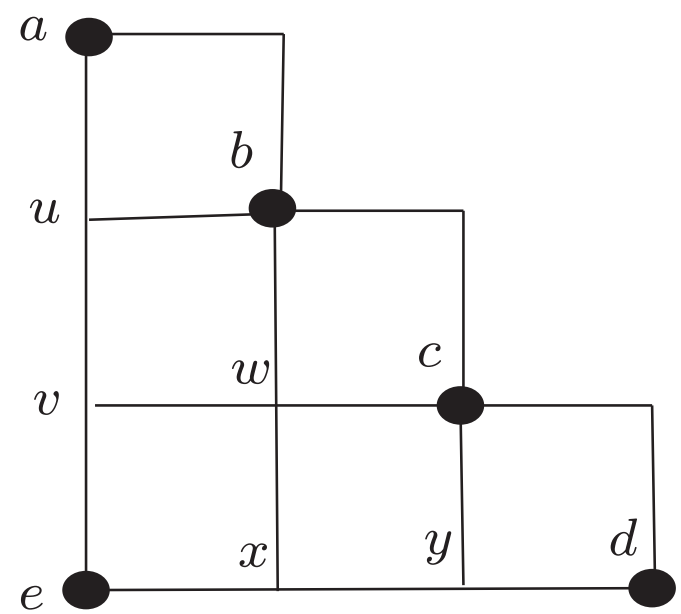
# Vorlesung 15b

# Eine Klausur aus 2015/16

mit Lösungen

**1.** Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen. Wieviele Schritte braucht es in Erwartung bei Start in $w$ bis zum erstmaligen Treffen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$?

*Hinweis: Nützen Sie die Symmetrie des Problems!*



Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$

Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch $x$ und $w$ gilt:

$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.

Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$

Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch $x$ und $w$ gilt:

$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.

Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der “Diagonale” durch $x$ und $w$ gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Einsetzen der 1. und der 3. in die 2. Gleichung ergibt:
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}s(x)) + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{3}s(x)) = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}s(x) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}s(x)$$

Lösung: $B := \{a, b, c, d, e\}, \;\; s(z) := \mathbf{E}_z[T_B]$
Wegen der Spiegelungssymmetrie an der "Diagonale" durch $x$ und $w$ gilt:
$s(x) = s(v)$, $s(y) = s(u)$.
Zerlegung nach dem ersten Schritt ergibt das Gleichungssystem

$$s(w) = 1 + \tfrac{1}{2}s(x)$$
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}s(w) + \tfrac{1}{3}s(y)$$
$$s(y) = 1 + \tfrac{1}{3}s(x)$$

Einsetzen der 1. und der 3. in die 2. Gleichung ergibt:
$$s(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2}s(x)) + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{3}s(x)) = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}s(x) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9}s(x)$$

$$\iff 18s(x) = 18 + 6 + 6 + (3 + 2)s(x)$$
$$\iff 13s(x) = 30, \qquad s(x) = \frac{30}{13}, \quad \boxed{s(w) = \frac{28}{13}}.$$

**2.** $X$ sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie

a) die Verteilungsfunktion

b) die Dichte

c) den Erwartungswert

von $Y := e^{X/2}$.

*Hinweis als Rechenhilfe:* $e^{-2\ln b} = (e^{\ln b})^{-2} = ?$

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F_Y'(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0, \infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1, \infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2 \ln b) = 1 - e^{-2 \ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F_Y'(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

c) $\mathbf{E}[Y] = \int_1^\infty b f_Y(b)\, db = \int_1^\infty b \frac{2}{b^3}\, db = 2 \int_1^\infty \frac{1}{b^2}\, db = 2\left(-\frac{1}{b}\Big|_1^\infty\right) = 2$

Lösung: $X$ nimmt seine Werte in $[0,\infty)$ an; die Funktion $h : a \mapsto e^{a/2}$ bildet $\mathbb{R}_+$ auf $[1,\infty)$ ab.

a) Für $b \geq 1$ ist
$F_Y(b) = \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(e^{X/2} \leq b) = \mathbf{P}(X \leq 2\ln b) = 1 - e^{-2\ln b} = 1 - (e^{\ln b})^{-2} = 1 - b^{-2}$.
Für $b < 1$ ist $F_Y(b) = 0$.

b) Als Dichtefunktion ergibt sich damit: $f_Y(b) = F'_Y(b) = 2b^{-3}$ für $b > 1$, und $f_Y(b) = 0$ für $b \leq 1$.

c) $\mathbf{E}[Y] = \int_1^\infty b f_Y(b)\, db = \int_1^\infty b \frac{2}{b^3}\, db = 2\int_1^\infty \frac{1}{b^2}\, db = 2\Big(-\frac{1}{b}\Big|_1^\infty\Big) = 2$
Direkte Lösung von c) (ohne Rückgriff auf b)):
$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[h(X)] = \int_0^\infty h(a) f_X(a) da = \int_0^\infty e^{a/2} e^{-a} da = \int_0^\infty e^{-a/2} da$
$= -2e^{-a/2}\Big|_0^\infty = 2.$

**3.** a) In einem $p$-Münzwurf mit $n$ Versuchen ist $K/n$, die relative Anzahl von Erfolgen, für nicht zu kleines $np$ und $n(1-p)$, annähernd normalverteilt - mit welchem Erwartungswert und welcher Varianz?

b) In einem $p$-Münzwurf betrug die relative Häufigkeit der Erfoge bei $n$ Versuchen $48\%$. Wie groß muss $n$ sein, damit unter der Hypothese $p = 1/2$ eine mindestens so große Abweichung vom Erwartungswert eine Wahrscheinlichkeit von nicht mehr als $0.05$ hat?

Lösung: a) $K$ ist Bin$(n,p)$-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$, Lösung: a) $K$ ist Bin$(n, p)$-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

Lösung: a) $K$ ist Bin$(n, p)$-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

b) Der beobachtete Ausgang von $\frac{K}{n}$ war $\frac{k}{n} = 0.48$, dessen absolute Abweichung vom Erwartungswert von $\frac{K}{n}$ ist $|\frac{k}{n} - p| = 0.02$.
Wie groß muss $n$ sein, damit $\mathbf{P}(|\frac{K}{n} - p| \geq 0.02) \approx 0.05$ ?

Lösung: a) $K$ ist Bin$(n,p)$-verteilt, also $\mathbf{E}[K] = np$, $\mathbf{Var}[K] = np(1-p)$,

$$\boxed{\mathbf{E}[\tfrac{K}{n}] = p, \quad \mathbf{Var}[\tfrac{K}{n}] = \tfrac{1}{n}p(1-p)}$$

b) Der beobachtete Ausgang von $\frac{K}{n}$ war $\frac{k}{n} = 0.48$, dessen absolute Abweichung vom Erwartungswert von $\frac{K}{n}$ ist $|\frac{k}{n} - p| = 0.02$.
Wie groß muss $n$ sein, damit $\mathbf{P}(|\frac{K}{n} - p| \geq 0.02) \approx 0.05$ ?

Die (approximative) Gleichheit trifft zu, wenn die Abweichung 0.02 das Zweifache der Standardabweichung von $\frac{K}{n}$ ist:
$0.02 = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (wegen $p = 1/2$).
Also: $\sqrt{n} = 50$, $\boxed{n = 2500}$

**4.** Wir betrachten $n$ Spieler mit den Namen $1, 2, \ldots, n$. Jedes Paar von Spielern entscheidet sich mit Wahrscheinlichkeit $p$ (unabhängig von allen anderen Paaren), ob es eine Verbindung ("Kooperation") eingeht. Für $i < j < k$ sagen wir, dass *die Dreieckskonstellation* $\{i, j, k\}$ *besteht*, wenn alle drei Paare $(i, j)$, $(i, k)$, $(j, k)$ eine Verbindung eingehen.

a) Wieviele Dreieckskonstellationen können (für gegebenes $n \geq 3$) maximal bestehen?
b) Sei $n \geq 3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Dreieckskonstellation $\{1, 2, 3\}$?
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen
(i) für allgemeines $n \geq 3$ und $p \in (0, 1)$, (ii) für $n = 10$ und $p = 1/4$.

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit $p^3$ (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit $p^3$ (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert $p^3$.

Lösung:
a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit $p^3$ (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert $p^3$.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

Lösung:

a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit $p^3$ (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert $p^3$.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

$\binom{n}{3}p^3$

Lösung:
a) soviel, wie es dreielementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{3}$.

b) Mit W'keit $p^3$ (wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit)

c) (i) Die Anzahl der bestehenden Dreieckskonstellationen sehen wir als eine Summe von Indikatorvariablen, jede einzelne hat Erwartungswert $p^3$.

Aus der der Additivität des Erwartungswerts folgt: Der gefragte Erwartungswert ist

$\binom{n}{3} p^3$

(ii) $\frac{15}{8}$.

**5.** Auf dem Zustandsraum $S := \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Übergangsmatrix $P$ definiert durch
$P(1, 1) = P(1, 2) = P(1, 3) = 1/3,$
$P(2, 1) = P(2, 3) = 1/2,$
$P(3, 1) = P(3, 2) = 1/2.$

a) Finden Sie eine Verteilung $\pi$ auf $S$ mit $\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a)$, $a, b \in S$.

b) Es sei $X = (X_0, X_1, \ldots)$ eine Markovkette zur Übergangsmatrix $P$ mit Start in der in a) gefundenen reversiblen Gleichgewichtsverteilung $\pi$.
(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1)$ und $\mathbf{P}_\pi(X_7 < X_8)$.
(ii) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Zeitpunkte $i \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, für die $X_i < X_{i+1}$ gilt?

Lösung: a)

$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$$

$$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$$

$$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \pi(3)$$

Lösung: a)

$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(2)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(1)\tfrac{1}{3} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \tfrac{2}{3}\pi(1)$$
$$\pi(2)\tfrac{1}{2} = \pi(3)\tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \tfrac{4}{3}) = 1,$$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \tfrac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \tfrac{2}{7}}$$

Lösung: a)

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$

$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$

$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \frac{4}{3}) = 1,$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \frac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \frac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}.$

Lösung: a)

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \pi(2) = \pi(3)$

$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \frac{4}{3}) = 1,$

$$\boxed{\quad \pi(1) = \frac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \frac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$.

Weil $\pi$ Gleichgewichtsverteilung ist, gilt insbesondere: Unter $\mathbf{P}_\pi$ ist für jedes $i \geq 1$ das Paar $(X_7, X_8)$ so verteilt wie $(X_1, X_2)$, also ist auch $\mathbf{P}(X_7 < X_8) = \frac{3}{7}$.

Lösung: a)

$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(2)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(1)\frac{1}{3} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(3) = \frac{2}{3}\pi(1)$
$\pi(2)\frac{1}{2} = \pi(3)\frac{1}{2} \iff \pi(2) = \pi(3)$

$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Longrightarrow \pi(1)(1 + \frac{4}{3}) = 1,$

$$\boxed{\pi(1) = \frac{3}{7}, \quad \pi(2) = \pi(3) = \frac{2}{7}}$$

b) (i) $\mathbf{P}_\pi(X_0 < X_1) = \mathbf{P}_\pi((X_0, X_1) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$
$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$.

Weil $\pi$ Gleichgewichtsverteilung ist, gilt insbesondere: Unter $\mathbf{P}_\pi$ ist für jedes $i \geq 1$ das Paar $(X_7, X_8)$ so verteilt wie $(X_1, X_2)$, also ist auch $\mathbf{P}(X_7 < X_8) = \frac{3}{7}$.

c) Die gefragte Anzahl ist eine Summe von 11 Indikatorvariablen, jede hat (vgl. b) den Erwartungswert $\frac{3}{7}$. Aus der Linearität des EW folgt, dass die gefragte Anzahl den Erwartungswert $11 \cdot \frac{3}{7}$ hat.

**6.** Wir betrachten ein zweistufiges Experiment, bei dem $X_1$ exponentialverteilt ist zum Parameter $\lambda > 0$. Gegeben $\{X_1 = a\}$ ist $X_2$ normalverteilt mit Erwartungswert $a$ und Varianz $a$. Berechnen Sie

(i) den Erwartungswert

(ii) die Varianz
von $X_2$.

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$

$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$
$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$
$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Also ist
(i) wegen $(*)$
$\mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung des Erwartungswerts und der Varianz nach der ersten Stufe:

$$(*) \qquad \mathbf{E}[X_2] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_2|X_1]],$$
$$(**) \qquad \mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[\mathbf{E}[X_2|X_1]] + \mathbf{E}[\mathbf{Var}[X_2|X_1]$$

Nach Voraussetzung gilt: $\mathbf{E}[X_2|X_1] = X_1$ und $\mathbf{Var}[X_2|X_1] = X_1$.

Also ist
(i) wegen $(*)$
$\mathbf{E}]X_2] = \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$
und
(ii) wegen $(**)$
$\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{Var}[X_1] + \mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$.