高校生向け計算物理入門 その 1

出題：エドソン 達哉ん・解答：物理好き

本講義は、高校生程度を対象に計算物理の手法を体験的に身につけてもらうことを主眼とする。高校で習う程度の物理 (主に力学) により現象の方程式が理解できる問題を扱い、その中で解析的に解けない問題などをどのようにして現実に理解するか考えていく。

講義では、演習課題と簡単な物理・数学・数値計算の手法を記したプリントを配布し、これについて解説を与える。その後、講義の解説を元に自身で演習問題の解答・解説を与えてもらう。完成後、その部分の講評・添削を行い、完成させる。これらを以って 1 回とし、都合 2 週程度で 1 回の講義を消化する予定である。

第 1 回となる今回は、高校物理でも早い段階で扱われる投射運動を Euler 法によりシミュレーションする例を示す。高校物理では空気抵抗を考えず (つまり、真空中での運動という仮定で)45 度による最遠投が可能という程度まで扱うことが多いが、せっかくの数値解法のため、抵抗力を考えた投射運動を見る。

1. 演習課題

空気中で物体が運動する場合、その運動の方向とは逆向きに空気の抵抗力を受ける。今回はこの抵抗力を考慮した投射運動を考えよう。原点 $(0, 0)$ から x 軸正方向から初速 v_0, 角度 θ(0 度以上 90 度以下) で投射を行うとする。また、考えるのは地球上とし、重力加速度を g とする。

1.1. 粘性抵抗力の場合

投射されたものの体積が十分小さい場合、空気抵抗力として支配的に効くのは粘性抵抗力である。粘性抵抗力は速度に粘性係数 k をかけることでその大きさがわかる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 運動方程式を記せ。必要な物理的諸量は定義して用いること。

(2) 質点の軌跡を解析的に求めよ。

(3) [計算課題] 粘性係数の大きさを 1.79×10^{-5} とする。このときの軌跡を計算し、図示せよ。また、解析的に求めた軌跡との誤差を図示せよ。

1.2. 慣性抵抗力の場合

投射されたものの体積が大きくなってきた場合、空気抵抗力として支配的に効くのは慣性抵抗力である。慣性抵抗力は大気の密度 $\rho(=1.3\mathrm{kg/m^3})$ と物体の断面積 S を用いて $\rho S v^2$ によりその大きさが表される。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 運動方程式を記せ。必要な物理的諸量は定義して用いること。

(2) [計算課題] 幾つかのスポーツの公式球について、投射したときの軌跡を図示せよ。具体例としては、バスケットボール・サッカー・野球・ソフトボール（ソフトボール投げ）・砲丸・ハンマー投げなどがあげられる。（ボールは球形またはそれに十分近いものとして考えよ）

(3) [計算課題] 前問で検討したいずれかのスポーツについて、そのワンシーンでの物理的観点からの速度・角度の条件を考えてみよ。例えば、バスケットボールやサッカーでロングシュートを決めるための速度 / 角度の分布や、野球でホームラン (場外ホームランでも良い) を決めるための速度 / 角度の分布を示してみよ。

2. 数学面の補足

高校生では学ばない数学として、変数分離型の微分方程式の解析的解法を示しておく。変数分離形の微分方程式とは、独立変数 x に対する従属変数 $y=y(x)$ について、

$$f(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$$

の形式に変形できる微分方程式をいう。この方程式は、両辺を積分して

$$\int f(y)dy=\int g(x)dx$$

とすることで、(この積分が解析的に求められるならば) 解析解を得ることができる。なお、解析解は必ずしも陽関数とは限らない。

3. 数値計算の補足

数値的に積分する、あるいは微分方程式を解く最も単純な手法は、微分を差分で近似する

ことである。差分で近似する手法を総称して差分法と呼ぶ。微分の定義から極限を除けば $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ となる。ここで、h が十分に小さいとすれば、この差分は微分の良い近似と言える。今、i を非負整数として、$x_i = ih + x_0$、$y_i = y(x_i)$ と記すことにする。数列 $\{y_i\}$ は

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i)$$

と表せる。このように微分を差分で近似する手法を Euler 法と呼ぶ。また、このように近似を用いて微分方程式の通る (近似的) 点列 (x_i, y_i) を求めるのが数値的に微分方程式を解くということである。

4. 解答・解説

g は重力加速度とする。また、初速 v_0、角度 θ で投げ上げたものとする。

4.1. 粘性抵抗力の場合

(1)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = mg - k\boldsymbol{v}$$

(2)

$$\int_{v_0}^{v} \frac{m}{mg - k\boldsymbol{v}} dv = \int_0^t dt$$

$$\frac{m*log(\frac{mg-kv}{mg-kv_0})}{k} = t$$

$$v = \frac{mg - (mg - kv_0)*e^{-\frac{kt}{m}}}{k} (cf.t = 0)$$

$$v_x = (v_0 cos(-\theta))*e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$v_y = -(\frac{mg - (mg - kv_0 sin(-\theta))*e^{-\frac{kt}{m}}}{k})$$

(3) 上式をシミュレート。プログラムは Lec01-1.c を参照。

$$v = 5.0(m/s), m = 1(kg), \theta = (\pi/4), g = 9.81(m/s^2)$$

4.2. 慣性抵抗力の場合

(1)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = mg + \rho S v^2$$

(2)

(3) 投射角 θ に対して飛距離 $f(\theta)$ とし、これが凸関数である前提で三分探索すれば、最良の投射角が求まる。