Токмаков Александр, группа БПМИ165

Домашнее задание 5

№10

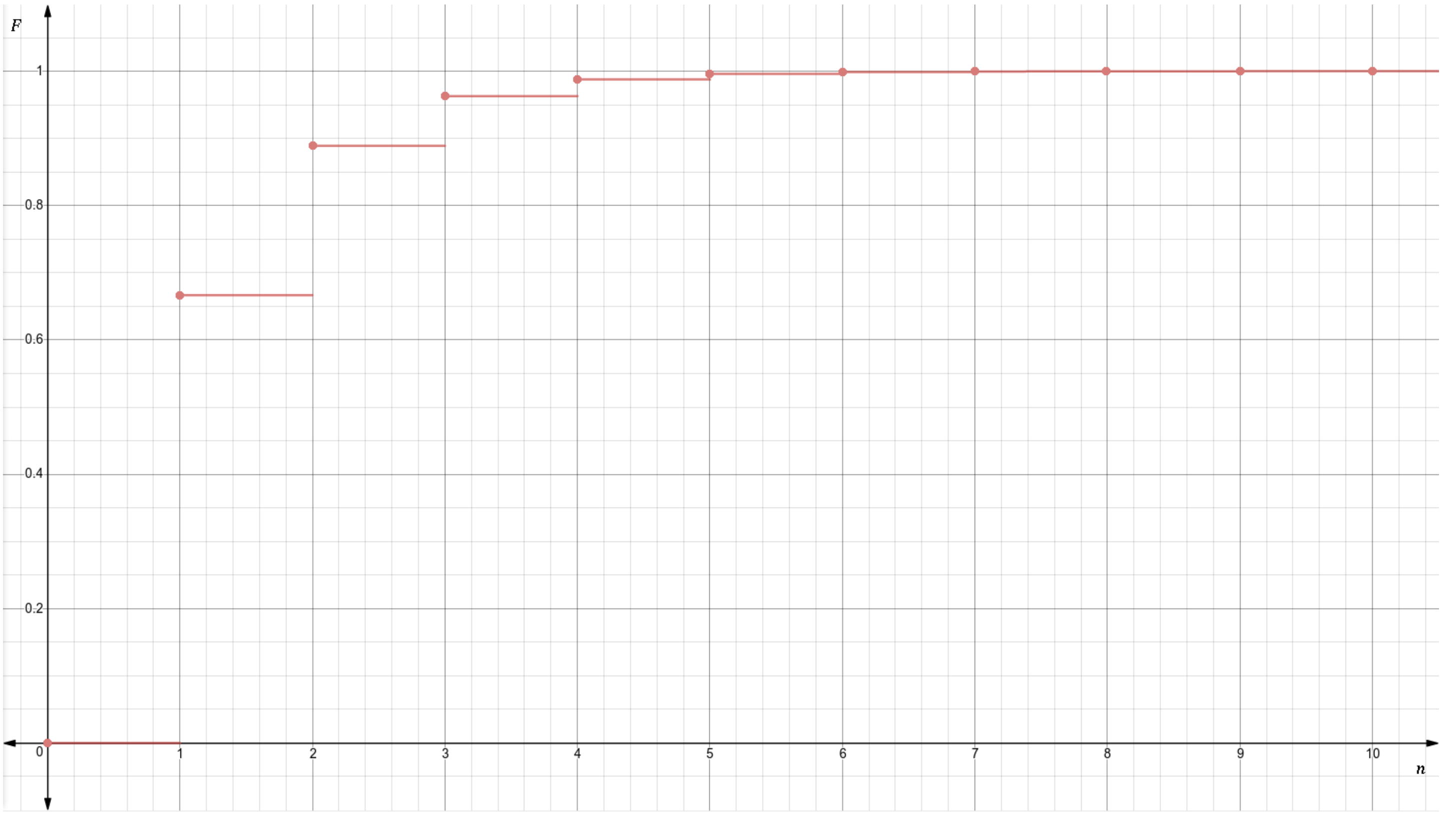
Будем считать, что вероятность угадать напёрсток в некоторой игре - $p = \frac{1}{3}$, вероятность не угадать - $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, все игры независимы.

Тогда вероятность выиграть $k-1$ раз подряд, а затем на k-тый раз проиграть $P(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$

Найдём вероятность того, что первый проигрыш случится на игре с номером $k \le n$:

$$P(k \le n) = \sum_{k=1}^{n} P(k) = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

Таким образом, функция распределения $F(n) = 1 - \frac{1}{3^n}$, построим её график:



№11

Пусть вероятностное пространство - $\Omega = [0,1]^2$ - множество точек квадрата со стороной 1, $P((x_0, y_0) \in A) = \iint\limits_A 1dxdy$ - вероятность того, что равновероятно выбранная точка попала в некоторое подмножество A.

Найдём вероятность того, что $min(x,y) \le a$ при $a \in [0,1]$:

$$A = \{(x,y) \in \Omega \mid min(x,y) \le a\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a \ \bigwedge\ x \le y \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \le 1 \ \bigwedge\ 0 \le y \le a\right\}$$

$$P(min(x,y) \le a) = P(A) = \iint\limits_A 1dxdy = \int\limits_0^a \left(\int\limits_x^1 1dy\right) dx + \int\limits_0^a \left(\int\limits_y^1 1dx\right) dy = \int\limits_0^a (1-x)\,dx + \int\limits_0^a (1-y)\,dy =$$

$$= 2\int\limits_0^a (1-x)\,dx = 2(a-0) - 2\left(\frac{a^2}{2} - 0\right) = 2a - a^2$$

Найдём вероятность того, что $|x-y| \le a$ при $a \in [0,1]$:

$$B = \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \le a\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y - x \le a \ \bigwedge\ 0 \le x \le y \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y < x \le 1 \ \bigwedge\ 0 \le x - y \le a\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le x + a \ \bigwedge\ 0 \le x \le y \le 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y < x \le 1 \ \bigwedge\ y < x \le y + a\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le x + a \ \bigwedge\ 0 \le x \le 1 - a\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le 1 \ \bigwedge\ 1 - a < x \le 1\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1-a \;\bigwedge\; y<x\le y+a\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-a<y\le 1 \;\bigwedge\; y<x\le 1\right\}$$

$$P(|x-y|\le a)=P(B)=\iint\limits_A 1dxdy=\int\limits_0^{1-a}\left(\int\limits_x^{x+a}1dy\right)dx+\int\limits_{1-a}^{1}\left(\int\limits_x^{1}1dy\right)dx+\int\limits_0^{1-a}\left(\int\limits_y^{y+a}1dx\right)dy+\int\limits_{1-a}^{1}\left(\int\limits_y^{1}1dx\right)dy=$$

$$=2\int\limits_0^{1-a}\left(\int\limits_x^{x+a}1dy\right)dx+2\int\limits_{1-a}^{1}\left(\int\limits_x^{1}1dy\right)dx=2\int\limits_0^{1-a}adx+2\int\limits_{1-a}^{1}(1-x)\,dx=$$

$$=2a\left((1-a)-0\right)+2\left((1-(1-a))-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{(1-a)^2}{2}\right)\right)=2a\,(1-a)+\left(2a-1+(1-a)^2\right)=$$

$$=2a(1-a)+(2a-1+1-2a+a^a)=2a(1-a)+a^2=2a-a^2$$

Внезапно, $P(min(x,y)\le a)=2a-a^2=P(|x-y|\le a)$, т.е. распределения случайных величин $min(x,y)$ и $|x-y|$ совпадают.