入門者向け計算物理入門 その 4

出題：エドソン 達哉ん

今回は、慣性振動、コリオリ力下の質点の運動を考える。鉛直方向の運動は考えず、地表面は水平であると考える。この時、コリオリ力は緯度 φ と地球の自転角速度 Ω、移動している単位質量の質点の速度 v に対して

$$F = 2\Omega v \sin\varphi$$

の大きさを持ち、その質点に対して垂直右向きに働くことで知られる。このとき、右辺より v を除いた項をコリオリパラメータといい、通常 f ないし f_0 で表す。

1. 演習課題

1.1. コリオリ力

まず、コリオリ力について考えてみる。

(1) 地球の自転角速度 Ω を求めよ。

(2) 「科学パズル」(田中 実[*1]著 , 光文社 ,1968) には、「風呂の水栓などを抜いたときの水などもコリオリ力により、低気圧性循環になる」という記述がある。だが、実際には両回りとも見られる[*2]。この理由を説明せよ。

(3) コリオリ力は速度の大きさに影響を与えないとされる。このことを示せ。

1.2. 2 種の平面近似とコリオリ力下の物理現象

コリオリ力の正弦の項を、代表的緯度周辺で定数近似したものを f 平面近似、線形近似したものを β 平面近似という (後者の場合、傾きを β と呼ぶことから)。以下、この 2 つの近似

1 化学が専門だそうなので、大気物理学や気象力学に関しては専門外のようである。もっとも、大学 1 年生の教養程度で証明され、中学や高校でさえ習うこともある事実なので、こういった本を書くには知識不足と評さざるを得ない。

2 ちなみに、塵旋風や竜巻になると低気圧性のものが増えてくる。

を見ると共に、コリオリ力下の比較的扱いやすい現象として慣性振動・フーコーの振り子を扱う。

(1) 北緯 35 度の地点にある大砲から、 砲弾を 20km 先の目標にめがけて 1km/s の速度で発射した。 砲弾がコリオリ力の影響でどれだけ目標からずれるか計算せよ。 空気抵抗は無視して良く、 重力による着弾は 20km 先まで無いとして良い。 また、 コリオリ力は緯度によらず 35 度の際の大きさで一定とせよ (f 平面近似)。

(2) 地球上の緯度 φ にある単位質量の質点が初速 v_0 で運動している。 この時、 この運動方程式を示せ。 ただし、 摩擦・重力は無視し、 単にコリオリ力のみが働いているものとする。(慣性振動)

(3) [計算課題] 前問で示した運動方程式を f 平面近似、β 平面近似、 近似しない場合のそれぞれの場合について Euler 法を用いて数値的に解き、 軌跡を描け。 また、 速度 (エネルギーと等価) に対しどの程度の影響がでているのかを調べよ。

(4) [計算課題] Leap-frog 法、Heun 法の 2 種類を使って前問を解け。

(5) 地球上で、 長さ L の変形しない棒を使って質量 m の質点を吊るした振り子を振らせる。 長さ L が十分大きい時、質点は 2 次元平面内を運動していると近似できる。 コリオリ力下におけるこの運動方程式を示せ。 なお、 コリオリ力は質量に比例する点に注意せよ。 (フーコーの振り子)

(6) [計算課題] 前問を数値的に解き、 軌跡を描け。 数値計算法の差異やコリオリ力の近似の差異について考察してみよ。[*3]

2. 数値計算の補足

既出の Euler 法に加え、Leap-frog 法と Heun 法を示す。

関数 $f(x+h)$ を $x = x$ 回りで Taylor 展開すれば

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 + \cdots$$

となる (前進差分近似) のは承知であろう。この 2 次項以上を無視して計算したのが Euler 法であった。以下、この Taylor 展開または Euler 法を用いて説明する。

2.1. Leap-frog 法

先の Taylor 展開と同様にして、

3 参考までに、上野にある科学博物館内のフーコーの振り子は 20m,50kg である。また、フーコーが実験したものは 67m,28kg である。

$$f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + h^2 f^{(2)}(x)/2 - \cdots$$

を得る (後方差分近似)。ここから、

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf^{(1)}(x) + O(h^3)$$

が出るので、右辺最終項を無視してこれを変形すれば、

$$f(x+h) = f(x-h) + 2hf^{(1)}(x)$$

が導かれる。これに従って次の項を計算する方法を Leap-Frog 法と呼ぶ。

2.2. Heun 法

Euler 法は、 傾きを前の項のときの値で一定として次の項を計算した。 だが、 ここで平均を使うことができればより精度が良くなることであろう。 そこで、Euler 法を用いて次の項とその際の傾きを求め、 この 2 つの傾きを平均して使うことで精度の向上を図ったのが Heun 法である。[*4]

3. 解答・解説

4 このプロセスを複数度踏むと Runge-Kutta 法と呼ぶ。