Токмаков Александр, группа БПМИ165

Домашнее задание 4

№1

Разбивая отрезок $[0,1]$ на два отрезка, мы выбираем точку $x_0 \in [0,1]$. При этом $M = max(x, 1-x)$, $m = min(x, 1-x)$. Пусть $\Omega = [0,1]$ - вероятностное пространство, $P(x_0 \in A \subseteq [0,1]) = \int\limits_A 1dx$ - вероятность того, что x_0 попадёт в некоторое множество A (оно должно быть достаточно хорошим, чтобы интеграл посчитался, но это не важно). Очевидно, что длина меньшего отрезка всегда < 0.5, поэтому $P(m \leq a) = 1$ при $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ и не может быть отрицательна, поэтому $P(m \leq a) = 0$ при $a \in (-\infty, 0)$. Зафиксируем некоторое $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Отрезок длины $m \leq a$ получится если $x_0 \in [0, a]$ или если $x_0 \in [1-a, 1]$. Тогда $P(m \leq a) = \int\limits_0^a 1dx + \int\limits_{1-a}^1 1dx = (a-0) + (1-(1-a)) = 2a$.

№8

Пусть вероятностное пространство - $\Omega = [0,1]^2$ - множество точек квадрата со стороной 1, $P((x_0, y_0) \in A) = \iint\limits_A 1dxdy$ - вероятность того, что равновероятно выбранная точка попала в некоторое подмножество A.

a) Расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит a:
Очевидно, что $P(\leq a) = 0$ при $a < 0$ и $P(\leq a) = 1$ при $1 < a$. При $0 \leq a \leq 1$:

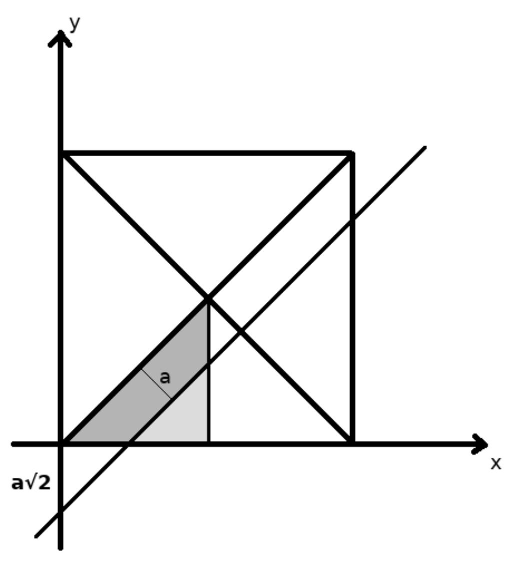
$$A = \{(x,y) \in \Omega \mid y \leq a\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq a\right\}$$
$$P(\leq a) = P(A) = \iint\limits_A 1dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^a 1dy\right) dx = \int\limits_0^1 adx = a$$

a) Расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит a:
Очевидно, что $P(\leq a) = 0$ при $a < 0$ и $P(\leq a) = 1$ при $\frac{1}{2} < a$. При $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$:

$$A_1 = \{(x,y) \in \Omega \mid x \leq a \wedge x \leq y \leq 1-x\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a \wedge x \leq y \leq 1-x\right\}$$
$$P(A_1) = \iint\limits_{A_1} 1dxdy = \int\limits_0^a \left(\int\limits_x^{1-x} 1dy\right) dx = \int\limits_0^a (1-2x)dx = a - a^2$$

Но это вероятность для одной стороны (случай, когда сторона $x = 0$ – ближайшая). Случаи, когда ближайшей окажется одни из трёх других сторон полностью аналогичны в силу симметрии, поэтому $P(\leq a) = 4 \cdot P(A_1) = 4a - 4a^2$.

c) Расстояние от точки до ближайшей диагонали квадрата не превосходит a:



Очевидно, что $P(\leq a) = 0$ при $a < 0$ и $P(\leq a) = 1$ при $\frac{\sqrt{2}}{4} < a$. При $0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$:

$$A1 = \left\{(x, y) \in \Omega \mid x \leq \tfrac{1}{2} \ \wedge \ x - a\sqrt{2} \leq y \leq x\right\} = A_{11} \cup A_{12} =$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < a\sqrt{2} \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\sqrt{2} \leq x \leq \tfrac{1}{2} \ \wedge \ x - a\sqrt{2} \leq y \leq x\right\}$$
$$P(A_1) = P(A_{11}) + P(A_{12}) = \iint\limits_{A_{11}} 1dxdy + \iint\limits_{A_{12}} 1dxdy = \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \left(\int\limits_0^x 1dy\right) dx + \int\limits_{a\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{x-a\sqrt{2}}^{x} 1dy\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^{a\sqrt{2}} xdx + \int\limits_{a\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} a\sqrt{2}dx = a^2 + a\sqrt{2} \cdot (\tfrac{1}{2} - a\sqrt{2}) = a\tfrac{\sqrt{2}}{2} - a^2$$

Всего 8 симметричных случаев, значит $P(< a) = P(A) = 8P(A_1) = a4\sqrt{2} - 8a^2$

№9

Пусть $\Omega = [0, 30]^2$ - вероятностное пространство, $P((x, y) \in A) = \iint\limits_A \frac{dxdy}{30 \cdot 30}$ - вероятность того, что пара время опоздания лектора x и время опоздания студента y окажется в некотором A.

Студенту нужно либо не опоздать, либо опоздать на время не большее, чем лектор:

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 30 \wedge 0 \leq y \leq 10\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 10 < x \leq 30 \wedge 0 \leq y < x - 10\right\}$$
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \iint\limits_{A_1} \frac{dxdy}{30 \cdot 30} + \iint\limits_{A_2} \frac{dxdy}{30 \cdot 30} = \int\limits_0^{30} \left(\int\limits_0^{10} \frac{dy}{900}\right) dx + \int\limits_{10}^{30} \left(\int\limits_0^{x-10} \frac{dy}{900}\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^{30} \frac{1}{90} \cdot dx + \int\limits_{10}^{30} \frac{x-10}{900} dx = \frac{3}{9} + \frac{1}{900}\left(\frac{30^2}{2} - \frac{10^2}{2} - 10 \cdot 30 + 10 \cdot 10\right) = \frac{5}{9}$$

№10

Пусть вероятностное пространство - $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ - множество точек круга радиуса 1, $P((x_0, y_0) \in A) = \iint\limits_A \frac{dxdy}{\pi}$ - вероятность того, что равновероятно выбранная точка попала в некоторое подмножество A.

Очевидно, что $P(x \leq a) = 0$ при $a < -1$ и $P(x \leq a) = 1$ при $1 < a$. При $-1 \leq a \leq 1$:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \leq a\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq a \ \wedge \ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$
$$P(x \leq a) = P(A) = \iint\limits_A \frac{dxdy}{\pi} = \int\limits_{-1}^{a} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{a} \sqrt{(1 - x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)\Bigg|_{-1}^{a} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(a\sqrt{1 - a^2} + \arcsin a\right) - \frac{1}{\pi}\left(\arcsin(-1)\right) = \frac{1}{\pi}\left(a\sqrt{1 - a^2} + \arcsin a\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(a\sqrt{1 - a^2} + \arcsin a\right) + \frac{1}{2}$$

$$P(x \leq a) = \frac{1}{\pi}\left(a\sqrt{1 - a^2} + \arcsin a\right) + \frac{1}{2}$$

В силу симметрии:

$$P(y \leq a) = \frac{1}{\pi}\left(a\sqrt{1 - a^2} + \arcsin a\right) + \frac{1}{2}$$

При $a = 0$ события независимы:

$$P(x \leq 0) = P(y \leq 0) = \frac{1}{2}$$
$$P(x \leq 0 \wedge y \leq 0) = \frac{1}{4} = P(x \leq 0) \cdot P(y \leq 0)$$

При $a = 1$ события независимы:

$$P(x \leq 1) = P(y \leq 1) = 1$$
$$P(x \leq 1 \wedge y \leq 1) = 1 = P(x \leq 1) \cdot P(y \leq 1)$$

При $a = -0.5$ события зависимы:

$$P(x \leq -0.5) = P(y \leq -0.5) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

$$P(x \leq -0.5 \wedge y \leq -0.5) = \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\pi} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(1-x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}$$

$$P(x \leq -0.5 \wedge y \leq -0.5) = \frac{\pi}{12}$$

$$P(x \leq -0.5 \wedge y \leq -0.5) \neq P(x \leq -0.5) \cdot P(y \leq -0.5)$$