关于给定围长的最小有向图的说明

YAHYA OULD HAMIDOUNE

Received March 12, 1982

Caccetta 和 Häggkvist 猜想，一个围长为 g、出度不小于 r 的有向图的最小阶是 $r(g-1)+1$．他们证明了 $r=2$ 的猜想．我们对 $r=3$ 进行证明．

1 引入

我们使用 [3] 的符号．一个至少有一个回路的有向图 G 的围长是 G 的一个回路的最小长度，我们用 $g(G)$ 表示．

Behzad 等人 [1] 猜想，出度为 r、围长为 g 的正规有向图的最小阶也是 $r(g-1)+1$．这个猜想已经被 Behzad [2] 证明为 $r=2$，被 Bermond [4] 证明为 $r=3$．在 [6] 中，我们证明了这个猜想为 $r=4$．

Caccetta 和 Häggkvist [5] 猜想，围长为 g 且最小出度至少为 r 的有向图的最小阶为 $r(g-1)+1$，他们证明了 $r=2$ 的这个猜想．

这里，我们证明了 $r=3$ 的猜想．我们的方法也可以用于 $r=2$ 的情况．

上述猜想对于具有传递自同构群的有向图来说是正确的 [7]．作为一个应用 [7]，我们证明，给定一个 n 阶的有限群 G 和 G 的基数为 s 的子集 S，我们可以把 G 的一致性表达为 S 的最多 $\lceil n/s \rceil$ 个元素的乘积．

我们在证明中使用了以下结果．

定理 1.1 (Bermond [4])**.** *假设 $G=(V,E)$ 是一个围长为 g 的有向图，使得 $d^+(x)\geqslant 3$ 和 $d^-(x)\geqslant 3$，那么 $|V|>3g-2$．*

这个结果的简短证明可以在 [6] 中找到．

2 最小出度为 3 的有向图

上述第二个猜想等同于以下内容．

猜想 2.1 (Caccetta 和 Häggkvist [5])**.** *令 $G=(V,E)$ 是一个阶数为 n，围长为 g 的有向图，使得 $d^+(x)=r$ 对于每个顶点 x 都成立．那么 $n\geqslant r(g-1)+1$．*

假设这个猜想是正确的，令 G 是一个有向图，对于每个顶点 x，$d^+(x)>r$．令 G' 是 G 的一个子图，对于每个顶点，$d^+_{G'}(x)=r$．我们有 $|G|\geqslant|G'|\geqslant r(g(G')-1)+1\geqslant r(g(G)-1)+1$．

这个猜想对于 $g=3$ 来说是成立的．G 包含一个顶点 y，$d^-(y)\geqslant r$．$g=3$，我们有 $N^+(y)\cap N^-(y)=\varnothing$．因此

$$n\geqslant |N^+(y)|+|N^-(y)|+1\geqslant 2r+1$$

假设 $G=(V,E)$ 是一个强连通的有向图，对于每一个顶点 x，$d_G^+(x)=3$，假设 G 的围长至少为 4，并且包含一个入度小于 3 的顶点．我们将构建一个有向图 G^*，使得 $|G^*|=|G|-3, g(G^*)\geqslant G(G)-1$，并且对于 G^* 的每个顶点 x，$d_{G^*}^+(x)=3$．

这一构造将被应用于 Caccetta 和 Häggkvist 猜想的最小阶反例．根据上述说明，这个有向图的围长必须至少为 4．根据定理1.1，这个反例包含一个入度小于 3 的顶点．请注意，一个反例的强连通部分是一个汇，也是一个反例．因此，一个最小的反例是强连通的．

我们现在选择 G 的一条有向路径 (a,b,c)，如下所示．如果 G 没有三角形（3-环），选择 (a,b,c)，使 $d^-(c)\leqq 2$．如果 G 有一个三角形，选择 (a,b,c)，使得 (a,c) 是 G 的一条边．我们想构建一个有向图 $G^*=(V-T,E^*)$，使得对于 $V-T$ 的每个顶点 u，$d_{G^*}^+(u)=3$，并且 $g(G^*)\geqslant g(G)-1$．E^* 由 G_{V-T} 的弧和一些添加的弧组成，以取代 $\omega^+(V-T,T)$ 的弧．我们将给每条添加的边分配一个标签和一个类型．标签是 T 的一个元素，类型是一个数字，用来衡量我们将这条边转化为包含标签的 G 的路径所需的过渡．对于每条添加的边，我们将精确地定义标签和类型．

令 $u\in\omega^-(T)$．为了使 $d_{G^*}^+(u)=3$，我们将添加 $|\omega^+(u,T)|$ 条源为 u 的边．我们考虑以下情况．

(I) $N^+(u)\cap T=\{x\}$

(I.1) 如果存在一个顶点 $v\in V-T$，使得 $(x,v)\in E$ 和 $(u,v)\neq E$，我们用弧 (u,v) 代替 (u,x)．此外，如果 $x=a$，如果 G 没有三角形，我们取 $v\in N^+(a)-N^-(c)$（这样的顶点存在，因为 $d^-(c)\leqslant 2$）．

(I.2) 否则 $N^+(u)-T\subset N^+(x)-T, x=a$ 或 $x=b$ 并且 G 有一个三角形 (u,x,z)，其中 $z\in N^+(x)-T$．如果有 $v_2\in V-T$，使 $(x,v_i),(v_i,v_2)\in E$ 并且 $(u,v_2)\notin E$，我们添加第二类弧 (u,v_2)，并标注为 x．

(I.3) 否则，我们必然有 $x=a$，并且我们很容易看到，使用假设 $g(G)\geqslant 4$，有顶点 $v_1,v_2,v_3\in V-T$，使得 $(a,v_1),(u,v_1),(u,v_2),(v_1,v_2),(v_2,v_3)\in E$ 并且 $(u,v_3)\notin E$．在这种情况下，我们添加第三类弧 (u,v_3)，并标注为 a．

(II) $|N^+(u)\cap T|\geqslant 2$ 并且 $c\in N^+(u)$ 在这种情况下，我们用 (u,v) 形式的 $|\omega^+(u,T)|$ 弧代替 $\omega^+(u,T)$，其中 $v\in N^+(c)-N^+(u)$，我们很容易看到这种边的存在．这些边是第一类的，标注为 c．

(III) $N^+(u)\cap T=\{a,b\}$．(u,a,b) 是 G 的一个三角形．因此，根据 T 的选择，$(a,c)\in E$ 中．令 $N^+(b)=\{b_1,b_2,c\}, N^+(a)=\{a_1,b,c\}$．由于 $g\geqslant 4$，我们有 $(\{a_1\}\cup\{b_1,b_2\})\cap\{u,a,b\}=\varnothing$．

(III.1) $a_1\in\{b_1,b_2\}$．由于 $d^+(u)=3$ 和 $N^+(u)\supset\{a,b\}$，因此可以得出

$$|\{a_1,b_1,b_2\}-N^+(u)|\geqslant 2$$

令 $\{\alpha,\beta\}\supset\{a_1,b_1,b_2\}-N^+(u)$. 在这种情况下, 我们添加两条第一类边 $(u,\alpha),(u,\beta)$. 如果 $\alpha=a_1$（相应地，$\beta=a_1$），那么 (u,α)（相应地，(u,β)）的标签是 a，b 与此不同.

(III.2) $a_1\in\{b_1,b_2\}$. 利用 $d^+(u)=3$ 和 $N^+(u)\supset\{a,b\}$ 关系，我们看到 $\{b_1,b_2\}-N^+(u)\neq\varnothing$，例如 $b_2\notin N^+(u)$. 我们考虑以下两种情况.

(III.2.1) $b_1\notin N^+(u)$. 在这种情况下，我们添加 (u,b_1) 和 (u,b_2). 这两条边的类型是 1，标签是 b.

(III.2.2) $b_1\in N^+(u)$. 如 (III)，我们有 $N^+(b_1)\cap\{u,a,b\}=\varnothing$. 由此可见，$N^+(b_1)-\{u,a,b,c,b_2\}$ 包含一个顶点 v，在这种情况下，我们添加两条边 (u,b_2) 和 (u,v)（注意 $b_2\neq v$, G^* 必须没有多条边）. 这些边的标签是 b. (u,b_2) 是第一类的, (u,v) 是第二类的.

我们通过定义 $E=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(b,c)\}$ 定义一个有向图 $R=(\{a,b,c,d\},E)$.

根据上述结构，对于 $V-T$ 的每一个顶点 u，$d^+_{G^*}(u)=3$，我们陈述一些注解.

注 1. *每条标签为 c 的弧都是第一类的.*

注 2. *每条标签为 b 的弧都是第一类或第二类的.*

注 3. *如果 G^* 包含一个标签为 b 的第二类弧，那么 G 包含一个与 R 同构的子图.*

如果这个弧线由 (I) 产生，取 $N^+(b)-c=\{b_1,b_2\}$. 我们有 $(u,b),(u,b_1),(u,b_2)\in E$. 映射 $u\to a,b\to b,b_1\to c,b_2\to d$ 从 $\{u,b,b_1,b_2\}$ 生成的子图（必要时我们删除一些弧）上诱导出一个映到 R 的同构.

如果这个弧由 (III) 产生，我们必然是 (III.2.2). 我们很容易验证，映射 $a\to a,b\to b,c\to c,a_1\to d$ 从 $G_{\{a,b,c,a_1\}}$ 的一个子图诱导出一个映到 R 的同构（观察发现 $(a,a_1),(b,a_1)\in E$）.

注 4. *如果 G 不包含三角形，那么所有添加的弧都是第一类的.*

下面的定理使用了上面定义的术语. 我们令 g 表示 $g(G)$. 两个顶点 x 和 y 之间的距离将用 $\mathrm{dist}(x,y)$ 来表示. 令 C 是 G 的一个回路，x 和 y 是 C 的两个顶点. C 中包含的连接 x 和 y 的有向路径将用 $C(x,y)$ 表示.

引理 2.1. *令 C 是 G^* 的一个长度 $\leqq g-2$ 的基本回路，那么 G 包含一个三角形. 此外，C 包含正好两个不属于 E 的弧，其形式为 (u,v) 和 (v,w)，其中 (u,v) 是的标签为 a，(v,w) 的标签为 b 且是第二类的.*

证明. 假设 p 是 E^*-E 中包含在 C 中的弧的数量，我们证明以下结论.

(1) $p\geqslant 2$. 相反，假设 $p\leqslant 1$.

由于不属于 E 的每条弧都可以用 E 的两条弧代替，所以 C 可以转化为 G 的一个长度 $\leqslant g-1$ 的回路，矛盾.

通过令 $a<b<c$，在 T 上定义一个序关系.

令 (u_1, v_1) 是一个标签为 x_1 的弧，(u_2, v_2) 是一个标签为 x_2 的弧，这样 $x_1 \leqslant x_2$，$C(v_2, u_1)$ 只包含 G 的弧．考虑 $C' = C(v_2, u_1) + (u_1, x_1) + \mu(x_1, x_2) + \mu'(x_2, v_2)$，其中 $\mu(x_1, x_2)$（相应地，$\mu'(x_2, u_2)$）是 G 中长度为 $\operatorname{dist}(x_1, x_2)$（相应地，$\operatorname{dist}(x_2, v_2)$）的路径．取 $c(v_1, u_2) = |C(v_1, v_2)|$．我们有

$$|C'| \leqslant |C| - 2 - c(v_1, u_2) + 1 + \operatorname{dist}(x_1, x_2) + \operatorname{dist}(x_2, v_2)$$

但 $g \leqslant |C'|$ 且 $|C| \leqslant g - 2$，因此

(2) $\operatorname{dist}(x_1, x_2) + \operatorname{dist}(x_2, v_2) \geqslant 3 + c(v_1, u_2)$

(3) G 包含一个三角形．

假设相反．那么由注 4，$\operatorname{dist}(x_2, v_2) = 1$．由此可见，$v_1 = u_2$，$x_1 = a$，$x_2 = c$，因此 $(v_1, c) \in E$．根据构造 $v_1 \in N^+(a) - N^-(c)$，矛盾．

令 i 是弧 (u_2, v_2) 的类型．

(4) $\operatorname{dist}(x_1, x_2) + i \geqslant 3 + c(v_1, u_2)$

这很容易从关系 (2)、显然的不等式 $i \geqslant \operatorname{dist}(x_2, v_2)$ 和 (1) 中得出．

(5) $p = 2$．假设相反，那么 $c(v_1, u_2) \geqslant 1$．

观察一下，$c(v_1, u_2)$ 包含 $p-2$ 条边．利用 (4)，我们有 $4 \leqslant \operatorname{dist}(x_1, x_2) + i \leqslant \operatorname{dist}(x_1, x_2) + 3$．由此可见，$x_1 \neq x_2$．根据 (3)，$\operatorname{dist}(x_1, x_2) = 1$．利用关系 $x_1 < x_2$，我们很容易看到，$x_2 \in \{b, c\}$．根据注 1 和 2，我们有 $i \leqslant 2$，这与关系 $4 \leqslant \operatorname{dist}(x_1, x_2) + i$ 相矛盾．

(6) $x_1 \neq x_2$．

假设相反．我们必然有 $v_1 = u_2$ 和 $u_1 = v_2$．C 中唯一不包含在 E 中的弧是 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2)．由于 $C(v_2, u_1)$ 不包含 $E^* - E$ 的弧，我们可以在 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 互换的情况下应用上述推理，并推导出 $v_2 = u_1$．根据 (3)，$c \in N^+(a)$．设 $N^+(a) = \{b, c, d\}$．

由于 (u_2, v_2) 是第三类，存在 G 的一条路径 (u_2, a, d, d', v_2)，使得 $(u_2, d), (u_2, d') \in E$．但 $d' \in N^-(v_2) = N^-(u_1)$．因此 (d', u_1, d) 是 G 的 3-回路，上述推理应用于 (u_1, v_1) 表明 $(u_1, d) \in E$．矛盾．

(7) 根据 (3) 和 (6)，$dist(x_1, x_2) = 1$，因此 $x_2 = b$ 或 $x_2 = c$，根据注 1 和 2，$i \leqslant 2$，由 (4) 得出 $i = 2$，$v_1 = u_2$．根据注 1，u_2, v_2 被的标签是 b，因此 (u_1, v_1) 的标签是 a．引理得证．

□

定理 2.2. 设 $G = (V, E)$ 是一个有向图，对于 G 的每个顶点，$d^+(x) = 3$．令 n 为 G 的阶数，g 为其围长，那么 $n \geqq 3g - 2$．

证明．假设相反，令 G 是一个最小阶的反例．我们之前已经看到，G 满足构建 G^* 所需的假设．我们有 $g(G^*) \leqslant g - 2$；否则，根据 n 的最小性，$n - 3 \geqslant 3g - 5$，所以 $n \geqslant 3g - 2$，如所愿．根据引理2.1．G 包含一个三角形，G 包含一个标签为 b 的第二类弧．根据注 3，G 包含一个与 R 同构的子图．

我们现在可以用 R 的三角形 (a,b,c) 来构造 G^*．令 C 是 G^* 的一个长度最小的圆环．根据引理2.1，不在 E 中的 C 的唯一弧的形式是 (u,v) 和 (v,w)，其中 (u,v) 的标签是 a，(v,w) 的标签是 b 且是第二类．由于 $|N^+(d)-T|=2$，我们看到每个标签为 a 的弧至多是第二类的．由此可见，(b,v,d) 是 G 的 3-回路，矛盾．

定理得证． $\square$

致谢

我要感谢 J. C. Bermond 和 J. A. Bondy 教授提出的许多有益建议和意见．

参考文献

[1] M. BEHZAD, C. CHARTRAND AND C. WALL, On minimal regular digraphs with given girth. *Fund. Math.* **69** (1970), 227-231.

[2] M. BEHZAD, Minimally 2-regular digraphs with given girth, *J. Math. Sot. Japan* **25** (1973), 1-6.

[3] C. BERGE, "Graphs et hypergraphes," Dunod, Paris (1970).

[4] J. C. BERMOND,1-graphs réguliers de girth donné, *Cahiers C.E.R.O. Bruxelles* **17** (1975), 123-135.

[5] L. CACCETTA AND R. HÄGGKVIST, On minimal digraphs with given girth, in "Congressus Numeratum XXL," pp. 181-187, Utilitas Mathematics, Boca Raton, 1978.

[6] Y. O. HAMIDOUNE, A note on the girth of a digraph, *Combinatorics* **2** (1982), 143-147.

[7] Y. O. HAMIDOUNE, An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in finite groups, *Europ. J. Combin.* **2** (1981) 349-355.