Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашняя работа 1

№1

Для любого такого порытия каждой вершине инцедентно ровно 2 ребра, приинадлежащих покрытию: если вершине инцедентно 0 рёбер, принадлежащих покрытию, то вершина не покрыта; если нечётное количество рёбер (в том числе одно ребро), то покрытие состоит не из циклов; если больше двух, то через вершину проходит более одного цикла (некоторые 2 цикла пересекаются по этой вершине). Обратно, если каждой вершине инцедентно ровно 2 ребра, принадлежащих покрытию, то такое покрытие удовлетворяет условию: в нём есть эйлеров цикл (в каждой компоненте связности) т.к. степени вершин чётные и через каждую вершину проходит ровно один цикл т.к. степени вершин равны двум. Таким образом, для каждой вершины нужно выбрать ровно два инцедентых ей ребра так, чтобы сумма всех выбранных рёбер была минимальна.

$$\begin{cases} x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E \\ Ax = 2 \\ l^T x \to \min \end{cases}$$

Здесь x - вектор-столбец размерности $|E|$, в котором x_e - индикатор вхождения ребра e в покрытие; l - вектор-столбец размерности $|E|$, в котором l_e - вес ребра e; A - матрица инцедентности размерности $|V| \times |E|$, в которой элемент A_{ve} равен 1, если ребро e инцедентно вершине v, и 0 иначе. В произведении Ax элемент $(Ax)_v$ равен количеству инцедентных вершине v рёбер, входящих в покрытие.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}^{|E|} \\ Ax = 2 \\ x \geq 0 \\ l^T x \to \min \end{cases}$$

Можно добавить ограничение $x \geq 0$ и заменить условие $x_e \in \{0,1\}$ на $x_e \in \mathbb{Z}$ т.к. при минимизации целевой функции найденные x_e будут либо 1, либо 0, т.к. веса рёбер неотрицательные. Запишем ILP:

Для данного графа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ILP:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}^{10} \\ x_1 + x_4 + x_7 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_9 = 2 \\ x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 2 \\ x_5 + x_9 + x_{10} = 2 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} = 2 \\ x \geq 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 5x_7 + 6x_8 + 5x_9 + x_{10} \to \min \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} x_{vc} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, c \in C = \{r,g,b\} \\ \sum_{c \in C} x_{vc} = 1 \quad \forall v \in V \\ x_{uc} + x_{vc} \leq 1 \quad \forall (u,v) \in E, c \in C \\ 0 \to \min \end{cases}$$

Здесь x_{vc} - индикатор того, что вершина v покрашена в цвет c. Условие $\sum_{c \in C} x_{vc} = 1$ гарантирует, что каждая вершина покрашена ровно в один цвет. Условие $x_{uc} + x_{vc} \leq 1$ гарантирует, что для любого цвета c и ребра (u,v) в этот цвет раскрашено либо 0, либо 1 вершина инцедентная (u,v), т.е. концы ребра раскрашены в разные цвета. Таким образом, это корректная 3-раскраска. Можно добавить ограничение $x_{vc} \geq 0$ и заменить условие $x_{vc} \in \{0,1\}$ на $x_{vc} \in \mathbb{Z}$ т.к. из-за ограничения $\sum_{c \in C} x_{vc} = 1$ найденные x_{vc} будут либо 1, либо 0. Запишем ILP:

$$\begin{cases} x_{vc} \in \mathbb{Z} \;\; \forall v \in V, c \in C = \{r, g, b\} \\ x_{vc} \geq \;\; \forall v \in V, c \in C = \{r, g, b\} \\ \sum_{c \in C} \; x_{vc} = 1 \;\; \forall v \in V \\ x_{uc} + x_{vc} \leq 1 \;\; \forall (u, v) \in E, c \in C \\ 0 \to \min \end{cases}$$

Для данного графа:

$$\begin{cases} x_{vc} \in \mathbb{Z} \;\; \forall v \in V, c \in C = \{r, g, b\} \\ x_{vc} \geq \;\; \forall v \in V, c \in C = \{r, g, b\} \\ x_{1r} + x_{1g} + x_{1b} = 1 \\ x_{2r} + x_{2g} + x_{2b} = 1 \\ x_{3r} + x_{3g} + x_{3b} = 1 \\ x_{4r} + x_{4g} + x_{4b} = 1 \\ x_{5r} + x_{5g} + x_{5b} = 1 \\ x_{1r} + x_{3r} \leq 1 \\ x_{1g} + x_{3g} \leq 1 \\ x_{1b} + x_{3b} \leq 1 \\ x_{1r} + x_{2r} \leq 1 \\ x_{1g} + x_{2g} \leq 1 \\ x_{1b} + x_{2b} \leq 1 \\ x_{1r} + x_{5r} \leq 1 \\ x_{1g} + x_{5g} \leq 1 \\ x_{1b} + x_{5b} \leq 1 \\ x_{3r} + x_{4r} \leq 1 \\ x_{3g} + x_{4g} \leq 1 \\ x_{3b} + x_{4b} \leq 1 \\ x_{1r} + x_{4r} \leq 1 \\ x_{1g} + x_{4g} \leq 1 \\ x_{1b} + x_{4b} \leq 1 \\ x_{4r} + x_{2r} \leq 1 \\ x_{4g} + x_{2g} \leq 1 \\ x_{4b} + x_{2b} \leq 1 \\ x_{2r} + x_{3r} \leq 1 \\ x_{2g} + x_{3g} \leq 1 \\ x_{2b} + x_{3b} \leq 1 \\ x_{3r} + x_{5r} \leq 1 \\ x_{3g} + x_{5g} \leq 1 \\ x_{3b} + x_{5b} \leq 1 \\ 0 \to \min \end{cases}$$