Lois de probabilité 3/3

Anita Burgun

Contenu des cours

- *Loi binomiale*
- *Loi hypergéométrique*
- *Loi de Poisson*
- Loi normale
- Loi du Chi2
- Loi de Student

Loi normale

- VA continue X
- Densité de probabilité de X
- Loi normale, loi de Gauss, loi de Laplace, loi de Laplace-Gauss

Définition

- La distribution normale, appelée aussi gaussienne est une distribution continue qui dépend de 2 paramètres μ et σ.
- Une v.a. X suit une loi normale si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Représentation graphique : courbe en cloche

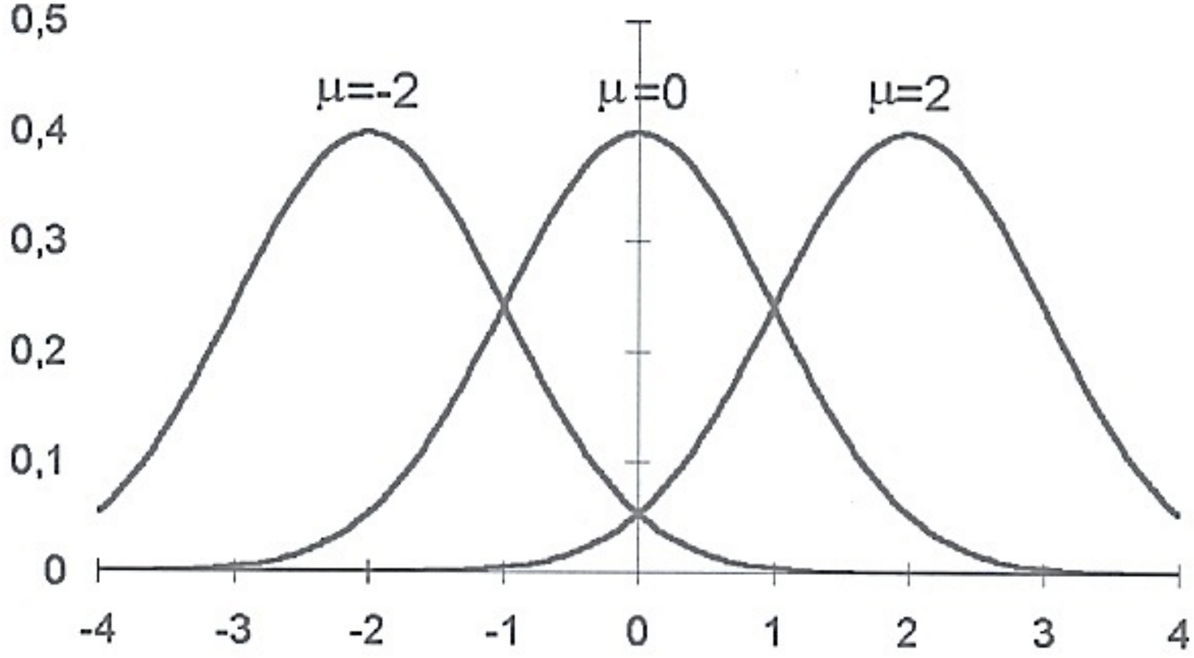
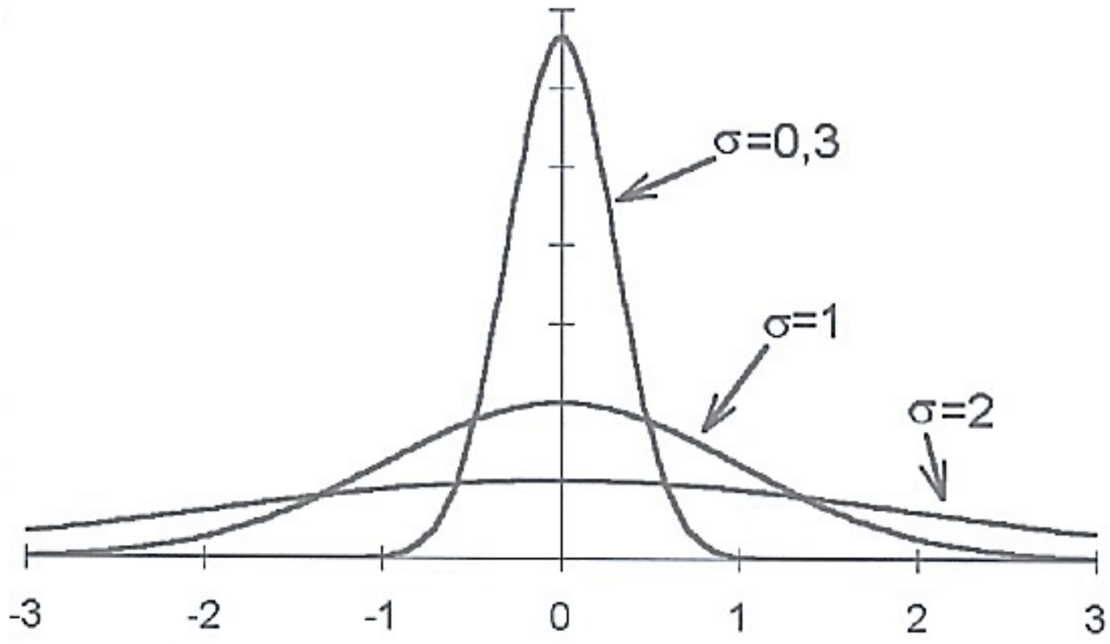


Figure 2 : N(μ, 1) pour les valeurs de μ -2 ; 0 et 2

Représentation graphique : courbe en cloche



igure 3 : $N(0, \sigma^2)$ pour les valeurs de σ 0,3 ; 1 et 2

Caractéristiques

- Notation $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$
- Courbe symétrique autour de μ et a 2 points d'inflexion aux abscisses $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$
- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Caractéristiques

- Dans la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2

  $P(\mu - 1.64\ \sigma < X < \mu + 1.64\ \sigma) = 0.90$

  $P(\mu - 1.96\ \sigma < X < \mu + 1.96\ \sigma) = 0.95$

  $P(\mu - 3.29\ \sigma < X < \mu + 3.29\ \sigma) = 0.999$
- Une v.a. X distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à 1.96 σ (environ 2). Autrement dit, 95% des sujets sont distribués dans une étendue de 4 σ.

Exemple

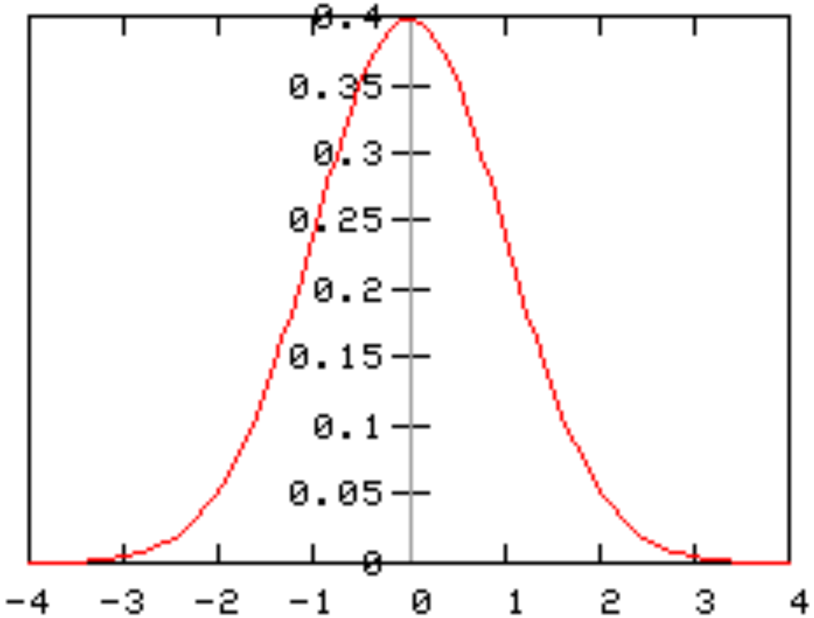
- Chez l'adulte normal (non diabétique) la glycémie est distribuée selon une loi normale de moyenne 4.8 mmol/l et d'écart type 0.4 mmol/l
- Donc 95% des sujets non diabétiques de cette population ont une glycémie comprise entre 4.0 mmol/l et 5.6 mmol/l

Loi normale centrée réduite

- On dit que la distribution est centrée si E(X)=0 et réduite si V(X)=1
- La distribution normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Représentation graphique



Transformation d'une loi normale quelconque en loi $\mathcal{N}(0;1)$

- Soit X une v.a. continue suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ
- Si on applique le changement de variable

$$t = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

la variable t suit une loi normale centrée réduite

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Transformation d'une loi normale quelconque en loi $\mathcal{N}(0;1)$

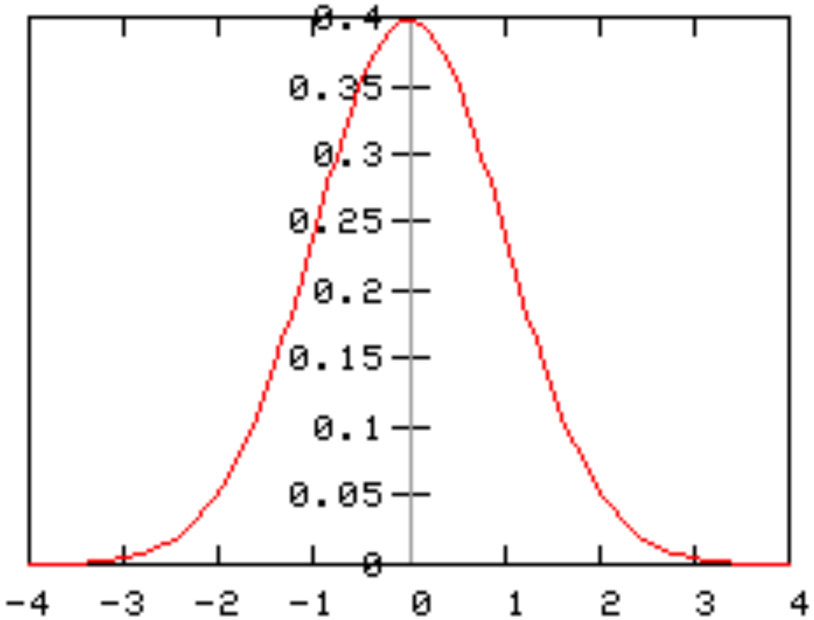
- En effet, un changement de variable linéaire n'affecte pas la nature normale de la variable

$$t = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

est une variable de moyenne $\frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$

et d'écart type $\frac{\sigma}{\sigma} = 1$

Loi normale centrée réduite

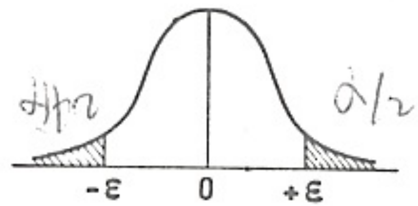


Une v.a. X distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à 1.96 σ

Table de la variable normale réduite

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1{,}960$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

Table de la variable normale réduite

Table pour les petites valeurs de la probabilité

α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
ε	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

(*) D'après Fisher et Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research (Oliver and Boyd, Edinburgh) avec l'aimable autorisation des auteurs et des éditeurs.

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

- $P(-2<X<+7)= p(X<7)-p(X<-2)$
- Changement de variable

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

1ere étape: Changement de variable
transformer X en Z, variable normale centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 1}{3}$$

$$X = 1 + 3Z$$

$$X = -2,7 \quad \text{équivalent respectivement à :}$$

Z = -1, 2

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

$$P(-2<X<+7)= p(X<7)-p(X<-2)$$

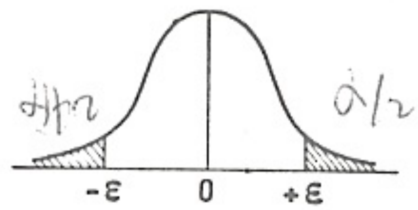
$$P(-1<Z<2)= p(Z<2)-p(Z<-1)$$

Table de l'écart-réduit .
On utilise la symétrie de la courbe de Gauss

Table de la variable normale réduite

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1{,}960$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

$P(X < 7)$est équivalent à $P(Z < 2)$

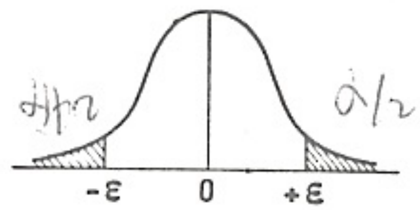
Table de l'écart-réduit . En prenant 1,96 au lieu de 2
On trouve $\alpha = 0.05$
MAIS il s'agit de la probabilité pour que Z à l'extérieur de l'intervalle

Donc P(Z<2) = 1-0,025=0,975

Table de la variable normale réduite

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1,960$ la probabilité est $\alpha = 0,00 + 0,05 = 0,05$.

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

$P(X < -2)$est équivalent à $P(Z < -1)$

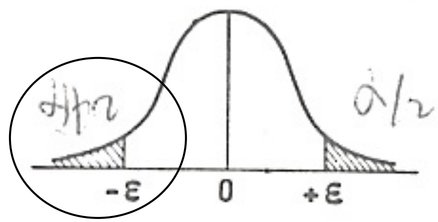
Table de l'écart-réduit . En prenant 0,994 au lieu de 1
On trouve $\alpha = 0.32$
MAIS il s'agit de la probabilité pour que Z à l'extérieur de l'intervalle

Symétrie
Donc P(Z<-1) = 0,16

Table de la variable normale réduite

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1,960$ la probabilité est $\alpha = 0,00 + 0,05 = 0,05$.

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Quelle est la probabilité pour que X soit comprise entre –2 et +7 ?

$$P(-2<X<+7)= p(X<7)-p(X<-2)$$

$$P(-1<Z<2)= p(Z<2)-p(Z<-1)$$

$$P(-2<X<7)= 0{,}975-0{,}16= 0{,}815$$

On considère une variable aléatoire X distribuée selon la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 3. Déterminer le nombre réel A tel que $P(X<A) = 0.6$

$P(X<A)$ équivaut à $p(Z<B)$

On cherche dans la table de l'écart réduit

Avec

$\alpha /2 = 1-0,6$

$\alpha = (1-0,6) \times 2 = 0,8$

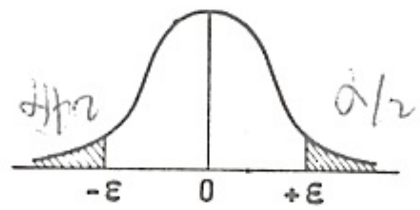
On trouve B=0,253

Donc A = 1,7599 (changement de variable)

Table de la variable normale réduite

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1{,}960$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

Remarques utiles

- Soient deux v.a. indépendantes X_1 et X_2 suivant respectivement les lois normales (μ_1, σ_1^2) et (μ_2, σ_2^2).
- Alors, la v.a. $X_1 + X_2$ suit la loi normale $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Remarques utiles

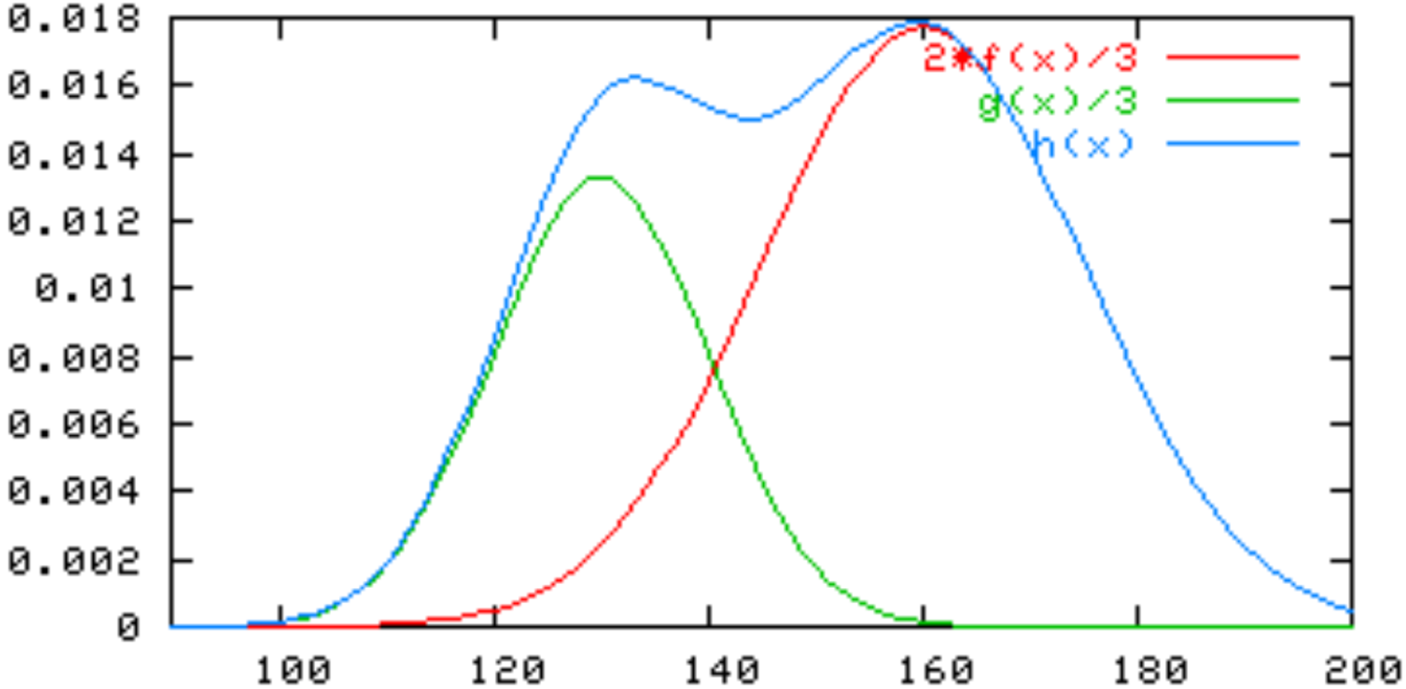
- Le mélange de deux populations gaussiennes n'est pas une population gaussienne
- Un mélange constitué de

  2/3 d'individus dont la taille suit une loi normale de moyenne 160 cm et d'écart type 15 cm, de densité f

  1/3 d'individus dont la taille suit une loi normale de moyenne 130 cm et d'écart type 10 cm, de densité g

  suit une loi de moyenne (2/3)*160+(1/3)*130 = 150 cm, mais non gaussienne
- la distribution est bimodale.

Remarques utiles



Théorème central limite

- Soient $X_1, X_2, \ldots. X_n$ *n* v.a. indépendantes suivant des lois de probabilités quelconques d'espérance $E(X_i)$ et de variance σ_i^2. Alors la loi suivie par la v.a.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

peut être approximée pour n grand et sous certaines conditions par une loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ avec

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \text{ et } \sigma^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sigma_{\mathrm{i}}^2$$

En médecine

- « Une donnée influencée par une multitude de phénomènes aléatoires indépendants qui s’additionnent, est approximativement décrite par une loi normale même si les phénomènes qui la composent ne suivent pas des lois normales »

Approximation binomiale->normale

- Théorème de De Moivre-Laplace

  X_n étant une suite de variables binomiales $\mathcal{B}$(n; p), alors

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

  tend vers $\mathcal{N}$(0; 1)
- En d'autres termes $\mathcal{B}$(n; p) = $\mathcal{N}$ (np; np(1-p))
- Conditions np et n(1-p) > 10 (Lelouch, Schwartz)

Approximation Poisson -> normale

- Lorsque la moyenne d'une loi de Poisson est grande, la loi de Poisson peut être approximée par une loi normale de mêmes moyenne et écart-type que la loi de Poisson de départ.

  $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda; \lambda)$

  $E(X) = \lambda$

  $V(X) = \lambda$

- Condition: $\lambda > 20$ (selon Lelouch, Schwartz)

loi du χ^2

(loi du chi-2)

Définition

- La loi du chi-2 est une loi dérivée de la loi normale
- Soient X_1, X_2, …. X_n des v.a. indépendantes, chacune étant distribuée selon une loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- La distribution de S tel que

$$S = X_1^2 + X_2^2 + \ldots. + X_n^2$$

est appelée loi du χ^2 à n degrés de libertés (d.d.l.) où n est le nombre de d.d.l., seul paramètre de la loi.

Loi de Student

Définition

- Une loi T de Student à n d.d.l. est le quotient d'une loi normale centrée réduite U~ $\mathcal{N}$(0; 1) par la racine carrée d'une loi du χ^2 à n degrés de libertés (d.d.l.) divisée par n, les deux lois étant indépendantes.

$$\frac{U}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$$

Tables de distribution de T (loi de Student)

- Υνε ταβλε δοννε πουρ α χηοισι, πουρ n ενϖισαγ, λε τ_α
- **Λα ταβλε δοννε:**
    - **Προβα ($\tau < \tau_{-\alpha}$ ετ $\tau_\alpha < \tau$) = α**
- **δэο: Προβα ($\tau_{-\alpha} < \tau < \tau_\alpha$) = 1 - α**
- <u>Εξεμπλε</u>: ν = 10 δδλ
- Προβα ($\tau_{-\alpha} < \tau < \tau_\alpha$) = 0,95 => τ_α = 2,228
- Προβα ($\tau > \tau_\alpha$) = 0,025 => τ_α = 2,228
- Προβα ($\tau > \tau_\alpha$) = 0,05 => τ_α = 1,812
- Προβα ($\tau < \tau_\alpha$) = 0,90 => τ_α = 1,372
- Προβα ($\tau <$ 2,764) = 1-0,02/2 = 0,99