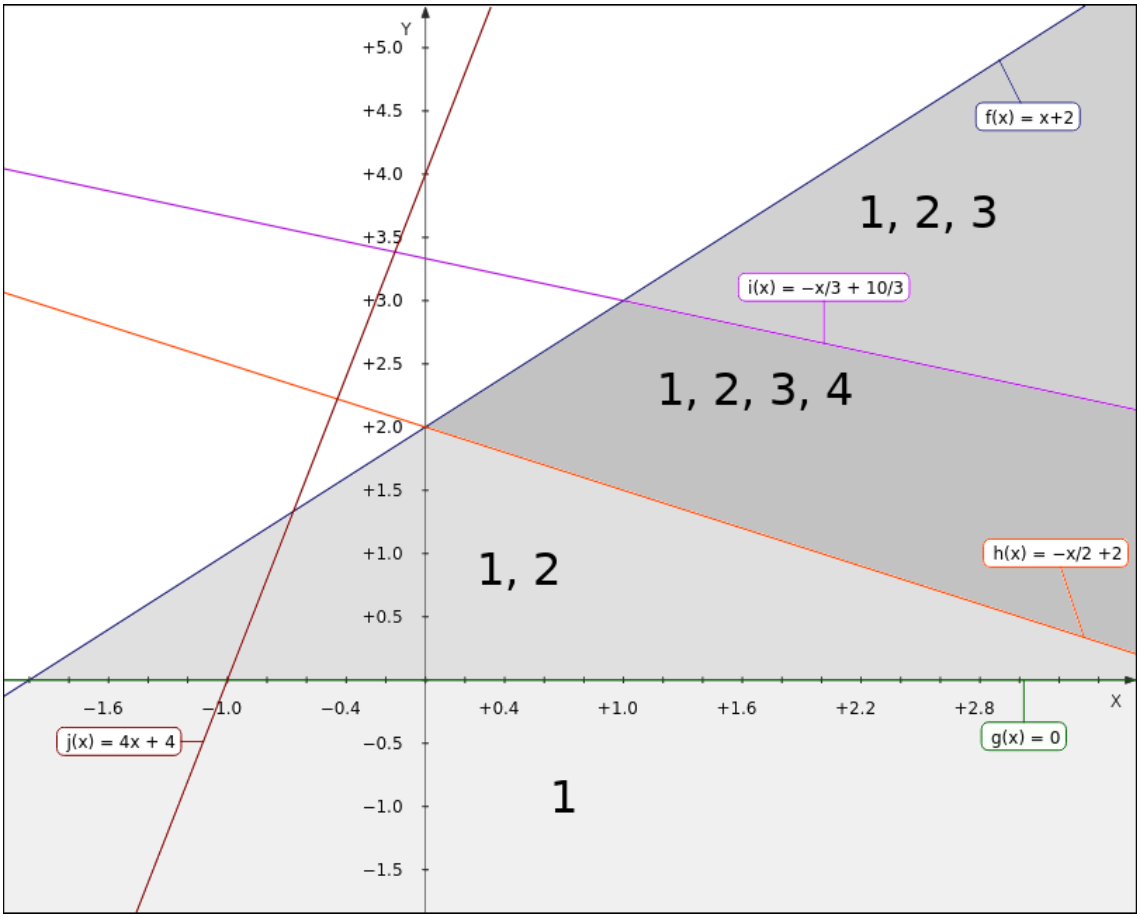
Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 1

№1

$$\begin{cases} y - x \le 2 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \ge 4 \\ x + 3y \le 10 \\ y - 4x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le x + 2 \\ y \ge 0 \\ y \ge -\frac{x}{2} + 2 \\ y \le -\frac{x}{3} + \frac{10}{3} \\ y \ge 4x + 4 \end{cases}$$

Построим графики соответствующих функций (цифрами отмечены области, удовлетворяющие неравенству с таким номером):



Как видно из графиков, область, удовлетворяющая первым четырём неравенствам, лежит ниже графика $y = 4x + 4$ т.е. не удовлетворяет пятому неравенству. Таким образом, система несовместна.

№2

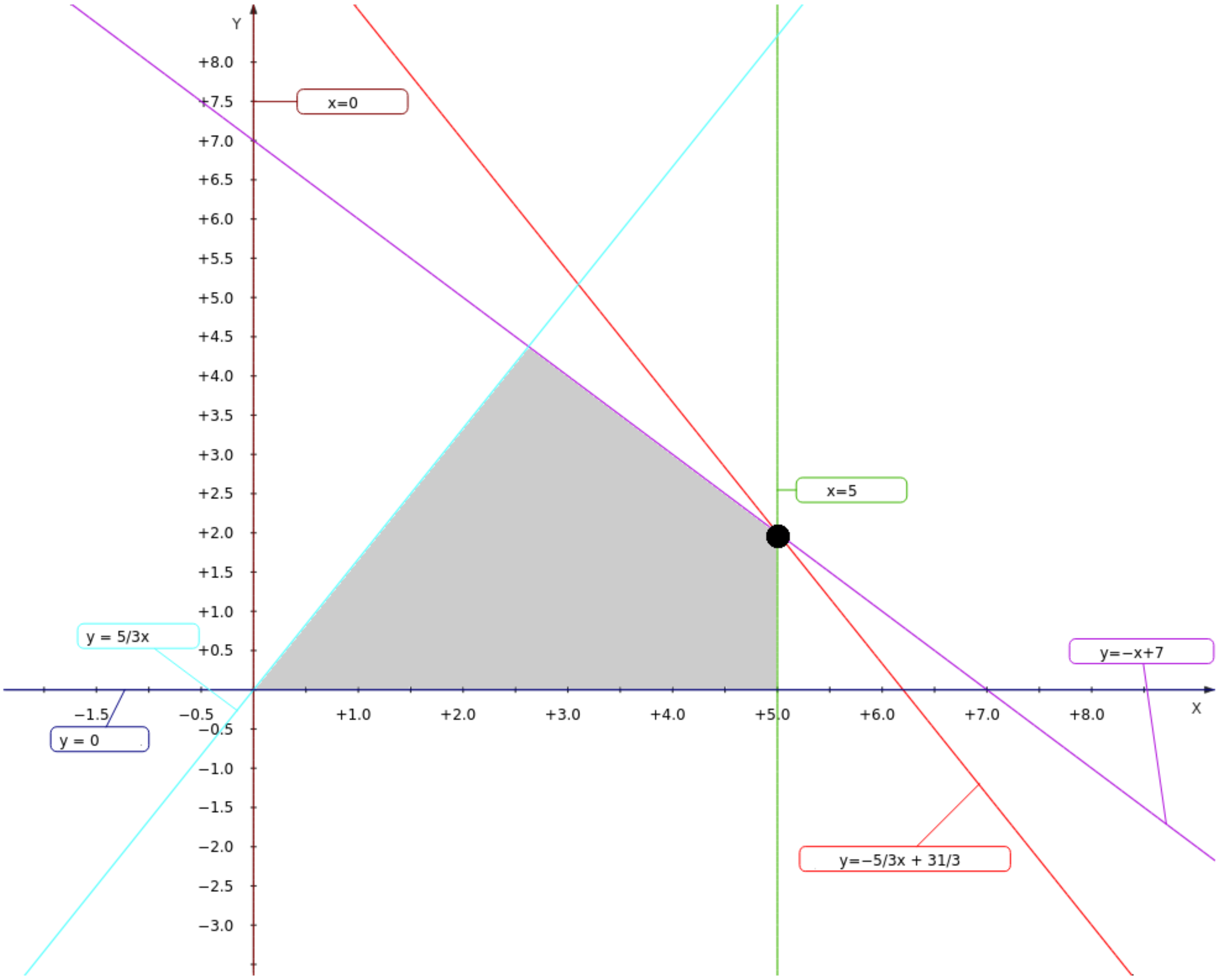
$$\begin{cases} 5x + 3y \to max \\ 5x - 2y \ge 0 \\ 0 \le x \le 5 \\ x + y \le 7 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y \to max \\ y \le \frac{5x}{2} \\ 0 \le x \le 5 \\ y \le -x + 7 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = 5x + 3y$, $\nabla f = (5, 3)$, т.е. f возрастает по направлению вектора $(5, 3)$

Линии уровня имеют вид:

$$c = 5x + 3y, \quad y = \frac{5x}{3} + \frac{c}{3}$$

Построим графики соответствующих функций и выделим область, удовлетворяющую неравенствам:



Найдём максимальное c, при котором график $y = \frac{5x}{3} + \frac{c}{3}$ будет иметь общую точку с множеством решений неравенств. Из графиков можно видеть, что этой точкой будет точка пересечения $x = 5$ и $y = -x + 7$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 + 7 = 2 \end{cases} \Rightarrow c = 5x + 3y = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 31$$

Таким образом, максимальное значение целевой функции равно 31 и достигается в точке $(5, 2)$

№3

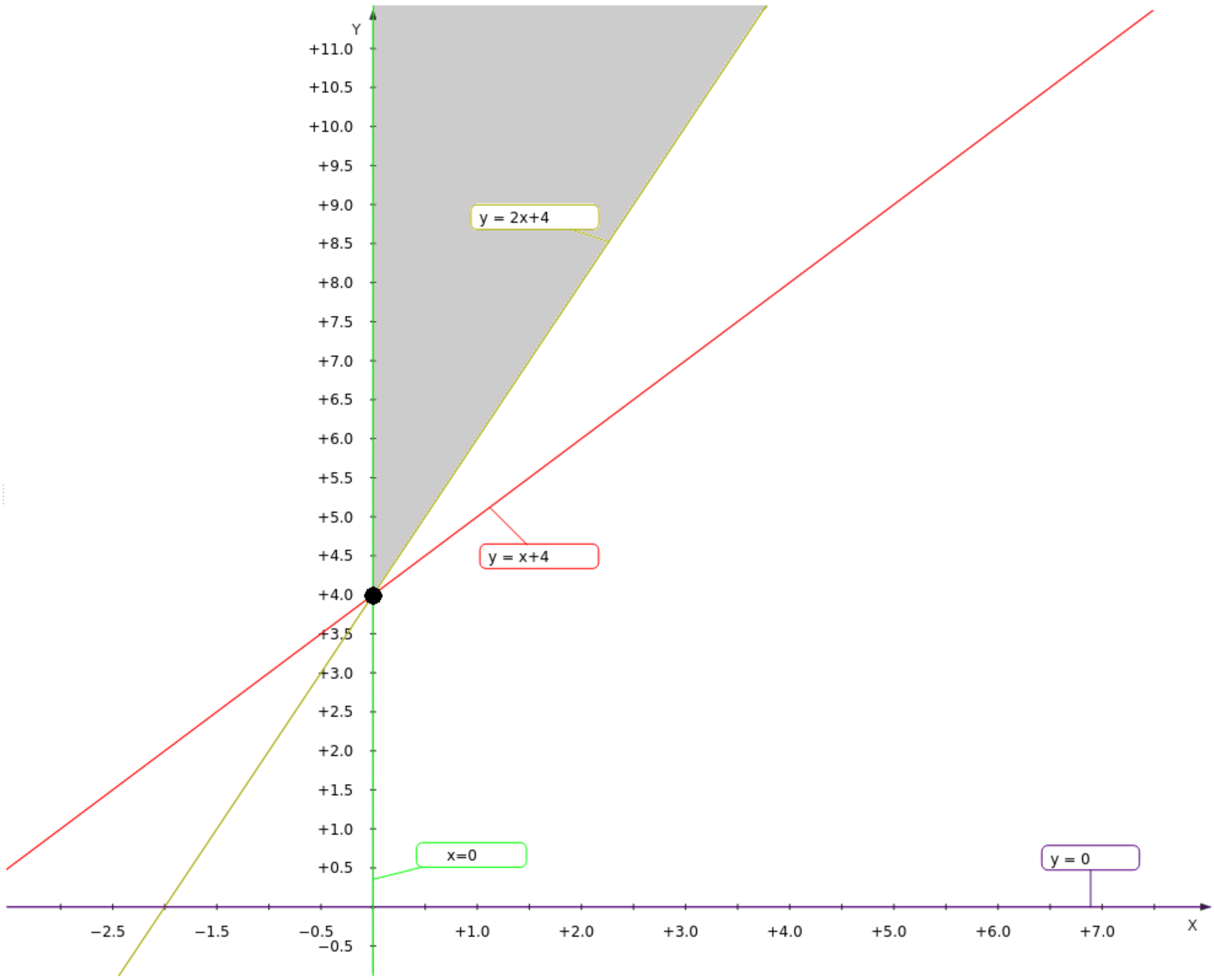
$$\begin{cases} x - y \to max \\ 2x + y + z = 4 \\ 6x + y + 2z \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \to max \\ z = 4 - 2x - y \\ 6x + y + 2z \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \to max \\ 6x + y + 2(4 - 2x - y) \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \to max \\ y \geq 2x + 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = x - y$, $\nabla f = (1, -1)$, т.е. f возрастает по направлению вектора $(1, -1)$

Линии уровня имеют вид:

$$c = x - y, \quad y = x - c$$

Построим графики соответствующих функций и выделим область, удовлетворяющую неравенствам:



Найдём максимальное c, при котором график $y = x - c$ будет иметь общую точку с множеством решений неравенств. Из графиков можно видеть, что этой точкой будет точка пересечения $x = 0$ и $y = 2x + 4$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow c = x - y = -4$$

Таким образом, максимальное значение целевой функции равно -4 и достигается в точке $(0, 4)$

№4

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + z \leq 4 \\ z + 3y \geq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3z + 6 \\ 2x + z \leq 4 \\ z + 3y \geq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y - 3z + 6) + z \leq 4 \\ z + 3y \geq 14 \\ 2y - 3z + 6 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 5z + 8 \leq 0 \\ z + 3y - 14 \geq 0 \\ 2y - 3z + 6 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Далее символом $\Leftrightarrow$ обозначается равносильность в смысле совместности/несовместности, а не множества решений.

$$\begin{cases} 4y - 5z + 8 \leq 0 \\ z + 3y - 14 \geq 0 \\ 2y - 3z + 6 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{5z}{4} - 2 \\ y \geq \frac{-z}{3} + \frac{14}{3} \\ y \geq \frac{3z}{2} - 3 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5z}{4} - 2 \geq \frac{-z}{3} + \frac{14}{3} \\ \frac{5z}{4} - 2 \geq \frac{3z}{2} - 3 \\ \frac{5z}{4} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq \frac{80}{19} \\ z \leq 4 \\ z \geq \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq \frac{80}{19} \\ 4 \leq \frac{8}{5} \end{cases}$$

Полученные неравенства неверны, следовательно исходная система несовместна.

№5

$$\begin{cases} x+y\to max\\ 2x+y-z\geq -5\\ 2x-4y+z\geq -3\\ 7x+4y-z\leq 12\\ x-5y-z\leq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ x=t-y\\ 2x+y-z\geq -5\\ 2x-4y+z\geq -3\\ 7x+4y-z\leq 12\\ x-5y-z\leq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ 2(t-y)+y-z\geq -5\\ 2(t-y)-4y+z\geq -3\\ 7(t-y)+4y-z\leq 12\\ (t-y)-5y-z\leq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ z\leq 2t-4+5\\ z\geq -2t+6y-3\\ z\geq 7t-3y-12\\ z\geq t-6y+3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t\to max\\ 2t-4+5\geq -2t+6y-3\\ 2t-4+5\geq 7t-3y-12\\ 2t-4+5\geq t-6y+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ y\leq \frac{2t}{3}+\frac{2}{3}\\ y\geq \frac{5t}{3}-\frac{13}{3}\\ y\geq -\frac{t}{6}+\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ \frac{2t}{3}+\frac{2}{3}\geq \frac{5t}{3}-\frac{13}{3}\\ \frac{2t}{3}+\frac{2}{3}\geq -\frac{t}{6}+\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ t\leq 5\\ t\geq -\frac{2}{5}\end{cases}$$

Таким образом, $t=5$. Найдём остальные неизвестные:

$$y=\frac{2\cdot 5}{3}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$x=t-y=5-4=1$$

$$\begin{cases} 2\cdot 1+4-z\geq -5\\ 2\cdot 1-4\cdot 4+z\geq -3\\ 7\cdot 1+4\cdot 4-z\leq 12\\ 1-5\cdot 4-z\leq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\leq 11\\ z\geq 11\\ z\geq 11\\ z\geq -16\end{cases}$$

Максимум целевой функции равен 5 и достигается в точке $(1,4,11)$.

№6

Пусть a, b, c - объёмы материалов А, Б и В соответственно, тогда:
$1000a+1200b+12000c\to max$ - максимальный доход
$0\leq a\leq 40$, $0\leq b\leq 30$, $0\leq c\leq 20$ - ограничения на имеющиеся объёмы
$a+b+c\leq 60$ - ограничение на вместимость самолёта
$2a+b+3c\leq 100$ - ограничение на грузоподъёмность самолёта

$$\begin{cases} 1000a+1200b+12000c\to max\\ 0\leq a\\ a\leq 40\\ 0\leq b\\ b\leq 30\\ 0\leq c\\ c\leq 20\\ a+b+c\leq 60\\ 2a+b+3c\leq 100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ a=\frac{t}{1000}-\frac{12b}{10}-12c\\ 0\leq a\\ a\leq 40\\ 0\leq b\\ b\leq 30\\ 0\leq c\\ c\leq 20\\ a+b+c\leq 60\\ 2a+b+3c\leq 100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ 0\leq \frac{t}{1000}-\frac{12b}{10}-12c\\ \frac{t}{1000}-\frac{12b}{10}-12c\leq 40\\ 0\leq b\\ b\leq 30\\ 0\leq c\\ c\leq 20\\ \frac{t}{1000}-\frac{12b}{10}-12c+b+c\leq 60\\ 2(\frac{t}{1000}-\frac{12b}{10}-12c)+b+3c\leq 100\end{cases}$$

$$\begin{cases} t\to max\\ b\leq \frac{t}{1200}-10c\\ b\geq \frac{t}{1200}-10c-\frac{100}{3}\\ b\geq 0\\ b\leq 30\\ 0\leq c\\ c\leq 20\\ b\geq -55c+\frac{t}{200}-300\\ b\geq -15c+\frac{t}{700}-\frac{500}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ b\leq \frac{t}{1200}-10c\\ b\leq 30\\ b\geq \frac{t}{1200}-10c-\frac{100}{3}\\ b\geq 0\\ b\geq -55c+\frac{t}{200}-300\\ b\geq -15c+\frac{t}{700}-\frac{500}{7}\\ 0\leq c\\ c\leq 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\to max\\ \frac{t}{1200}-10c-\frac{100}{3}\leq \frac{t}{1200}-10c\\ 0\leq \frac{t}{1200}-10c\\ -55c+\frac{t}{200}-300\leq \frac{t}{1200}-10c\\ -15c+\frac{t}{700}-\frac{500}{7}\leq \frac{t}{1200}-10c\\ 30\geq \frac{t}{1200}-10c-\frac{100}{3}\\ 30\geq 0\\ 30\geq -55c+\frac{t}{200}-300\\ 30\geq -15c+\frac{t}{700}-\frac{500}{7}\\ 0\leq c\\ c\leq 20\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$
\begin{cases}
t \to max \\
0 \leq \frac{100}{3} \\
c \leq \frac{t}{12000} \\
c \geq \frac{t}{10800} - \frac{20}{3} \\
c \geq \frac{t}{8400} - \frac{100}{7} \\
c \geq \frac{t}{12000} - \frac{19}{3} \\
c \geq \frac{t}{11000} - 6 \\
c \geq \frac{t}{10500} - \frac{710}{105} \\
c \geq 0 \\
c \leq 20
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
t \to max \\
\frac{t}{10800} - \frac{20}{3} \leq \frac{t}{12000} \\
\frac{t}{8400} - \frac{100}{7} \leq \frac{t}{12000} \\
\frac{t}{12000} - \frac{19}{3} \leq \frac{t}{12000} \\
\frac{t}{11000} - 6 \leq \frac{t}{12000} \\
\frac{t}{10500} - \frac{710}{105} \leq \frac{t}{12000} \\
0 \leq \frac{t}{12000} \\
20 \geq \frac{t}{10800} - \frac{20}{3} \\
20 \geq \frac{t}{8400} - \frac{100}{7} \\
20 \geq \frac{t}{12000} - \frac{19}{3} \\
20 \geq \frac{t}{11000} - 6 \\
20 \geq \frac{t}{10500} - \frac{710}{105} \\
20 \geq 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
t \to max \\
t \leq 720000 \\
t \leq 400000 \\
\frac{19}{3} \geq 0 \\
t \leq 792000 \\
t \leq 568000 \\
t \geq 0 \\
t \leq 288000 \\
t \leq 288000 \\
t \leq 316000 \\
t \leq 286000 \\
t \leq 281000
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
t \to max \\
0 \leq t \leq 281000
\end{cases}
$$

Таким образом, $t = 281000$, найдём остальные переменные:

$$
\begin{cases} c \leq \frac{281000}{12000} c \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \quad c = 20
$$

$$
\begin{cases} b \leq \frac{281000}{1200} - 10 \cdot 20 = \frac{205}{6} \\ b \leq 30 \end{cases} \Rightarrow \quad b = 30
$$

$$
a = \frac{281000}{1000} - \frac{12 \cdot 30}{10} - 12 \cdot 20 = 5
$$

Максимум равен 281000 и достигается при $a = 5$, $b = 30$, $c = 20$.