

Minimal 2-regular digraphs with given girth

By Mehdi BEHZAD

(Received July 13, 1971)

(Revised Nov. 12, 1971)

1 摘要

一个有向图 D 如果所有顶点 v 都有度 $\deg v = r, r \geq 1$, 那么被称为是 r -正则的. 包含有向环的 D 的围长 $n, n \geq 2$ 是 D 中最小环的长度. 围长为 n 的 r -正则有向图的最小顶点数用 $g(r, n)$ 表示. 在本说明中, 我们证明 $g(2, n) = 2n - 1$.

2 简介和定义

度数为 $r, r \geq 1$, 围长为 $n, n \geq 2$ 的正则图可能具有的最小顶点数用 $f(r, n)$ 表示. 确定 $f(r, n)$ 的值是近年来许多研究的主题. (例如, 见 [3]、[4] 和 [5].) 然而, 除了少数例外, $f(r, n)$ 的值对于 $r \geq 3$ 和 $n \geq 5$ 是未知的. 在 [2] 中, 考虑了有向图的类似问题.

如果有向图 D 的每个顶点 v 的 $\text{id } v = \text{od } v = r, r \geq 1$, 则 D 是 r -正则的, 其中 $\text{id } v$ 是 D 的顶点 v 的入度, 而 $\text{od } v$ 是 v 的出度. 对于正整数 $n \geq 2$ 和 $r \geq 1$, $g(r, n)$ 被定义为具有围长 (有向图中最小环的长度) n 的 r -正则有向图可能拥有的最小顶点数. $g(r, n)$ 的上界 $r(n-1)+1$ 是在 [2] 中得到的, 并猜想 $g(r, n) = r(n-1)+1$. 此外, 还得到了 $g(r, n)$ 在 $r-n$ 平面的所有格点集合的子集 S 中的元素的值, 其中:

$$S = \{(r, n) : n = 2, 3\} \cup \{(r, n) : r = 1\} \cup \{(2, 4), (3, 4), (4, 4), (3, 5)\}$$

在这篇文章中, 我们打算证明该猜想在 $r = 2$ 的情况下也是正确的.

3 函数 $g(2, n)$

首先我们证明 $g(2, n)$ 是关于 n 的增函数.

引理 1. 令 $n \geq 2$, 那么 $g(2, n+1) > g(2, n)$.

证明. 我们使用对 n 的归纳法. 对于 $n = 2$ 和 3 , 该定理显然是正确的. 假设 D 是一个阶为 $f(2, n+1)$ 的 2-正则图, 其围长为 $n+1, n \geq 3$. 那么 D 包含一个长度为 $n+1$ 的环 $C : v_1, v_2, \dots, v_{n+1}, v_1$. C 的每个顶点 v_i 都相邻于和相邻自 $V(D) - V(C)$ 的一个元素, 分别为 u_j 和 $u_k, j \neq k$, 其中 $V(D)$ 表示 D 的顶点集. 存在一个整数 $i, 1 \leq i \leq n+1$, 使得边 $u_k u_j$

不在 D 中, 否则 D 至少包含 $4n+4$ 条边, 而 $g(2, n+1) \leq 2n+1$ 并且 D 的正则性表明 D 至少有 $4n+2$ 条边. 现在, 我们把顶点 v_i 和它的入射边以及两条新的边 $\overrightarrow{v_{i-1}v_{i+1}}$ 和 $\overrightarrow{u_k u_j}$ ——如果 $i=1$, 那么 $i-1$ 替换为 $n+1$, 如果 $i=n+1$, 那么 $i+1$ 替换为 1 ——得到一个新的阶为 $g(2, n+1)-1$ 、围长为 n 的 2-正则图. 因此, $g(2, n) < g(2, n+1)$ 即得证. \square

我们说一个围长为 $n, n \geq 3$ 的有向图 D 的顶点 v 与 D 的顶点 u 相邻, 要么 v 相邻于顶点 u 或相邻自顶点 u . 从现在开始, 下标以 n 的整数模为单位进行计算.

引理 2. 假设存在一个阶数为 $g(2, n) = 2n - 2$ 的 2-正则图 D , 其围长为 $n, n \geq 4$. 如果 $C: v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ 是 D 的一个长度为 n 的环, 那么 $V(D) - V(C)$ 的每个顶点都与 C 的 2 或 3 个顶点相邻.

证明. 设 u 为非空集 $V(D) - V(C)$ 的一个元素. 假设 u 相邻于 v_i . 那么, 除了 v_{i-1} 和 v_{i-2} 之外, u 不可能相邻于 C 的任何顶点. 现在显然顶点 u 不可能与 C 的其他顶点相邻. 这证明了 u 最多只能与 C 的 3 个顶点相邻.

接下来, 假设 u 是 $V(D) - V(C)$ 的一个元素, 它最多与 C 的一个顶点相邻. 假设 u 相邻自 D 的顶点 u_1 和 u_3 , 相邻于 D 的顶点 u_2 和 u_4 . (如果 u 与 C 的一个顶点相邻, 那么集合 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 中恰好有一个元素是 C 的一个顶点.) 现在从 D 中移除 C 的边, 用 D^* 表示得到的有向图. 我们通过考虑以下情况来证明 D^* 包含一个长度为 N 的环 C_2 .

CASE 1. 两条边 $\overrightarrow{u_1 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_3 u_4}$ 中至少有一条是 D 的边. 那么边 $\overrightarrow{u_3 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_1 u_4}$ 不在 D 中. 如果 D^* 中没有长度为 n 的环, 那么我们移除顶点 u 和它从有向图 D 中射入的边, 并且将新的边 $\overrightarrow{u_3 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_1 u_4}$ 添加到得到的有向图中, 得到一个阶为 $g(2, n) - 1$ 、围长为 n 的 2-正则图. 但是这与 $g(2, n)$ 的最小性矛盾.

CASE 2. 两条边 $\overrightarrow{u_1 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_3 u_4}$ 都不是 D 的边. 在这种情况下, 同样按照上面的论证, 用 $\overrightarrow{u_1 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_3 u_4}$ 替换 $\overrightarrow{u_3 u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_1 u_4}$, 我们得出结论: D^* 包含一个长度为 n 的环.

现在从 D^* 中移除 C_2 的边, 用 D^{**} 表示所得到的有向图. 由于 D 包含 $4n-4$ 条边, D^{**} 包含 $2n-4$ 条边. 从 D^{**} 的一个非孤立顶点开始, 沿着 D^{**} 的有向边遍历, 我们得到一个长度为 C_3 的环, 长度为 $\mu = 2n-4$. 显然, $\mu \geq n$. 如果 $\mu < 2n-4$, 那么 D^{**} 必然包含一个长度小于 n 的环, 这是不可能的. 因此, D 是 C_1, C_2 和 C_3 三个边不相连的环之和, 这样 $C_i, i=1, 2$ 的长度为 n , C_3 的长度为 $2n-4$. D 的顶点集由 C_3 的 $2n-4$ 顶点以及另外两个顶点 w_1 和 w_2 组成. 两个环 C_1 和 C_2 都包含顶点 w_1 和 w_2 ; 此外, 两个环 C_1 和 C_2 没有其他共同顶点. 由于 D 的围长为 n , 因此 C_1 中的有向路径 $w_1 - w_2$ ($w_2 - w_1$) 与 C_2 中的有向路径 $w_1 - w_2$ ($w_2 - w_1$) 长度相同. 这 4 条路径的长度都大于 1, 而且每条有向路径 $w_1 - w_2$ 的顶点都不可能与 C_1 中的路径 $w_2 - w_1$ 的顶点或 C_2 中的路径 $w_2 - w_1$ 的顶点相邻 (见图 1).

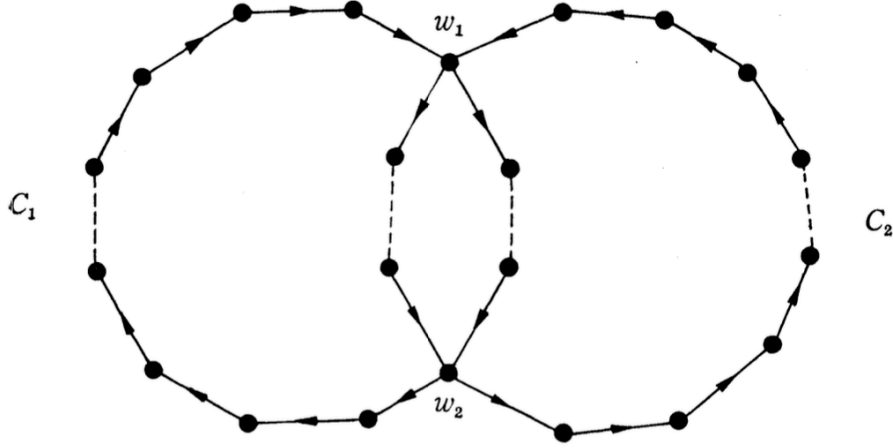


图 1

因此, D 不可能包含不经过 w_1 和 w_2 的长度为 $2n - 4$ 的环. 这个矛盾点完成了对该定理的证明. \square

我们的主要结果是:

对于任何整数 $n \geq 2$, $g(2, n) = 2n - 1$.

证明. 我们对 n 使用归纳法. 已知该定理在 $n = 2, 3, 4$ 和 5 时为真. 假设该定理在 $n - 1$ 时为真, 考虑一个 2-正则定向图 D , 其围长为 $n, n \geq 6$, 阶为 $g(2, n)$. 那么 $g(2, n) \leq 2n - 1$, 并且根据归纳假设 $g(2, n - 1) = 2n - 3$. 这些和引理1意味着 $g(2, n)$ 不是 $2n - 2$ 就是 $2n - 1$. 假设 $g(2, n) = 2n - 2$, 令 $C: v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ 是 D 的一个长度为 n 的循环. 根据引理2, $V(D) - V(C)$ 的每个元素都与 C 的 2 或 3 个顶点相邻. 事实上, $V(D) - V(C)$ 的 4 个元素, 如 u_1, u_2, u_3 和 u_4 与 C 的 3 个顶点相邻, $V(D) - V(C)$ 的其余 $n - 6$ 个元素, 如 u_5, u_6, u_{n-2} , 都与 C 的两个顶点相邻. 为了表明这一点, 我们观察一下, 偶数整数 $2n$ 的包含 $n - 2$ 个属于集合 $\{2, 3\}$ 的加法因子的唯一分割是 $\{3, 3, 3, 3, 2, 2, \dots, 2\}$. 接下来我们证明, 这种情况是不可能的.

CASE 1. 假设集合 u_1, u_2, u_3, u_4 中的两个元素是相邻的. 不失一般性, 我们可以假设 u_1 相邻于顶点 u_2 . 那么 u_1 相邻于 C 的一个顶点, 记为 v_1 , 并且相邻自 C 的 2 个顶点. 这两个顶点必然是 v_n 和 v_{n-1} . 那么 C 中唯一能相邻自 u_2 的顶点就是 v_2 . 但是这产生了一个矛盾, 因为顶点 u_2 必须相邻于 C 的两个顶点. 请看图 2 的说明.

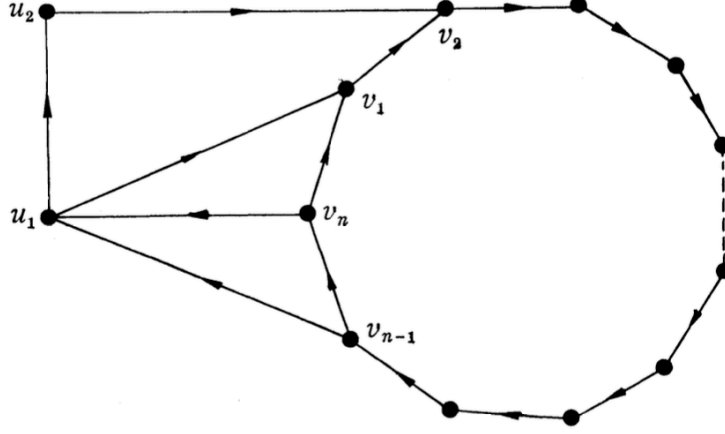


图 2

CASE 2. 唯一的选择是 $n \geq 8$, 并且 u_1, u_2, u_3, u_4 集合中的两个元素, 例如 u_1 和 u_2 , 被一条长度为 $t, 2 \leq t \leq 6$ 的半路径 P 连接, 其顶点都属于 $V(D) - V(C)$. 令 $P: u_1, u_5, u_6, \dots, u_k, u_2$, 其中 $5 \leq k \leq n-3$. 我们用 w_1 表示 u_1 , u_5 表示 w_2 , u_6 表示 w_3 , \dots , u_k 表示 w_{k-3} , 以及 u_2 表示 w_{k-2} . 那么 $P: w_1, w_2, \dots, w_{k-2}$.

现在我们有两种情况需要考虑.

- i) 顶点 w_1 相邻于顶点 w_2 . 不失一般性, 我们假设 w_1 相邻于 v_1 . 那么顶点 v_n 和 v_{n-1} 一定相邻于 w_1 . 顶点 w_2 至少相邻于 C 的一个顶点, 那一定是 v_2 . 因此, 顶点 w_2 也一定相邻于 w_3 . 继续这个过程, 我们发现 w_i 只能相邻于 C 的一个顶点, 即 v_i , 对于 $1 \leq i \leq k-2$; 因此 w_i 的顶点必须是相邻于 w_{i+1} 的, 对于 $1 \leq i \leq k-3$. 但是, $w_{k-2} = u_2$ 与两个 C 的顶点的相邻关系是不可能的. (请注意, 半路径 P 是一条从 u_1 到 u_2 的 (有向) 路径.)

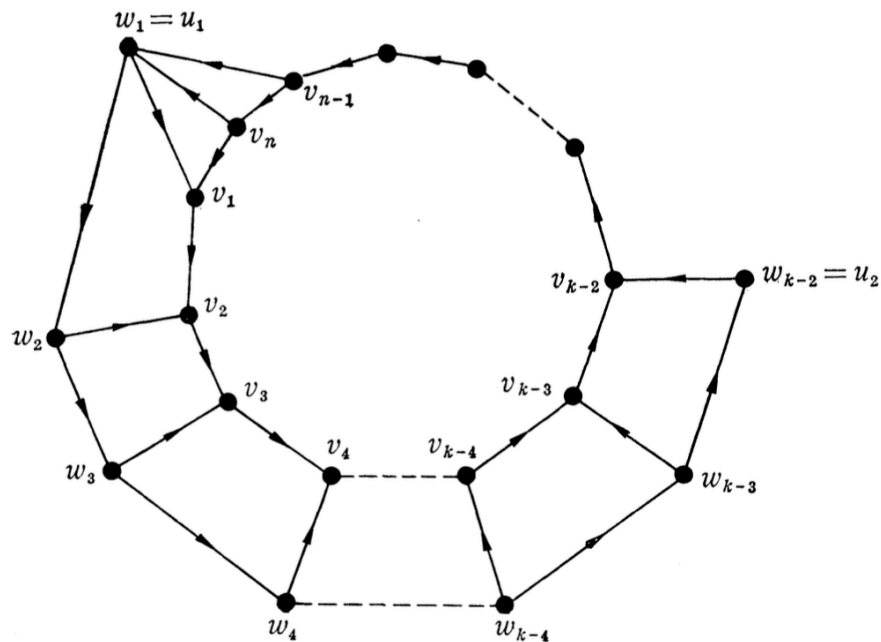


图 3

因此, 假设 $g(2, n) = 2n - 2$ 导致了矛盾.

- ii) 顶点 w_1 相邻自顶点 w_2 . 我们可以假设 C 的顶点 v_{n-1} 也相邻于 w_1 . 因此, C 中相邻自 w_1 的两个顶点是 v_1 和 v_n . 接下来, C 中至少有一个顶点必须相邻于 w_2 , 在没有其他选择的情况下, 这个顶点就是 v_{n-2} . 因此, 顶点 w_3 相邻于顶点 w_2 . 继续这个过程, 我们得出结论: C 中唯一相邻于 w_i 的顶点是 v_{n-i} , 对于 $i = 1, 2, \dots, k-2$. 因此, 顶点 w_i 也相邻自顶点 w_{i+1} , 对于 $1 \leq i \leq k-3$. 但这与顶点 $w_{k-2} = u_2$ 相邻自与 C 的两个顶点的事实相矛盾. (在这种情况下, 半路径 P 是一条从 u_2 到 u_1 的有向路径.) 这与 $g(2, n) = 2n - 2$ 的假设相矛盾. 请看图 4 的说明. 因此, 在任何情况下, $g(2, n) = 2n - 1$ 即得证.

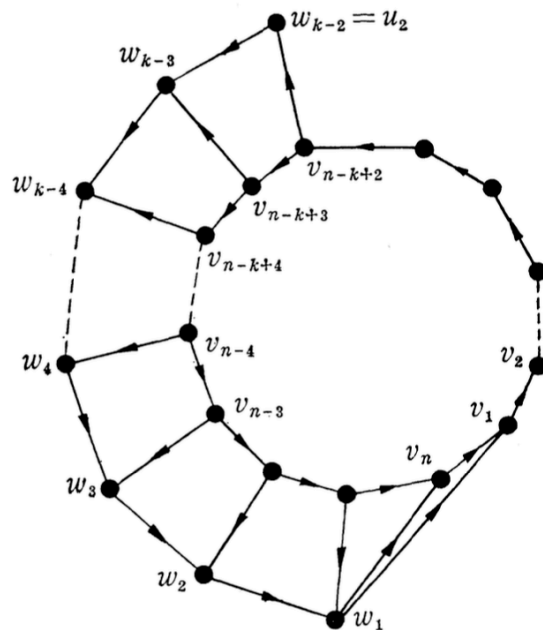


图 4

□

我们在结束本文时提到，经过一些修改，这种方法似乎可以用于确定函数 $g(3, n)$ 的值，这个结果可能出现在其他地方。

数学系

Arya-Mehr 技术大学

P. O. Box 3406, 德黑兰, 伊朗

参考文献

- [1] M. Behzad and G. Chartrand, An Introduction to Theory of Graphs, Allyn and Bacon Inc., 1971.
- [2] M. Behzad, G. Chartrand and C. E. Wall, On Minimal Regular Digraphs with Given Girth, Fund. Math., 69 (1970), 227-231.
- [3] P. Erdős and H. Sachs, Regular Graphen Gegebener Tailleneites mit Minimaler Konetenzahl, Wiss. Z. Univ. Hulle. Math.-Nat., 12, No. 3 (1963), 251-258.
- [4] A. J. Hoffman and R. R. Singleton, On Moore Graph with Diameters two and three, I. B. M. J. Res. Develop., 4 (1960), 497-504.
- [5] W. T. Tutte, The Connectivity of Graphs, Toronto Univ. Press, Toronto, 1967.