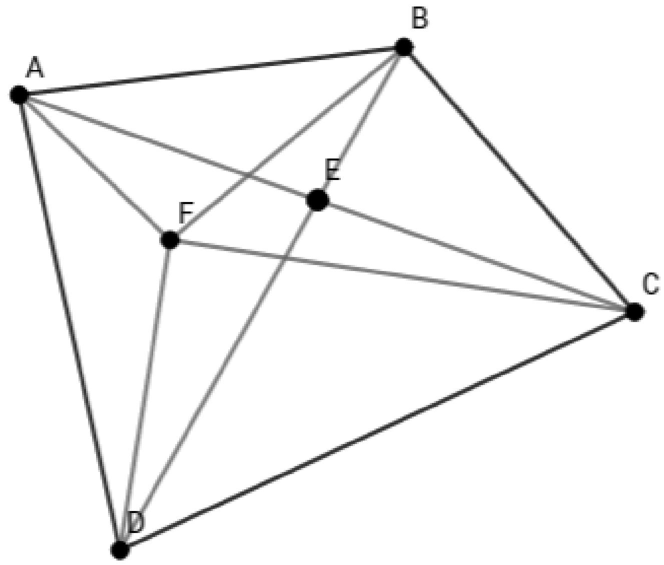
Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 7

№1

Отрезок, проходящий через середины двух сторон треугольника является его средней линией и равен половине третьей стороны. В данной задаче маленький треугольник состоит из средних линий большого треугольника, значит каждая его сторона в два раза меньше, значит его периметр тоже в два раза меньше и равен $\frac{28}{2} = 14$.

№2



$ABCD$ – произвольный четырёхугольник

E – точка пересечения диагоналей

F – произвольная точка

Докажем, что сумма расстояний $AE + EC + DE + EB$ от вершин $ABCD$ до E минимальна. Пусть для некоторой точки F сумма расстояний $AF + FC + DF + FB$ меньше. Запишем неравенства треугольника для $\triangle AFC$ и $\triangle DFB$:

$$AF + FC \geq AC$$
$$DF + FB \geq DB$$

Сложим эти неравенства:

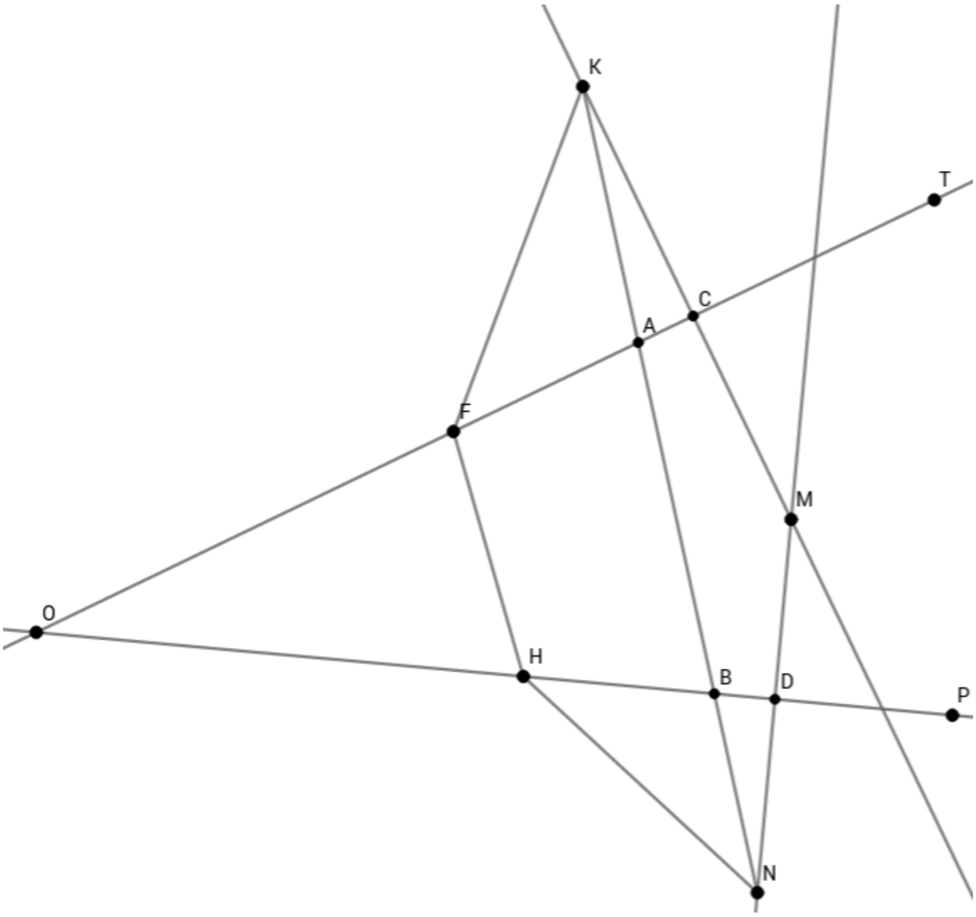
$$AF + FC + DF + FB \geq AC + DB = AE + EC + DE + EB$$

Таким образом, сумма расстояний до произвольной точки F не меньше суммы расстояний до E, значит сумма расстояний от вершин до точки E минимальна. Причём неравенства насыщаются только при $F \in AC$ и $F \in BD$ т.е. $F = E$, значит такая точка единственна.

Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 7

№3



TOP – произвольный острый или прямой угол

M – произвольная точка внутри угла

$MC \perp OT, \quad MD \perp OP$ – перпендикуляры из M к сторонам угла

$KC = CM, \quad ND = DM$ – точки K и M симметричны относительно OT, N и M – относительно OP

$A = KN \cap OT, \quad B = KN \cap OP$ - искомые точки

$P_{\triangle MAB} = MA + AB + BM = KA + AB + BN$

F, H – некоторые точки на сторонах угла

Докажем, что $P_{\triangle MAB}$ не может быть меньше:

$$P_{\triangle MAB} = KA + AB + BN = KB + BN \leq KH + HN \leq KF + FH + HN \quad \forall F \forall H$$

Если угол тупой, то $A = B = O$.

№4

Диагональ разбивает четырёхугольник на два треугольника. Длина диагонали не может равняться 7.5 т.к. неравенство треугольника выполняется только для $7.5 \leq 5 + 2.8$, но тогда для другой пары сторон получится $7.5 \leq 1 + 2$. Также длина диагонали не может равняться 5 т.к. даже если парой стороны с длиной 7.5 является наименьшая сторона длины 1, то для другой пары сторон получится $5 \leq 2 + 2.8$. Стороны длины 1 и 2 тоже не могут быть диагоналями т.к. $7.5 - 1$ и $7.5 - 2$ больше всех остальных сторон. Значит, диагональ равна 2.8; такое возможно:

$$1 + 2 > 2.8, \quad 1 + 2.8 > 2, \quad 2.8 + 2 > 1$$
$$5 + 7.5 > 2.8, \quad 7.5 + 2.8 > 5, \quad 2.8 + 5 > 7$$

Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 7

№5

Точка, наименее удалённая от вершин четырёхугольника – пересечение его диагоналей. Значит, длина кратчайшей системы дорог равна сумме длин диагоналей и равна $2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} > 11 \quad (128 > 121)$. Такую систему дорог построить нельзя.

№6

Не верно. Рассмотрим $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 2, \quad BC = 3, \quad AC = \frac{9}{2}$ (такой треугольник существует) и подобный ему $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом $\frac{3}{2}, \quad A_1B_1 = 3, \quad B_1C_1 = \frac{9}{2}, \quad A_1C_1 = \frac{27}{4}$. Три угла одного треугольника равны трём углам другого, и две стороны одного равны двум сторонам другого, но третьи стороны разные, значит треугольники не равны.