Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 6

№1

a) $\forall x\ P(x)$ из $\{\forall x\ Q(x),\ \forall x\ (Q(x) \to P(x))\}$

Покажем, что при добавлении к формулам теории отрицания формулы $\forall x\ P(x)$ получается несовместное множество формул, это будет означать, что формула $\forall x\ P(x)$ следует из теории:

$$\overline{\forall x\ P(x)} \sim \exists x\ \neg P(x) \text{ т.е. } \neg P(x_0) \text{ истинно для некоторого } x_0$$
$$Q(x) \to P(x) \sim \neg Q(x) \vee P(x)$$
$$\frac{\forall x\ Q(x)}{Q(x_0)} \qquad \frac{\forall x\ (\neg Q(x) \vee P(x))}{\neg Q(x_0) \vee P(x_0)} \qquad \frac{Q(x_0) \qquad\qquad \neg Q(x_0) \vee P(x_0)}{P(x_0)} \qquad \frac{P(x_0) \qquad\qquad \neg P(x_0)}{\perp}$$

b) $\exists x\ P(x)$ из $\{\exists x\ Q(x),\ \forall x\ (Q(x) \to P(x))\}$

Покажем, что при добавлении к формулам теории отрицания формулы $\exists x\ P(x)$ получается несовместное множество формул, это будет означать, что формула $\exists x\ P(x)$ следует из теории:

$$\overline{\exists x\ P(x)} \sim \forall x\ \neg P(x)$$
$$\exists x\ Q(x) \sim Q(x_0)$$
$$Q(x) \to P(x) \sim \neg Q(x) \vee P(x)$$
$$\frac{\forall x\ (\neg Q(x) \vee P(x))}{\neg Q(x_0) \vee P(x_0)} \qquad \frac{\neg Q(x_0) \vee P(x_0) \qquad\qquad Q(x_0)}{P(x_0)} \qquad \frac{\forall x\ \neg P(x}{\neg P(x_{})} \qquad \frac{P(x_0) \qquad\qquad \neg P(x_0)}{\perp}$$

c) $\exists x\ P(x)$ из $\{\exists x\ Q(x),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x))\}$

Если формула следует из теории, то она общезначима, т.е. истинна в любой модели. Выберем модель с носителем $2\mathbb{Z}$ и интерпретацией предикатов $P(x)$ – быть нечётным числом и $Q(x)$ – быть чётным числом. В этой модели формула $\exists x\ P(x)$ не верна (все числа чётные), значит она не общезначима, значит она не следует из теории.

d) $\forall x\ P(x)$ из $\{\forall x\ Q(x),\ \forall x\ (P(x) \to Q(x))\}$

Аналогично пункту **c** (можно выбрать такую же модель) формула не следует из теории.

№2

a) $x < y$ из $(\mathbb{Z},\ 2x = y)$

Не выразим. Рассмотрим автоморфизм $\alpha(x) = -x$ (это биекция, $2x = y \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -y$):

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad -x < -y \quad \text{, но это не верно}$$

a) $x + y =$ из $(\mathbb{Q},\ x < y)$

Не выразим. Рассмотрим автоморфизм $\alpha(x) = x + 1$ (это биекция, $x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 < y + 1$):

$$x + y = z \quad \Leftrightarrow \quad (x+1) + (y+1) = (z+1) \quad \text{, но это не верно}$$

№3

a) $(\mathbb{Z},\ x + y = z)$

Пусть α – автоморфизм модели, тогда $x + y = z \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(z)$ т.е. α должен быть гомоморфизмом группы $(\mathbb{Z}, +)$. Как известно из алгебры, все гомоморфизмы этой группы имеют вид $\alpha(x) = k \cdot x,\ k \in \mathbb{Z}$. Из них только 2 являются биекциями: $\alpha(x) = 1 \cdot x$ и $\alpha(x) = -1 \cdot x$

b) $(\mathbb{Z},\ x - y = 2)$

Пусть α – автоморфизм модели, тогда $x - y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) - \alpha(y) = 2$, тогда $\alpha(x) - \alpha(y) = x - y$ при $x - y = 2$, тогда $\alpha(x) - x = \alpha(y) - y$ при $x - y = 2$ (для чисел одинаковой чётности). Это возможно только при $\alpha(x) = x + n$ для чётных x и $\alpha(x) = x + k$ для нечётных $x,\ \ n, k \in \mathbb{Z}$. Но для того, чтобы отображение было биекцией, n и k должны иметь одинаковую чётность.

№4

a) $(\mathbb{N}, \cdot, =)$ и $(\mathbb{Z}, \cdot, =)$

Модели не изоморфны. Выразим в обеих моделях предикат быть единицей: $x = 1 \rightleftharpoons \forall a\ a \cdot x = a$. Заметим, что в первой модели истинна формула $\forall x\ ((x \cdot x) = 1) \to (x = 1)$ (единица – единственное натуральное число, квадрат которого равен единице). Во второй модели эта формула не верна, т.к. $(-1) \cdot (-1) = 1$, но $(-1) \neq 1$.

b) $(\mathbb{Z}_5,\ x - y = 2)$ и $(\mathbb{Z}_5,\ x - y = 1)$

Модели изоморфны. Рассмотрим последовательность, в которой каждый следующий элемент получается прибавлением двойки к предыдущему: $\dots, 0, 2, 4, 1, 3, 0, 2, \dots$. Предикат $x - y = 2$ истинен тогда и только тогда, когда x следует за y в этой последовательности т.е. $n(x) - n(y) = 1$, где $n(x)$ – номер x в этой последовательности. Легко видеть, что $n(x) \mod 5$ будет изоморфизмом.

c) $(\mathbb{Z}_6,\ x - y = 2)$ и $(\mathbb{Z}_6,\ x - y = 1)$

Модели не изоморфны. Заметим, что элементы в первой модели образуют два цикла длины 3: $\dots, 0, 2, 4, 0, \dots$ и $\dots, 1, 3, 5, 1, \dots$, т.е. $\forall x \forall y \forall z\ (((x - y = 2) \wedge (y - z = 2)) \to (z - x = 2))$. Если модели изоморфны, то должна существовать биекция α, для которой $\forall x \forall y \forall z\ (((\alpha(x) - \alpha(y) = 1) \wedge (\alpha(y) - \alpha(z) = 1)) \to (\alpha(z) - \alpha(x) = 1))$, но такого в $\mathbb{Z}_6$ не бывает (каким бы ни было α).