Minimal 2-regular digraphs with given girth

By Mehdi BEHZAD

(Received July 13, 1971)
(Revised Nov. 12, 1971)

1 摘要

一个有向图 D 如果所有顶点 v 都有度 $v=r, r \geqq 1$，那么被称为是 r-正则的．包含有向环的 D 的围长 $n, n \geqq 2$ 是 D 中最小环的长度．围长为 n 的 r-正则有向图的最小顶点数用 $g(r,n)$ 表示．在本说明中，我们证明 $g(2,n)=2n-1$．

2 简介和定义

度数为 $r, r \geqq 1$，围长为 $n, n \geqq 2$ 的正则图可能具有的最小顶点数用 $f(r,n)$ 表示．确定 $f(r,n)$ 的值是近年来许多研究的主题．（例如，见 [3]、[4] 和 [5]．）然而，除了少数例外，$f(r,n)$ 的值对于 $r \geqq 3$ 和 $n \geqq 5$ 是未知的．在 [2] 中，考虑了有向图的类似问题．

如果有向图 D 的每个顶点 v 的 $\operatorname{id} v = \operatorname{od} v = r, r \geqq 1$，则 D 是 r-正则的，其中 $\operatorname{id} v$ 是 D 的顶点 v 的入度，而 $\operatorname{od} v$ 是 v 的出度．对于正整数 $n \geqq 2$ 和 $r \geqq 1$，$g(r,n)$ 被定义为具有围长（有向图中最小环的长度）n 的 r-正则有向图可能拥有的最小顶点数．$g(r,n)$ 的上界 $r(n-1)+1$ 是在 [2] 中得到的，并猜想 $g(r,n)=r(n-1)+1$．此外，还得到了 $g(r,n)$ 在 $r-n$ 平面的所有格点集合的子集 S 中的元素的值，其中:

$$S=\{(r,n): n=2,3\} \cup \{(r,n): r=1\} \cup \{(2,4),(3,4),(4,4),(3,5)\}$$

在这篇文章中，我们打算证明该猜想在 $r=2$ 的情况下也是正确的．

3 函数 $g(2,n)$

首先我们证明 $g(2,n)$ 是关于 n 的增函数．

引理 1. 令 $n \geqq 2$，那么 $g(2,n+1) > g(2,n)$．

证明．我们使用对 n 的归纳法．对于 $n=2$ 和 3，该定理显然是正确的．假设 D 是一个阶为 $f(2,n+1)$ 的 2-正则有向图，其围长为 $n+1, n \geqq 3$．那么 D 包含一个长度为 $n+1$ 的环 $C: v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}, v_1$．$C$ 的每个顶点 v_i 都相邻于和相邻自 $V(D)-V(C)$ 的一个元素，分别为 u_j 和 $u_k, j \neq k$，其中 $V(D)$ 表示 D 的顶点集．存在一个整数 $i, 1 \leqq i \leqq n+1$，使得边 $u_k u_j$

不在 D 中，否则 D 至少包含 $4n+4$ 条边，而 $g(2,n+1) \leqq 2n+1$ 并且 D 的正则性表明 D 至少有 $4n+2$ 条边．现在，我们把顶点 v_i 和它的入射边以及两条新的边 $\overrightarrow{v_{i-1}v_{i+1}}$ 和 $\overrightarrow{u_k u_j}$——如果 $i=1$，那么 $i-1$ 替换为 $n+1$，如果 $i=n+1$，那么 $i+1$ 替换为 1——得到一个新的阶为 $g(2,n+1)-1$、围长为 n 的 2-正则有向图．因此，$g(2,n) < g(2,n+1)$ 即得证． □

我们说一个围长为 $n, n \geqq 3$ 的有向图 D 的顶点 v 与 D 的顶点 u 相邻，要么 v 相邻于顶点 u 或相邻自顶点 u．从现在开始，下标以 n 的整数模为单位进行计算．

引理 2. *假设存在一个阶数为 $g(2,n) = 2n-2$ 的 2-正则有向图 D，其围长为 $n, n \geqq 4$．如果 $C: v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ 是 D 的一个长度为 n 的环，那么 $V(D)-V(C)$ 的每个顶点都与 C 的 2 或 3 个顶点相邻．*

证明. 设 u 为非空集 $V(D)-V(C)$ 的一个元素．假设 u 相邻于 v_i．那么，除了 v_{i-1} 和 v_{i-2} 之外，u 不可能相邻于 C 的任何顶点．现在显然顶点 u 不可能与 C 的其他顶点相邻．这证明了 u 最多只能与 C 的 3 个顶点相邻．

接下来，假设 u 是 $V(D)-V(C)$ 的一个元素，它最多与 C 的一个顶点相邻．假设 u 相邻自 D 的顶点 u_1 和 u_3，相邻于 D 的顶点 u_2 和 u_4．（如果 u 与 C 的一个顶点相邻，那么集合 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 中恰好有一个元素是 C 的一个顶点．）现在从 D 中移除 C 的边，用 D^* 表示得到的有向图．我们通过考虑以下情况来证明 D^* 包含一个长度为 N 的环 C_2．

CASE 1. *两条边 $\overrightarrow{u_1u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_3u_4}$ 中至少有一条是 D 的边．* 那么边 $\overrightarrow{u_3u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_1u_4}$ 不在 D 中．如果 D^* 中没有长度为 n 的换，那么我们移除顶点 u 和它从有向图 D 中射入的边，并且将新的边 $\overrightarrow{u_3u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_1u_4}$ 添加到得到的有向图中，得到一个阶为 $g(2,n)-1$、围长为 n 的 2-正则有向图．但是这与 $g(2,n)$ 的最小性矛盾．

CASE 2. *两条边 $\overrightarrow{u_1u_2}$ 和 $\overrightarrow{u_3u_4}$ 都不是 D 的边．* 在这种情况下，同样按照上面的论证，替换掉 u_3u_2 和 u_1u_4，我们得出结论：D^* 包含一个长度为 n 的环．

现在从 D^* 中移除 C_2 的边，用 D^{**} 表示所得到的有向图．由于 D 包含 $4n-4$ 条边，D^{**} 包含 $2n-4$ 条边．从 D^{**} 的一个非孤立顶点开始，沿着 D^{**} 的有向边遍历，我们得到一个长度为 C_3 的环，长度为 $\mu = 2n-4$．显然，$\mu \geqq n$．如果 $\mu < 2n-4$，那么 D^{**} 必然包含一个长度小于 n 的环，这是不可能的．因此，D 是 C_1, C_2 和 C_3 三个边不相连的环之和，这样 $C_i, i=1,2$ 的长度为 n，C_3 的长度为 $2n-4$．D 的顶点集由 C_3 的 $2n-4$ 顶点以及另外两个顶点 w_1 和 w_2 组成．两个环 C_1 和 C_2 都包含顶点 w_1 和 w_2；此外，两个环 C_1 和 C_2 没有其他共同顶点．由于 D 的围长为 n，因此 C_1 中的有向路径 w_1-w_2（w_2-w_1）与 C_2 中的有向路径 w_1-w_2（w_2-w_1）长度相同．这 4 条路径的长度都大于 1，而且每条有向路径 w_1-w_2 的顶点都不可能与 C_1 中的路径 w_2-w_1 的顶点或 C_2 中的路径 w_2-w_1 的顶点相邻（见图 1）．

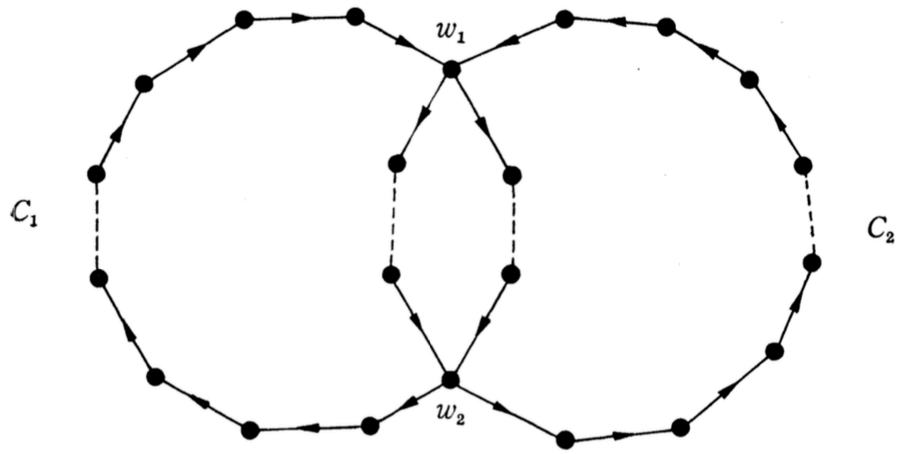

图 1:

因此，D 不可能包含不经过 w_1 和 w_2 的长度为 $2n-4$ 的环．这个矛盾点完成了对该定理的证明． □

我们的主要结果是：

对于任何整数 $n \geqq 2$，$g(2,n)=2n-1$．

证明．我们对 n 使用归纳法．已知该定理在 $n=2,3,4$ 和 5 时为真．假设该定理在 $n-1$ 时为真，考虑一个 2-正则有向图 D，其围长为 $n, n \geqq 6$，阶为 $g(2,n)$．那么 $g(2,n) \leqq 2n-1$，并且根据归纳假设 $g(2,n-1)=2n-3$．这些和引理1意味着 $g(2,n)$ 不是 $2n-2$ 就是 $2n-1$．假设 $g(2,n)=2n-2$，令 $C: v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ 是 D 的一个长度为 n 的循环．根据引理2，$V(D)-V(C)$ 的每个元素都与 C 的 2 或 3 个顶点相邻．事实上，$V(D)-V(C)$ 的 4 个元素，如 u_1, u_2, u_3 和 u_4 与 C 的 3 个顶点相邻，$V(D)-V(C)$ 的其余 $n-6$ 个元素，如 u_5, u_6, u_{n-2}，都与 C 的两个顶点相邻．为了表明这一点，我们观察一下，偶数整数 $2n$ 的包含 $n-2$ 个属于集合 $\{2,3\}$ 的加法因子的唯一分割是 $\{3,3,3,3,2,2,\ldots,2\}$．接下来我们证明，这种情况是不可能的．

CASE1. 假设集合 u_1, u_2, u_3, u_4 中的两个元素是相邻的．不失一般性，我们可以假设 u_1 相邻于顶点 u_2．那么 u_1 相邻于 C 的一个顶点，记为 v_1，并且相邻自 C 的 2 个顶点．这两个顶点必然是 v_n 和 v_{n-1}．那么 C 中唯一能相邻自 u_2 的顶点就是 v_2．但是这产生了一个矛盾，因为顶点 u_2 必须相邻于 C 的两个顶点．请看图 2 的说明．

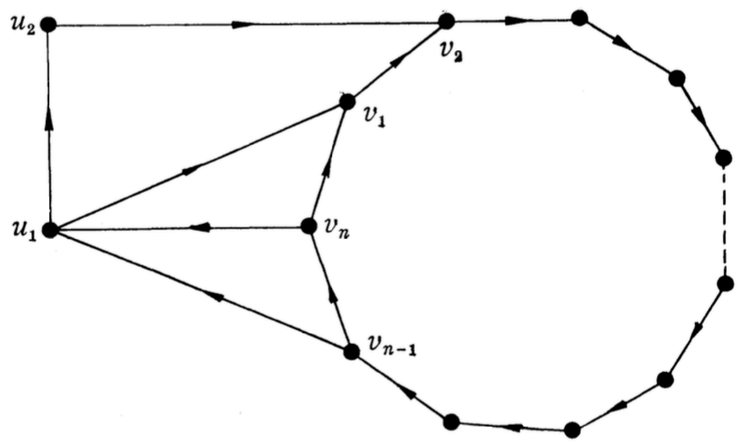

图 2:

CASE2. 唯一的选择是 $n \geqq 8$, 并且 u_1, u_2, u_3, u_4 集合中的两个元素, 例如 u_1 和 u_2, 被一条长度为 $t, 2 \leqq t \leqq 6$ 的半路径 P 连接，其顶点都属于 $V(D) - V(C)$. 令 $P : u_1, u_5, u_6, \ldots, u_k, u_2$, 其中 $5 \leqq k \leqq n-3$. 我们用 w_1 表示 u_1，u_5 表示 w_2，u_6 表示 w_3，$\cdots$，u_k 表示 w_{k-3}，以及 u_2 表示 w_{k-2}. 那么 $P : w_1, w_2, \ldots, w_{k-2}$.

现在我们有两种情况需要考虑.

i) 顶点 w_1 相邻于顶点 w_2. 不失一般性，我们假设 w_1 相邻于 v_1. 那么顶点 v_n 和 v_{n-1} 一定相邻于 w_1. 顶点 w_2 至少相邻于 C 的一个顶点，那一定是 v_2. 因此，顶点 w_2 也一定相邻于 w_3. 继续这个过程，我们发现 w_i 只能相邻于 C 的一个顶点，即 v_i，对于 $1 \leqq i \leqq k-2$；因此 w_i 的顶点必须是相邻于 w_{i+1} 的，对于 $1 \leqq i \leqq k-3$. 但是，$w_{k-2} = u_2$ 与两个 C 的顶点的相邻关系是不可能的.（请注意，半路径 P 是一条从 u_1 到 u_2 的（有向）路径.）

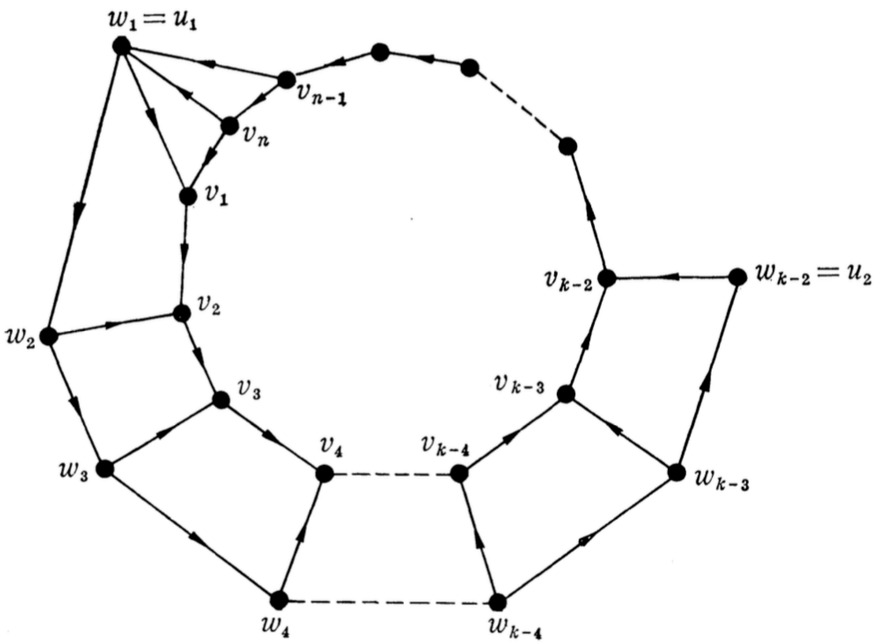

图 3:

因此，假设 $g(2,n) = 2n-2$ 导致了矛盾.

ii) 顶点 w_1 相邻自顶点 w_2. 我们可以假设 C 的顶点 v_{n-1} 也相邻于 w_1. 因此，C 中相邻自 w_1 的两个顶点是 v_1 和 v_n. 接下来，C 中至少有一个顶点必须相邻于 w_2，在没有其他选择的情况下，这个顶点就是 v_{n-2}. 因此，顶点 w_3 相邻于顶点 w_2. 继续这个过程，我们得出结论: C 中唯一相邻于 w_i 的顶点是 v_{n-i}，对于 $i = 1, 2, \ldots, k-2$. 因此，顶点 w_i 也相邻自顶点 w_{i+1}，对于 $1 \leqq i \leqq k-3$. 但这与顶点 $w_{k-2} = u_2$ 相邻自与 C 的两个顶点的事实相矛盾.（在这种情况下，半路径 P 是一条从 u_2 到 u_1 的有向路径.）这与 $g(2,n) = 2n-2$ 的假设相矛盾. 请看图 4 的说明. 因此，在任何情况下，$g(2,n) = 2n-1$ 即得证.

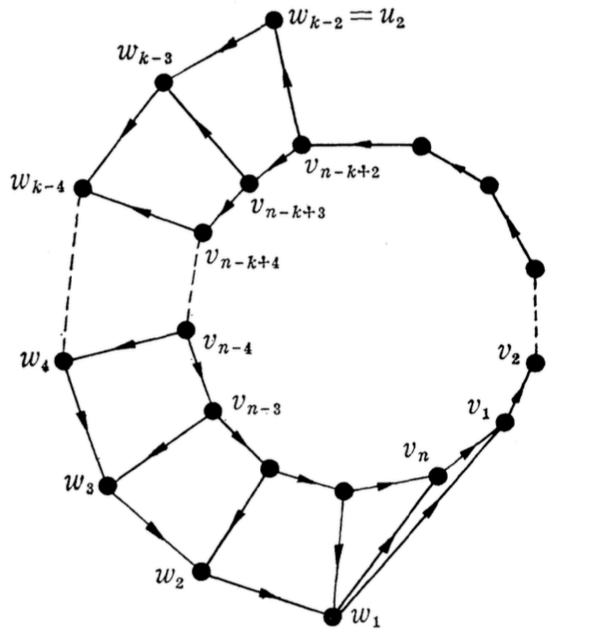

图 4:

□

我们在结束本文时提到，经过一些修改，这种方法似乎可以用于确定函数 $g(3,n)$ 的值，这个结果可能出现在其他地方.

数学系
Arya-Mehr 技术大学
P. O. Box 3406，德黑兰，伊朗

参考文献

[1] M. Behzad and G. Chartrand, An Introduction to Theory of Graphs, Allyn and Bacon Inc., 1971.

[2] M. Behzad, G. Chartrand and C. E. Wall, On Minimal Regular Digraphs with Given Girth, Fund. Math., 69 (1970), 227-231.

[3] P. Erdös and H. Sachs, Regular Graphen Gegebener Tailleneites mit Minimaler Konetenzahl, Wiss. Z. Univ. Hulle. Math.-Nat., 12, No. 3 (1963), 251-258.

[4] A. J. Hoffman and R. R. Singleton, On Moore Graph with Diameters two and three, I. B. M. J. Res. Develop., 4 (1960), 497-504.

[5] W. T. Tutte, The Connectivity of Graphs, Toronto Univ. Press, Toronto, 1967.