Lab 5
Metode Penempatan Kutub

5.1 Tujuan Eksperimen

1. Memahami analisis kestabilan dari sistem dalam representasi ruang keadaan
2. Memahami prinsip keterkendalian dari sistem dalam representasi ruang keadaan
3. Mampu melakukan pengendalian sistem melalui matriks penguat dengan metode penempatan kutub

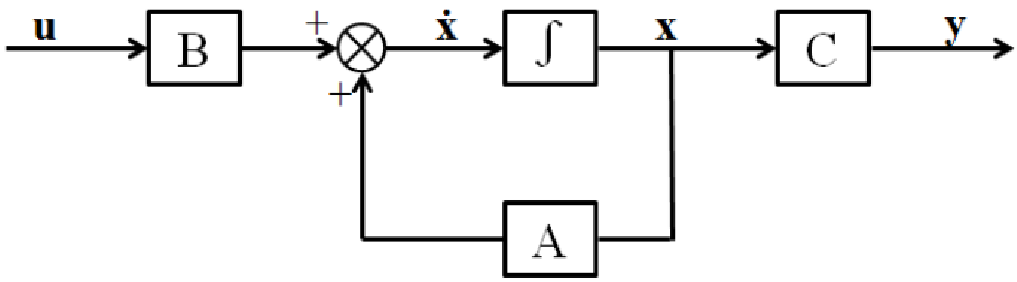
5.2 Dasar Teori

5.2.1 Kestabilan sistem

Secara umum, sistem dapat diamati sifat-sifatnya dalam hal kestabilan (*stability*), keterkendalian (*controllability*), maupun kemampuannya untuk dapat diamati (*observability*). Dalam representasi ruang keadaan, secara umum sistem dengan masukan tunggal dan luaran tunggal (*single input and single output* = SISO) dinyatakan dalam persamaan di bawah ini yang bersesuaian dengan diagram blok pada Gambar 5.1 dan melalui persamaan tersebut, sifat-sifat tersebut dapat diamati.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



Gambar 5.1 Diagram blok sistem dalam representasi ruang keadaan

Dalam hal kestabilan, suatu sistem yang dirancang dapat berada pada salah satu dari tiga kondisi kestabilan berikut:

- Stabil asimtotik (*asymptotic stable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ berada pada sisi kiri bidang kompleks
- Kestabilan kritis (*critical stable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen matriks $\mathbf{A}$ berada pada sumbu imajiner dan tidak ada yang berada pada sisi kanan bidang kompleks
- Tak stabil (*unstable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen matriks $\mathbf{A}$ berada pada sisi kanan bidang kompleks atau terdapat kutub kembar pada sumbu imajiner.

Nilai eigen dari matriks persegi $\mathbf{A}$ dengan dimensi $n \times n$ dapat ditentukan melalui persamaan berikut

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Melalui persamaan tersebut, akan dihasilkan sebanyak n nilai eigen λ yang masing-masing mewakili kutub-kutub dari sistem. Dengan mengamati nilai dari λ, kestabilan dari sistem dapat diketahui. Dalam matlab, nilai eigen dapat diperoleh melalui fungsi berikut

```
lambda = eig(A)   % nilai-nilai eigen dari matriks A
```

Selain melalui pengamatan secara langsung dari nilai-nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$, kestabilan sistem juga dapat diamati dengan menggunakan fungsi berikut

```
stabil = isstable(sys) % mengetahui kestabilan dari sistem sys
```

Sebagai contoh, perhatikan sistem dalam representasi ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sistem tersebut dapat diamati kestabilannya dengan melihat nilai-nilai eigennya.

```
lambda = eig(A)        % nilai-nilai eigen
p = pole(sys)          % kutub-kutub sistem
stabil = isstable(sys) % kestabilan sistem
step(sys)
```

5.2.2 Keterkendalian

Pada representasi sistem dengan persamaan ruang keadaan, suatu sistem dikatakan terkendali jika pada waktu $t_0 > 0$, terdapat masukan $u(t)$ sedemikian rupa sehingga keadaan sistem dapat diarahkan menuju titik asal. Sistem yang terkendali berarti bahwa sistem tersebut dapat distabilkan. Secara matematis, untuk suatu keadaan awal sistem $\mathbf{x}(0) = \xi$, terdapat masukan sistem $u(t)$ yang membuat sistem menuju titik asal pada suatu waktu $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

Untuk menganalisis keterkendalian suatu sistem, dibentuk suatu matriks keterkendalian $\mathbf{Q}$ dimana melalui matriks tersebut dapat diketahui apakah sistem tersebut dapat dikendalikan atau tidak. Untuk suatu sistem berorde-n, matriks keterkendalian $\mathbf{Q}$ adalah

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Jika sistem dalam persamaan ruang keadaan terkendali, maka *rank* dari matriks $\mathbf{Q}$ harus bernilai n.

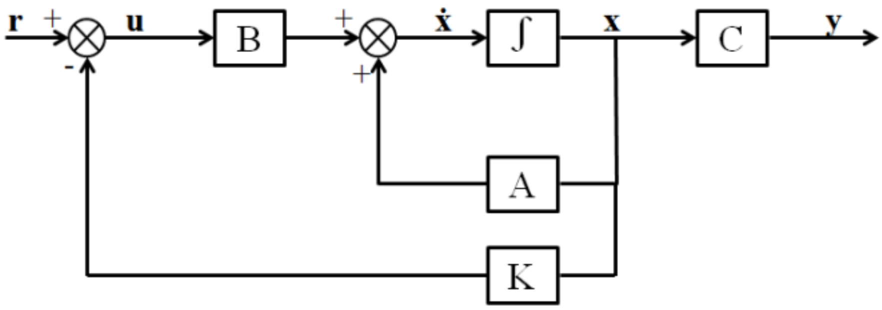
$$\text{rank}(Q) = n$$

Dalam Matlab, matriks $\mathbf{Q}$ dapat dibentuk melalui persamaan di atas, maupun menggunakan fungsi yang disediakan oleh Matlab. Sebagai contoh, untuk sistem berorde-3 pada contoh sistem di atas

```
Q1 = [B A*B A*A*B] % persamaan matriks keterkendalian
Q2 = ctrb(sys)     % matriks keterkendalian dari sistem sys
rank(Q)            % rank dari matriks Q
```

5.2.3 Penempatan kutub melalui umpan balik keadaan

Suatu sistem yang tidak stabil namun terkendali, dapat distabilkan melalui analisis umpan balik dari sistem tersebut. Pada representasi ruang keadaan, matriks umpan balik $\mathbf{K}$ dapat dibentuk sebagai umpan balik dari keadaan $\mathbf{x}(t)$ untuk membentuk suatu masukan sistem baru $u(t)$ agar sistem tersebut stabil. Jika dikaitkan dengan diagram blok dari sistem seperti ditunjukkan pada Gambar 5.1, pembentukan matriks umpan balik $\mathbf{K}$ ditunjukkan pada diagram blok pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2 Representasi sistem ruang keadaan dengan umpan balik keadaan

Pada diagram blok Gambar 5.2, masukan sistem adalah $u(t)$ dan matriks umpan balik adalah $\mathbf{K}$. Sinyal $r(t)$ adalah masukan dari sistem kendali yang digunakan untuk membentuk masukan baru bagi sistem agar sistem tersebut terkendali. Dengan sinyal masukan kendali $r(t)$ diatur di luar sistem yang dikendalikan, masukan sistem yang baru dapat ditentukan melalui persamaan berikut

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t), \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$u(t) = -[k_0 \quad k_1 \quad \dots \quad k_{n-1}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + r(t)$$

$$u(t) = -k_0x_1 - k_1x_2 - \cdots - k_{n-1}x_n + r(t)$$

Dengan persamaan tersebut, koefisien k_i menjadi pengali dari variabel keadaan x_j, sehingga matriks $\mathbf{K}$ disebut sebagai matriks penguat (*gain*). Dengan menggantikan masukan sistem $u(t)$ dengan nilai baru setelah melalui umpan balik dan sinyal masukan kendali, persamaan ruang keadaan akan menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\big(-\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t)\big)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}r(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Dengan persamaan ruang keadaan yang memiliki umpan balik $\mathbf{K}$, kestabilan dari sistem tergantung pada nilai-nilai eigen dari matriks $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. Sebagai akibatnya, agar sistem stabil, maka diperlukan matriks $\mathbf{K}$ yang tepat sedemikian rupa sehingga nilai-nilai eigen yang dihasilkan akan berada pada sisi kiri bidang kompleks yang bersesuaian dengan sifat stabil dari suatu sistem.

Dalam Matlab, matriks $\mathbf{K}$ untuk suatu kutub p yang diinginkan dapat ditentukan melalui fungsi berikut

```
K = place(A,B,P)  % matriks K untuk kutub-kutub p
```

Sebagai contoh, perhatikan persamaan ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

```
eig(A)            % nilai-nilai eigen dari sistem
isstable(sys)     % kestabilan sistem
Q = ctrb(sys)     % matriks keterkendalian
R = rank(Q)       % rank dari matriks Q
P = [-2+4i,-2-4i -10]
                  % peletakan kutub-kutub baru
K = place(A,B,P)  % matriks K untuk kutub-kutub P
sys_fb = ss(A-B*K,B,C-D*K,D)
                  % sistem setelah penempatan kutub
step(sys)
step(sys_fb)
```

5.3 Eksperimen

1. Suatu sistem berorde-2 dinyatakan dengan persamaan ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

   a. Tentukan kutub-kutub dari sistem tersebut.
   b. Tentukan matriks Q melalui persamaan pembentukan matriks.
   c. Tentukan apakah sistem tersebut stabil.

d. Tentukan matriks umpan balik K sedemikian rupa sehingga sistem kalang tertutup tersebut memiliki kutub-kutub

   i. $-1 \pm 2i$.

   ii. $\pm 3i$.

   iii. $2 \pm 4i$.

e. Amati tanggap fungsi langkah dari sistem yang baru tersebut.

2. Dalam keadaan tertentu, suatu pendekatan linier untuk sistem turbin dengan 3 bilah turbin dapat dilakukan. Untuk turbin yang memiliki jejari kerja $15m$ pada kecepatan angin sebesar $12\, {}^{m}/_{s}$ untuk pembangkitan $220V$, persamaan ruang keadaan untuk sistem tersebut dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} \beta' \\ \xi' \\ \xi'' \\ \omega_g'' \\ \omega_{gm}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10{,}5229 & -1066{,}67 & -3{,}38028 & 23{,}5107 & 0 \\ 0 & 993{,}804 & 3{,}125 & -23{,}5107 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \\ \xi' \\ \omega_g' \\ \omega_{gm}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1{,}223 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \\ \xi' \\ \omega_g' \\ \omega_{gm}' \end{bmatrix}$$

Dimana

β : sudut bilah turbin

ξ : sudut relatif untuk poros sekunder

ω_g : kecepatan generator

ω_{gm} : kecepatan pengukuran generator

$u(t)$: sudut referensi

$y(t)$: daya aktif yang dibangkitkan

a. Temukan nilai-nilai eigen dari sistem tersebut.

b. Apakah sistem tersebut stabil?

c. Apakah sistem tersebut terkendali?

d. Melalui umpan balik keadaan, tentukan matriks $\mathbf{K}$ agar sistem tersebut mendekati sistem berorde-2 yang memiliki persamaan karakteristik $s^2 + 4s + 11 = 0$. Sistem tersebut hanya memiliki 2 kutub, sehingga tentukan 3 kutub lain yang minimal 10 kali lebih jauh dari kutub-kutub dari sistem berorde-2 yang ingin didekati,

e. Tentukan sistem baru dengan penempatan kelima kutub yang baru.

f. Amati tanggap fungsi alih sistem kalang terbuka dan kalang tertutup dari sistem dalam representasi ruang keadaan tersebut.