Дискретная математика – 2, основной поток
Вопросы к коллоквиуму (декабрь 2017)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет два теоретических вопроса — по линейному программированию и по логике — и задача. На подготовку ответа (определения, формулировки теорем, доказательства или примеры, а также на решение задачи) у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаёте устно одному из преподавателей. Для уточнения оценки за теоретический вопрос и задачу преподаватель может задавать дополнительные вопросы на знание определений и основных фактов курса. Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Полный ответ на каждый из теоретических вопросов оценивается в 3 балла, решение задачи — в 4 балла. По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

Во всех теоретических вопросах, содержащих формулировки теорем, надо знать и рассказать и их доказательства (за исключением тех вопросов, где явно указано, что доказательство знать не нужно).

1 Вопросы по линейному программированию

Определение задачи линейного программирования.

Три специальных вида задач линейного программирования: одни неравенства, одни равенства на неотрицательные переменные, одни неравенства на неотрицательные переменные. Приведение любой задачи ЛП к задаче любого из трех специальных видов.

Полиэдры, грани полиэдров.

Достижимость оптимума в любой задаче линейного программирования (доказательство методом исключения переменных).

Задача ЛП, двойственная к данной задаче.

Принцип двойственности в линейном программировании в двух формах (доказательство методом исключения переменных).

Теорема о проекции полиэдра.

Лемма Фаркаша (надо знать два доказательства: вывод из первого принципа двойственности и геометрическое доказательство).

Вывод обоих принципов двойственности из леммы Фаркаша.

Соотношения дополняющей нежесткости.

Теорема Форда-Фалкерсона о потоках и разрезах (доказательство сведением к задаче ЛП).

Игры с нулевой суммой. Теорема фон Ноймана об играх с нулевой суммой.

Алгоритм симплекс метода с данным начальным допустимым решением — общая схема алгоритма и его детализация: как понять, достигнут ли максимум, как находится направление сдвига, как определить, насколько можно сдвинуться в данном направлении, как определить, что целевая функция не ограничена. Оценка числа шагов алгоритма.

Алгоритм нахождения отделяющей гиперплоскости в лемме Фаркаша, правило Бленда (доказывать то, что алгоритм не зацикливается, не обязательно).

Алгоритм нахождения начального допустимого решения в симплекс методе.

2 Вопросы по логике

Пропозициональные формулы. Тавтологии, выполнимые формулы. Связь между тавтологиями и выполнимыми формулами. Примеры тавтологий, выражающие важные логические законы: законы де Моргана, законы дистрибутивности.

Исчисление резолюций: дизъюнкты, правило резолюции, опровержение КНФ в исчислении резолюций.

Полиномиальный алгоритм сведения задачи распознавания совместности множеств произвольных формул к задаче распознавания совместности множеств дизъюнктов.

Теорема корректности исчисления резолюций (для пропозициональных формул).

Теорема полноты исчисления резолюций (для пропозициональных формул). Доказательство нужно знать только для конечных и счетных множеств формул.

Определение формулы первого порядка в данной сигнатуре.

Модели (интерпретации) данной сигнатуры. Общезначимые и выполнимые формулы. Равносильные формулы.

Гомоморфизмы моделей. Изоморфные и элементарно эквивалентные модели.

Лемма о сохранении истинности при эпиморфизме (без доказательства). Теорема об элементарной эквивалентности изоморфных моделей.

Выразимые (определимые) в данной модели отношения. Арифметические множества, предикаты и функции.

Теорема о сохранении автоморфизмами выразимых предикатов. Доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов.

Логические теории и их модели. Совместные теории. Семантическое следование формулы из теории.

Исчисление резолюций для доказательства несовместности множеств универсальных дизъюнктов.

Теорема корректности исчисления резолюций (для множеств универсальных дизъюнктов).

Теорема полноты исчисления резолюций (для множеств универсальных дизъюнктов). Доказательство надо знать только для конечных или счетных множеств универсальных дизъюнктов.

Приведение формул к предварённой и сколемовской нормальным формам.

Применение исчисления резолюций для доказательства несовместности данного множества произвольных формул первого порядка. Непротиворечивые теории (теории, из которых в исчислении резолюций невыводим пустой дизъюнкт).

Нормальные модели. Аксиомы равенства. Теорема о существовании нормальных моделей у непротиворечивых теорий, содержащих аксиомы равенства.

Игра Эренфойхта для данной пары моделей данной сигнатуры. Теорема об элементарной эквивалентности моделей, для которых в игре Эренфойхта Консерватор имеет выигрышную стратегию.

Полные теории. Элементарная теория данной модели. Критерий полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей.

Аксиоматизация элементарных теорий следующих моделей: упорядоченные множества рациональных и целых чисел (доказательство с помощью игры Эренфойхта).

Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества действительных чисел. Аксиоматизация элементарной теории поля комплексных чисел. (Обе теоремы без доказательства.)

3 Типовые задачи для коллоквиума

Условия задач на коллоквиуме могут отличаться числовыми данными и видом конкретных формул в задачах по логике.

Задача 1. Нарисуйте на плоскости множество решений системы неравенств

$$-2 \le y, \quad 2x + y + 3 \ge 0, \quad 5y \le 3x + 11, \quad y + 14 \ge 6x.$$

Для каждой из вершин полученного многоугольника найдите линейную функцию, достигающую максимума в этой и только в этой вершине. Укажите какую-нибудь линейную функцию, максимум которой достигается в двух разных вершинах.

Задача 2. Найдите линейную функцию, которая на множестве решений системы неравенств

$$-2 \le y, \quad 2x + y + 3 \ge 0, \quad 5y \le 3x + 11,$$

принимает сколь угодно большие значения.

Задача 3. Решите графически следующую задачу ЛП:

$$\begin{gathered} y - x \to \min \\ 4x + y \ge -6, \qquad x + 4y \le 6, \\ y \ge x - 1, \quad x \le 0 \end{gathered}$$

Задача 4. Какое максимальное количество 12-процентного раствора можно получить, если есть по литру 5, 10 и 15-процентных растворов?

Представьте эту задачу в виде задачи ЛП и решите полученную задачу графически.

Задача 5. Транспортная задача с двумя производителями A, B и тремя потребителями C, D, E задаётся следующими данными:

Стоимость доставки единицы продукта:

	C	D	E
A	2	1	4
B	5	3	3

Потребности потребителей:

C	D	E
8	6	12

Объёмы производства:

A	B
13	15

Найдите в этой задаче план перевозок стоимостью 60 и докажите, что стоимость перевозки в этой задаче не меньше 60.

Задача 6. Выясните совместность системы неравенств методом исключения переменных

$$x + 1 \le 2y + z, \quad 3 \le x + y + z, \quad 16y + 1 \le x + z, \quad 2z \le x + y.$$

Задача 7. Нарисуйте полиэдр, получаемый проекцией полиэдра

$$-1 \le x - y + z, \quad -2 \le x + y - z, \quad -3 \le x + y + z, \quad 2x + z \le 1.$$

вдоль оси z.

Задача 8. Методом исключения переменных найдите оптимальное решение в линейной программе

$$3x - z \to \max$$
$$2x + y - z \leq -3, \quad 2x - 3y + z \leq 0,$$
$$6x + 4y - z \leq -1, \quad x - 5y - z \leq -14.$$

Задача 9. Багажник автомобиля вмещает 600 литров груза, а общий вес перевозимого в нем груза не может превышать 650 кг. Имеются три сыпучих материала с плотностями 0.5, 1 и 1.5 кг/л, соответственно. За перевозку одного литра материала водитель получает 2, 3 и 4 руб/л, соответственно. Как загрузить багажник, чтобы стоимость перевезенного материала была максимальной (вес и объем тары не учитывать)? Составьте задачу ЛП и решите полученную задачу методом исключения переменных.

Задача 10. Докажите несовместность системы неравенств, выведя из них ложное неравенство

$$2x - 8y \leq 3, \quad -3x - 2y \leq 1, \quad x + 3y \leq -2.$$

Задача 11. Докажите, что из системы неравенств

$$2x - y \leq 3, \quad -3x + 2y \leq 1, \quad x + y \leq -3$$

a) синтаксически следует неравенство $-3x + 4y \leq 2$,
b) синтаксически не следует неравенство $y \leq -4$.

Задача 12. Найдите задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования

$$x - 5y - z \to \min$$
$$7x - 2y \leq 3, \quad 3z + 4x \geq 2, \quad x + 3y + 6z = 4.$$

Задача 13. Дана задача линейного программирования

$$x - 4y + 2z \to \min$$
$$x - 2y = 5, \quad z + 2x \leq 7, \quad 2x - y + 2z \geq 3, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0.$$

a) Найдите двойственную задачу линейного программирования
b) Запишите, в чём состоят соотношения дополняющей нежесткости для этой задачи

Задача 14. Найдите оптимум в задаче линейного программирования

$$x + y + z \to \max$$
$$3x - 2y + z \leq 5, \quad x + y - 2z \leq 2, \quad -x - y + 3z \leq 1,$$

решив двойственную задачу. Используя соотношения дополняющей нежесткости, решите прямую задачу.

Задача 15. Транспортная задача с двумя производителями A, B и тремя потребителями C, D, E задаётся следующими данными.

Стоимость доставки единицы продукта:

	C	D	E
A	2	1	3
B	5	3	4

Потребности потребителей:

C	D	E
8	6	12

Объёмы производства:

A	B
13	15

Напишите линейную программу, соответствующую этой задаче, и двойственную к ней линейную программу. Найдите допустимое решение прямой линейной программы, в которой общие затраты на транспортировку равны 72. Используя соотношения дополняющей нежесткости, найдите решение двойственной задачи, доказывающее оптимальность найденного решения прямой задачи.

Задача 16. Нарисуйте на плоскости выпуклый конус, порождаемый векторами $(-1,-5)$, $(1,2)$, $(3,-1)$. Нарисуйте любую прямую, проходящую через точку $(0,0)$ и отделяющую этот конус от точки $(-1,1)$.

Задача 17. Нарисуйте на плоскости три таких вектора, что порождаемый ими выпуклый конус содержит все точки плоскости. Существуют ли два вектора с таким же свойством? Нарисуйте на плоскости два таких вектора, что порождаемый ими выпуклый конус является прямой.

Задача 18. Найдите в трехмерном пространстве такие вектора, чтобы порождаемый ими выпуклый конус имел четыре плоских грани.

Задача 19. Грузовик вмещает 12 кубометров груза, а общий вес перевозимого в нем груза не может превышать 16 тонн. Имеются три сыпучих материала с плотностями 1, 2 и 3 тонны/кубометр, соответственно. За перевозку одной тонны материала водитель получает 9, 12 и 17 труб/кубометр, соответственно. Как загрузить багажник, чтобы стоимость перевезенного материала была максимальной (вес и объем тары не учитывать)?

Составьте задачу ЛП и двойственную к ней задачу. Решив графическим методом двойственную задачу найдите максимальную стоимость перевезённого груза. Затем, используя соотношения дополняющей нежёсткости, найдите оптимальное решение прямой задачи.

Задача 20. Вася зажимает в руке один или два рубля. Петя пытается угадать, какая монета у Васи в руке, и забирает её себе, если угадал. Выгодно ли Пете заплатить 70 копеек за право участия в этой игре?

Задача 21. В игре с нулевой суммой у первого игрока два возможных хода, а у второго — три. В таблице показан выигрыш первого игрока.

3	-6	-4
1	9	10

Найти цену этой игры и оптимальные вероятностные стратегии игроков.

Задача 22. В игре с нулевой суммой у каждого игрока по три возможных хода. В таблице показан выигрыш игрока, который выбирает строку (а другой выбирает столбец). Найти цену этой игры и оптимальные вероятностные стратегии игроков.

0	30	60
90	0	54
60	70	32

Найти цену этой игры и оптимальные стратегии игроков.

Задача 23. Ориентированный граф состоит из вершин s, t, a, b, c и рёбер, стоимость транспортировки единицы продукта по которым указаны в таблице.

$s \to a$	1
$s \to b$	2
$a \to b$	1
$a \to c$	3
$b \to c$	1
$b \to t$	3
$c \to t$	1

a) Напишите в виде задачи линейного программирования задачу транспортировки 10 единиц продукта из s в t с наименьшими затратами (по любому ребру можно пропускать нецелое количества продукта).

b) Найдите задачу ЛП, двойственную к полученной программе.

c) Сложив подходящие ограничения этой задачи, докажите, что минимальная стоимость не меньше 40.

Задача 24. Дан ориентированный граф, для каждого ребра которого задана стоимость транспортировки единицы потока по этому ребру и его пропускная способность.

Ребро	Стоимость транспортировки (руб)	Пропускная способность
$s \to a$	3	3
$s \to b$	1	3
$a \to b$	1	1
$b \to a$	1	1
$a \to t$	1	2
$b \to t$	4	3

Требуется пропустить 3 единицы потока из вершины s в вершину t, заплатив поменьше денег.

a) Напишите соответствующую задачу линейного программирования.

b) Найдите её решение со значением целевой функции, равным 12.

c) Найдите двойственную к ней задачу.

d) Используя соотношения дополняющей нежесткости, найдите решение двойственной задачи со значением целевой функции, равным 12.

Задача 25. Ориентированный граф состоит из вершин s, t, a, b, c и рёбер, пропускные способности которых указаны в таблице.

$s \to a$	4
$s \to b$	2
$a \to b$	3
$a \to c$	1
$b \to c$	3
$b \to t$	1
$c \to t$	5

a) Запишите в виде задачи линейного программирования задачу нахождения максимального потока из s в t.

b) Найдите двойственную к этой задачу.

c) Укажите какие-нибудь оптимальные решения обеих задач и проверьте соотношения дополняющей нежесткости.

Задача 26. Полиэдр задан неравенствами.

$$3x + y \geq -4, \quad y - x \leq 4, \quad x - 2y \geq -6, \quad 4x - y \leq -3.$$

a) Сколько двумерных граней у этого полиэдра и как они выглядят?

b) Сколько одномерных граней у этого полиэдра и как они выглядят?

c) Сколько у него вершин?

Задача 27. Полиэдр задан неравенствами.

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 6x + 3y - 2z \leq 6.$$

a) Сколько двумерных граней у этого полиэдра и как они выглядят?

b) Сколько одномерных граней у этого полиэдра и как они выглядят?

c) Сколько у него вершин?

Задача 28. Используя алгоритм симплекс метода с начальным решением $x = y = 0$, найдите оптимум в задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} & y \to \max \\ & x \leq 3, \quad -x + y \leq 2, \quad -x + 2y \leq 5. \end{aligned}$$

Докажите, что найденное решение оптимально.

Задача 29. Используя алгоритм симплекс метода с начальным решением $x = y = z = 0$, найдите оптимум в задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} & y + 2z \to \max \\ & 3x - y + 2z \leq 0, \quad 2x + y - z \leq 10, \quad -x + 3y - z \leq 33, \quad -5x - z \leq 7. \end{aligned}$$

Докажите, что найденное решение оптимально.

Задача 30. Докажите, что в ходе применения симплекс-метода не могут получиться три подряд идущие точки v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, которые различаются только в первой координате.

Задача 31.

a) Может ли при применении симплекс-метода с начальным решением $(0,0,0)$ получиться последовательность точек $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$?

b) Может ли получиться эта последовательность точек, но в другом порядке?

Задача 32. Используя алгоритм симплекс метода, найдите любое решение системы неравенств

$$\begin{aligned} &x + 3y - 2z + 8 \geq 0, &\qquad 2x + 4y + 3z \leq 11,\\ &x - 2y - z \geq 6, &\qquad 2x - 5y + 2z \geq 25. \end{aligned}$$

Задача 33. Рассмотрите формулы

1. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$,
2. $((p \to q) \to p) \to p$.

a) Являются ли они тавтологиями?

b) Являются ли они выполнимыми?

Задача 34. Запишите формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

Задача 35.

Докажите эквивалентности:

1. $\neg A \vee B \equiv A \to B$,
2. $A \wedge (A \to B) \equiv A \wedge B$,
3. $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$,
4. $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv A$.

Задача 36. Найдите более короткую эквивалентную запись для следующих формул:

1. $(p \equiv q) \equiv (p \equiv (q \equiv p))$,
2. $((p \to q) \to p) \vee ((q \to p) \to q)$.

Задача 37. Приведите следующие формулы к КНФ и ДНФ

1. $((((p \to q) \to \neg p) \to \neg q) \to \neg r) \to r$,

2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to \neg r) \to (p \to \neg q))$,

3. $((p \to q) \land (\neg q \to p)) \lor (r \to p)$.

Задача 38. Запишите формулу, выражающую приведённое рассуждение и проверьте, является ли она тавтологией: «Если птица розовая, то она не летает. Значит, если птица не розовая, то она летает.»

Задача 39. Написать формулу от переменных p, q, r, s со связками $\neg, \land, \lor, \to$, которая истинна тогда и только тогда, когда дизъюнкция p и q равна сумме q, r и s по модулю 2.

Задача 40. Докажите, что формула $\neg p$ не эквивалентна никакой формуле, построенной из переменных с помощью связок $\lor, \land, \to$.

Задача 41. Привести к КНФ формулы
a) $x \equiv (y \lor z)$,
b) $x \equiv (y \land z)$,
c) $x \equiv (y \to z)$.

Задача 42. Можно ли в исчислении резолюций из набора дизъюнктов $a \lor b$, $b \lor c$, $c \lor a$, $\neg a \lor \neg b$, $\neg b \lor \neg c$, $\neg c \lor \neg a$ вывести пустой дизъюнкт? Как?

Задача 43. Можно ли в исчислении резолюций из набора дизъюнктов $\neg u \lor q$, $u \lor q \lor s$, $\neg u \lor \neg q \lor s$, $u \lor \neg s$, $\neg u \lor \neg q \lor \neg s$ вывести пустой дизъюнкт? Как?

Задача 44. Рассмотрим два одноместных предиката $P(x)$ (x является птицей) и $Q(x)$ (x летает). Напишите формулы первого порядка, выражающие следующие суждения
a) Все птицы летают
b) Некоторые птицы летают
c) Некоторые птицы не летают
d) Некоторые не-птицы летают
e) Ни одна птица не летает

Задача 45. Рассмотрим сигнатуру арифметики, содержащую 2-местный предикатный символ $=$ и 2-местные функциональные символы сложения и умножения. Запишите следующие высказывания о натуральных числах в виде формул в этой сигнатуре:

a) $x \vdots y$,
b) $x \leq y$,
c) x — простое число,
d) существуют сколь угодно большие простые числа,
e) x и y являются простыми числами близнецами,
f) x — натуральная степень числа 2.

Задача 46. Выразите следующие множества и предикаты в данных моделях:
a) $\{0\}$, $x = y$, $\{1\}$ в $(\mathbb{N}, <)$,
b) $x = y + 1$ в $(\mathbb{Z}, <)$,
c) $x = 0$, $x = -y$ в $(\mathbb{Z}, +, =)$.

Задача 47. Пусть A, B — арифметические множества. Докажите, что множества $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ — арифметические.

Задача 48. Докажите, что если множество натуральных чисел составляет арифметическую прогрессию, то оно — арифметическое.

Задача 49. Докажите, что функция $f(x) = [\sqrt{x}]$ (целая часть квадратного корня) — арифметическая.

Задача 50. Пусть A — произвольное множество. Рассмотрим модель $(P(A), =, \cap, \cup)$, где «=» — предикат равенства, $\cap$ и $\cup$, соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что

a) $x \subseteq y$;

b) x — одноэлементное множество;

c) x — двухэлементное множество.

Задача 51. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

a) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$,

b) $\exists x P(x) \land \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$;

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$;

d) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$;

e) $\exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \to \forall x \exists y P(x, y, y)$.

f) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \to \exists y \forall x P(x, y, y)$.

Задача 52. Выпишите формулу в сигнатуре $\{=, <\}$, все нормальные модели которой — двухэлементные линейные порядки.

Задача 53. Докажите, что теория с аксиомами $\forall x R(x, x)$,
$\forall x \forall y \forall z(R(x, z) \to (R(x, y) \lor R(y, z)))$, $\neg \exists x \forall y R(x, y)$ имеет модель, но не имеет конечных моделей.

Задача 54. Следуют ли формулы из теорий?

a) Формула $\forall x P(x, x)$ из $\{\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \land P(y, z) \to P(x, z)),\ \forall x \forall y(P(x, y) \to P(y, x)),\}$

b) Формула $\exists x P(x, x)$ из $\{\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \land P(y, z) \to P(x, z)),\ \forall x \forall y(P(x, y) \to P(x, y)), \exists x \exists y P(x, y)\}$

Задача 55. Приведите формулы к предварённой и сколемовской нормальным формам:

a) $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x \exists y Q(x, y)$,

b) $\forall x \exists y P(x, y) \to \forall x \exists y Q(x, y)$,

c) $\exists x \forall y P(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$.

Задача 56. С помощью исчисления резолюций для формул первого порядка

a) доказать невыполнимость формул набора универсальных дизъюнктов
$\forall x(\neg P(x) \lor Q(f(x)))$,
$\forall x\, P(x)$,
$\neg Q(f(c)) \lor P(y)$,
$\neg P(y)$.

b) доказать невыполнимость набора формул
$\forall x \forall y(P(x, y) \to P(y, x))$,
$\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \land P(y, z) \to P(x, z))$,
$\exists x \neg P(x, x)$,
$\forall x \exists y P(y, x)$.

c) доказать общезначимость формулы $\exists x \forall y P(x, y) \to \forall x \exists y P(y, x)$.

d) доказать, что из формул
$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$,
$\forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$,
$\exists x \exists y P(x,y)$
семантически следует формула $\exists x P(x,x)$.

Задача 57. Изоморфны ли следующие пары моделей?
a) $(\mathbb{N},<)$ и $(\mathbb{Z},<)$
b) $(\mathbb{Q},<)$ и $(\mathbb{Z},<)$
c) $(\mathbb{Q},<)$ и $(\mathbb{R},<)$
d) $(\mathbb{R}+\mathbb{R},<)$ и $(\mathbb{R},<)$
e) $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$ и $(\mathbb{Z},<)$
f) $(\mathbb{N},=,+)$ и $(\mathbb{Z},=,+)$
g) $(\mathbb{Q},=,+)$ и $(\mathbb{Z},=,+)$

Задача 58. Описать все автоморфизмы моделей
a) $(\mathbb{N},<)$
b) $(\mathbb{Z},<)$
c) $(\mathbb{N},|)$

Задача 59. Придумать выигрышную стратегию Новатора или Консерватора в игре Эренфойхта на моделях
a) $(\mathbb{N},<,=)$ и $(\mathbb{Z},<,=)$
b) $(\mathbb{N},x=y+1)$ и $(\mathbb{N},x=y+2)$
c) $(\mathbb{Q},=,x+y=z)$ и $(\mathbb{Z},=,x+y=z)$

Задача 60. С помощью игры Эренфойхта доказать элементарную эквивалентность пар моделей
a) $(\mathbb{Q},<)$ и $(\mathbb{R},<)$
b) $(\mathbb{R}+\mathbb{R},<)$ и $(\mathbb{R},<)$
c) $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z},<)$ и $(\mathbb{Z},<)$
d) $(\mathbb{Q},=,x+1=y)$ и $(\mathbb{R},=,x+1=y)$
e) $(\mathbb{Q},=,x+1=y)$ и $(\mathbb{Q},=,x+2=y)$

Задача 61. Выразимо ли подмножество $\mathbb{Z}$ в модели $(\mathbb{Q},<)$?

Задача 62. Докажите, что в модели $(\mathbb{Z},+,=)$ не выразимо $<$.

Задача 63. Выразимы ли предикаты в данных моделях:
a) Предикат $x=y+2$ в модели $(\mathbb{Z},x=y+1)$?
b) Предикат $x=y+1$ в модели $(\mathbb{Z},x=y+2)$?
c) Предикат $x=y+1$ в модели $(\mathbb{Z},|x-y|=1)$?
d) Предикат $x=y+1$ в модели $(\mathbb{Z},=,+)$?
e) Предикат «быть простым числом» в модели $(\mathbb{N},=,x|y)$?
f) Предикат «быть степенью простого числа» в модели $(\mathbb{N},=,x|y)$?
g) Предикат «быть степенью двойки» в модели $(\mathbb{N},=,x|y)$?
h) Предикат $x=1$ в модели $(\mathbb{Q},<,+)$?
i) Предикат $x=y+1$ в модели $(\mathbb{Q},<,+)$?

Задача 64. Являются ли совместными теории сигнатуры $\{P^2\}$ (один двухместный предикатный символ)?

a) $\{\forall x \forall y \neg P(x,y),\ \forall x \exists y P(x,y)\}$

b) $\{\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)),\ \forall x \forall y (P(x,y) \wedge P(y,x) \to x = y), \exists x \neg P(x,x)\}$

Задача 65. Являются ли полными следующие теории сигнатуры $\{P^1, Q^1\}$ (два одноместных предикатных символа)?

a) $\{\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)), \exists x P(x)\}$

b) $\{\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)), \forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x P(x), \exists x Q(x)\}$

Задача 66. Составить полную аксиоматизацию модели и доказать ее полноту с помощью игры Эренфойхта

a) $(\mathbb{Z}, =, x+1=y)$

b) $(\mathbb{N}, =, x+1=y)$

c) $(\mathbb{N}, =, x+2=y)$

d) $(\mathbb{Q}, =, x+1=y)$

Задача 67. Постройте систему аксиом для элементарных теорий следующих моделей. Доказывать полноту не надо (но можно :). Задача будет считаться решенной, если преподаватель не сможет указать формулу, истинную в модели, но не следующую из предложенных аксиом. Система аксиом может быть бесконечной, но должна быть явно заданной (решение "в качестве аксиом возьмем все истинные в модели формулы" не засчитывается).

a) $(\mathbb{Z}, <, =)$,

b) $(\mathbb{N}, <, =)$,

c) $(\mathbb{Q}, <, =)$,

d) $(\mathbb{R}, <, =)$,

e) $([0,1], <, =)$,

f) $(\mathbb{N}, =, |)$ (в этой задаче надо можно считать, что натуральные числа начинаются с единицы),

g) $(\mathbb{Q}, +, =)$,

h) $(\mathbb{Q}, <, +, =)$,

i) $(\mathbb{Z}, +, <, =)$