Representasi Ruang Keadaan dan Tanggap Sistem (State Space and Response)

Praktik Sistem Kendali

Outline

- Memahami representasi ruang keadaan sebagai bentuk lain dari sistem.

Memahami hubungan antara representasi fungsi alih dan persamaan ruang keadaan dari suatu sistem.

Memahami tanggap sistem terhadap masukan impuls, fungsi langkah, maupun masukan lainnya.

Mampu menganalisis karakteristik sistem dan tanggapan sistem terhadap masukan tertentu.

Teori – Representasi Ruang Keadaan (State Space)

Dalam teori sistem kendali, representasi Laplace dari sebuah sistem merupakan analisis konvensional yang mengandalkan analisis frekuensi. Karakteristik dan kestabilan sistem kendali diamati melalui fungsi alih $G(s)$ dengan s berada pada ranah frekuensi pada bidang Laplace. Pada pendekatan yang lebih terkini, selain melalui ranah frekuensi, analisis sistem dilakukan pada ranah waktu dengan memanfaatkan representasi *state-space* (ruang-keadaan).

Teori (Lanjutan 1)

Dalam representasi ruang keadaan, sebuah sistem direpresentasikan dalam bentuk persamaan berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Dimana

$\mathbf{x}(t)$: vektor keadaan
$\mathbf{u}(t)$: vektor masukan sistem atau vektor kendali
$\dot{\mathbf{x}}(t)$: perubahan keadaan
$\mathbf{y}(t)$: vektor luaran
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriks sistem
$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$: matriks masukan sistem atau vektor kendali
$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}$: matriks luaran
$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{l\times m}$: matriks umpan maju

Persamaan pertama, yaitu $\dot{\mathbf{x}}(t)$ disebut sebagai persamaan keadaan dan persamaan kedua, yaitu $\mathbf{y}(t)$ adalah persamaan luaran.

Teori (Lanjutan 2)

Sebagai contoh, sebuah sistem direpresentasikan dalam bentuk ruang keadaan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Ruang Keadaan (State Space) pada Matlab

Dalam Matlab, sistem dalam representasi ruang keadaan dinyatakan melalui

```
sys_ss = ss(A,B,C,D)    % persamaan sistem dalam ruang keadaan
```

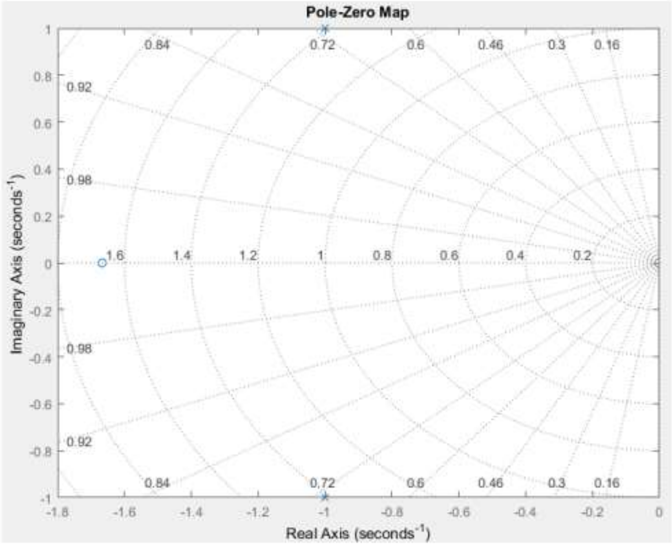
Dalam beberapa kesempatan, analisis dengan persamaan ruang keadaan lebih mudah dilakukan daripada pada ranah frekuensi, begitu juga pada kesempatan lain. Karena asal-usul dari representasi ruang keadaan dan ranah frekuensi adalah pada satu persamaan ranah waktu yang sama, alih representasi dari bentuk satu ke bentuk yang lain dapat dilakukan.

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D); % alih representasi ke fungsi alih
[z,p,k] = ss2zp(A,B,C,D);   % alih representasi ke model z-p-k
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); % alih representasi ke ruang
keadaan
[A,B,C,D] = zp2ss(z,p,k);   % alih representasi ke ruang
keadaan
```

Karakteristik Sistem

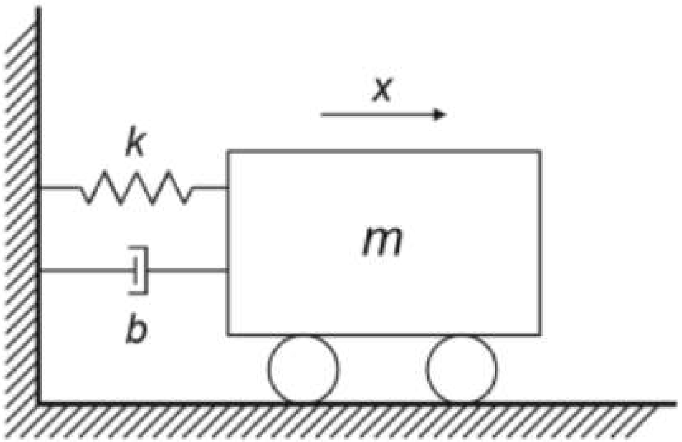
Sebuah sistem, baik dalam representasi Laplace maupun ruang keadaan memiliki karakteristik yang digunakan untuk analisis sistem. Karakteristik utama dari sebuah sistem adalah pole-zero.

```
z = zero(sys);      % zero dari sistem dalam sebarang representasi
p = pole(sys);      % pole dari sistem dalam sebarang representasi
pzmap(sys)          % grafik pole-zero pada bidang Laplace
```



Gambar 2.1 Grafik pole-zero

Perhatikan sistem fisis berikut



Gambar 2.2 Sistem pegas

Dalam ranah waktu, sistem tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

Dimana

$x(t)$: luaran sistem, yaitu simpangan balok
$u(t)$: masukan sistem, yaitu gaya dorong terhadap balok
m : massa balok
k : konstanta pegas
b : koefisien gesek

Dalam ranah frekuensi, melalui transformasi Laplace, fungsi alih dari sistem tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Sedangkan dalam representasi ruang keadaan, sistem tersebut dapat dinyatakan dalam dua persamaan

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u(t)$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Dengan masukan sistem adalah gaya $u(t)$, vektor keadaan adalah $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ vektor perubahan keadaan $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}$ dimana $\begin{matrix}x_1(t) = x(t),\\ x_2(t) = \dot{x}(t),\end{matrix}$

Merangkai State Space dalam Matlab

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Maka, sistem tersebut direpresentasikan dalam persamaan ruang keadaan dengan masing-masing konstanta matriks A, B, C, dan D.

```
A = [0 1;-k/m -b/m];
B = [0;1/m];
C = [0 1];
D = [0];
```

Tanggap Sistem (System Response)

Step Response (Tanggap Fungsi Langkah)

Ketika sebuah sistem diberi masukan, maka dihasilkan luaran yang dapat diamati dan disebut sebagai tanggap sistem, ketika masukan dari sistem tersebut berupa fungsi langkah (*unit step function*) $u(t)$, maka tanggapan dari sistem tersebut disebut sebagai tanggap fungsi langkah (*step response*). Demikian juga ketika masukan dari sistem berupa impuls (*impulse*) atau fungsi delta (*delta function*) $\delta(t)$, tanggapan dari sistem tersebut disebut sebagai tanggap impuls (*impulse response*).

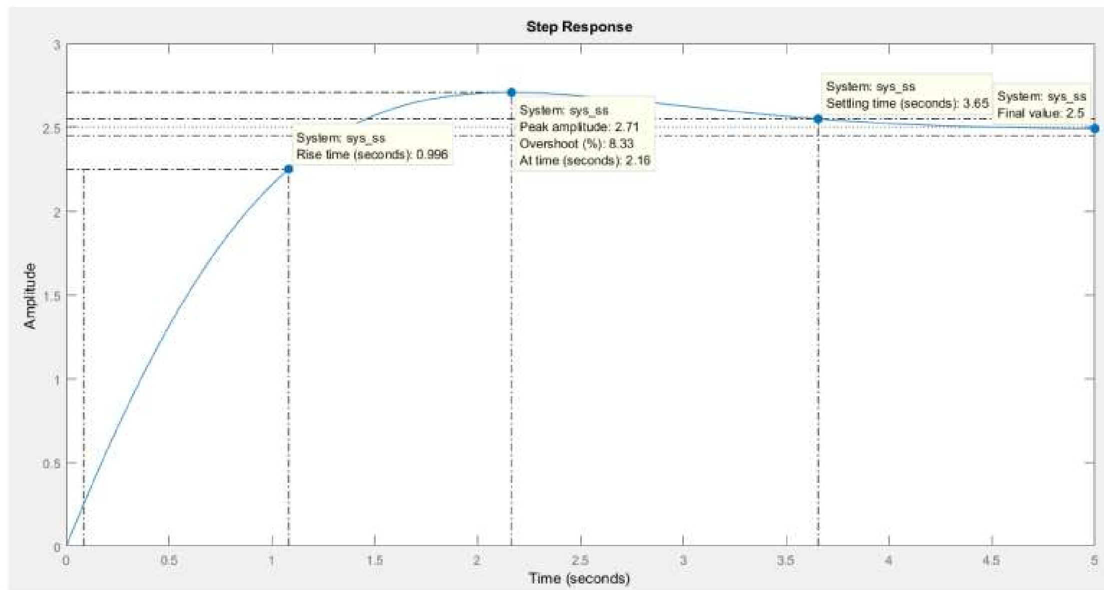
Dalam hal ini, fungsi langkah dan impulse adalah sebagai berikut

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & ,t = 0 \\ 0 & ,t \neq 0 \end{cases}$$

Dalam analisis sistem kendali, tanggap fungsi langkah digunakan untuk menunjukkan karakteristik sistem dan kestabilan sistem. Fungsi langkah digunakan sebagai analisis dasar pada sistem kendali dimana sistem diharapkan untuk menuju satu nilai akhir tertentu sesuai dengan masukan sistem. Pada gambar di bawah, ditunjukkan tanggapan sistem yang berupa *rise time* t_r, *overshoot*, *settling time* t_s, dan nilai akhir (*final value*).

Dari representasi sistem dalam bentuk fungsi alih maupun persamaan ruang keadaan, seluruh karakteristik dari tanggap fungsi langkah tersebut dapat diamati. Sistem yang stabil akan memiliki grafik yang konvergen menuju nilai akhir.



Gambar 2.3 Karakteristik sistem dalam tanggap fungsi langkah

Grafik Tanggap Fungsi Step (Step Response)

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih sistem berikut

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

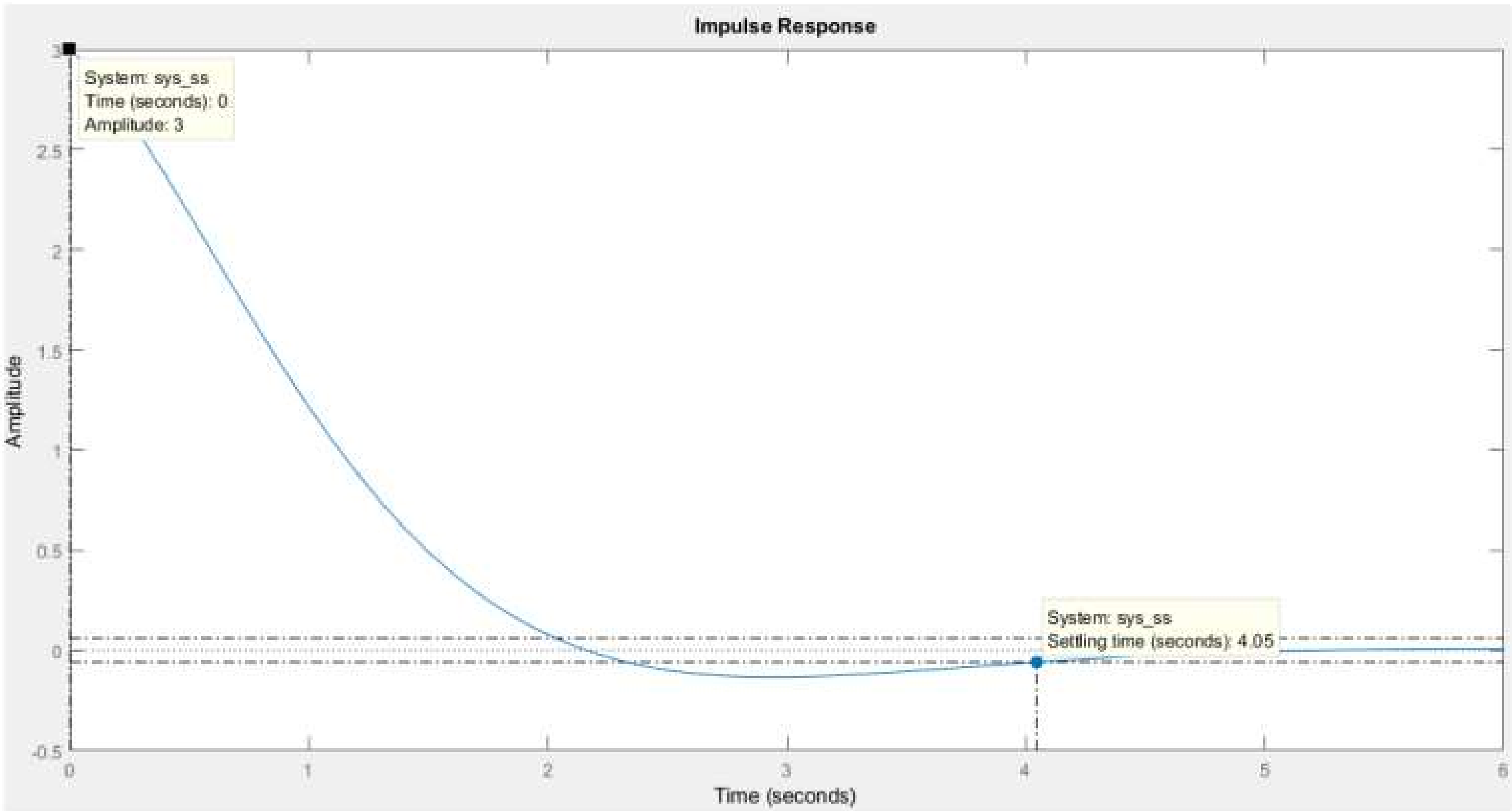
```
sys = tf(num,den);       % representasi fungsi alih dari G(s)
step(sys)                % tanggap fungsi langkah
step(sys,T)              % tanggap fungsi langkah sampai waktu T
data = stepinfo('sys')   % karakteristik tanggap fungsi langkah
```

Impulse Response (Tanggap Impulse)

Seperti halnya pada tanggap fungsi langkah, masukan sistem berupa impuls juga digunakan untuk melihat karakteristik kestabilan dari suatu sistem kendali. Pada tanggap impuls, karakteristik sistem yang diamati adalah tanggapan sistem ketika muncul gangguan yang hanya sesaat. Sistem kendali yang baik akan memiliki keadaan yang berangsur kembali ke kondisi asal setelah mendapatkan gangguan berupa impuls.

Pada gambar di bawah, ditunjukkan karakteristik sistem dalam tanggap impuls yang berupa amplitudo dan *settling time* t_s. Pada sistem yang stabil atau terkendali, luaran sistem akan konvergen kembali menuju nilai awal luaran sistem, atau simpangan sistem akan kembali menuju nol.

Impulse Response (Tanggap Impulse) - Lanjutan



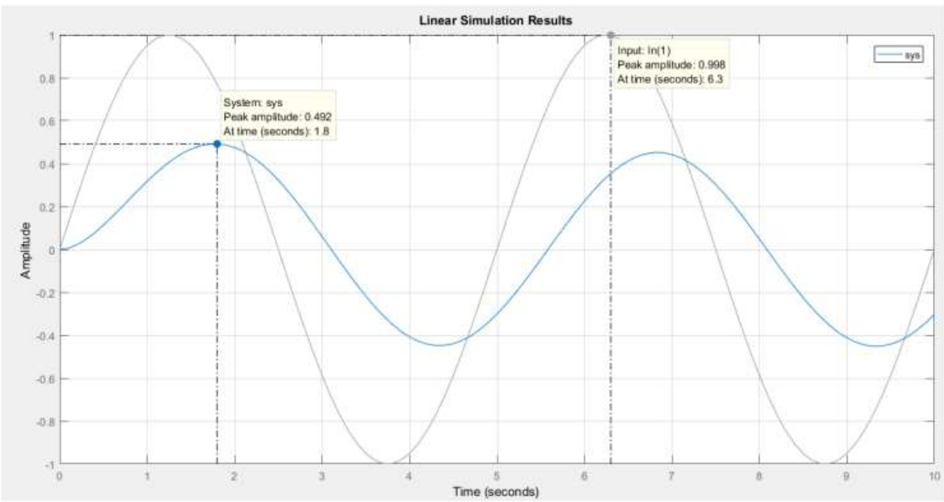
Grafik Tanggap Impulse (Impulse Response)

```
sys = tf(num,den);         % representasi fungsi alih dari G(s)
impulse(sys)               % tanggap impuls
impulse(sys,T)             % tanggap impuls sampai waktu T
```

Tanggap Fungsi Sembarang (Arbitrary Response)

Secara general, selain berupa impuls dan fungsi langkah, masukan dari suatu sistem dapat berupa fungsi apapun atau bahkan tidak berbentuk persamaan tertentu. Dalam Matlab, jika masukan dari sistem berupa persamaan fungsi selain impuls dan fungsi langkah, luaran dari sistem tersebut juga dapat dianalisis.

Grafik Fungsi Sembarang (Arbritrary Response)



Gambar 2.5 Karakteristik sistem dalam tanggap sinusoidal

Gambar di atas menunjukkan tanggap sinusoidal dari sistem $G(s)$, dimana luaran sistem akan mengikuti masukan dari sistem $u(t)$, yaitu berupa sinyal sinusoidal.

```
sys = tf(num,den);        % representasi fungsi alih dari G(s)
t = 0:0.1:1;              % durasi sinyal masukan t
u = sin(2*pi*0.2*t);      % sinyal sinus dengan frekuensi 0.2Hz
lsim(sys,u,t)             % tanggap sinusoidal
```

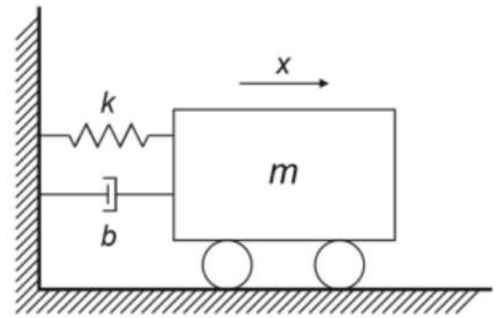
Praktik 1

Perhatikan sistem yang diwakili oleh $G(s)$ berikut

$$G(s) = \frac{100}{(s+10)(s^2+4s+10)}$$

a. Temukan zero, pole, dan gain dari sistem tersebut.
b. Tunjukkan grafik yang menunjukkan lokasi pole dan zero dari sistem terebut.
c. Nyatakan sistem tersebut dalam model pecahan parsial.
d. Nyatakan sistem tersebut dalam representasi ruang keadaan.
e. Tunjukkan karakteristik dari tanggap impuls.
f. Tunjukkan karakteristik dari tanggap fungsi langkah.
g. Tunjukkan karakteristik dari sistem tersebut ketika mendapatkan masukan berupa sinyal sinusoidal $u(t) = 1.5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ selama 5 detik pertama.

Praktik 2



Gambar 2.2 Sistem pegas

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Sistem pegas yang ditunjukkan pada Gambar 2.2 memiliki spesifikasi sebagai berikut

Massa : $1kg$

Konstanta pegas : $1.5N/m$

Koefisien gesek : $0.25Ns/m$

Gaya masukan sistem : $1N$

h. Nyatakan sistem tersebut dalam representasi ruang keadaan.
i. Nyatakan fungsi alih dari sistem tersebut.
j. Temukan zero, pole, dan gain dari sistem tersebut.
k. Tunjukkan grafik yang menunjukkan lokasi pole dan zero dari sistem terebut.
l. Nyatakan sistem tersebut dalam model pecahan parsial.
m. Tunjukkan karakteristik dari tanggap impuls.
n. Tunjukkan karakteristik dari tanggap fungsi langkah.