# 关于给定围长的最小有向图的说明

YAHYA OULD HAMIDOUNE

Received March 12, 1982

Caccetta 和 Häggkvist 猜想，一个围长为 $g$、出度不小于 $r$ 的有向图的最小阶是 $r(g-1)+1$．他们证明了 $r=2$ 的猜想．我们对 $r=3$ 进行证明． 

## 1 引入

我们使用 [3] 的符号．一个至少有一个回路的有向图 $G$ 的围长是 $G$ 的一个回路的最小长度，我们用 $g(G)$ 表示．

Behzad 等人 [1] 猜想，出度为 $r$、围长为 $g$ 的正规有向图的最小阶也是 $r(g-1)+1$．这个猜想已经被 Behzad [2] 证明为 $r=2$，被 Bermond [4] 证明为 $r=3$．在 [6] 中，我们证明了这个猜想为 $r=4$．

Caccetta 和 Häggkvist [5] 猜想，围长为 $g$ 且最小出度至少为 $r$ 的有向图的最小阶为 $r(g-1)+1$，他们证明了 $r=2$ 的这个猜想．

这里，我们证明了 $r=3$ 的猜想．我们的方法也可以用于 $r=2$ 的情况．

上述猜想对于具有传递自同构群的有向图来说是正确的 [7]．作为一个应用 [7]，我们证明，给定一个 $n$ 阶的有限群 $G$ 和 $G$ 的基数为 $s$ 的子集 $S$，我们可以把 $G$ 的一致性表达为 $S$ 的最多 $\lceil n/s \rceil$ 个元素的乘积．

我们在证明中使用了以下结果．

**定理 1.1** (Bermond [4])**.** *假设 $G=(V,E)$ 是一个围长为 $g$ 的有向图，使得 $d^+(x)\geqslant 3$ 和 $d^-(x)\geqslant 3$，那么 $|V|>3g-2$．*

这个结果的简短证明可以在 [6] 中找到．

## 2 最小出度为 3 的有向图

上述第二个猜想等同于以下内容．

**猜想 2.1** (Caccetta 和 Häggkvist [5])**.** *令 $G=(V,E)$ 是一个阶数为 $n$，围长为 $g$ 的有向图，使得 $d^+(x)=r$ 对于每个顶点 $x$ 都成立．那么 $n\geqslant r(g-1)+1$．*

假设这个猜想是正确的，令 $G$ 是一个有向图，对于每个顶点 $x$，$d^+(x)>r$．令 $G'$ 是 $G$ 的一个子图，对于每个顶点，$d^+_{G'}(x)=r$．我们有 $|G|\geqslant|G'|\geqslant r(g(G')-1)+1\geqslant r(g(G)-1)+1$．

这个猜想对于 $g = 3$ 来说是成立的．$G$ 包含一个顶点 $y$，$d^-(y) \geqslant r$．$g = 3$，我们有 $N^+(y) \cap N^-(y) = \varnothing$．因此

$$n \geqslant |N^+(y)| + |N^-(y)| + 1 \geqslant 2r + 1$$

假设 $G = (V, E)$ 是一个强连通的有向图，对于每一个顶点 $x$，$d_G^+(x) = 3$，假设 $G$ 的围长至少为 4，并且包含一个入度小于 3 的顶点．我们将构建一个有向图 $G^*$，使得 $|G^*| = |G| - 3, g(G^*) \geqslant G(G) - 1$，并且对于 $G^*$ 的每个顶点 $x$，$d_{G^*}^+(x) = 3$．

这一构造将被应用于 Caccetta 和 Häggkvist 猜想的最小阶反例．根据上述说明，这个有向图的围长必须至少为 4．根据定理1.1，这个反例包含一个入度小于 3 的顶点．请注意，一个反例的强连通部分是一个汇，也是一个反例．因此，一个最小的反例是强连通的．

我们现在选择 $G$ 的一条有向路径 $(a, b, c)$，如下所示．如果 $G$ 没有三角形（3-环），选择 $(a, b, c)$，使 $d^-(c) \leqq 2$．如果 $G$ 有一个三角形，选择 $(a, b, c)$，使得 $(a, c)$ 是 $G$ 的一条边．我们想构建一个有向图 $G^* = (V - T, E^*)$，使得对于 $V - T$ 的每个顶点 $u$，$d_{G^*}^+(u) = 3$，并且 $g(G^*) \geqslant g(G) - 1$．$E^*$ 由 $G_{V-T}$ 的弧和一些添加的弧组成，以取代 $\omega^+(V - T, T)$ 的弧．我们将给每条添加的边分配一个标签和一个类型．标签是 $T$ 的一个元素，类型是一个数字，用来衡量我们将这条边转化为包含标签的 $G$ 的路径所需的过渡．对于每条添加的边，我们将精确地定义标签和类型．

令 $u \in \omega^-(T)$．为了使 $d_{G^*}^+(u) = 3$，我们将添加 $|\omega^+(u, T)|$ 条源为 $u$ 的边．我们考虑以下情况．

(I) $N^+(u) \cap T = \{x\}$

- (I.1) 如果存在一个顶点 $v \in V - T$，使得 $(x, v) \in E$ 和 $(u, v) \neq E$，我们用弧 $(u, v)$ 代替 $(u, x)$．此外，如果 $x = a$，如果 $G$ 没有三角形，我们取 $v \in N^+(a) - N^-(c)$（这样的顶点存在，因为 $d^-(c) \leqslant 2$）．
- (I.2) 否则 $N^+(u) - T \subset N^+(x) - T, x = a$ 或 $x = b$ 并且 $G$ 有一个三角形 $(u, x, z)$，其中 $z \in N^+(x) - T$．如果有 $v_2 \in V - T$，使 $(x, v_i), (v_i, v_2) \in E$ 并且 $(u, v_2) \notin E$，我们添加第二类弧 $(u, v_2)$，并标注为 $x$．
- (I.3) 否则，我们必然有 $x = a$，并且我们很容易看到，使用假设 $g(G) \geqslant 4$，有顶点 $v_1, v_2, v_3 \in V - T$，使得 $(a, v_1), (u, v_1), (u, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3) \in E$ 并且 $(u, v_3) \notin E$．在这种情况下，我们添加第三类弧 $(u, v_3)$，并标注为 $a$．

(II) $|N^+(u) \cap T| \geqslant 2$ 并且 $c \in N^+(u)$ 在这种情况下，我们用 $(u, v)$ 形式的 $|\omega^+(u, T)|$ 弧代替 $\omega^+(u, T)$，其中 $v \in N^+(c) - N^+(u)$，我们很容易看到这种边的存在．这些边是第一类的，标注为 $c$．

(III) $N^+(u)/capT = \{a, b\}$．$(u, a, b)$ 是 $G$ 的一个三角形．因此，根据 $T$ 的选择，$(a, c) \in E$ 中．令 $N^+(b) = \{b_1, b_2, c\}, N^+(a) = \{a_1, b, c\}$．由于 $g \geqslant 4$，我们有 $(\{a_1\} \cup \{b_1, b_2\}) \cap \{u, a, b\} = \varnothing$．

- (III.1) $a_1 \in \{b_1, b_2\}$．由于 $d^+(u) = 3$ 和 $N^+(u) \supset \{a, b\}$，因此可以得出

$$|\{a_1, b_1, b_2\} - N^+(u)| \geqslant 2$$

令 $\{\alpha,\beta\}\supset\{a_1,b_1,b_2\}-N^+(u)$. 在这种情况下, 我们添加两条第一类边 $(u,\alpha),(u,\beta)$. 如果 $\alpha=a_1$（相应地，$\beta=a_1$），那么 $(u,\alpha)$（相应地，$(u,\beta)$）的标签是 $a$，$b$ 与此不同.

(III.2) $a_1\in\{b_1,b_2\}$. 利用 $d^+(u)=3$ 和 $N^+(u)\supset\{a,b\}$ 关系，我们看到 $\{b_1,b_2\}-N^+(u)\neq\varnothing$，例如 $b_2\notin N^+(u)$. 我们考虑以下两种情况.

(III.2.1) $b_1\notin N^+(u)$. 在这种情况下，我们添加 $(u,b_1)$ 和 $(u,b_2)$. 这两条边的类型是 1，标签是 $b$.

(III.2.2) $b_1\in N^+(u)$. 如 (III)，我们有 $N^+(b_1)\cap\{u,a,b\}=\varnothing$. 由此可见，$N^+(b_1)-\{u,a,b,c,b_2\}$ 包含一个顶点 $v$，在这种情况下，我们添加两条边 $(u,b_2)$ 和 $(u,v)$（注意 $b_2\neq v$, $G^*$ 必须没有多条边）. 这些边的标签是 $b$. $(u,b_2)$ 是第一类的, $(u,v)$ 是第二类的.

我们通过定义 $E=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(b,c)\}$ 定义一个有向图 $R=(\{a,b,c,d\},E)$.

根据上述结构，对于 $V-T$ 的每一个顶点 $u$，$d^+_{G^*}(u)=3$，我们陈述一些注解.

**注 1.** 每条标签为 $c$ 的弧都是第一类的.

**注 2.** 每条标签为 $b$ 的弧都是第一类或第二类的.

**注 3.** 如果 $G^*$ 包含一个标签为 $b$ 的第二类弧，那么 $G$ 包含一个与 $R$ 同构的子图.

如果这个弧线由 (I) 产生，取 $N^+(b)-c=\{b_1,b_2\}$. 我们有 $(u,b),(u,b_1),(u,b_2)\in E$. 映射 $u\to a,b\to b,b_1\to c,b_2\to d$ 从 $\{u,b,b_1,b_2\}$ 生成的子图（必要时我们删除一些弧）上诱导出一个映到 $R$ 的同构.

如果这个弧由 (III) 产生，我们必然是 (III.2.2). 我们很容易验证，映射 $a\to a,b\to b,c\to c,a_1\to d$ 从 $G_{\{a,b,c,a_1\}}$ 的一个子图诱导出一个映到 $R$ 的同构（观察发现 $(a,a_1),(b,a_1)\in E$）.

**注 4.** 如果 $G$ 不包含三角形，那么所有添加的弧都是第一类的.

下面的定理使用了上面定义的术语. 我们令 $g$ 表示 $g(G)$. 两个顶点 $x$ 和 $y$ 之间的距离将用 $\mathrm{dist}(x,y)$ 来表示. 令 $C$ 是 $G$ 的一个回路，$x$ 和 $y$ 是 $C$ 的两个顶点. $C$ 中包含的连接 $x$ 和 $y$ 的有向路径将用 $C(x,y)$ 表示.

**引理 2.1.** 令 $C$ 是 $G^*$ 的一个长度 $\leqq g-2$ 的基本回路，那么 $G$ 包含一个三角形. 此外，$C$ 包含正好两个不属于 $E$ 的弧，其形式为 $(u,v)$ 和 $(v,w)$，其中 $(u,v)$ 是的标签为 $a$，$(v,w)$ 的标签为 $b$ 且是第二类的.

证明. 假设 $p$ 是 $E^*-E$ 中包含在 $C$ 中的弧的数量，我们证明以下结论.

(1) $p\geqslant 2$. 相反，假设 $p\leqslant 1$.

由于不属于 $E$ 的每条弧都可以用 $E$ 的两条弧代替，所以 $C$ 可以转化为 $G$ 的一个长度 $\leqslant g-1$ 的回路，矛盾.

通过令 $a<b<c$，在 $T$ 上定义一个序关系.

令 $(u_1,v_1)$ 是一个标签为 $x_1$ 的弧，$(u_2,v_2)$ 是一个标签为 $x_2$ 的弧，这样 $x_1\leqslant x_2$，$C(v_2,u_1)$ 只包含 $G$ 的弧．考虑 $C'=C(v_2,u_1)+(u_1,x_1)+\mu(x_1,x_2)+\mu'(x_2,v_2)$，其中 $\mu(x_1,x_2)$（相应地，$\mu'(x_2,u_2)$）是 $G$ 中长度为 $\mathrm{dist}(x_1,x_2)$（相应地，$\mathrm{dist}(x_2,v_2)$）的路径．取 $c(v_1,u_2)=|C(v_1,v_2)|$．我们有

$$|C'|\leqslant|C|-2-c(v_1,u_2)+1+\mathrm{dist}(x_1,x_2)+\mathrm{dist}(x_2,v_2)$$

但 $g\leqslant|C'|$ 且 $|C|\leqslant g-2$，因此

(2) $\mathrm{dist}(x_1,x_2)+\mathrm{dist}(x_2,v_2)\geqslant 3+c(v_1,u_2)$

(3) $G$ 包含一个三角形．

假设相反．那么由注 4，$\mathrm{dist}(x_2,v_2)=1$．由此可见，$v_1=u_2$，$x_1=a$，$x_2=c$，因此 $(v_1,c)\in E$．根据构造 $v_1\in N^+(a)-N^-(c)$，矛盾．

令 $i$ 是弧 $(u_2,v_2)$ 的类型．

(4) $\mathrm{dist}(x_1,x_2)+i\geqslant 3+c(v_1,u_2)$

这很容易从关系 (2)、显然的不等式 $i\geqslant\mathrm{dist}(x_2,v_2)$ 和 (1) 中得出．

(5) $p=2$．假设相反，那么 $c(v_1,u_2)\geqslant 1$．

观察一下，$c(v_1,u_2)$ 包含 $p-2$ 条边．利用 (4)，我们有 $4\leqslant\mathrm{dist}(x_1,x_2)+i\leqslant\mathrm{dist}(x_1,x_2)+3$．由此可见，$x_1\neq x_2$．根据 (3)，$\mathrm{dist}(x_1,x_2)=1$．利用关系 $x_1<x_2$，我们很容易看到，$x_2\in\{b,c\}$．根据注 1 和 2，我们有 $i\leqslant 2$，这与关系 $4\leqslant\mathrm{dist}(x_1,x_2)+i$ 相矛盾．

(6) $x_1\neq x_2$．

假设相反．我们必然有 $v_1=u_2$ 和 $u_1=v_2$．$C$ 中唯一不包含在 $E$ 中的弧是 $(u_1,v_1)$ 和 $(u_2,v_2)$．由于 $C(v_2,u_1)$ 不包含 $E^*-E$ 的弧，我们可以在 $(u_1,v_1)$ 和 $(u_2,v_2)$ 互换的情况下应用上述推理，并推导出 $v_2=u_1$．根据 (3)，$c\in N^+(a)$．设 $N^+(a)=\{b,c,d\}$．

由于 $(u_2,v_2)$ 是第三类，存在 $G$ 的一条路径 $(u_2,a,d,d',v_2)$，使得 $(u_2,d),(u_2,d')\in E$．但 $d'\in N^-(v_2)=N^-(u_1)$．因此 $(d',u_1,d)$ 是 $G$ 的 3-回路，上述推理应用于 $(u_1,v_1)$ 表明 $(u_1,d)\in E$．矛盾．

(7) 根据 (3) 和 (6)，$dist(x_1,x_2)=1$，因此 $x_2=b$ 或 $x_2=c$，根据注 1 和 2，$i\leqslant 2$，由 (4) 得出 $i=2$，$v_1=u_2$．根据注 1，$u_2,v_2$ 被的标签是 $b$，因此 $(u_1,v_1)$ 的标签是 $a$．引理得证．

□

**定理 2.2.** *设 $G=(V,E)$ 是一个有向图，对于 $G$ 的每个顶点，$d^+(x)=3$．令 $n$ 为 $G$ 的阶数，$g$ 为其围长，那么 $n\geqq 3g-2$．*

*证明*．假设相反，令 $G$ 是一个最小阶的反例．我们之前已经看到，$G$ 满足构建 $G^*$ 所需的假设．我们有 $g(G^*)\leqslant g-2$；否则，根据 $n$ 的最小性，$n-3\geqslant 3g-5$，所以 $n\geqslant 3g-2$，如所愿．根据引理2.1．$G$ 包含一个三角形，$G$ 包含一个标签为 $b$ 的第二类弧．根据注 3，$G$ 包含一个与 $R$ 同构的子图．

我们现在可以用 $R$ 的三角形 $(a,b,c)$ 来构造 $G^*$．令 $C$ 是 $G^*$ 的一个长度最小的圆环．根据引理2.1，不在 $E$ 中的 $C$ 的唯一弧的形式是 $(u,v)$ 和 $(v,w)$，其中 $(u,v)$ 的标签是 $a$，$(v,w)$ 的标签是 $b$ 且是第二类．由于 $|N^+(d)-T|=2$，我们看到每个标签为 $a$ 的弧至多是第二类的．由此可见，$(b,v,d)$ 是 $G$ 的 3-回路，矛盾．

定理得证． $\square$

# 致谢

我要感谢 J. C. Bermond 和 J. A. Bondy 教授提出的许多有益建议和意见．

# 参考文献

[1] M. BEHZAD, C. CHARTRAND AND C. WALL, On minimal regular digraphs with given girth. *Fund. Math.* **69** (1970), 227-231.

[2] M. BEHZAD, Minimally 2-regular digraphs with given girth, *J. Math. Sot. Japan* **25** (1973), 1-6.

[3] C. BERGE, “Graphs et hypergraphes,” Dunod, Paris (1970).

[4] J. C. BERMOND,1-graphs réguliers de girth donné, *Cahiers C.E.R.O. Bruxelles* **17** (1975), 123-135.

[5] L. CACCETTA AND R. HÄGGKVIST, On minimal digraphs with given girth, in “Congressus Numeratum XXL,” pp. 181-187, Utilitas Mathematics, Boca Raton, 1978.

[6] Y. O. HAMIDOUNE, A note on the girth of a digraph, *Combinatorics* **2** (1982), 143-147.

[7] Y. O. HAMIDOUNE, An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in finite groups, *Europ. J. Combin.* **2** (1981) 349-355.