Токмаков Александр, группа БПМИ165

Домашнее задание 7

# №1(c)

Пусть Боб загадал число $n$, тогда вероятность получить пару $(n, n \pm 1 \mod 5)$ равна $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ (загадывание числа Бобом и подбрасывание монеты Алисой независимы). Для всех остальных пар вероятность равна нулю (они не могут получиться указанным способом). Составим таблицу с вероятностями исходов (строка - число, загаданное Бобом, столбец - Алисой):

| $\mu$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ |
| 1 | $\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ |
| 4 | $\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | 0 |

По вероятностной мере можно найти функцию распределения, просто просуммировав вероятности:

| F | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ |
| 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ |
| 2 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{6}{10}$ |
| 3 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{8}{10}$ |
| 4 | $\frac{2}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{8}{10}$ | $\frac{10}{10}$ |

Распределения каждой из случайных величин соответствуют последним строке/столбцу т.к.
$F_\xi(a) = P(\xi \le a) = P(\xi \le a, \eta \le 4) = F(a, 4)$, аналогично $F_\eta(b) = F(4, b)$.

# №4

Существуют. Пусть $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ (значение $X$ определяется подбрасыванием монетки), аналогично для $Y$ (подбрасывания монеток для $X$ и для $Y$ независимы). Очевидно, что каждая из случайных величин не является константой и всегда выполняется тождество $X^2 + Y^2 \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \equiv 1$.

# №6

При $x < 0$ $F_\xi(x) = 0, \rho_\xi(x) = 0$, при $1 < x$ $F_\xi = 1, \rho_\xi(x) = 0$, при $0 \le x \le 1$:

$$F_\xi(x \le a) = \int\limits_0^a \rho_\xi(x)dx = \int\limits_0^a 2(1-x)dx = 2a - a^2 = a(2-a)$$

Распределение и плотность случайной величины $\eta$ будут такими же в силу симметрии.

Покажем, что случайные величины не независимы:

При $0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1 \quad F_{\xi\eta}(a, b) = 2xy$

Но $F_\xi(\frac{1}{2}) \cdot F_\eta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \ne \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = F_{\xi\eta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$