Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

– Wintersemester 2019/20 –

Kapitel 04: Zufallsvariablen

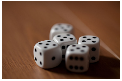
Prof. Dr. Adrian Ulges

Angewandte Informatik (B.Sc.) /
Informatik - Technische Systeme (B.Sc.) /
Wirtschaftsinformatik (B.Sc.)

Fachbereich DCSM
Hochschule RheinMain

Outline

Von Zufallsexperimenten zu Zufallsvariablen Bild: [2]



Wie wir bisher Zufallsexperimente formalisiert haben

- Ergebnismenge Ω
- Wahrscheinlichkeiten sind auf Ereignissen $A \subseteq \Omega$ definiert.

Von Zufallsexperimenten zu Zufallsvariablen

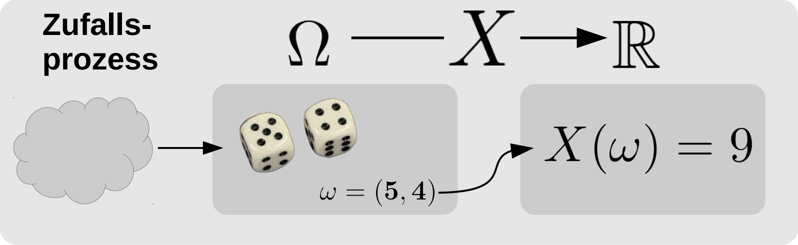
- Oft interessieren uns nur Zahlenwerte, die sich aus den Ergebnissen ergeben.
- Diese Zahlenwerte modellieren wir mittels sogenannter Zufallsvariablen.

Zufallsvariablen...

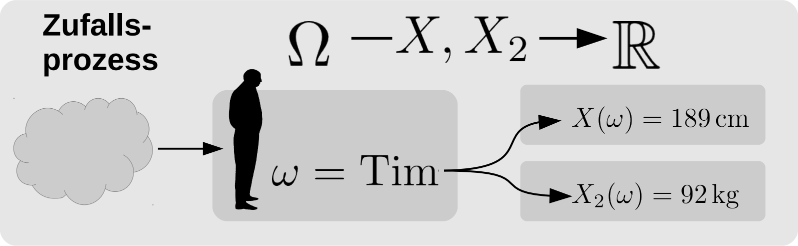
- ... können wir uns als Zufallszahlen vorstellen.
- ... sind ein zentrales Konzept der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zufallsvariablen: Illustration

Beispiel: Zwei Würfel (Augensumme)

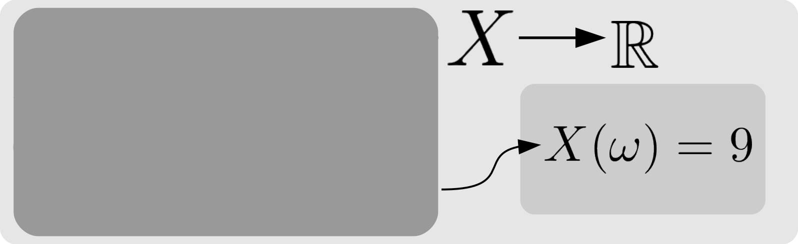


Beispiel: Personen

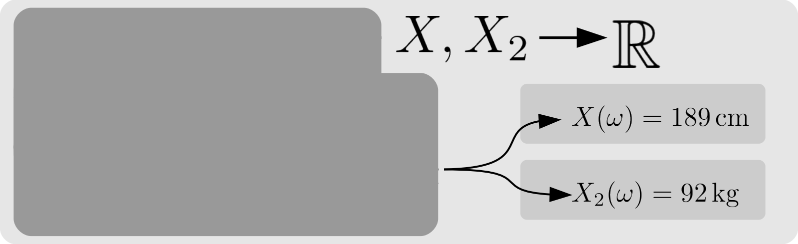


Zufallsvariablen: Illustration

Beispiel: Zwei Würfel (Augensumme)



Beispiel: Personen



Zufallsvariablen: Formalisierung

Definition (Zufallsvariable)

Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann nennen wir eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

eine Zufallsvariable. Die Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis ω des Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zu.

Anmerkungen

- Wir bezeichnen Zufallsvariablen üblicher Weise mit Großbuchstaben $(X, Y, \ldots)$.
- Wir bezeichnen die Werte, die Zufallsvariablen annehmen, mit Kleinbuchstaben $(x, y, \ldots)$. Diese Werte nennen wir auch die Realisierungen der Zufallsvariable.

Diskrete Zufallsvariablen

Das Ereignis 'X=x'

- In der Regel wollen wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert x annimmt. Hierzu definieren wir das Ereignis

$$X{=}x \;:= \Big\{\omega \,|\, X(\omega) = x\Big\}.$$

- Beispiel: Augensumme X von zwei Würfeln

$$X{=}4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \quad \rightarrow \quad P(X=4) = 3/36.$$

Diskrete Zufallsvariablen

Wir unterscheiden zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen:

- Diskrete Zufallsvariablen können nur endlich oder *abzählbar* unendlich viele Realisierungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ annehmen.
- Wir schreiben kurz: $p_i := P(X = x_i)$.
- Realisierungen x_i und Wahrscheinlichkeiten p_i bilden die Verteilung der Zufallsvariablen.

Diskrete Zufallsvariable: Beispiele

Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispielereignisse

- $P(X = 9) = \frac{4}{36}$
- $P(4 \leq X < 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{12}{36}$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{10}{36}$$

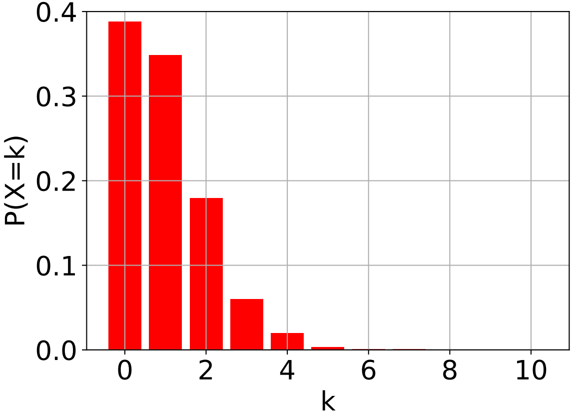
$$F(5{,}7) = P(X \leq 5{,}7) = 10/36$$

$x \in \mathbb{R}$

$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{15}{36}$$

Diskrete Zufallsvariable: Grafische Darstellung

Wir können die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (genau wie relative Häufigkeiten) als **Säulendiagramm** darstellen:



Definition: Verteilungsfunktion

Definition (Verteilungsfunktion)

Sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable. Dann nennen wir die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F(x) = P(X \leq x)$$

die **Verteilungsfunktion** *von X.*

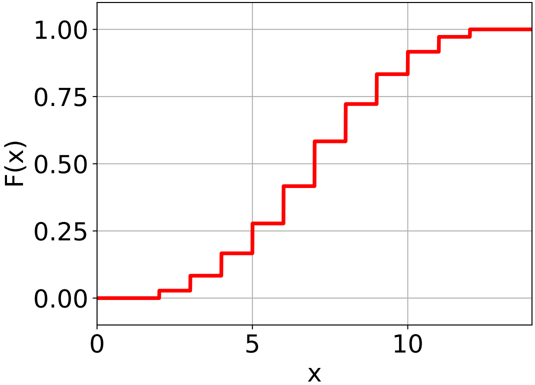
Anmerkungen

- Wir ermitteln $F(x)$, indem wir einfach die Wahrscheinlichkeit für alle Werte kleiner oder gleich x aufsummieren (oder *kumulieren*):
$$F(x) = \sum_{i : x_i \leq x} p_i$$

Verteilungsfunktion: Beispiel

Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

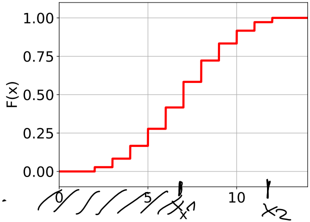


Verteilungsfunktion: Grafische Darstellung

Es ergibt sich also:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ 1/36 & \text{falls } 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{falls } 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{falls } 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{falls } 5 \leq x < 6 \\ \ldots & \\ 35/36 & \text{falls } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{falls } 12 \leq x \end{cases}$$

Verteilungsfunktion: Eigenschaften



$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Die Verteilungsfunktion F einer *(diskreten oder stetigen)* Zufallsvariablen X ist immer monoton wachsend.

Beweis Es sei $x_1 < x_2$

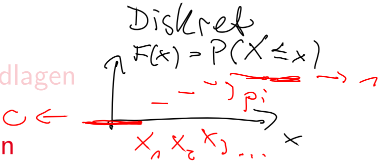
$\Rightarrow \{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$

$\Rightarrow P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2)$

$\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ ✓

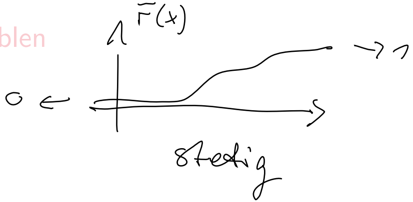
Outline

1. Zufallsvariablen: Grundlagen



2. Stetige Zufallsvariablen

3. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

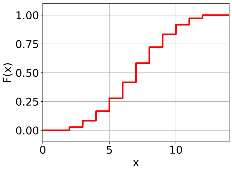


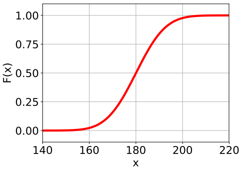
4. Kennwerte von Zufallsvariablen
   - Quantile
   - Erwartungswert
   - Varianz
   - Kovarianz

5. Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

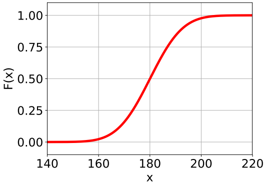
Von diskreten zu stetigen Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariablen	**Stetige Zufallsvariablen**
haben wir schon kennengelernt	lernen wir jetzt kennen
können nur abzählbar viele Werte annehmen	können überabzählbar viele Werte annehmen
besitzen eine Verteilungsfunktion F	besitzen eine Verteilungsfunktion F
F weist Sprünge auf	F ist stetig

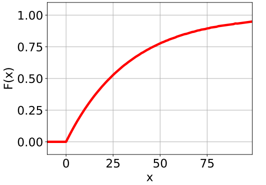




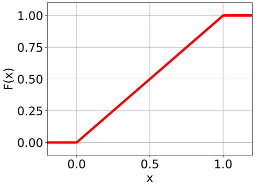
Stetige Zufallsvariablen: Beispiele



X = Größe zufällig ausgewählter männlicher Personen zwischen 20 und 25 Jahren



X = Lebensdauer einer Festplatte (mit beliebiger Genauigkeit)



X = x-Koordinate des nächsten Regentropfens, der auf ein Einheitsquadrat fällt

Definition: Dichtefunktion

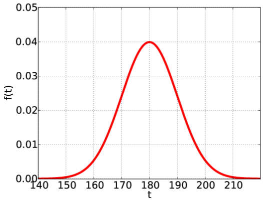
Definition (Dichtefunktion)

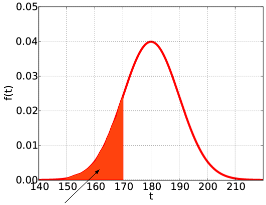
Sei X eine stetige Zufallsvariable mit (stückweise) differenzierbarer Verteilungsfunktion F. Die Ableitung

$$f(x) = F'(x)$$

nennen wir eine Dichtefunktion. Umgekehrt erhalten wir die Verteilungsfunktion durch Integration der Dichtefunktion:

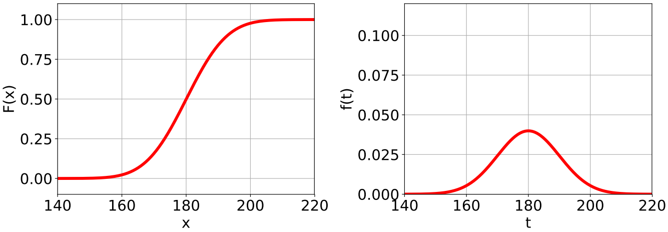
$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$



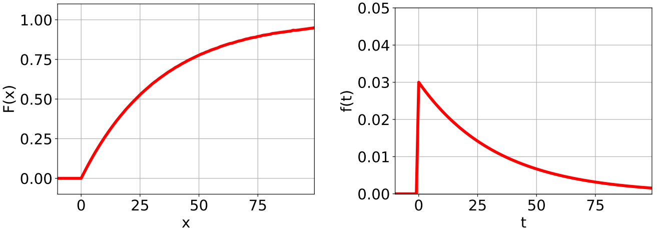


Dichtefunktion: Beispiele

$X =$ *Größe zufällig ausgewählter männlicher Personen zwischen* 20 *und* 25 *Jahren*

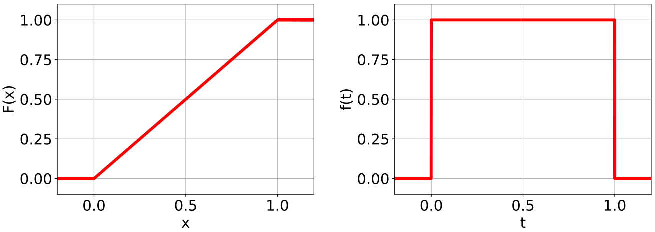


$X =$ *Lebensdauer einer Festplatte (in Monaten)*



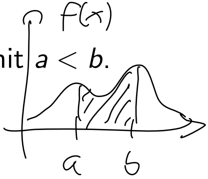
Dichtefunktion: Beispiele

$X =$ *x-Koordinate eines Regentropfens, der auf ein Einheitsquadrat fällt.*



Dichtefunktion: Eigenschaften

Es sei X eine stetige Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Dann gilt:



$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$$P(a < X < b) = \text{"} \quad - \cancel{P(X=a)} - \cancel{P(X=b)}$$

$$P(a \le X < b) = \text{"}$$

$$P(a < X \le b) = \text{"}$$

$$= F(b) - F(a).$$

Dichtefunktion: Rechenbeispiel

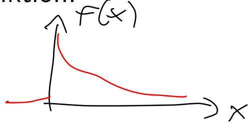
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass unsere Festplatte im dritten Jahr ausfällt?

X sei die Lebensdauer der Festplatte, mit Dichtefunktion:

c' > 0: Verboten, weil sonst nicht monoton.

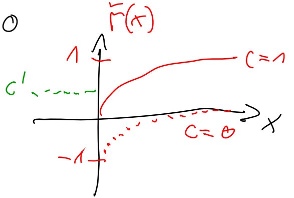
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \underbrace{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}_{c'} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\lambda = \frac{1}{24}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ -e^{-\lambda x} + \cancel{c} + 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{+e^{-\lambda x} \cdot (-\lambda)}$$



$$\int_a^b f(t)\,dt$$

$$\| $$

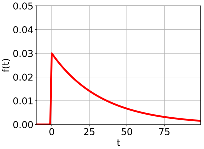
$$P(24 \leq X \leq 36) = F(36) - F(24)$$

$$= (\cancel{1} - e^{-\frac{1}{24} \cdot 36}) - (\cancel{1} - e^{-\frac{1}{24} \cdot 24})$$

$$= e^{-1} - e^{-3/2} \approx 14{,}5\,\%$$

Dichtefunktion: Rechenbeispiel

Dichtefunktion: Eigenschaften



- Es gilt: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Es gilt: Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion ist 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

- Es gilt: Eine Zufallsvariable X ist genau dann stetig, wenn

$$P(X = x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Beweis

Dichtefunktion: Eigenschaften

- Das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert x_0 annimmt, ist immer gleich null (auch wenn die Dichte $f(x_0) > 0$ ist).
- Aber: Die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem bestimmten Bereich $[a, b]$ mit $a < b$ liegt, ist im Allgemeinen > 0.

Outline

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Wiederholung: *Wann haben wir zwei Ereignisse A, B als unabhängig bezeichnet?*

- *Antwort: "Wenn die Wahrscheinlichkeit von B nicht davon abhängt, ob A eintritt"*
- *Formal:*
  - $P(B|A) = P(B)$
  - *bzw.* $P(A|B) = P(A)$
  - *bzw.* $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen?

- **Intuition**: Zwei Zufallsvariablen X, Y sind unabhängig, wenn die **Werte, die X annimmt, unabhängig von den Werten sind die Y annimmt**.

Die Würfel sind unabhängig

Größe und Gewicht sind abhängig

Definition: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Wir bezeichnen zwei Zufallsvariablen X und Y als unabhängig, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

Anmerkungen

- Wir können die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen also genauso prüfen wie wir es für Ereignisse bereits kennen. Wir müssen nur alle möglichen "Fälle" abdecken!
- Für diskrete Zufallsvariablen können wir alternativ prüfen, ob für alle Realisationen x_i (bzw. y_j) von X (bzw. Y) gilt:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen: Beispiel 1

Zweifaches Würfeln

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$
- Für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ definieren wir die Zufallsvariablen
  - $X := \omega_1$ (1. Wurf)
  - $Y := \omega_2$ (2. Wurf)
- **Vermutung**: X und Y sind **unabhängig**

Beweis

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen: Beispiel 2

Zweifaches Würfeln

$\# \Omega = 36$

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$
- Für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ definieren wir die Zufallsvariablen
  - $X := \omega_1 + \omega_2$ (Summe der Augen)
  - $Y := \omega_1 \cdot \omega_2$ (Produkt der Augen)
- **Vermutung**: X und Y sind **abhängig**.

Beweis

$\forall x, y \quad P(X=x, Y=y) \overset{?}{=} P(X=x) \cdot P(Y=y)$?

$\Rightarrow \quad X=10, \; Y=10$

$P(X=10) = 3/36$ // $(5,5), (6,4), (4,6)$

$P(Y=10) = 2/36$ // $(5,2), (2,5)$

$P(X=10, Y=10) = 0 \quad \Longrightarrow$ abhängig.

Outline

Wiederholung: Kennwerte

Wir haben bereits Kennwerte zur Beschreibung von Stichproben kennengelernt (Kapitel 1):

- (Arithmetischer) Mittelwert
- Median und Quantile
- Varianz
- Kovarianz
- ...

Wir können dieselben Kennwerte auch zur Beschreibung der Verteilung von Zufallsvariablen einsetzen.

Outline

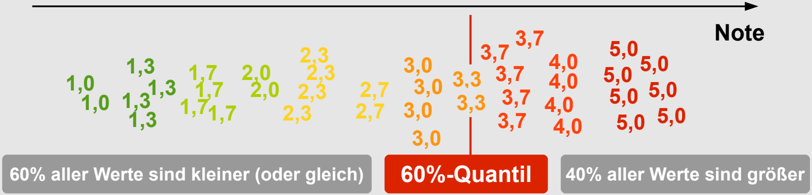
Quantile: Wiederholung

Wie waren Quantile definiert?

- Das α-Quantil ist der Wert, unterhalb dessen ein Anteil von α aller Samples liegt.

Beispiel

Unter welcher Grenze liegen 60% der Noten? → 60%-Quantil



Quantile für **Zufallsvariablen**?

- Bisher: Die **relative Häufigkeit** kleinerer Werte ist α
- Jetzt: Die **Wahrscheinlichkeit** kleinerer Werte ist α

Quantile von Zufallsvariablen

Definition (Quantil einer Zufallsvariable)

Es sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable und $\alpha \in (0, 1)$. Ein Wert $x_\alpha \in \mathbb{R}$, für den gilt:

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha \qquad \text{(bzw. } F(x_\alpha) = \alpha\text{)}$$

*heißt $\boldsymbol{\alpha}$-**Quantil** von X.*

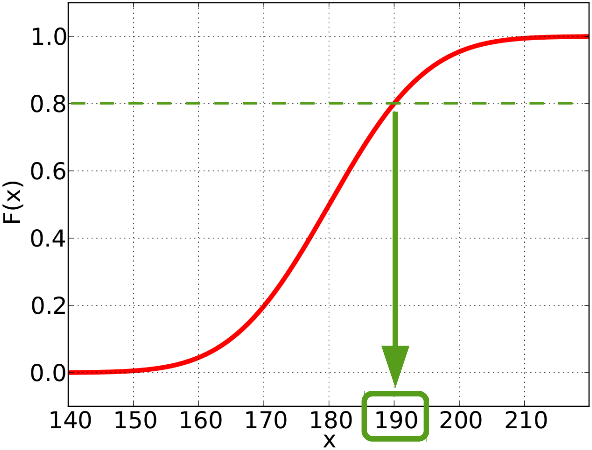
Anmerkungen

- Intuitive Vorstellung: "Wiederholen wir unser Zufallsexperiment beliebig oft, ist im Mittel ein Anteil von α der Realisierungen kleiner oder gleich x_α".
- Beispiel: Beim Werfen eines fairen 6-seitigen Würfels lautet das 50%-Quantil... $x_{50\%} = 3$.
- Falls $\alpha = 50\%$, nennen wir x_α einen Median.

Quantile: Grafische Darstellung

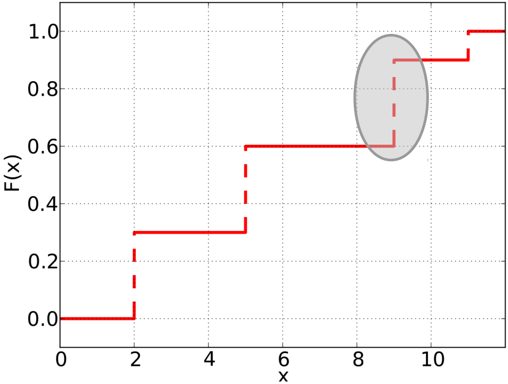
Wir können Quantile leicht aus der Verteilungsfunktion F ablesen:

Wie ermittlen wir das **80%-Quantil**?
→ Wir fordern: $\mathbf{P(X \leq x) = 0{,}8 \longleftrightarrow F(x) = 0{,}8}$
→ Das 80%-Quantil lautet also: $\mathbf{x_{0,8} = 190}$



Quantile: Existenz und Eindeutigkeit

Wie lautet hier das **80%-Quantil**?
→ F **springt** über den Wert 0,8 hinweg
→ Das 80%-Quantil **existiert nicht**!



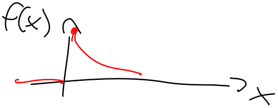
Für manche αs kann es keine (bzw. mehrere)[1] Quantile geben!

[1] Es existieren alternative Definitionen, die die Existenz der Quantile (auch im Fall von Sprungstellen) gewährleisten. Dann wäre im Beispiel $x_\alpha = 9 \ \ \forall \alpha \in [0.6, 0.9]$.

Quantile: Anwendungsbeispiel

Nach welcher Zeit wird unsere Festplatte mit 60% Wahrscheinlichkeit ausgefallen sein?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$



wir fordern: $F(x) = 0{,}6$

$$1 - e^{-\lambda x} = 0{,}6$$

$$e^{-\lambda x} = 0{,}4 \qquad // \lambda = 1/24$$

$$\cancel{\log}(\cancel{\exp}(-\lambda x)) = \log(0{,}4)$$

$$x = -\lambda^{-1} \cdot \log(0{,}4) \approx 22$$

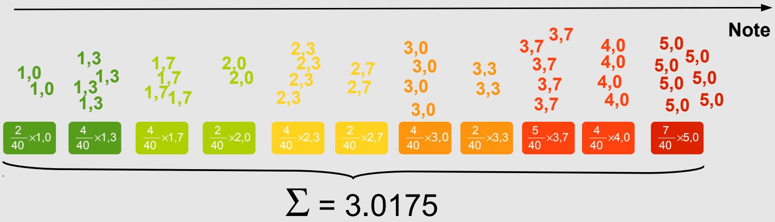
Outline

Wiederholung: Mittelwert

Wie kann man den **Mittelwert** berechnen?

- Alle Samples aufsummieren und durch n teilen ...
- ... oder: jeden vorkommenden Wert mit seiner relativen Häufigkeit gewichten und die gewichtete Summe bilden

Beispiel



"Mittelwerte" für **Zufallsvariablen**?

- Bisher: Gewichtete Summe mit **relativen Häufigkeiten**
- Jetzt: Gewichtete Summe mit **Wahrscheinlichkeiten**

Definition: Erwartungswert

Definition (Erwartungswert)

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Realisierungen $x_1, x_2, ..., x_m$ (und Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, ..., p_m$). Dann nennen wir

$$E(X) := \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot x_i$$

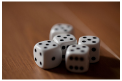
den Erwartungswert von X. Existieren unendlich viele Realisierungen $x_1, x_2, ...,$ entspricht $E(X)$ einer Reihe:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann lautet der Erwartungswert:

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

Erwartungswert: Beispiel 1 Bild: [2]



Würfeln mit zwei Würfeln, Augensumme

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i $P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \sum_i p_i \cdot x_i$$

$$= \frac{1}{36} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + 1 \cdot 12)$$

$$= 7$$

$\Uparrow$

$E(X)$

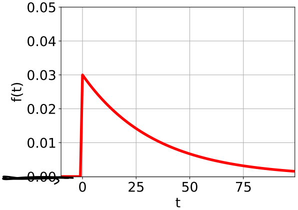
Erwartungswert: Beispiel 2

Ausfall einer Festplatte

- $X =$ *Lebensdauer einer Festplatte (in Monaten)*
- Die Dichtefunktion lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\lambda = \frac{1}{24}$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx = \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot x \, dx}}_{0} + \int_{0}^{\infty} \underline{f(x)} \cdot x \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot x \, dx \quad \text{// partielle Integration}$$

$$= \left[e^{-\lambda x} \cdot \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \right]_{x=0}^{b} \quad \swarrow \text{Stammfkt.}$$

Erwartungswert: Beispiel 2

$$= \lim_{b \to \infty} \left[e^{-\lambda x} \cdot \left(-x - \frac{1}{\lambda} \right) \right]_{x=0}^{b}$$

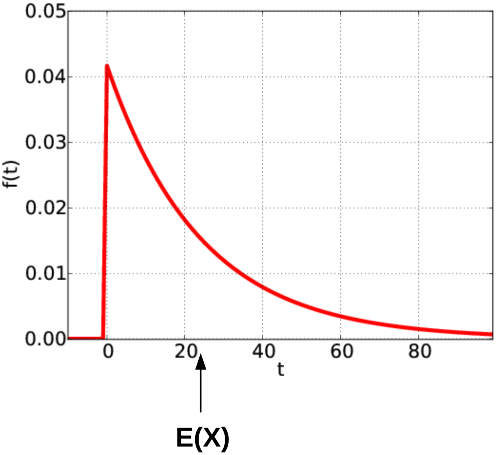
$$= \lim_{b \to \infty} \left(\underbrace{\underbrace{e^{-\lambda b}}_{\Rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left(-b - \frac{1}{\lambda} \right)}_{\Rightarrow -\infty}}_{\Rightarrow 0} - \left(e^{-\lambda 0} \cdot \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right)$$

$$= 0 \cancel{-} \left(1 \cdot \cancel{-} \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= 1/\lambda = 24$$

Erwartungswert: Eigenschaften

- Die erwartete Lebensdauer beträgt also **24 Monate**
- Wir sehen: $E(X)$ entspricht dem **Schwerpunkt** der Verteilung



Outline

Varianz von Zufallsvariablen

Der Erwartungswert beschreibt die erwartete Lage der Werte einer Zufallsvariablen. Wir wollen nun zusätzlichen Aussagen über die erwartete Streuung treffen.

Wiederholung: Varianz für Stichproben

Gegeben eine Stichprobe $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}$ mit Mittelwert $\overline{x}$, nennen wir

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

die Varianz der Stichprobe.

Varianz für **Zufallsvariablen**?

- Bisher: Varianz = mittlerer quadratischer Abstand der Stichprobenwerte vom **Mittelwert**.
- Jetzt: Varianz = mittlerer quadratischer Abstand der Realisierungen vom **Erwartungswert**.

Definition: Varianz von Zufallsvariablen

Definition (Varianz (Zufallsvariable))

$p_1, \ldots, x_m$

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Realisierungen $x_1, \ldots, x_m$ *und Erwartungswert* $E(X) = \mu$. *Dann definieren wir die Varianz von X als:*

$$Var(X) = \sum_i p_i \cdot (x_i - \mu)^2$$

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann definieren wir:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 \, dx$$

Anmerkungen

- Idee wie beim Erwartungswert: Jede Realisierung wird gewichtet mit ihrer Wahrscheinlichkeit / Dichte !

Definition: Varianz von Zufallsvariablen

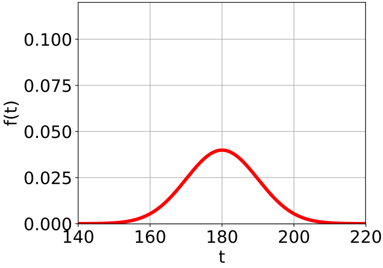
Anmerkungen (cont'd)

- Wir notieren die Varianz auch mit σ^2.
- Wir nennen die Wurzel σ die Standardabweichung.
- Es gilt immer: $Var(X) \geq 0$. $Var(X) = 0$ gilt genau dann, wenn X nur einen Wert annimmt (*"entartete" Zufallsvariable*).
- Der Verschiebungssatz – den wir bereits für Stichproben kennen – gilt analog für die Varianz von Zufallsvariablen. Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) = \mu$ und Varianz σ^2. Dann gilt:

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

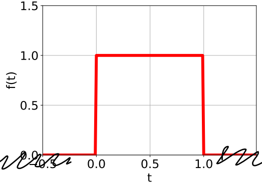
Varianz von Zufallsvariablen: Grafische Interpretation

Die Varianz drückt die Streuung der Fläche unter der Dichtefunktion aus.



- **Links**: Dichte einer Variable X_1 mit Varianz $Var(X_1) = 100$
- **Rechts**: Dichte einer Variable X_2 mit Varianz $Var(X_2) = 16$

Varianz: Beispiel



- X besitze die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der Erwartungswert beträgt $\mu = \frac{1}{2}$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x-\mu)^2 \, dx = \int_0^1 \overset{f(x)}{1} \cdot \left(x - \overset{\mu}{\tfrac{1}{2}}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{12}$$

Varianz: Beispiel

Outline

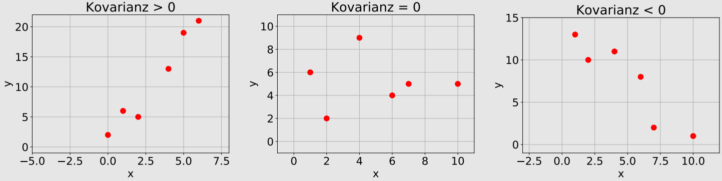
Kovarianz von Zufallsvariablen

Wiederholung: Kovarianz für Stichproben

Gegeben eine Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$*, nennen wir*

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

die Kovarianz.



Kovarianz für **Zufallsvariablen**?

- **Gleiche Idee**: Die Kovarianz zwischen X und Y ist positiv *(bzw. negativ)*, falls *(wenn wir sehr oft ziehen)* mit **wachsendem X-Wert** auch der Y-Wert steigt *(bzw. fällt)*.

Kovarianz von Zufallsvariablen

Definition (Kovarianz (diskrete Zufallsvariablen))

Es seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit Realisierungen $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$, sowie Erwartungswerten μ_X und μ_Y. Dann nennen wir

$$Cov(X, Y) = \sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \cdot (x_i - \mu_X) \cdot (y_j - \mu_Y)$$

die Kovarianz von X und Y.

Anmerkungen

- (Auch) diese Formel ist analog zu der für Stichproben.
- Die Kovarianz drückt *(analog zur Stichproben-Variante)* eine lineare Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen aus.
- Sind X und Y unabhängig, gilt $Cov(X, Y) = 0$.

Kovarianz: Beispiel

Y Gewicht \ X Körpergröße	170 cm	180 cm	190 cm
100 kg	4%	8%	23%
90 kg	6%	30%	4%
80 kg	18%	6%	1%

Kovarianz: Beispiel

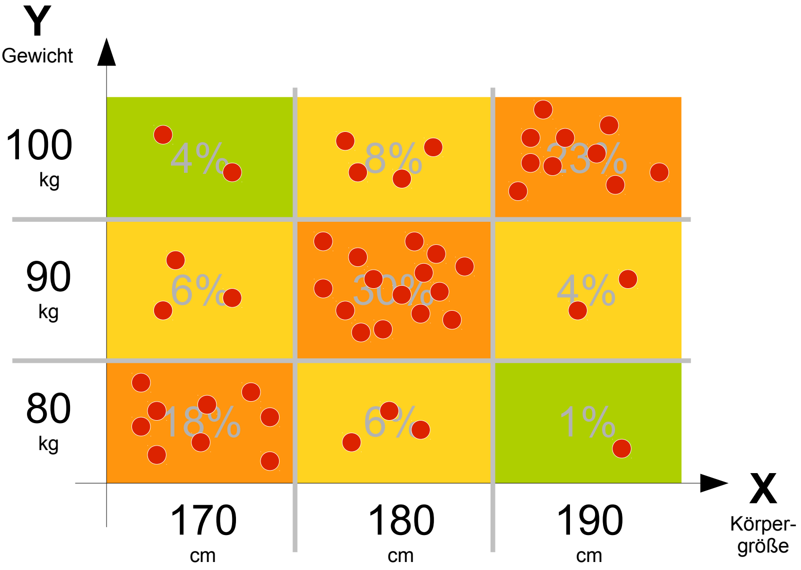
Wir berechnen die Kovarianz $Cov(X, Y)$:

Y Gewicht \ X Körpergröße	170 cm	180 cm	190 cm
100 kg	4%	8%	23%
90 kg	6%	30%	4%
80 kg	18%	6%	1%

Kovarianz: Beispiel

Y Gewicht \ X Körpergröße	170 cm	180 cm	190 cm
100 kg	4%	8%	23%
90 kg	6%	30%	4%
80 kg	18%	6%	1%

Kovarianz: Beispiel



Kovarianz von Zufallsvariablen

Anmerkungen (cont'd)

- Wir können *(ähnlich wie wir es für Stichproben bereits kennen)* auch die Korrelation ρ von X und Y berechnen:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

- Wir nennen X und Y positiv (bzw. negativ) korreliert, wenn $Cov(X, Y) > 0$ (bzw. $Cov(X, Y) < 0$)
- Für die Korrelation von Zufallsvariablen gilt *(wie bei Stichproben)*: $-1 \leq \rho \leq 1$
- Es gilt wie bei Stichproben $\rho = \pm 1$ genau dann, wenn $Y = \alpha \cdot X + \beta$ *("maximale Abhängigkeit")*

Outline

Erwartungswert und Varianz: Lineare Transformation

Definition (Lineare Transformation von Zufallsvariablen)

Es sei X eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ersetzen wir X durch $X' := \alpha \cdot X + \beta$, so lautet der neue Erwartungswert

$$E(X') = \alpha \cdot E(X) + \beta$$

und die neue Varianz

$$Var(X') = \alpha^2 \cdot Var(X).$$

Anmerkungen

- Dieselben Formeln galten bereits für Stichproben (Kapitel 1).

Erwartungswert und Varianz: Lineare Transformation

Beweis (hier nur für den Erwartungswert und stetige Zufallsvariablen X)

Erwartungswert: Addition/Multiplikation

Wie verhalten sich Erwartungswert und Varianz, wenn wir mehrere Zufallsvariablen addieren/multiplizieren?

Definition (Addition und Multiplikation von Zufallsvariablen)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

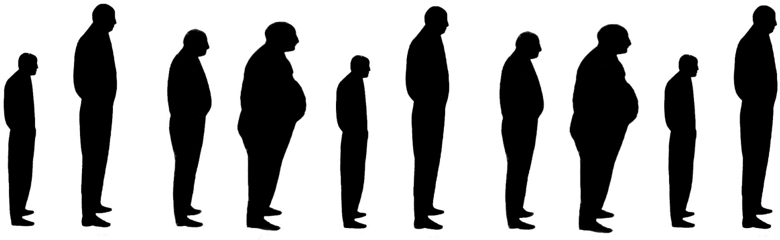
Sind X und Y darüber hinaus **unabhängig**, *gilt außerdem:*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Erwartungswert: Addition/Multiplikation

Beweis (für die Multiplikation diskreter Zufallsvariablen)

Addition und Multiplikation: Beispiele



Aufzug

- Das Gewicht von Personen sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 80.
- 10 Personen mit Gewicht $X_1, \dots, X_{10}$ betreten einen Aufzug.
- Welches Gewicht ist insgesamt zu erwarten?

$$\begin{aligned} E(X_1 + \dots + X_{10}) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) \\ &= \quad 80 \quad + \quad 80 \quad + \dots + \quad 80 \quad = \quad 800 \end{aligned}$$

Addition und Multiplikation: Beispiele Bild: [1]

Aktien

- Der jährliche prozentuale Kursgewinn einer Aktie sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 1.5%
- Im Mittel wird das Guthaben also mit 1.015 multipliziert
- Welcher prozentuale Gewinn ist über vier Jahre $X_1, ..., X_4$ zu erwarten?

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) &= E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot E(X_3) \cdot E(X_4) \\ &= 1.015 \cdot 1.015 \cdot 1.015 \cdot 1.015 = 1.0614 \end{aligned}$$

- **Achtung:** Das gilt nur falls $X_1, ..., X_4$ unabhängig sind !?

Varianz: Addition von Zufallsvariablen

Definition (Addition von Zufallsvariablen)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$Var(X+Y) = Var(X) + 2 \cdot Cov(X,Y) + Var(Y)$$

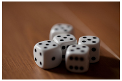
Sind X und Y **unabhängig***, gilt (weil $Cov(X,Y) = 0$)*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Anmerkungen

- Das bedeutet: Addieren wir unabhängige Zufallsvariablen auf, nimmt die Streuung immer weiter zu.

Beispiel: Würfeln Bild: [2]



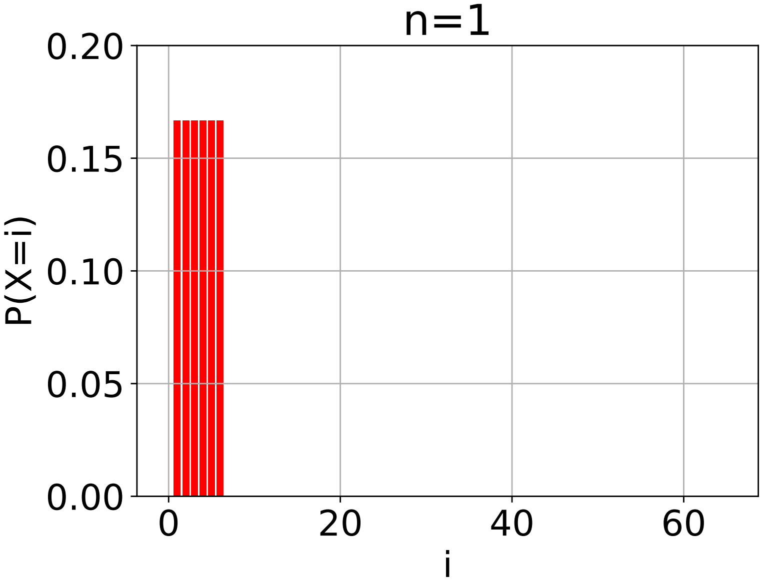
Wir würfeln **mehrfach** und addieren die Augen auf

- $X_1, X_2, X_3, \ldots =$ Augen des 1./2./3./... Wurfs
- Wir berechnen $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
  Wie lautet die Varianz dieser Summe?
- Für jeden Wurf X_i gilt: $Var(X_i) \approx 2.92$
- Die Würfe sind unabhängig. Also folgt:

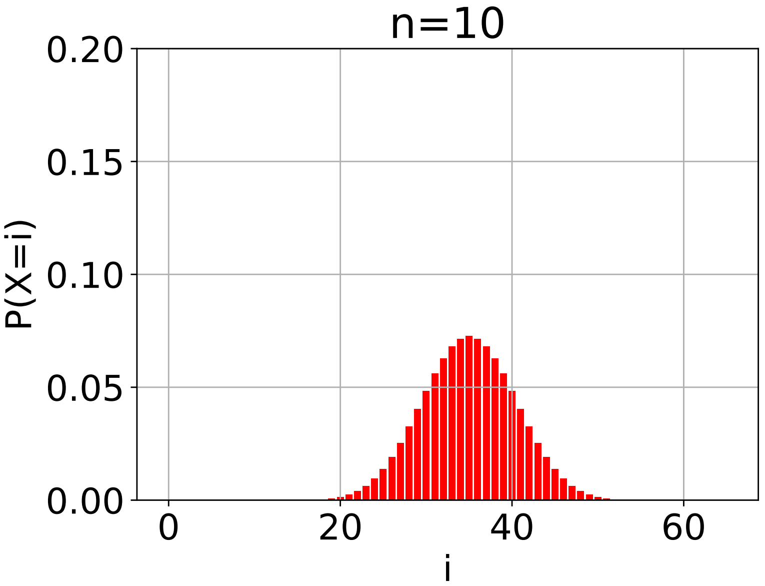
$$
\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2) &= Var(X_1) + Var(X_2) && = 2 \cdot 2.92 = 5.84 \\
Var(X_1 + X_2 + X_3) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) && = 3 \cdot 2.92 = 8.76 \\
&\ldots \\
Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) && = n \cdot 2.92
\end{aligned}
$$

- Die Varianz wächst linear mit der Anzahl der Würfe.

Beispiel: Wiederholtes Würfeln (n mal)



Beispiel: Wiederholtes Würfeln (n mal)



References

[1] Ken Teegardin: Graph With Stacks Of Coins.
https://flic.kr/p/ahtKQx (retrieved: Nov 2016, no changes made).

[2] Ulrica Törning: Yatzy.
https://flic.kr/p/84JVjL (retrieved: Nov 2016).