Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

– Wintersemester 2019/20 –

Kapitel 02: Kombinatorik

Prof. Dr. Adrian Ulges

Angewandte Informatik (B.Sc.) /
Informatik - Technische Systeme (B.Sc.) /
Wirtschaftsinformatik (B.Sc.)

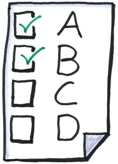
Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

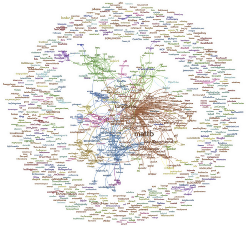
Kombinatorik[1]: Definition Bilder: [6] [5] [4] [3]

> *"Die Untersuchung des Abzählens, der Existenz und Konstruktion von Konfigurationen"*
>
> (Pólya, Tarjan, Woods : *Notes on Introductory Combinatorics*, 1983)

Motivation

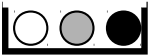
- Bei der Durchführung/Wiederholung von Zufallsexperimenten entstehen zahlreiche Konfigurationen möglicher Ergebnisse.
- Unser Ziel ist es, die Zahl möglicher Ergebnisse zu bestimmen.
- Hieraus werden wir später Wahrscheinlichkeiten ableiten.



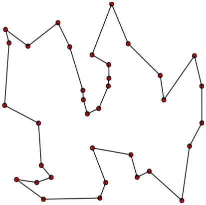


Kombinatorik: Das Urnenmodell Bilder: [8] [3]

Wir führen die Kombinatorik mit Hilfe des sogenannten **Urnenmodells** ein. In einer Urne befinden sich **n Kugeln**:



- **Frage 1 (Permutationen)**: Auf wieviele Arten lassen sich diese Kugeln nacheinander anordnen?



- **Frage 2 (Kombinationen / Variationen)**: Wir ziehen k Kugeln. Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es?

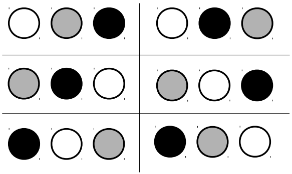
Outline

Permutationen

- In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln.
- Wir bezeichnen mit $P(n)$ ...

  ... die Anzahl der möglichen Reihenfolgen / Permutationen, in denen sich die Kugeln nacheinander anordnen lassen.

Beispiel: $P(3) = 6$

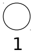


Bei 3 Kugeln ergeben sich 6 Permutationen:

- Jede der 3 Kugeln kann zuerst gezogen werden *(3 Zeilen)*.
- In jeder Zeile haben wir zwei Möglichkeiten, die Kugeln 2 und 3 anzuordnen *(2 Spalten)*.

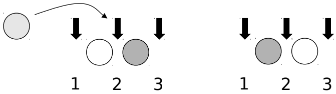
Permutationen: Induktive Herleitung

$P(1) = 1$ (trivial)



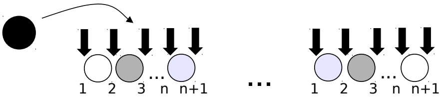
$P(2) = 2$

$P(3) = 2 \cdot 3$
(Wir können die 3. Kugel an Platz 1, 2 oder 3 anordnen)



…

$P(n+1) = P(n) \cdot (n+1)$
(Wir können die neue Kugel an jeder Position $1, \ldots, n+1$ einsortieren)



Permutationen: Induktive Herleitung

Es ergibt sich die rekursive Folge:

$$\boxed{\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P(n+1) &= P(n) \cdot (n+1) \qquad \text{für alle } n \geq 1 \end{aligned}}$$

Dies entspricht der Fakultät:

$$P(n) = n!$$

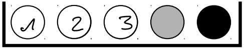
Permutationen mit Duplikaten

Wir modifizieren die Fragestellung, indem wir erlauben, dass Kugeln der gleichen Farbe in der Urne vorkommen. Diese Kugeln betrachten wir als gleichwertig, d.h. es ist egal in welcher Reihenfolge sie gezogen werden.

Beispiel

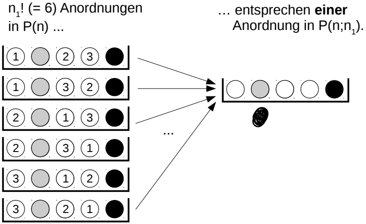
- $n = 5$ Kugeln, $n_1 = 3$ davon weiß. Wir suchen die Anzahl unterscheidbarer Anordnungen $P(n; n_1)$.

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 20$$



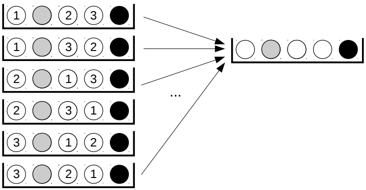
- Es ergeben sich deutlich weniger mögliche Anordnungen.

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10$$



Permutationen mit Duplikaten

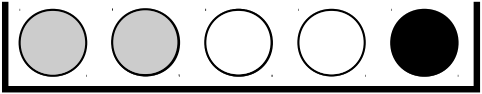
Wir beobachten: Aus $P(n_1)$ Anordnungen in $P(n)$
wird eine einzige in $P(n; n_1)$!



$$
\boxed{
\begin{aligned}
P(n; n_1) &= P(n)/P(n_1) \\
&= n!/n_1! \\
&= 5!/3! = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \\
&= 5 \cdot 4 = 20
\end{aligned}
}
$$

Permutationen mit Duplikaten

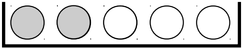
Verallgemeinerung: Es existieren K Sorten von Kugeln (z.B. weiß, grau, schwarz). Von jeder Sorte $k \in \{1, ..., K\}$ befinden sich n_k Kugeln in der Urne.



- Es gilt $n_1 + n_2 + ... + n_K = n$
- Für die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen gilt:

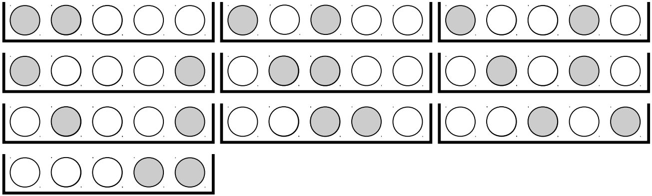
$$\boxed{P(n; n_1, ..., n_K) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_K!}}$$

Permutationen mit Duplikaten: Beispiel

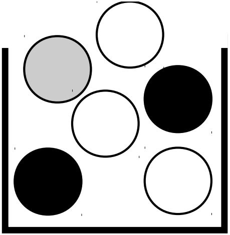


Es gilt $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

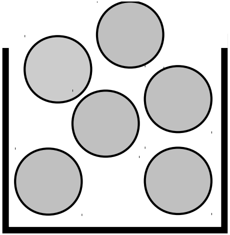
$$P(5;2,3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$



Permutationen mit Duplikaten: Do-it-yourself



$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot \cancel{1!}}$$



$$\frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 1$$

Outline

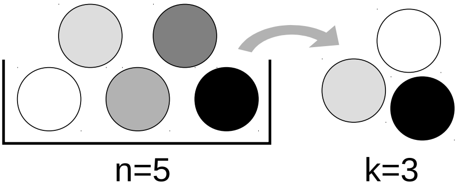
1. Permutationen

2. Variationen und Kombinationen

Von Permutationen zu Variationen/Kombinationen

Neue Fragestellung

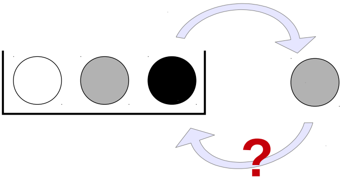
- Wir ziehen nicht mehr alle n Kugeln aus der Urne, sondern k Stück.
- Die n Kugeln seien ab jetzt alle unterscheidbar.
- Gesucht ist jeweils die Anzahl der möglichen Resultate, $C(n; k)$.



Wir unterscheiden...

- mit Wiederholung vs. ohne Wiederholung
- mit Reihenfolge vs. ohne Reihenfolge

Von Permutationen zu Variationen/Kombinationen



Mit Wiederholung / ohne Wiederholung

- Wir unterscheiden zwei Szenarien: Im ersten legen wir eine Kugel, nachdem wir sie gezogen haben, wieder in die Urne zurück ("mit Zurücklegen"). Im zweiten Szenario wird die Kugel nicht zurückgelegt und kann deshalb nur maximal einmal gezogen werden.
- Wir sagen stattdessen auch *"mit Wiederholung"* / *"ohne Wiederholung"*.
- Mit Wiederholung ergeben sich deutlich mehr Möglichkeiten.

Von Permutationen zu Variationen/Kombinationen

Mit Reihenfolge / ohne Reihenfolge

- Wir unterscheiden außerdem, ob die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt wird.
- Wird die Reihenfolge berücksichtigt, sprechen wir von einer geordneten Stichprobe und nennen die Resultate *Variationen*.
- Wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt, sprechen wir von einer ungeordneten Stichprobe und bezeichnen die Resultate als *Kombinationen*.
- Bei geordneten Stichproben ergeben sich deutlich mehr Möglichkeiten.

Do-Urne-Yourself Bilder: [6] [7] [2] [1]

- Bilden Sie die folgenden Probleme auf das Urnenmodell ab
- Entscheiden Sie: Mit Zurücklegen? Mit Reihenfolge? n? k?

Wieviele Kombinationen?

0 1 … 9

$n = 10$
$k = 4$
geordnet ✓
mit Wdhlg ✓

10 Athleten. Wieviele Verschiedene Medaillen-Verteilungen?

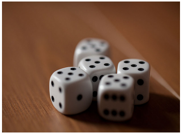
$n = 10$
$k = 3$
✓
–

22 Kinder. Wieviele Möglichkeiten, 2 Fußballteams zu bilden?

~~$n = 2$~~
~~$k = 22$~~
~~–~~
~~ø ✓~~

$n = 22$
$k = 11$
–
–

Wieviele Kniffel-Ergebnisse?



$n = 6$
$k = 5$
–
✓

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	**???**	???
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Geordnete Stichprobe, mit Zurücklegen

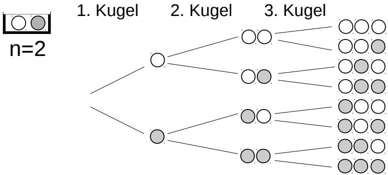
Wir legen die Kugeln zurück *und* berücksichtigen die Reihenfolge.

Herleitung

- 1. Kugel: n Möglichkeiten
- 2. Kugel: n Möglichkeiten
- ...
- k-te Kugel: n Möglichkeiten

$$\boxed{C(n;k) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k}$$

Beispiel ($n = 2, k = 3$)



Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [6]

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	???
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Geordnete Stichprobe, ohne Zurücklegen

Wir berücksichtigen die Reihenfolge, legen die Kugeln aber nicht zurück *(es muss deshalb gelten: $k \leq n$)*.

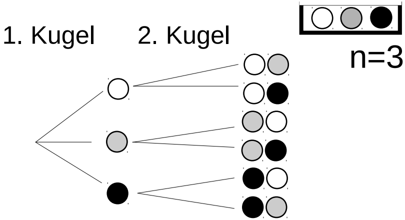
Herleitung

- 1. Kugel: n Möglichkeiten
- 2. Kugel: $n-1$ Möglichkeiten
- ...
- k-te Kugel: $n-k+1$ Möglichkeiten

$$
\boxed{
\begin{aligned}
C(n;k) &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
}
$$

Geordnete Stichprobe, ohne Zurücklegen

Beispiel $(n = 3, k = 2)$



$$\boxed{\begin{aligned} C(n;k) &= \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 \end{aligned}}$$

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [2]

10 Athleten $n = 10$

3 Medaillen $k = 3$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \ldots \cdot \cancel{1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \ldots \cdot \cancel{1}}$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 8$$

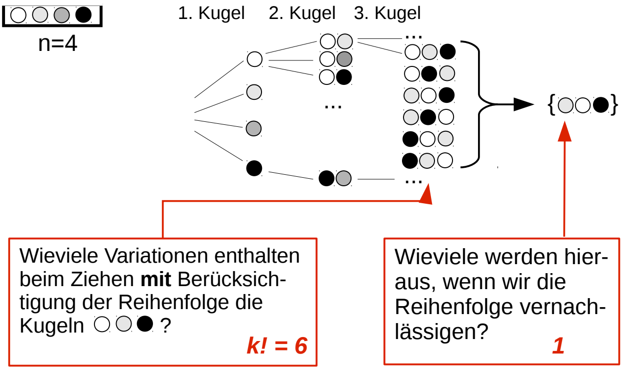
Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	???	???

Ungeordnete Stichprobe, ohne Zurücklegen

- Wir legen nicht zurück und berücksichtigen die Reihenfolge nicht.
- Wir leiten $C(n;k)$ aus der Formel für die zugehörige geordnete Stichprobe ab.

Beispiel $(n = 4, k = 3)$



Ungeordnete Stichprobe, ohne Zurücklegen (cont'd)

- Mit Reihenfolge hatten wir $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.
- Aus jeweils $k!$ dieser Möglichkeiten wird (bei Vernachlässigung der Reihenfolge) eine einzige.

$$\Rightarrow C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

- Wir nennen $\binom{n}{k}$ einen Binomialkoeffizienten,

$$\binom{22}{11} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \ldots 12 \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \cancel{1}}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots 1 \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \cancel{1}}$$

$$\binom{100}{97} = \binom{100}{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{22}{20} = \binom{22}{2} = \frac{22 \cdot 21}{1 \cdot 2} \quad \text{(kleiner)}$$

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [1]

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	???	$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

Ungeordnete Stichprobe, mit Zurücklegen

- Wir legen die Kugeln zurück und berücksichtigen die Reihenfolge nicht.
- Beispiel Eisbecher: Wieviele verschiedene Eisbecher kann man aus n Eissorten mit k Kugeln Eis zusammenstellen?

Herleitung

- Wir sortieren die Kugeln in einer festen Reihenfolge, z.B.  .
- Wir merken uns welche Kugel wie oft gezogen wurde.
- Es ergibt sich eine Codierung aus:

  "_" (Zähler)

  "|" (Trenner).

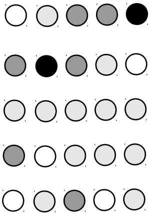
Ungeordnete Stichprobe, mit Zurücklegen

Herleitung (cont'd)

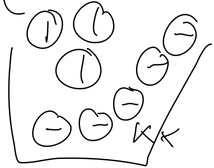
Ungeordnete Stichprobe, mit Zurücklegen

n=4

k=5



(n−1)x



k x

Anzahl der Vorkommen

<table>
<tr><th>○</th><th>◌</th><th>◍</th><th>●</th><th>Code</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>-|-|--|-</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>-|-|--|-</td></tr>
<tr><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>|-----||</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>-|---|-|</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>--|--|-|</td></tr>
</table>

???

$$\frac{8!}{3!\cdot 5!}$$

Ungeordnete Stichprobe, mit Zurücklegen (cont'd)

Herleitung

- $C(n;k)$ entspricht der Anzahl möglicher Codes,
  = # Permutationen aus k schwarzen Kugeln (⊖) und n-1 weißen Kugeln (①).

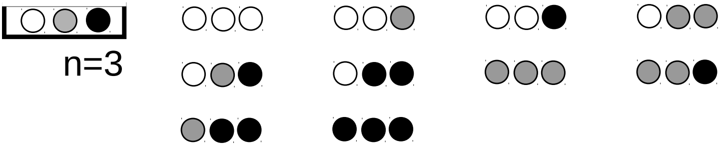
$$\Rightarrow C(n;k) = P(n-1+k;\, k,\, n-1)$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\frac{8!}{5!\cdot 3!}$$

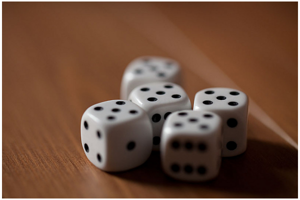
Ungeordnete Stichprobe, mit Zurücklegen (cont'd)

Beispiel: $n = 3, k = 3$ (Eisbecher aus 3 Sorten mit 3 Kugeln)



$$C(3;3) = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Do-Kombinatorik-Yourself Bild: [7]



mit Wdhlg. ✓ $n=6$

ungeordnet ✓ $k=5$

1 2 … 6

5x

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} =$$

$$= \frac{\cancel{10}\cdot 9 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 252$$

Variationen und Kombinationen: Überblick

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Geordnete Stichprobe	n^k	$n!/(n-k)!$
Ungeordnete Stichprobe	$\binom{\mathbf{n+k-1}}{\mathbf{k}}$	$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$

References I

[1] Bruce Tuten: getting it done.
https://flic.kr/p/3HoFg4 (retrieved: Nov 2016).

[2] geckoam: Go World!!
https://flic.kr/p/59DwiU (retrieved: Nov 2016).

[3] Lany Lane's Photo Stream: Envie de plein de chose.
https://flic.kr/p/bx7psH (retrieved: Nov 2016).

[4] Matt Biddulph: Who Mentions Who in my Twitter network.
https://flic.kr/p/cAT173 (retrieved: Nov 2016).

[5] Oliver Tacke: Multiple Choice Test.
(retrieved: Nov 2016).

[6] Swisspromt: Zahlenschloss / Spiralschloss / Veloschloss.
http://www.swisspromt.ch/shop/products/zahlenschloss-spiralkabelschloss-veloschloss/
(retrieved: Nov 2016).

[7] Ulrica Törning: Yatzy.
https://flic.kr/p/84JVjL (retrieved: Nov 2016).

[8] Xypron (author): Solution of a travelling salesman problem: the black line shows the shortest possible loop that connects every red dot.
https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem (retrieved: Nov 2016).