Токмаков Александр, группа БПМИ165

Домашнее задание 9

№1б

$$\xi \text{ – количество красных шаров}$$
$$P(\xi = 1) = \tfrac{7}{5+7} \cdot \tfrac{5}{5+7} + \tfrac{5}{5+7} \cdot \tfrac{7}{5+7} = \tfrac{35}{72}$$
$$P(\xi = 2) = \tfrac{7}{5+7} \cdot \tfrac{7}{5+7} = \tfrac{49}{144}$$
$$\mathbb{E}[\xi] = 0 \cdot P(\xi = 0) + 1 \cdot P(\xi = 1) + 2 \cdot P(\xi = 2) = \tfrac{35}{72} + \tfrac{49}{72} = \tfrac{21}{18} = \tfrac{7}{6}$$

№3

Можно считать, что каждая цифра a, b, c выбирается независимо с вероятностью $\frac{1}{10}$. Тогда:

$$\mathbb{E}[a + b + c] = \mathbb{E}[a] + \mathbb{E}[b] + \mathbb{E}[c] = 3\mathbb{E}[a] = 3 \sum_{a=0}^{9} a \cdot P(a) = \tfrac{3}{10} \sum_{a=0}^{9} = \tfrac{3 \cdot 45}{10} = \tfrac{27}{2}$$

№6а

Вероятность того, что процесс завершится на k-том шаге ($k \neq N$) равна $(1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$ (выпало $k-1$ решек и один орёл), на последнем шаге – q^{N-1} (выпало $N-1$ решек и что-то).

$$\mathbb{E}[k] = \sum_{k=1}^{N-1} k \cdot q^{k-1}p + N \cdot q^{N-1} = p \sum_{k=1}^{N-1} k \cdot q^{k-1} + N \cdot q^{N-1} = pS_{N-1} + Nq^{N-1}$$

$$(1-q)S_{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{N-1} kq^{k} = \sum_{k=0}^{N-2} (k+1)q^{k} - \sum_{k=1}^{N-1} kq^{k} == q^0 + \sum_{k=1}^{N-2} kq^{k} + \sum_{k=1}^{N-2} q^{k} - \sum_{k=1}^{N-2} kq^{k} - (N-1)q^{N-1} =$$
$$= 1 + \tfrac{1-q^{N-2}}{1-q} - (N-1)q^{N-1} = \tfrac{2-q-q^{N-2}-(1-q)(N-1)q^{N-1}}{1-q}$$
$$\mathbb{E}[k] = p \cdot \tfrac{2-q-q^{N-2}-(1-q)(N-1)q^{N-1}}{(1-q)^2} + Nq^{N-1} = \tfrac{2-q-q^{N-2}-p(N-1)q^{N-1}}{p} + Nq^{N-1} = \tfrac{2-q-q^{N-2}-pNq^{N-1}+pq^{N-1}+pNq^{N-1}}{p} =$$
$$= \tfrac{2-q-q^{N-2}(1+pq)}{p}$$

№10

$$f(a) = \mathbb{E}[(\xi - a)^2] = \mathbb{E}[\xi^2 - 2\xi a + a^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - 2a\mathbb{E}[\xi] + a^2$$

Можно заметить, что $\mathbb{E}[\xi^2]$ и $\mathbb{E}[\xi]$ – некоторые константы, а $f(a)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, минимум $\min_a f(a)$ достигается в вершине параболы т.е. при $a = -\frac{-2\mathbb{E}[\xi]}{2} = \mathbb{E}[\xi]$ и $\min_a f(a) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}[\xi])^2] = \mathbb{D}[\xi]$

№11

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{n=0}^{6} n \cdot C_6^n \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-n} = 1$$
$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \sum_{n=0}^{6} n^2 \cdot C_6^n \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-n} - 1 = \tfrac{11}{6} - 1 = \tfrac{5}{6}$$

$P(\xi = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ вероятность выпадения хотя бы одной шестёрки больше.