Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 3

№1

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Мне лень придумывать что-то другое, поэтому докажем по индукции.
База: при $n = 1$ получим верное равенство $0 \cdot 1 = \frac{(1-1)\cdot 1\cdot(1+1)}{3}$
Пусть равенство верно для $n \in \mathbb{N}$, тогда для $n+1$:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{3}$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{3} - \frac{3n(n+1)}{3}$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = (n+1)\left(\frac{(n)(n+2)}{3} - \frac{3n}{3}\right)$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = (n+1)\frac{n^2-n}{3}$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = (n+1)\frac{n(n-1)}{3}$$

Выполнив эти преобразования в обратном порядке (снизу вверх), получим, что из равенства для n следует равенство для $n+1$. Значит, по аксиоме индукции, равенство верно для любого натурально го n.

№2

$$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Индукция уже была, использовать её снова не интересно. Докажем более сильное утверждение с помощью матана:

$$2^x > x \quad \forall x \in \mathbb{R} \supset \mathbb{N}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2^x - x$. Найдём её локальный экстремум, и покажем, что это минимум, он единственный и функция в этой точке положительна:

$$\frac{df(x)}{dx} = \ln(2) \cdot 2^x - 1 = 0$$
$$2^x = \frac{1}{\ln(2)}$$
$$x_{min} = \log_2\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = -\log_2(\ln(2))$$
$$f(x_{min}) = f(-\log_2(\ln(2))) = 2^{-\log_2(\ln(2))} + \log_2(\ln(2)) = \frac{1}{\ln(2)} + \log_2(\ln(2))$$
$$\left.\begin{array}{r} 2 < e \Rightarrow \ln(2) < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\ln(2)} \\ e < 2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \ln(2) \Rightarrow -1 < \log_2(\ln(2)) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad f(x_{min}) = \frac{1}{\ln(2)} + \log_2(\ln(2)) > 0$$

Экстремум единственный т.к. точка x_{min} задаётся явной формулой.
Вторая производная $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \ln^2(2) \cdot 2^x > 0 \Rightarrow$ первая производная монотонно возрастает. Также первая производная непрерывна как сумма непрерывных функций. Следовательно, $\frac{df(x)}{dx} \le 0$ при $x \le x_{min}$ и $0 \le \frac{df(x)}{dx}$ при $x_{min} \le x \Rightarrow$ экстремум - минимум.
Функция $f(x)$ непрерывна, имеет единственный локальный минимум $0 < f(x_{min})$, убывает при $x \le x_{min}$ и возрастает при x $\le x_{min}$, следовательно, локальный минимум $0 < f(x_{min})$ является глобальным, следовательно

$$0 < f(x) = 2^x - x \quad \Rightarrow \quad 2^x > x$$

№3

Очевидно, что среди любых четырёх последовательных целых чисел встретиться ровно два чётных числа (ровно одно из которых при этом делится на 4) и как минимум одно число, делящееся на 3. Тогда произведение этих чисел делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

№4

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Заметим, что слева стоит сумма первых $n+1$ членов геометрической прогрессии с первым членом $b = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$:

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{b(1-q)}{1-q^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2\cdot 2^n}} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{2\cdot 2^n-1}{2\cdot 2^n}} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^n}{2\cdot 2^n - 1} < 2$$

$$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 2^n > n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 2^n > 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 2^n - 1 > 0$$

$$\text{можно домножить неравенство на } 2\cdot 2^n - 1$$

$$2^n < 4\cdot 2^n - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot 2^n > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > 1 > \frac{2}{3}$$

Равносильными преобразованиями получено верное неравенство, значит исходное неравенство верно.

№5

Пусть $f(n)$ - количество частей, на которые разделят плоскость n окружностей.

Очевидно, что $f(1) = 2$ (одна окружность делит плоскость на две части). Пусть проведено n окружностей. Проведём ещё одну. Она пересечёт каждую из уже имевшихся окружностей ровно в двух точках, причём ни одна из новых точек пересечения не совпадёт ни с одной из старых т.к. иначе есть 3 окружности, проходящие через одну точку. Таким образом, новая окружность создаст $2n$ новых точек пересечения, которые разделят её на $2n$ дуг. Каждая дуга разобьёт некоторую область на две, т.е. появятся $2n$ новых областей.

Получаем рекуррентное соотношение $f(n+1) = f(n) + 2n$

Заметим, что $f(n) = 2+2+4+6+8+10+\dots+2(n-1) = 2+2(1+2+3+\dots+n-1) = 2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2} = 2+(n-1)n$

Действительно, $f(n+1) = 2+n(n+1) = 2+n^2-n+2n = 2+(n-1)n+2n = f(n)+2n$

Таким образом, n окружностей разделят плоскость на $2+(n-1)n$ частей.

№6

Построим поле из четырёх элементов :

$$p(x) = x^2+x+1 \text{ - неприводимый над } \mathbb{Z}_2 \text{ многочлен степени 2}$$

$$\text{(т.к. } p(0) \neq 0 \text{ и } p(1) \neq 0 \text{ его нельзя разложить на множители)}$$

$$\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{Z}_2[x] \Big/ (x^2+x+1)$$

$$\phi : \mathbb{Z}_2[x] \to \mathbb{Z}_2[x]_{<2}, \quad \phi(a) = a \;\; mod \;\; p$$

$$\phi(ab) = ab \;\; mod \;\; p = (a \;\; mod \;\; p)(b \;\; mod \;\; p) \;\; mod \;\; p = \phi(a)\phi(b) \;\; mod \;\; p = \phi(a)\phi(b)$$

$$\phi(a+b) = (a+b) \;\; mod \;\; p = (a \;\; mod \;\; p) + (b \;\; mod \;\; p) = \phi(a)+\phi(b)$$

$$\text{т.е. } \phi \text{ - гомоморфизм колец}$$

$$Ker\phi = \left\{ a \in \mathbb{Z}_2[x] \;\mid\; a \;\vdots\; p \right\} = \{ a \in \mathbb{Z}_2[x] \;\mid\; \exists b \in \mathbb{Z}_2[x] \;\mid\; b \cdot p = a \} = (x^2+x+1)$$

$$Im\phi = \mathbb{Z}_2[x]_{<2}$$

По теореме о гомоморфизме колец:

$$Im\phi = \mathbb{Z}_2[x]_{<2} \simeq \mathbb{Z}_2[x] \Big/ (x^2+x+1)$$

$$\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{Z}_2[x]_{<2}$$

$$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, x+1\}$$

Операции в $\mathbb{F}_4$ - сложение и умножение многочленов по модулю x^2+x+1

Докажем, что если p - простое число, то $\mathbb{Z}_p$ - поле:

$$\text{пусть } a \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}, \text{ найдём } a^{-1}$$
$$p \text{ - простое и } a < p \quad \Rightarrow \quad \text{НОД}(a,p) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists m, n \ | \ ma + np = 1$$
$$\Rightarrow \quad ma + np \equiv 1 \ \ mod \ \ p \quad \Rightarrow \quad ma \equiv 1 \ \ mod \ \ p$$

Таким образом, $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5$ с операциями сложения и умножения по модулю 5.

Поля из $6 = 2 \cdot 3$ элементов не бывает, потому что в конечном поле всегда p^n элементов, где p - простое, $n \in \mathbb{N}$