

关于给定围长的最小有向图的说明

YAHYA OULD HAMIDOUNE

Received March 12, 1982

Caccetta 和 Häggkvist 猜想, 一个围长为 g 、出度不小于 r 的有向图的最小阶是 $r(g-1)+1$. 他们证明了 $r=2$ 的猜想. 我们对 $r=3$ 进行证明. ©1987 Academic Press, Inc.

1 引入

我们使用 [3] 的符号. 一个至少有一个回路的有向图 G 的围长是 G 的一个回路的最小长度, 我们用 $g(G)$ 表示.

Behzad 等人 [1] 猜想, 出度为 r 、围长为 g 的正规有向图的最小阶也是 $r(g-1)+1$. 这个猜想已经被 Behzad [2] 证明为 $r=2$, 被 Bermond [4] 证明为 $r=3$. 在 [6] 中, 我们证明了这个猜想为 $r=4$.

Caccetta 和 Häggkvist [5] 猜想, 围长为 g 且最小出度至少为 r 的有向图的最小阶为 $r(g-1)+1$, 他们证明了 $r=2$ 的这个猜想.

这里, 我们证明了 $r=3$ 的猜想. 我们的方法也可以用于 $r=2$ 的情况.

上述猜想对于具有传递自同构群的有向图来说是正确的 [7]. 作为一个应用 [7], 我们证明, 给定一个 n 阶的有限群 G 和 G 的基数为 s 的子集 S , 我们可以把 G 的一致性表达为 S 的最多 $\lceil n/s \rceil$ 个元素的乘积.

我们在证明中使用了以下结果.

定理 1.1 (Bermond [4]). 假设 $G = (V, E)$ 是一个围长为 g 的有向图, 使得 $d^+(x) \geq 3$ 和 $d^-(x) \geq 3$, 那么 $|V| > 3g - 2$.

这个结果的简短证明可以在 [6] 中找到.

2 最小出度为 3 的有向图

上述第二个猜想等同于以下内容.

猜想 2.1 (Caccetta 和 Häggkvist [5]). 令 $G = (V, E)$ 是一个阶数为 n , 围长为 g 的有向图, 使得 $d^+(x) = r$ 对于每个顶点 x 都成立. 那么 $n \geq r(g-1)+1$.

假设这个猜想是正确的, 令 G 是一个有向图, 对于每个顶点 x , $d^+(x) > r$. 令 G' 是 G 的一个子图, 对于每个顶点, $d_{G'}^+(x) = r$. 我们有 $|G| \geq |G'| \geq r(g(G')-1)+1 \geq r(g(G)-1)+1$.

这个猜想对于 $g = 3$ 来说是成立的. G 包含一个顶点 y , $d^-(y) \geq r$. $g = 3$, 我们有 $N^+(y) \cap N^-(y) = \emptyset$. 因此

$$n \geq |N^+(y)| + |N^-(y)| + 1 \geq 2r + 1$$

假设 $G = (V, E)$ 是一个强连通的有向图, 对于每一个顶点 x , $d_G^+(x) = 3$, 假设 G 的围长至少为 4, 并且包含一个入度小于 3 的顶点. 我们将构建一个有向图 G^* , 使得 $|G^*| = |G| - 3$, $g(G^*) \geq g(G) - 1$, 并且对于 G^* 的每个顶点 x , $d_{G^*}^+(x) = 3$.

这一构造将被应用于 Caccetta 和 Häggkvist 猜想的最小阶反例. 根据上述说明, 这个有向图的围长必须至少为 4. 根据定理 1.1, 这个反例包含一个入度小于 3 的顶点. 请注意, 一个反例的强连通部分是一个汇, 也是一个反例. 因此, 一个最小的反例是强连通的.

我们现在选择 G 的一条有向路径 (a, b, c) , 如下所示. 如果 G 没有三角形 (3-环), 选择 (a, b, c) , 使 $d^-(c) \leq 2$. 如果 G 有一个三角形, 选择 (a, b, c) , 使得 (a, c) 是 G 的一条边. 我们想构建一个有向图 $G^* = (V - T, E^*)$, 使得对于 $V - T$ 的每个顶点 u , $d_{G^*}^+(u) = 3$, 并且 $g(G^*) \geq g(G) - 1$. E^* 由 G_{V-T} 的弧和一些添加的弧组成, 以取代 $\omega^+(V - T, T)$ 的弧. 我们将给每条添加的边分配一个标签和一个类型. 标签是 T 的一个元素, 类型是一个数字, 用来衡量我们将这条边转化为包含标签的 G 的路径所需的过渡. 对于每条添加的边, 我们将精确地定义标签和类型.

令 $u \in \omega^-(T)$. 为了使 $d_{G^*}^+(u) = 3$, 我们将添加 $|\omega^+(u, T)|$ 条源为 u 的边. 我们考虑以下情况.

(I) $N^+(u) \cap T = \{x\}$

(I.1) 如果存在一个顶点 $v \in V - T$, 使得 $(x, v) \in E$ 和 $(u, v) \notin E$, 我们用弧 (u, v) 代替 (u, x) . 此外, 如果 $x = a$, 如果 G 没有三角形, 我们取 $v \in N^+(a) - N^-(c)$ (这样的顶点存在, 因为 $d^-(c) \leq 2$).

(I.2) 否则 $N^+(u) - T \subset N^+(x) - T$, $x = a$ 或 $x = b$ 并且 G 有一个三角形 (u, x, z) , 其中 $z \in N^+(x) - T$. 如果有 $v_2 \in V - T$, 使 $(x, v_2), (v_2, z) \in E$ 并且 $(u, v_2) \notin E$, 我们添加第二类弧 (u, v_2) , 并标注为 x .

(I.3) 否则, 我们必然有 $x = a$, 并且我们很容易看到, 使用假设 $g(G) \geq 4$, 有顶点 $v_1, v_2, v_3 \in V - T$, 使得 $(a, v_1), (u, v_1), (u, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3) \in E$ 并且 $(u, v_3) \notin E$. 在这种情况下, 我们添加第三类弧 (u, v_3) , 并标注为 a .

(II) $|N^+(u) \cap T| \geq 2$ 并且 $c \in N^+(u)$ 在这种情况下, 我们用 (u, v) 形式的 $|\omega^+(u, T)|$ 弧代替 $\omega^+(u, T)$, 其中 $v \in N^+(c) - N^+(u)$, 我们很容易看到这种边的存在. 这些边是第一类的, 标注为 c .

(III) $N^+(u) \cap T = \{a, b\}$. (u, a, b) 是 G 的一个三角形. 因此, 根据 T 的选择, $(a, c) \in E$ 中. 令 $N^+(b) = \{b_1, b_2, c\}$, $N^+(a) = \{a_1, b, c\}$. 由于 $g \geq 4$, 我们有 $(\{a_1\} \cup \{b_1, b_2\}) \cap \{u, a, b\} = \emptyset$.

(III.1) $a_1 \in \{b_1, b_2\}$. 由于 $d^+(u) = 3$ 和 $N^+(u) \supset \{a, b\}$, 因此可以得出

$$|\{a_1, b_1, b_2\} - N^+(u)| \geq 2$$

令 $\{\alpha, \beta\} \supset \{a_1, b_1, b_2\} - N^+(u)$. 在这种情况下, 我们添加两条第一类边 $(u, \alpha), (u, \beta)$. 如果 $\alpha = a_1$ (相应地, $\beta = a_1$), 那么 (u, α) (相应地, (u, β)) 的标签是 a , b 与此不同.

(III.2) $a_1 \in \{b_1, b_2\}$. 利用 $d^+(u) = 3$ 和 $N^+(u) \supset \{a, b\}$ 关系, 我们看到 $\{b_1, b_2\} - N^+(u) \neq \emptyset$, 例如 $b_2 \notin N^+(u)$. 我们考虑以下两种情况.

(III.2.1) $b_1 \notin N^+(u)$. 在这种情况下, 我们添加 (u, b_1) 和 (u, b_2) . 这两条边的类型是 1, 标签是 b .

(III.2.2) $b_1 \in N^+(u)$. 如 (III), 我们有 $N^+(b_1) \cap \{u, a, b\} = \emptyset$. 由此可见, $N^+(b_1) - \{u, a, b, c, b_2\}$ 包含一个顶点 v , 在这种情况下, 我们添加两条边 (u, b_2) 和 (u, v) (注意 $b_2 \neq v$, G^* 必须没有多条边). 这些边的标签是 b . (u, b_2) 是第一类的, (u, v) 是第二类的.

我们通过定义 $E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c)\}$ 定义一个有向图 $R = (\{a, b, c, d\}, E)$.

根据上述结构, 对于 $V - T$ 的每一个顶点 u , $d_{G^*}^+(u) = 3$, 我们陈述一些注解.

注 1. 每条标签为 c 的弧都是第一类的.

注 2. 每条标签为 b 的弧都是第一类或第二类的.

注 3. 如果 G^* 包含一个标签为 b 的第二类弧, 那么 G 包含一个与 R 同构的子图.

如果这个弧线由 (I) 产生, 取 $N^+(b) - c = \{b_1, b_2\}$. 我们有 $(u, b), (u, b_1), (u, b_2) \in E$. 映射 $u \rightarrow a, b \rightarrow b, b_1 \rightarrow c, b_2 \rightarrow d$ 从 $\{u, b, b_1, b_2\}$ 生成的子图 (必要时我们删除一些弧) 上诱导出一个映到 R 的同构.

如果这个弧由 (III) 产生, 我们必然是 (III.2.2). 我们很容易验证, 映射 $a \rightarrow a, b \rightarrow b, c \rightarrow c, a_1 \rightarrow d$ 从 $G_{\{a, b, c, a_1\}}$ 的一个子图诱导出一个映到 R 的同构 (观察发现 $(a, a_1), (b, a_1) \in E$).

注 4. 如果 G 不包含三角形, 那么所有添加的弧都是第一类的.

下面的定理使用了上面定义的术语. 我们令 g 表示 $g(G)$. 两个顶点 x 和 y 之间的距离将用 $\text{dist}(x, y)$ 来表示. 令 C 是 G 的一个回路, x 和 y 是 C 的两个顶点. C 中包含的连接 x 和 y 的有向路径将用 $C(x, y)$ 表示.

引理 2.1. 令 C 是 G^* 的一个长度 $\leq g - 2$ 的基本回路, 那么 G 包含一个三角形. 此外, C 包含正好两个不属于 E 的弧, 其形式为 (u, v) 和 (v, w) , 其中 (u, v) 的标签为 a , (v, w) 的标签为 b 且是第二类的.

证明. 假设 p 是 $E^* - E$ 中包含在 C 中的弧的数量, 我们证明以下结论.

(1) $p \geq 2$. 相反, 假设 $p \leq 1$.

由于不属于 E 的每条弧都可以用 E 的两条弧代替, 所以 C 可以转化为 G 的一个长度 $\leq g - 1$ 的回路, 矛盾.

通过令 $a < b < c$, 在 T 上定义一个序关系.

令 (u_1, v_1) 是一个标签为 x_1 的弧, (u_2, v_2) 是一个标签为 x_2 的弧, 这样 $x_1 \leq x_2$, $C(v_2, u_1)$ 只包含 G 的弧. 考虑 $C' = C(v_2, u_1) + (u_1, x_1) + \mu(x_1, x_2) + \mu'(x_2, v_2)$, 其中 $\mu(x_1, x_2)$ (相应地, $\mu'(x_2, v_2)$) 是 G 中长度为 $\text{dist}(x_1, x_2)$ (相应地, $\text{dist}(x_2, v_2)$) 的路径. 取 $c(v_1, u_2) = |C(v_1, v_2)|$. 我们有

$$|C'| \leq |C| - 2 - c(v_1, u_2) + 1 + \text{dist}(x_1, x_2) + \text{dist}(x_2, v_2)$$

但 $g \leq |C'|$ 且 $|C| \leq g - 2$, 因此

$$(2) \text{dist}(x_1, x_2) + \text{dist}(x_2, v_2) \geq 3 + c(v_1, u_2)$$

(3) G 包含一个三角形.

假设相反. 那么由注 4, $\text{dist}(x_2, v_2) = 1$. 由此可见, $v_1 = u_2$, $x_1 = a$, $x_2 = c$, 因此 $(v_1, c) \in E$. 根据构造 $v_1 \in N^+(a) - N^-(c)$, 矛盾.

令 i 是弧 (u_2, v_2) 的类型.

$$(4) \text{dist}(x_1, x_2) + i \geq 3 + c(v_1, u_2)$$

这很容易从关系 (2)、显然的不等式 $i \geq \text{dist}(x_2, v_2)$ 和 (1) 中得出.

(5) $p = 2$. 假设相反, 那么 $c(v_1, u_2) \geq 1$.

观察一下, $c(v_1, u_2)$ 包含 $p-2$ 条边. 利用 (4), 我们有 $4 \leq \text{dist}(x_1, x_2) + i \leq \text{dist}(x_1, x_2) + 3$. 由此可见, $x_1 \neq x_2$. 根据 (3), $\text{dist}(x_1, x_2) = 1$. 利用关系 $x_1 < x_2$, 我们很容易看到, $x_2 \in \{b, c\}$. 根据注 1 和 2, 我们有 $i \leq 2$, 这与关系 $4 \leq \text{dist}(x_1, x_2) + i$ 相矛盾.

(6) $x_1 \neq x_2$.

假设相反. 我们必然有 $v_1 = u_2$ 和 $u_1 = v_2$. C 中唯一不包含在 E 中的弧是 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) . 由于 $C(v_2, u_1)$ 不包含 $E^* - E$ 的弧, 我们可以在 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 互换的情况下应用上述推理, 并推导出 $v_2 = u_1$. 根据 (3), $c \in N^+(a)$. 设 $N^+(a) = \{b, c, d\}$.

由于 (u_2, v_2) 是第三类, 存在 G 的一条路径 (u_2, a, d, d', v_2) , 使得 $(u_2, d), (u_2, d') \in E$. 但 $d' \in N^-(v_2) = N^-(u_1)$. 因此 (d', u_1, d) 是 G 的 3-回路, 上述推理应用于 (u_1, v_1) 表明 $(u_1, d) \in E$. 矛盾.

(7) 根据 (3) 和 (6), $\text{dist}(x_1, x_2) = 1$, 因此 $x_2 = b$ 或 $x_2 = c$, 根据注 1 和 2, $i \leq 2$, 由 (4) 得出 $i = 2$, $v_1 = u_2$. 根据注 1, u_2, v_2 被的标签是 b , 因此 (u_1, v_1) 的标签是 a . 引理得证.

□

定理 2.2. 设 $G = (V, E)$ 是一个有向图, 对于 G 的每个顶点, $d^+(x) = 3$. 令 n 为 G 的阶数, g 为其围长, 那么 $n \geq 3g - 2$.

证明. 假设相反, 令 G 是一个最小阶的反例. 我们之前已经看到, G 满足构建 G^* 所需的假设. 我们有 $g(G^*) \leq g - 2$; 否则, 根据 n 的最小性, $n - 3 \geq 3g - 5$, 所以 $n \geq 3g - 2$, 如所愿. 根据引理 2.1, G 包含一个三角形, G 包含一个标签为 b 的第二类弧. 根据注 3, G 包含一个与 R 同构的子图.

我们现在可以用 R 的三角形 (a, b, c) 来构造 G^* . 令 C 是 G^* 的一个长度最小的圆环. 根据引理2.1, 不在 E 中的 C 的唯一弧的形式是 (u, v) 和 (v, w) , 其中 (u, v) 的标签是 a , (v, w) 的标签是 b 且是第二类. 由于 $|N^+(d) - T| = 2$, 我们看到每个标签为 a 的弧至多是第二类的. 由此可见, (b, v, d) 是 G 的 3-回路, 矛盾.

定理得证. □

致谢

我要感谢 J. C. Bermond 和 J. A. Bondy 教授提出的许多有益建议和意见.

参考文献

- [1] M. BEHZAD, C. CHARTRAND AND C. WALL, On minimal regular digraphs with given girth, *Fund. Math.* **69** (1970), 227-231.
- [2] M. BEHZAD, Minimally 2-regular digraphs with given girth, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 1-6.
- [3] C. BERGE, “Graphs et hypergraphes,” Dunod, Paris (1970).
- [4] J. C. BERMOND, 1-graphs réguliers de girth donné, *Cahiers C.E.R.O. Bruxelles* **17** (1975), 123-135.
- [5] L. CACCETTA AND R. HÄGGKVIST, On minimal digraphs with given girth, in “Congressus Numeratum XXL,” pp. 181-187, Utilitas Mathematica, Boca Raton, 1978.
- [6] Y. O. HAMIDOUNE, A note on the girth of a digraph, *Combinatorics* **2** (1982), 143-147.
- [7] Y. O. HAMIDOUNE, An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in finite groups, *Europ. J. Combin.* **2** (1981) 349-355.