Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 2

№1

$$\begin{cases} x-2y+z+6\geq 0 \\ x\geq y \\ z+3y\geq -3 \\ 2z-y\leq 4 \\ x+y+z\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\geq 2y-x-6 \\ z\geq -3y-3 \\ z\leq \frac{y}{2}+2 \\ z\leq -x-y+7 \\ x\geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2}+2\geq z\geq 2y-x-6 \\ \frac{y}{2}+2\geq z\geq -3y-3 \\ -x-y+7\geq z\geq 2y-x-6 \\ -x-y+7\geq z\geq -3y-3 \\ x\geq y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2}+2\geq 2y-x-6 \\ \frac{y}{2}+2\geq -3y-3 \\ -x-y+7\geq 2y-x-6 \\ -x-y+7\geq -3y-3 \\ x\geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq \frac{2x}{3}+\frac{8}{3} \\ y\geq -\frac{10}{7} \\ y\leq \frac{13}{3} \\ y\geq \frac{x}{2}-5 \\ y\leq x \end{cases}$$

Для каждой точки (x, y), удовлетворяющей полученной системе, существует точка z, такая что (x, y, z) удовлетворяет исходной системе. Таким образом, решение полученной системы - проекция решения исходной.

№2

$$\begin{cases} 2x-y\leq 6 \\ x+y+5\leq 0 \\ 2y-x+3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-6\leq 0 \\ x+y+5\leq 0 \\ -x+2y+3\leq 0 \end{cases}$$

Попробуем найти такие коэффициенты, чтобы из этой системы вывелось неравенство $x+2y\leq -7$:

$$\alpha(2x-y-6)+\beta(x+y+5)+\gamma(-x+2y+3)=x+2y+7 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x(2\alpha+\beta-\gamma)=x \\ y(-\alpha+\beta+2\gamma)=2y \\ -6\alpha+5\beta+3\gamma=7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \frac{17}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} \end{array}\right)$$

Таким образом, неравенство $x+2y+7\leq$ выводится из исходной системы: нужно умножить неравенства системы на $\alpha=\frac{1}{12}$, $\beta=\frac{5}{4}$, $\gamma=\frac{5}{12}$ соответственно и сложить их.
Попробуем найти такие коэффициенты, чтобы из этой системы вывелось неравенство $x+2y\leq -8$:

$$\alpha(2x-y-6)+\beta(x+y+5)+\gamma(-x+2y+3)=x+2y+8 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x(2\alpha+\beta-\gamma)=x \\ y(-\alpha+\beta+2\gamma)=2y \\ -6\alpha+5\beta+3\gamma=8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & 3 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{24} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \frac{31}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{33}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{24} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{33}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{24} \end{array}\right)$$

Коэффициент α получился отрицательным, значит неравенство $x+2y+8\leq 0$ не выводится из системы (после умножения на α измениться знак первого неравенства и его нельзя будет сложить с остальными).

№3

$$\begin{cases} 5x+3y-2z\leq 2 \\ 3x-2y\leq 0 \\ x+y-2z\leq 1 \\ -3x+z\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y-2z\leq 2 \\ 6x-4y\leq 0 \\ x+y-2z\leq 1 \\ -12x+4z\leq -4 \end{cases}$$

Сложим неравенства:

$$(5+6+1-12)\cdot x+(3-4+1)\cdot y+(-1-1+4)\cdot z\leq 2+1-4$$
$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z\leq -1$$
$$0\leq -1$$

№4

$$\begin{cases} x - 4y + z \to max \\ 2x + 3y - 6z \leq 5 \\ x - y + 4z \geq -1 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Подберём такие коэффициенты, чтобы сложив домноженные на них неравенства, мы получили целевую функцию в левой части. При этом этом справа должна получиться наилучшая оценка на максимум целевой функции:

$$x - 4y + z = u(2x + 3y - 6z) + v(x - y + 4z) + w_1 x + w_2(-y) \leq 5u - v \to min$$
$$x - 4y + z = x(2u + v + w_1) + y(3u - v - w_2) + z(-6u + 4v) \leq 5u - v \to min$$

Получим двойственную задачу:

$$\begin{cases} 5u - v \to min \\ 2u + v + w_1 = 1, \quad w_1 \geq 0 \\ 3u - v - w_2 = -4, \quad w_2 \leq 0 \\ -6u + 4v = 1 \\ u \geq 0 \\ v \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u - v \to min \\ 2u + v \leq 1 \\ 3u - v \leq -4 \\ -6u + 4v = 1 \\ u \geq 0 \\ v \leq 0 \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} x - y + 4z \to min \\ 2x - 3y + z \leq 7 \\ 3x + y - z \geq 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Подберём такие коэффициенты, чтобы сложив домноженные на них неравенства, мы получили целевую функцию в левой части. При этом этом справа должна получиться наилучшая оценка на минимум целевой функции:

$$x - y + 4z = u(2x - 3y + z) + v(3x + y - z) + wz \geq 7u + 2v \to max$$
$$x - y + 4z = x(2u + 3v) + y(-3u + v) + z(u - v + w) \geq 7u + 2v \to max$$

Получим двойственную задачу:

$$\begin{cases} 7u + 2v \to max \\ 2u + 3v = 1 \\ -3u + v = -1 \\ u - v + w = 4, \quad w \geq 0 \\ u \leq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u + 2v \to max \\ 2u + 3v = 1 \\ -3u + v = -1 \\ u - v \leq 4 \\ u \leq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

№6

Пусть x_{ij} - количество единиц продукции, доставляемой от i-того производителя к j-тому потребителю, составим задачу ЛП:

$$\begin{cases} 7x_{ac} + 3x_{ad} + 5x_{ae} + 4x_{bc} + 2x_{bd} + 3x_{be} \to min \\ x_{ac} + x_{ad} + x_{ae} \leq 9 \\ x_{bc} + x_{bd} + x_{be} \leq 5 \\ x_{ac} + x_{bc} = 3 \\ x_{ad} + x_{bd} = 4 \\ x_{ae} + x_{be} = 5 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Найдём двойственную задачу:

$$7x_{ac} + 3x_{ad} + 5x_{ae} + 4x_{bc} + 2x_{bd} + 3x_{be} =$$
$$= y_1(x_{ac} + x_{ad} + x_{ae}) + y_2(x_{bc} + x_{bd} + x_{be}) + y_3(x_{ac} + x_{bc}) + y_4(x_{ad} + x_{bd}) + y_5(x_{ae} + x_{be}) + \Sigma w_{ij} x_{ij} \geq$$
$$\geq 9y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 \to max$$

$$\begin{cases} 9y_1+5y_2+3y_3+4y_4+5y_5 \to max \\ y_1+y_3+w_{ac}=7, \quad w_{ac}\geq 0 \\ y_1+y_4+w_{ad}=3, \quad w_{ad}\geq 0 \\ y_1+y_5+w_{ae}=5, \quad w_{ae}\geq 0 \\ y_2+y_3+w_{bc}=4, \quad w_{bc}\geq 0 \\ y_2+y_4+w_{bd}=2, \quad w_{bd}\geq 0 \\ y_2+y_5+w_{be}=3, \quad w_{be}\geq 0 \\ y_1\leq 0 \\ y_2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y_1+5y_2+3y_3+4y_4+5y_5 \to max \\ y_1+y_3\leq 7 \\ y_1+y_4\leq 3 \\ y_1+y_5\leq 5 \\ y_2+y_3\leq 4 \\ y_2+y_4\leq 2 \\ y_2+y_5\leq 3 \\ y_1\leq 0 \\ y_2\leq 0 \end{cases}$$

Найдём решение, при котором значение целевой функции равно 45:

$$\begin{cases} 7x_{ac}+3x_{ad}+5x_{ae}+4x_{bc}+2x_{bd}+3x_{be}=45 \\ x_{ac}=3-x_{bc} \\ x_{ad}=4-x_{bd} \\ x_{ae}=5-x_{be} \\ x_{ac}+x_{ad}+x_{ae}\leq 9 \\ x_{bc}+x_{bd}+x_{be}\leq 5 \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(3-x_{bc})+3(4-x_{bd})+5(5-x_{be})+4x_{bc}+2x_{bd}+3x_{be}=45 \\ 3-x_{bc}+4-x_{bd}+5-x_{be}\leq 9 \\ x_{bc}+x_{bd}+x_{be}\leq 5 \\ 3\geq x_{bc}\geq 0 \\ 4\geq x_{bd}\geq 0 \\ 5\geq x_{be}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7(3-x_{bc})+3(4-x_{bd})+5(5-x_{be})+4x_{bc}+2x_{bd}+3x_{be}=45 \\ 3-x_{bc}+4-x_{bd}+5-x_{be}\leq 9 \\ x_{bc}+x_{bd}+x_{be}\leq 5 \\ 3\geq x_{bc}\geq 0 \\ 4\geq x_{bd}\geq 0 \\ 5\geq x_{be}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{bd}=13-3x_{bc}-2x_{be} \\ x_{bc}+x_{bd}+x_{be}\geq 3 \\ x_{bc}+x_{bd}+x_{be}\leq 5 \\ 3\geq x_{bc}\geq 0 \\ 4\geq x_{bd}\geq 0 \\ 5\geq x_{be}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{bc}+13-3x_{bc}-2x_{be}+x_{be}\geq 3 \\ x_{bc}+13-3x_{bc}-2x_{be}+x_{be}\leq 5 \\ 3\geq x_{bc}\geq 0 \\ 4\geq 13-3x_{bc}-2x_{be}\geq 0 \\ 5\geq x_{be}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{bc}+x_{be}\leq 10 \\ 2x_{bc}+x_{be}\geq 8 \\ 3\geq x_{bc}\geq 0 \\ 9\leq 3x_{bc}+2x_{be}\leq 13 \\ 5\geq x_{be}\geq 0 \end{cases}$$

Можно заметить, что подходит $x_{bc}=3, x_{be}=2$. Тогда:

$$x_{bd}=13-3x_{bc}-2x_{be}=13-9-4=0$$
$$x_{ac}=3-x_{bc}=3-3=0$$
$$x_{ad}=4-x_{bd}=4-0=4$$
$$x_{ae}=5-x_{be}=5-2=3$$
$$7x_{ac}+3x_{ad}+5x_{ae}+4x_{bc}+2x_{bd}+3x_{be}=0+12+15+12+0+6=45$$

№7

$$\begin{cases} -3x+4y+z\to max \\ 3x-2y+z\geq 5 \\ x+2y-2z\leq 2 \\ -x-y+3z\leq 1 \end{cases}$$

Найдём двойственную задачу:

$$-3x+4y+z=u(3x-2y+z)+v(x+2y-2z)+w(-x-y+3z)\leq 5u+2v+w\to min$$
$$-3x+4y+z=x(3u+v-w)+y(-2u+2v-w)+z(u-2v+3w)\leq 5u+2v+w\to min$$
$$\begin{cases} 5u+2v+w\to min \\ 3u+v-w=-3 \\ -2u+2v-w=4 \\ u-2v+3w=1 \\ u\leq 0 \\ v\geq 0 \\ w\geq 0 \end{cases}$$

Решим систему из трёх уравнений двойственной задачи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -10 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{-13}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right)$$

Эта система уравнений имеет единственное решение $u = -\frac{11}{10}, v = \frac{3}{2}, w = \frac{6}{5}$. Оно удовлетворяет ограничениям двойственной задачи $u \leq 0, v \geq 0, w \geq 0$, следовательно является оптимальным (потому что других нет) решением двойственной задачи.

$$-3x + 4y + z \leq 5u + 2v + w = -\frac{55}{10} + 3 + \frac{6}{5} = -\frac{13}{10}$$

Таким образом, оптимальное значение целевой функции в исходной задаче равно $-\frac{13}{10}$.

№8

$$\begin{cases} x - y + z \to max \\ 2x - y + z \geq 5 \\ x + 2y - z \leq 2 \\ -2x - 2y + z \leq 1 \end{cases}$$

Найдём двойственную задачу:

$$x - y + z = u(2x - y + z) + v(x + 2y - z) + w(-2x - 2y + z) \leq 5u + 2v + w \to min$$
$$x - y + z = x(2u + v - 2w) + y(-u + 2v - 2w) + z(u - v + w) \leq 5u + 2v + w \to min$$
$$\begin{cases} 5u + 2v + w \to min \\ 2u + v - 2w = 1 \\ -u + 2v - 2w = -1 \\ u - v + w = 1 \\ u \leq 0 \\ v \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Решим систему из трёх уравнений двойственной задачи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Эта система уравнений имеет единственное решение $u = v = w = 1$. Но оно не удовлетворяет ограничению двойственной задачи $u \leq 0$, следовательно двойственная задача несовместна, следовательно невозможно подобрать коэффициенты, чтобы вывести из исходной задачи неравенство $x - y + z \leq d$, следовательно не существует d, ограничивающего сверху целевую функцию, следовательно она неограничена.