Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 3

№1

Может. Например, трёхмерный полиэдр, задающийся одним неравенством $x+y+z \leq 0$ имеет только две грани: одну трёхмерную при $I = \varnothing$ (весь полиэдр) и одну двумерную при $I = \{1\}$ (размерность пространства решений уравнения $x+y+z=0$ равна двум). Других способов выбрать подмножество неравенств нет, значит нет других граней.

№2

$$\begin{cases} 3y - x \geq 0 \\ 3x - y \geq 0 \\ x + y \geq -1 \\ z \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Переменная z встречаются только в четвёртом неравенстве. Значит, если $4 \notin I$ и множество точек, в которых все неравенства с номерами из I насыщаются не пусто, то $\dim\{x \mid a_i x = 0, i \in I \cup \{4\}\} + 1 = \dim\{x \mid a_i x = 0, i \in\}$, аналогично для пятого неравенства. Т.е. можно найти все одно- и двумерные грани полиэдра, задающегося первыми тремя уравнениями и получить из них все искомые трёхмерные грани:

$$\begin{cases} 3y - x \geq 0 \\ 3x - y \geq 0 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$$

Эта система неравенств совместна, т.к. $x = 0, y = 0$ - допустимое решение. При $I = \varnothing$ размерность грани равна двум. При $I = \{1\}, I = \{2\}, I = \{3\}$ размерность грани равна одному, причём это три различные прямые. При остальных I размерность грани не может быть больше нуля. Размерность каждой из трёх одномерных граней можно увеличить до трёх, добавив четвёртое и пятое уравнения (получится $3 \cdot 1 = 3$ различных трёхмерных граней). Размерность двумерной грани можно увеличить до трёх, добавив четвёртое или пятое уравнение (получится $1 \cdot 2 = 2$ различных трёхмерных граней). Таким образом, у исходного полиэдра $3 + 2 = 5$ различных трёхмерных граней.

№3

Пусть $p = (p_1, p_2)$ - смешанная стратегия первого игрока. Составим и решим задачу ЛП, максимизирующую его выигрыш u:

$$\begin{cases} u \to \max \\ 2p_1 + 0p_2 \geq u \\ -1p_1 + 1p_2 \geq u \\ 2p_1 - 1p_2 \geq u \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \to \max \\ 2p_1 \geq u \\ -2p_1 + 1 \geq u \\ 3p_1 - 1 \geq u \\ p_1 \geq 0 \\ p_1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \to \max \\ p_1 \geq \frac{u}{2} \\ p_1 \geq \frac{u+1}{3} \\ p_1 \geq 0 \\ p_1 \leq \frac{1-u}{2} \\ p_1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \to \max \\ \frac{1-u}{2} \geq \frac{u}{2} \\ \frac{1-u}{2} \geq \frac{u+1}{3} \\ \frac{1-u}{2} \geq 0 \\ 1 \geq \frac{u}{2} \\ 1 \geq \frac{u+1}{3} \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \to \max \\ u \leq \frac{1}{2} \\ u \leq \frac{1}{5} \\ u \leq 1 \\ u \leq 2 \\ u \leq 2 \end{cases}$$

Таким образом, $u = \frac{1}{5}$, найдём оптимальную смешанную стратегию для первого игрока:

$$\begin{cases} u \to \max \\ p_1 \geq \frac{1}{10} \\ p_1 \geq \frac{2}{5} \\ p_1 \geq 0 \\ p_1 \leq \frac{2}{5} \\ p_1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{3}{5}$$

Минимизация проигрыша второго игрока будет двойственной задачей с таким же оптимумом $u = \frac{1}{5}$, найдём для него оптимальную смешанную $q = (q_1, q_2, q_3)$ стратегию, решив СЛАУ:

$$\begin{cases} 2q_1 - 1q_2 + 2q_3 = \frac{1}{5} \\ 0q_1 + 1q_2 - 1q_3 = \frac{1}{5} \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

Получим $q = (0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$
Пара равновесных смешанных стратегий $p = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ и $q = (0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, цена игры $u = \frac{1}{5}$

№4

Пусть f_{uv} - поток через ребро (u, v), запишем задачу ЛП:

$$\begin{cases} f_{sa} + f_{sb} \to \max \\ 0 \le f_{sa} \le 3 \\ 0 \le f_{sb} \le 1 \\ 0 \le f_{ab} \le 1 \\ 0 \le f_{ac} \le 1 \\ 0 \le f_{ca} \le 1 \\ 0 \le f_{bc} \le 1 \\ 0 \le f_{bt} \le 3 \\ 0 \le f_{ct} \le 2 \\ f_{sa} + f_{ca} - f_{ab} - f_{ac} = 0 \\ f_{sb} + f_{ab} - f_{bc} - f_{bt} = 0 \\ f_{ac} + f_{bc} - f_{ca} - f_{ct} = 0 \end{cases}$$

Найдём двойственную задачу (i-тое (не)равенство домножается на a_i):

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 \to \min \\ a_1 + a_9 \ge 1 \\ a_2 + a_{10} \ge 1 \\ a_3 - a_9 + a_{10} \ge 0 \\ a_4 - a_9 + a_{11} \ge 0 \\ a_5 + a_9 - a_{11} \ge 0 \\ a_6 - a_{10} + a_{11} \ge 0 \\ a_7 - a_{10} \ge 0 \\ a_8 + a_{11} \ge 0 \\ a_i \ge 0 \end{cases}$$

Нарисовав граф на листочке и внимательно посмотрев на него, угадаем оптимальный решения исходной и двойственной задач:

$$f_{sa} = 2, f_{sb} = 1, f_{ab} = 1, f_{ac} = 1, f_{ca} = 0, f_{bc} = 0, f_{bt} = 2, f_{ct} = 1, c = 3$$
$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = 1, a_{10} = 0, a_{11} = 0, c = 3$$

Докажем, что эти решения действительно оптимальны, проверив соотношения дополняющей нежёсткости:

В исходной задаче на насыщаются неравенства с номерами 1, 5, 6, 7, 8:
$$a_1 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$$
В двойственной задаче не насыщаются неравенства, соответствующие переменным f_{ca}, f_{bc}:
$$f_{ca} = f_{bc} = 0$$

Значит, угаданное решение оптимально.

№5

$$\begin{cases} x + 2y + 25z \to \max \\ x - y + z \le 1 \\ x + 2y - z \le 2 \\ -2x + y + 3z \le 3 \end{cases}$$

Найдём и решим двойственную задачу:

$$x + 2y + 25z = u(x - y + z) + v(x + 2y - z) + w(-2x + y + 3z) \le u + 2v + 3w \to \min$$
$$x + 2y + 25z = x(u + v - 2w) + y(-u + 2v + w) + z(u - v + 3w) \le u + 2v + 3w \to \min$$

$$\begin{cases} u + 2v + 3w \to \min \\ u + v - 2w = 1 \\ -u + 2v + w = 2 \\ u - v + 3w = 25 \\ u \ge 0 \\ v \ge 0 \\ w \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w \to \min \\ u = 10 \\ v = 3 \\ w = 6 \\ u \ge 0 \\ v \ge 0 \\ w \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w \to \min \\ u = 10 \\ v = 3 \\ w = 6 \end{cases}$$

Таким образом, оптимум в исходной и двойственной задачах равен $u + 2v + 3w = 10 + 6 + 18 = 34$.

№6

$$\begin{cases} f = 2x - y - z \to \max \\ x - 2y - z \leq 0 \\ x + 3y \leq 10 \\ -x + y + 5z \leq 35 \\ 2x - y + z \leq 18 \end{cases}$$

$$c = \nabla f = (2, -1, -1)$$

Шаг 1: $v_0 = (0, 0, 0), \quad I = \{1\}$

$$c = (2, -1, -1) \text{ не выражается линейно через } a_1 = (1, -2, 1) \quad \Rightarrow \quad f \neq const \quad \Rightarrow \quad \exists u \mid \begin{cases} c \cdot u > 0 \\ a_1 \cdot u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - u_3 > 0 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \qquad u = (2, 1, 0) \qquad \begin{matrix} a_2 \cdot u = 2 + 3 = 5 > 0 \\ a_3 \cdot u = -2 + 1 = -1 \leq 0 \\ a_4 \cdot u = 4 - 1 > 0 \end{matrix}$$

Т.е. при движении вдоль u могут нарушиться второе и четвёртое неравенства:

$$v_1 = v_0 + ut = (2t, t, 0), \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} 2t + 3t \leq 10 \\ 4t - t \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = (4, 2, 0)$$

Шаг 2: $v_1 = (4, 2, 0), \quad I = \{1, 2\}$

$$c = (2, -1, -1) \text{ не выражается линейно через } a_1 = (1, -2, 1) \text{ и } a_2 = (1, 3, 0) \quad \Rightarrow \quad f \neq const \quad \Rightarrow \quad \exists u \mid \begin{cases} c \cdot u > 0 \\ a_1 \cdot u = 0 \\ a_2 \cdot u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - u_3 > 0 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \qquad u = (3, -1, -5) \qquad \begin{matrix} a_3 \cdot u = -3 - 1 - 25 \leq 0 \\ a_4 \cdot u = 6 + 1 - 5 = 2 > 0 \end{matrix}$$

Т.е. при движении вдоль u может нарушиться четвёртое неравенство:

$$v_2 = v_1 + ut = (4 + 3t, 2 - t, -5t), \quad t \geq 0$$

$$2(4 + 3t) - (2 - t) + (-5t) \leq 18 \quad \Rightarrow \quad 8 + 6t - 2 + t - 5t \leq 18 \quad \Rightarrow \quad 2t \leq 12 \quad \Rightarrow \quad t \leq 6 \quad \Rightarrow \quad v_2 = (22, -4, -30)$$

Шаг 3: $v_2 = (22, -4, -30), \quad I = \{1, 2, 4\}$

$c = \frac{7}{6}a_1 + \frac{3}{6}a_2 + \frac{1}{6}a_4$, все коэффициенты больше нуля $\quad \Rightarrow \quad v_2$ - точка максимума

Максимум равен $22 \cdot 2 + 4 + 30 = 78$