{2\pi} \quad (3.48)$$

で表される周期分の仕事が貯えられていることになる。

【蛇足】

電子レンジは、マグネトロンと呼ばれる真空管を用いて 2450MHz のマイクロ波を発振させている。この周波数を含む広い周波数帯では図に示すような $25,000\text{MHz}$ をピークとする共鳴曲線が得られ、 2450MHz はピークの裾にある。この共鳴の原因は H_2O 分子の回転帯の固有振動数ではなく、水分子が水素結合のために複数の固まりになった水分子の集団の運動による。この共鳴（通常は水の誘電損失と呼ばれる）に伴うエネルギーは熱エネルギーに変換されて、まわりの食品の温度が上昇することになる。

したがって電子レンジの振動数はこれらの広い周波数帯のどこでも良いが、 2450MHz は日本の電磁波の規制のために決められたもので、科学的な意味を持つものではない。

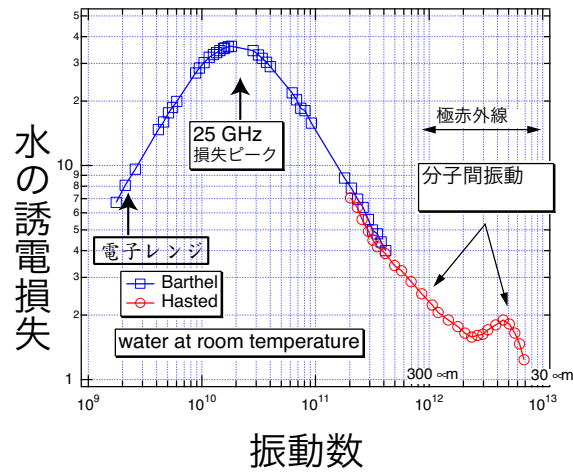


図 3.9: マイクロ波から遠赤外領域での水の誘電損失

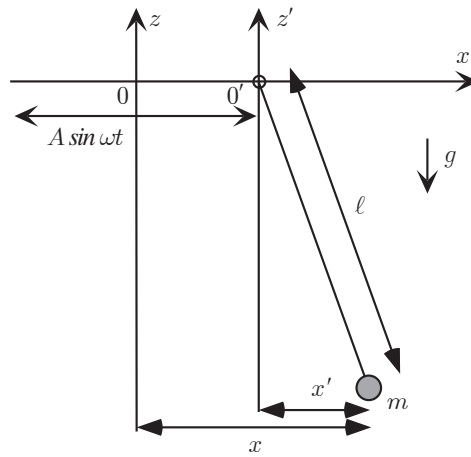


図 3.10: 変位による強制が働く粘性-強制振動系

3.5 振り子の強制振動

応用面で重要な強制振動として、振り子の支点の変位による強制振動を取り上げる。

図 3.10 の様な振り子の支点 O' が一定の周期 ω で水平に振動する場合を考えてみよう。

質点の位置は x で表されるが、質点に働く復元力は振り子の支点 O' から測った質点の位置 x' に比例する。つまり、運動方程式としては

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{\ell} x' \quad (3.49)$$

支点 O' が振幅 A で振動しているとする、 x と x' の間には

$$x' = x - A \sin \omega t \quad (3.50)$$

の関係があるので、これを (3.49) に代入すれば、

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} - m A \omega^2 \sin \omega t = -\frac{mg}{\ell} x'$$

つまり、

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = A \omega^2 \sin \omega t \quad \left(\text{ここで } \omega_0^2 \equiv \frac{g}{\ell} \right) \quad (3.51)$$

(3.49) では外力が存在しないにもかかわらず、(3.51) は (3.4) と同じ周期的外力が加えられる強制振動の方程式となる。一見奇妙に見える話だが、このようになるのは、振り子が運動するときの支点 O' を原点とする系が加速度運動を行う非慣性系であり、見かけの力（慣性力）が働くためと考えることができる。

(3.51) に、速さに比例する粘性抵抗を入れると

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx'}{dt} + \omega_0^2 x' = A \omega^2 \sin \omega t \quad \left(\text{ここで } \omega_0^2 \equiv \frac{g}{\ell} \right) \quad (3.52)$$

右辺の強制項がない場合の一般解を $\tilde{x}(t; \gamma, \omega_0)$ とすると、この微分方程式の一般解は次のようになる。

$$x' = \tilde{x}(t; \gamma, \omega_0) + \frac{A \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (3.53)$$

$$\phi \equiv \tan^{-1} \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.54)$$

(3.53) の $\tilde{x}(t; \gamma, \omega_0)$ の項は時間と共に減衰して行くので、充分時間が経った後の平衡解 x'_e は、

$$x'_e = \frac{A \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (3.55)$$

質点の位置 x について書き直せば、(3.50) から

$$x_e = A \sin \omega t + \frac{A \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (3.56)$$

ここで、

$$\omega \gg \omega_0 \quad \text{かつ} \quad \omega \gg \gamma \quad (3.57)$$

と仮定すれば、

$$\frac{A \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}} \simeq A, \quad \phi \equiv \tan^{-1} \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \simeq \pi \quad (3.58)$$

が成り立つので、

$$x_e \simeq A \sin \omega t - A \sin \omega t = 0 \quad (3.59)$$

となる。

つまり、(3.57) の条件を満たすように振り子を調整すれば、振り子の質点の位置は変位による強制があっても空間に静止していることになる！ この質点にペンを取り付け、自記紙上に静止している空間の一点の軌跡を書かせれば、自記紙上には支点の変位が記録される。これが地震計 *seismograph*, *seismometer* の原理である。

第4章 非線形振動

この章ではまず、一般の運動において静止（平衡）している点の周りの運動の定性的な様子を力学的エネルギー保存則により議論する。微小振幅を考えると単振動が非常に普遍的に現れてくることがわかるであろう。さらに、振動波動論の講義ではほとんど線形性が成立する振動、波動を取り扱うが、この章でのみ非線形振動を取り扱い、非線形振動の近似解法を調べる。

4.1 安定平衡と振動

4.1.1 安定平衡・準安定平衡・中立平衡・不安定平衡

位置エネルギー $U(x)$ が与えられた一般の運動において、質点が静止（平衡）する条件は力が正味加わっていないことであるから、 $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ である。図 4.1 は4つの場合を示す¹。

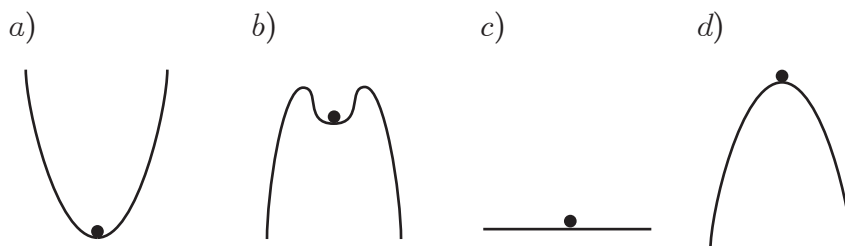


図 4.1: 安定平衡・準安定平衡・中立平衡・不安定平衡

いずれの例も微分係数がちょうど 0 となる平衡点 *equilibrium point* に質点を置いておくことはできるが、質点を指で揺らすという摂動 *perturbation*（もしくは揺らぎ *fluctuation*）を加えた場合の質点の振舞いはそれぞれ異なる。

「安定な *stable*」平衡状態

a) の場合には、質点は平衡点のまわりで運動するだろうが、平衡点から大きくはずれてしまうことはない。

「準安定な *quasi-stable or meta-stable*」平衡状態

b) の場合には、微小な摂動に対して質点は平衡点のまわりで運動するだろうが、振幅の大きな摂動に対しては平衡位置からはずれてしまう可能性がある。

「中立な *neutral*」平衡状態

c) の場合には、揺らぎが存在してもどこでも平衡しうる。

¹運動をイメージするときには図 4.1 で、質点が滑らかな壁の上を滑る、または慣性モーメントを持たない球が滑らかな壁の上を転がると考えればよい。厳密に言うと鉛直の方向の運動エネルギーは 0 と考えないといけない。

「不安定な *unstable*」平衡状態

d) の場合には、微小な摂動に対しても質点は平衡位置からはずれてしまう。

振動が生じるのは安定平衡と微小振幅の準安定な場合のみであることは自明であろう。

4.1.2 単振動の普遍性

平衡点を $U'(x_0) = 0$ を満たす $x = x_0$ としてそのごく近傍、つまり、 $x - x_0$ が小さい運動を考えよう。位置エネルギーを平衡点 x_0 の周りでテーラー展開すると、

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \quad (4.1)$$

となる。右辺第 1 項は定数なので無視できる、第 2 項も平衡点の条件 $U'(x_0) = 0$ から、0。したがって、微小運動を考えているので、 $(x - x_0)^2$ までで近似して、位置エネルギーは

$$U(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \text{ただし、} k \text{ は定数で、} k \equiv U''(x_0) \quad (4.2)$$

となる。この式と図 4.1 を対応させると、 $k \equiv U''(x_0)$ が正なら、a) の安定か、b) の準安定、 $k \equiv U''(x_0)$ が 0 なら、c) の中立、 $k \equiv U''(x_0)$ が負なら、d) の不安定な平衡状態になっていることがわかる。

$k \equiv U''(x_0) > 0$ であれば、(4.2) はバネ定数 k の位置エネルギーと同じになるから、今まで学んできたことから、振動数 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{U''(x_0)/m}$ (m は質点の質量) で単振動することがわかる。このように、単振動は平衡点での位置エネルギーの形が下に凸 ($U''(x_0) > 0$) で、かつ微小振幅という条件が満たされれば、いつでも生じる振動である。

4.2 振り子の有限振幅運動

振動の振幅が大きくなると、質点の運動は一般に単振動からずれてくる。振り子の微小振幅での運動は単振動の典型例であったが、有限振幅の本来の振り子の運動は非線形振動なのである。

4.2.1 運動方程式

図 4.2 のように、長さ ℓ の堅いが質量の無視できる棒の先端に質量 m の重りをつけ、棒が点 O の周りに自由に回転できる様にしておく。

もし重りを糸でつるすと、重りの速さが十分大きくない場合には、回転角の大きさが $\pi/2$ を超えた時に糸がたるむことがある。このようなことを避けるために、ここでは重りを剛体の棒に取り付けている。

【運動方程式】

棒と鉛直軸とのなす角度を θ とする。支点 O の周りの質点の角運動量の時間変化率が、質点に働く力のモーメントに等しいという式を書くと

$$\frac{d}{dt} \left(m\ell \cdot \ell \frac{d\theta}{dt} \right) = -mg\ell \sin \theta \quad (4.3)$$

となる。剛体の棒が質点に及ぼす力は棒に沿った方向になるので、力のモーメントには寄与しない。

この式を整理すれば、次のような運動方程式が得られる。

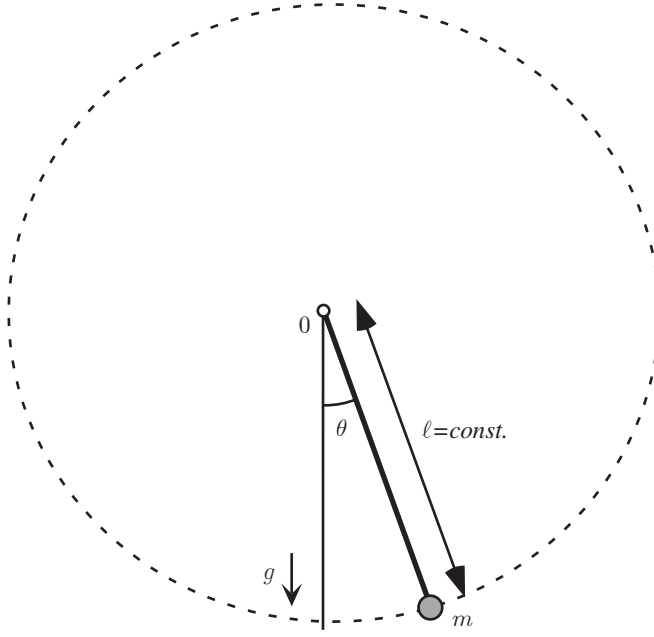


図 4.2: 有限振幅運動をする振り子

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad \left(\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) \quad (4.4)$$

もし $|\theta| \ll 1$ ならば $\sin \theta \approx \theta$ と近似できるので、振動数 ω_0 の単振動の方程式に帰着する。

4.2.2 初期エネルギーと運動

【力学的全エネルギーの保存】

もう既に何回もやっていることであるが、エネルギー変化率の式を作る。 θ 方向の速度 v_θ は $v_\theta = \ell \dot{\theta} \equiv \ell d\theta/dt$ と書けるので、(4.4) の右辺を左辺に移行して両辺に $\ell \dot{\theta}$ をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} 0 &= m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} \right] + \frac{d}{dt} [-mgl \cos \theta] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} \right] + \frac{d}{dt} [mgl(1 - \cos \theta)] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) \right] \\ &= \frac{d}{dt} (K + U) \end{aligned} \quad (4.5)$$

2 行目の式の右辺第 1 項は運動エネルギー $K \equiv m(\ell\dot{\theta})^2/2$ の時間変化率であり、第 2 項は位置エネルギー $U = -mg\ell \cos \theta + \text{const.}$ の時間変化率である。なお、3 行目からは位置エネルギーの定数分の不定性を $\theta = 0$ で 0 となるように規格化した。つまり、

$$U \equiv mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (4.6)$$

(4.5) が、力学的全エネルギー $E \equiv K + U$ の保存を表していることは明らかだろう。運動方程式 (4.4) は非線形なので容易に解を見つけることはできないが、エネルギー保存系で位置エネルギーの形が判明しているから、運動の概略を推定することは簡単にできる。次の節で初期エネルギーと運動の関係を振り子の場合に考察しよう。なお、(4.6) の非線形位置エネルギーの概形は、図 4.3 のようになる。

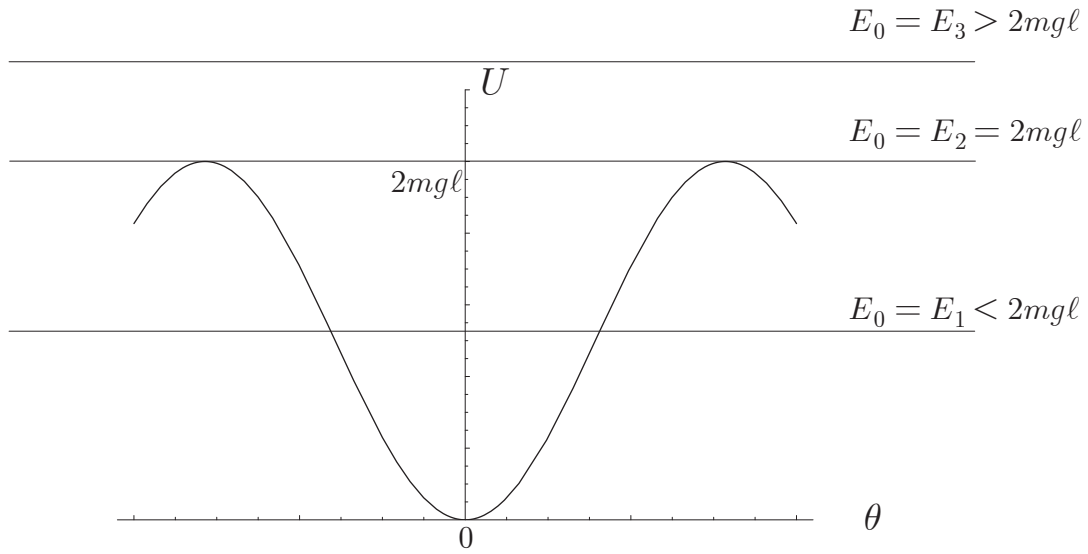


図 4.3: 振り子の位置エネルギーと初期エネルギーの代表値

【エネルギーの初期値と運動】

それでは系のエネルギーの初期値と運動について考えてみよう。

この系は保存系であるから、初期に系に与えるエネルギーの大きさによって系の運動が決まってしまう。運動エネルギーが正 ($K > 0$) でなければ運動は生じない。位置エネルギー $U = mg\ell(1 - \cos \theta)$ は周期 2π の周期関数で $0 \leq U \leq 2mg\ell$ であるから、初期に与えるエネルギー E_0 については次の 3 通りに分類される。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad 0 < E_0 < 2mg\ell \\ 2) \quad E_0 = 2mg\ell \\ 3) \quad E_0 > 2mg\ell \end{array} \right. \quad (4.7)$$

【問い】

系に初期に与えるエネルギーが図 4.3 の様な 3 通りであったとき、各々についてどのような運動となるか考察せよ。

【答え】

1) $0 < E_0 < 2mg\ell$

この場合には位置エネルギーの井戸の中に閉じこめられるので、安定平衡の状態となり、位置エネルギーと運動エネルギーを交互に増減させながら周期的な振動を行うことになる。ただし、微小振幅とは限らないから、一般には線形の位置エネルギーとは異なるので、単振動ではない。

2) $E_0 = 2mg\ell$

この場合は上の $0 < E_0 < 2mg\ell$ と次の $E_0 > 2mg\ell$ の境となり、特殊な運動となることが予想される。

仮に初期に運動エネルギーがなく ($K = 0$) 位置エネルギーだけであったとすれば、不安定平衡状態が実現するだろう。つまり、振り子の運動としては真上に静止したままの状態である。

もしも、わずかでも運動エネルギーがあるような初期エネルギーの配分であったならば、振り子は一度最下点を通過するが、その後最上点へ向かって運動を続けて最上点で静止すると考えられる。ただし、解析の結果を先に述べておくと、静止するまでには無限の時間がかかる。

3) $E_0 > 2mg\ell$

位置エネルギーの最大値 ($E = 2mg\ell$) 以上の初期エネルギーを持っているわけであるから、位置エネルギーが最大となる角度 $\theta = \pm\pi$ でも運動エネルギーが残っているので、回転運動を続ける。 θ は時間に対する単調増加関数 (単調減少関数) となる。

ここで $\cos \theta$ を $\theta = 0$ で Taylor 展開すると、

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots \quad (4.8)$$

なので、(4.6) は

$$U = \frac{mg\ell}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{12}\theta^4 + \dots \right) \quad (4.9)$$

と書くことができる。 $|\theta| \ll 1$ であれば $\theta^4 \ll \theta^2$ なので、 θ^4 以上の項を無視することができて、

$$U = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 \quad (4.10)$$

と放物形の調和振動子の位置エネルギーとなったわけである。しかし、有限振幅の場合には θ^4 以上の項が無視できなくなるので非線形性が生み出され、単振動とは異なる運動をするようになる。

4.3 有限振幅運動の近似解

これまでの議論で、振り子の有限振幅運動が $|\theta| \ll 1$ の微小振幅の場合の単振動とはだいぶ違うことを認識できたと思う。実は、振り子の有限振幅運動の場合は、楕円関数と呼ばれる特殊関数によって一般解を表すことができる。しかし多くの場合、非線形振動の有限振幅運動の厳密解を解析的に求めることは不

可能である。そこで、微小振幅ではないが、その振幅がそれほど大きくない場合、すなわち非線形性がそれほど大きくない場合の有力な近似解法である摂動法を以下で調べていこう。これは、振り子以外の非線形問題でも非線形が強くない限り適用できる一般的な方法である。

振り子の運動方程式 (4.4) において、非線形性を表す最低次の項だけを残した方程式を考えることにしよう。 $\sin \theta$ を $\theta = 0$ の周りで Taylor 展開すると、

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \dots \quad (4.11)$$

なので、(4.4) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 \right) \quad (4.12)$$

のように近似できる。振幅の大きさを A 、 θ_* を 1 程度の大きさの量として、変位 θ

$$\theta = A\theta_* \quad (4.13)$$

のように表すことにする。ここで $0 < A \lesssim 1$ とする。これを (4.12) に代入すると

$$\frac{d^2\theta_*}{dt^2} + \omega_0^2\theta_* = \frac{1}{6}A^2\omega_0^2\theta_*^3 \quad (4.14)$$

となるので、

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6}A^2 \quad (4.15)$$

とおけば、次の方程式が得られる。

$$\frac{d^2\theta_*}{dt^2} + \omega_0^2\theta_* = \epsilon\omega_0^2\theta_*^3 \quad (4.16)$$

(4.15) から、 ϵ は 1 より充分小さい量であるといえる。したがって、(4.16) の右辺は左辺の各項と比べて充分小さいことが分かる。このことを利用すれば、方程式を摂動法によって近似的に解くことができる。

4.3.1 摂動法

我々は (4.16) の解を、次のように ϵ で展開して求めることを考えよう。ただし、以下では θ_* のことを単に θ と書くことにする。

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \dots \quad (4.17)$$

ここで θ_0 , θ_1 等は ϵ を含まない、1 の大きさの量である。これを (4.16) に代入して ϵ について整理すると

$$\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \omega_0^2\theta_0 \right) + \epsilon \left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_0^3 \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2\theta_2 - 3\omega_0^2\theta_0^2\theta_1 \right) + \dots = 0 \quad (4.18)$$

そこで ϵ の各次数の項を 0 に等しいとおくことにより、 ϵ の 1 次までとると以下の各式が得られる。

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \omega_0^2\theta_0 = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_0^3 = 0 \quad (4.20)$$

まず (4.19) は単振動の式なので、簡単のために $t = 0$ で静止している解を求めると

$$\theta_0 = \cos(\omega_0 t) \quad (4.21)$$

となる。もともとの振幅 A は ϵ にすでに組み込まれているので、ここでは振幅を 1 としている。これを (4.20) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \theta_1 &= \omega_0^2 \cos^3(\omega_0 t) \\ &= \frac{3}{4} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4} \omega_0^2 \cos(3\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。この式は (3.4) と同じ強制振動の方程式であるが、この場合の強制項は、振動数 ω_0 で単振動する項と $3\omega_0$ で単振動する項の 2 つからなっている。この線形微分方程式を解くには、それぞれの強制項について特解を求め、それらの和をつくればよい。強制項がない場合の解（斉次解）はすでに (4.21) に含まれているので、ここでは考慮する必要はない。その結果、次の解を得る。

$$\theta_1 = \frac{3}{8} \omega_0 t \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{32} \cos(3\omega_0 t). \quad (4.23)$$

(4.22) の右辺第 1 項の強制振動数が振り子の固有振動数 ω_0 と等しいために、（摩擦項がない）共鳴が起こり、解 (4.23) の右辺第 1 項は時間とともに限りなく大きくなる。これは θ_1 が 1 程度の大きさの量であるという仮定に反するので、解としては不適格である。このようなことが起きたのは、近似計算の方法が適切でなかったためと考えられる。この原因は θ_0 の関数形として (4.21) をとったためである。これは、物理的には非線形項が加わっても振動数が変化しない（線形方程式では正しい）と仮定したことに対応する。

4.3.2 工夫した摂動法

そこで、振動数が変化することを考慮して、 ϵ による展開の仕方を工夫してみよう。非線形項を考慮した振動数 ω を導入し、それが次のように展開されるものとする。

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots \quad (4.24)$$

すなわち

$$\omega_0 = \omega - \epsilon \omega_1 - \epsilon^2 \omega_2 - \cdots \quad (4.25)$$

(4.17) と (4.25) を (4.16) に代入して、前と同様に ϵ の 1 次までとると以下の各式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + \omega^2 \theta_0 = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + \omega^2 \theta_1 - 2\omega \omega_1 \theta_0 - \omega^2 \theta_0^3 = 0 \quad (4.27)$$

まず (4.26) を解くと、以前と同様に振幅を 1 として

$$\theta_0 = \cos(\omega t) \quad (4.28)$$

となる。 ω について ϵ の 0 次までとると (4.21) と一致する。

次に (4.28) を (4.27) に代入すると

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega^2\theta_1 = \left[2\omega\omega_1 + \frac{3}{4}\omega^2\right] \cos(\omega t) + \frac{1}{4}\omega^2 \cos(3\omega t) \quad (4.29)$$

となる。この式にも右辺に $\cos(\omega t)$ に比例する強制項が含まれているが、その振幅を 0 としてしまえば共鳴を回避できる。その条件から、次のように ω_1 を決めることができる。

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}\omega \quad (4.30)$$

その結果、(4.29) は

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega^2\theta_1 = \frac{1}{4}\omega^2 \cos(3\omega t) \quad (4.31)$$

となる。右辺の強制項の振動数は 3ω なので、共鳴の起こることなく解を求めることが出来る。特解だけを計算すればよいので

$$\theta_1 = -\frac{1}{32} \cos(3\omega t) \quad (4.32)$$

となる。

結局、近似解は ϵ の 1 次までの精度で、

$$\theta = \cos \omega t - \frac{1}{32}\epsilon \cos(3\omega t), \quad (4.33)$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3}{8}\epsilon\omega \quad (4.34)$$

で与えられる。(4.34) を ω について解けば、 ϵ の 1 次までの精度で

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{3}{8}\epsilon} = \left(1 - \frac{3}{8}\epsilon\right) \omega_0 \quad (4.35)$$

が得られる。

なお、ここでは ϵ の 1 次までしか計算しなかったが、2 次以上の項も同様に計算できる。ただし、(4.4) の右辺には θ のより高次の項も入れる必要がある。 $|\epsilon| \ll 1$ という近似が成り立つ限り、高次の計算をすれば近似の精度も高まる。ここで注意すべきことは、系の振動数 ω が振動の振幅 A (ここでは ϵ) に依存している点である。線形の系では振動数と振幅は独立な量であったが、非線形系では独立ではなくなることになる。

(4.13) と (4.15) を用いて、 ϵ を振幅 A で表し、 θ を元の変位の大きさに戻せば、近似解は

$$\theta = A \cos(\omega t) - \frac{A^3}{192} \cos(3\omega t) \quad (4.36)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{A^2}{16}\right) = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \left(1 - \frac{A^2}{16}\right) \quad (4.37)$$

となる。振動の周期は最大振れ角 (= 振幅) が小さい時には一定 ($T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$) である事はよく知られていることである。しかし (4.37) によれば、最大振れ角が大きくなるにつれて周期が延びることがわかる。したがって、ガリレオの発見した振り子の等時性 *isochronism* は微小振幅の振り子でのみ成立し、有限振幅の振り子では成立しない。また、振動の様子も変わってくる。有限振幅の振り子の振動運動では、最大

振れ角が大きくなるにつれて、(4.36)の右辺第2項のために線形解との違いが顕著になる。

図 4.4 は、鉛直下向きから 172 度の真上から静かに落とした場合について、(4.36)の近似解と厳密解の比較したものである。単振動の三角関数（線形解）は厳密解（sn と呼ばれる楕円関数で表される）と比べると、周期も変動の様子も全く異なる。しかし近似解 (4.36) はほぼ厳密解と同じように変化し、近似解が有効であることが分かる。図では、振動の周期が線形解の場合の 2 倍以上に延びている。また、振り子はかなりの時間を最大振れ角付近で過ごすことになり、この辺りで平坦なグラフとなっている。振り子がほぼ真上に近い時には下方に戻そうとする復元力が小さくなるためである。

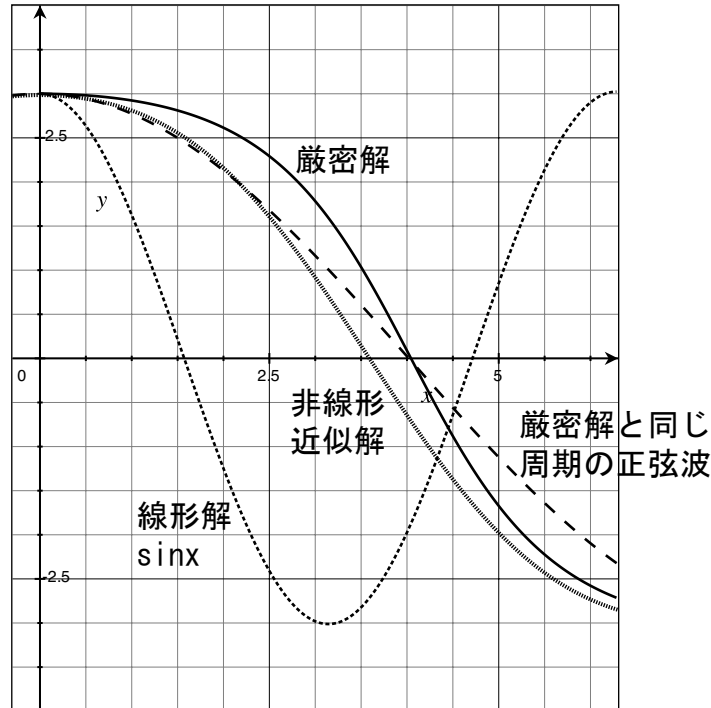


図 4.4: 振り子の有限振幅解

鉛直下向きから 172 度のほぼ真上から静かに落とした場合の振り子の振動の様子。実線は厳密解、細かい点線は (4.36) で得られた非線形近似解、破線は厳密解と同じ周期の正弦波、荒い点線は線形解を表す。

4.4 厳密解との振動数の比較

振り子の厳密解の振動数を求め、それを近似解 (4.37) と比較してみよう。厳密な運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad \text{ここで} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (4.4)$$

である。この式の両辺に $\dot{\theta}$ をかけて t で積分すれば、力学的エネルギー E が得られる。

$$\frac{E}{m\ell^2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos \theta) \quad (4.38)$$

$\theta = 0$ のときにポテンシャルエネルギー U が 0 になるように積分定数を選んである。

ここで便宜上、次のような定数 k^2 を導入する。

$$k^2 \equiv \frac{E}{2mgl} \quad (4.39)$$

三角関数の公式 $(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$ を用いれば、(4.38) は次のように書き換えられる。

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.40)$$

初期エネルギー E を与えれば $k^2 = E/2mgl$ は定まる。ここで振り子の振幅を A とすると、 A も初期エネルギー E を与えれば定まるはずである。なぜならば $\theta = A$ では明らかに $\dot{\theta} = 0$ なので、(4.40) より、

$$\sin^2 \frac{A}{2} = k^2 \quad (4.41)$$

が成立するからである。

さらに、 $0 \leq \theta \leq A$ に対して丁度 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ となるような変数 φ を導入しよう。つまり、(4.41) が成立するので、これに合わせて

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (4.42)$$

が成立するような φ を導入する。(4.42) を微分すれば、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta &= k \cos \varphi d\varphi \\ \therefore d\theta &= \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \end{aligned} \quad (4.43)$$

一方、(4.40) と (4.42) より

$$\begin{aligned} d\theta &= 2\omega_0 \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} dt \\ &= 2\omega_0 k \cos \varphi dt \end{aligned} \quad (4.44)$$

(4.43) と (4.44) から $d\theta$ を消去すると

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \omega_0 dt \quad (4.45)$$

最低点 ($\varphi = 0$) で $t = 0$ として、これを積分すると、

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \omega_0 t \quad (4.46)$$

1/4 周期で $\varphi = \pi/2$ となるので、厳密解の周期 T は

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (4.47)$$

となる。

図 4.5 は、単振動の場合の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ に対する比 T/T_0 の $k^2 (= E/2mg\ell)$ 依存性を示したものである。 k^2 の値が 1 に近づくと共に急激に周期が延びる様子がよくわかるだろう。

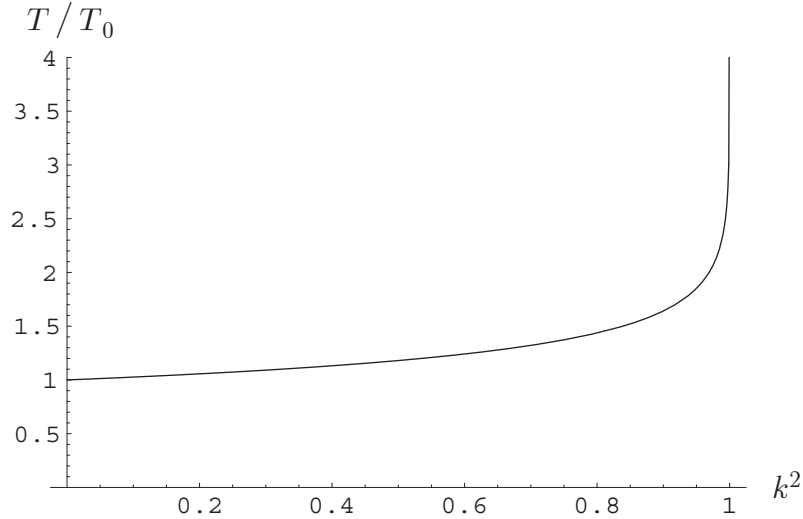


図 4.5: 振り子の振動周期：単振動の場合の周期 T_0 との比を描いたもの

$A \ll 1$ の場合に、厳密解の周期を与える (4.47) の近似式を求めよう。(4.41) より $k^2 \ll 1$ となるので、被積分関数を k^2 で展開して、

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3k^4}{8} \sin^4 \varphi + \frac{5k^6}{16} \sin^6 \varphi + \cdots \right) d\varphi \quad (4.48)$$

これを項別積分すれば、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \cdots \right) \quad (4.49)$$

一方、(4.41) より

$$k^2 = \sin^2 \frac{A}{2} \approx \frac{A^2}{4} \quad (4.50)$$

なので、これを (4.49) に代入して A^4 以上の項を無視すると、

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{A^2}{16} \right) \quad (4.51)$$

振動数の近似式としては

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}} \left(1 - \frac{A^2}{16} \right) \quad (4.52)$$

これは以前に求めた近似式 (4.37) と一致する。