Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 6

№1

$$z = a + ib \text{ - некоторое комплексное число}$$
$$f(z) = (a+ib)\cdot(1-i\sqrt{3}) = a - ia\sqrt{3} + ib + b\sqrt{3}$$

Посмотрим на $\mathbb{C}$ как на векторное пространство с базисом $(\vec{1}, \vec{i})$ (легко заметить, что он ортонормированный), а на f как на линейный оператор:

$$\vec{z} = a\cdot\vec{1} + b\cdot\vec{i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$f(\vec{z}) = (a\cdot 1 + b\cdot\sqrt{3})\cdot\vec{1} + (a\cdot(-\sqrt{3}) + b\cdot 1)\cdot\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Az$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = 2\cdot B$$

Т.е. f - это композиция поворота на $-\frac{\pi}{2}$ (поворот не меняет расстояния) и умножения на 2 (все расстояния увеличиваются в 2 раза):

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C} \text{ - некоторые вектора, } |\vec{u} - \vec{v}| \text{ - расстояние между ними}$$
$$|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| = |2Bu - 2Bv| = 2|B(u-v)| = 2|u-v|$$
(последнее равенство верно т.к. B - ортогональная матрица)

№2

Пусть угол образуется исходящими из точки O лучами a и b.

Если угол развёрнутый, то нужно построить перпендикуляр к прямой c ($a, b, O \in c$), проходящий через точку O. Для этого выберем некоторый раствор циркуля r и построим окружность с центром в точке O. Она пересечёт прямую в двух различных точках A и B по разные стороны от O. Выберем раствор циркуля $R > r$ и построим две окружности равного радиуса с центрами в A и в B. Эти окружности пересекутся в двух различных точках C и D по разные стороны от прямой c (т.к. $R > r$). Проведём прямую d через эти точки, она будет перпендикулярна c т.к. $ACBD$ - ромб (его стороны равны R), а его диагонали лежат на прямых c и d. Очевидно, что треугольники ACO и BCO равны, значит $AO = OB$, значит $c \cap d = O$ (точка пересечения диагоналей ромба делит их пополам). Т.е. d - перпендикуляр к прямой c, проходящий через точку O.

Если угол в ноль градусов, то ничего строить не надо, биссектриса совпадает с его сторонами.

В остальных случаях выберем некоторый раствор циркуля r и построим окружность с центром в точке O. Она пересечёт лучи в точках $A \in a$ и $B \in b$. Описанным выше способом построим прямую c, проходящую через точку A и перпендикулярную лучу a. Построим прямую d, проходящую через точку B и перпендикулярную лучу b. Прямые c и d пересекутся в единственной точке C т.к. они не параллельны и не совпадают т.к. угол не вырожденный. Проведём прямую OC, она и будет биссектрисой. Действительно, треугольники BOC и AOC равны т.к. они прямоугольные, OC общая и $OA = OB = r$. Значит, углы BOC и AOC тоже равны.

№3

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{2017}}{(1+i)^{4024}} = \frac{2^{2017}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2017}}{(\sqrt{2})^{4024}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{4024}} = 2^5\cdot\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2017}}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{4024}} = 32\cdot\frac{\cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2017\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4024\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{4024\pi}{4}\right)} =$$
$$= 32\cdot\frac{\cos\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(1006\pi)+i\sin(1006\pi)} = 32\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(0)+i\sin(0)} = 32\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16(1+i\sqrt{3})$$

№4

Сначала опишем, как "удвоить"угол, т.е. по заданному углу построить равный так, чтобы у них была общая сторона. Пусть дан невырожденный угол: лучи a и b - его стороны, $a \cap b = O$. Выберем некоторый раствор циркуля r и построим окружность O_1 с центром в точке O. Она пересечёт лучи в точках $A \in a$ и $B \in b$. Выберем раствор циркуля $r = AB$ и проведём окружность O_2 с центром в точке B. Она пересечёт окружность O_1 в точке A (т.к. $r = AB$) и некоторой точке C. Проведём луч OC. Теперь углы AOB и BOC равны т.к. равны соответствующие треугольники т.к. $OA = OB = OC = r$, $AB = BC$.

Теперь проведём через точку O перпендикуляр к одной из сторон данного нам угла в 27 градусов (как это сделать описано в задаче 2). Теперь дважды удвоим данный угол, как описано выше, чтобы получился угол в $3 \cdot 27 = 81$ градусов, разделённый на три равных угла по 27 градусов. Так мы получим угол в $90 - 81 = 9$ градусов, который можно так же продублировать и получить угол в 27 градусов, разделённый на 3 равных.

№5

$$x^5 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n)} =$$
$$= \left\{\cos\left(\tfrac{2\pi n}{5}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi n}{5}\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\cos\left(\tfrac{2\pi n}{5}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi n}{5}\right) \mid n \in \{0,1,2,3,4\}\right\}$$

№6

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x, y, z \in \mathbb{N}$$

Если $y = z$, то $x = 0$. Будем считать, что 0 - не натуральное и $y < z$.

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{x}{z-y} = \tfrac{z+y}{x} = \tfrac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$
$$\tfrac{p}{q} = \tfrac{z+y}{x} = \tfrac{z}{x} + \tfrac{y}{x}, \quad \tfrac{q}{p} = \tfrac{z-y}{x} = \tfrac{z}{x} - \tfrac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{z}{x} = \tfrac{p}{q} + \tfrac{q}{p} = \tfrac{p^2+q^2}{2pq} \cdot \tfrac{n}{n}, \quad \tfrac{y}{x} = \tfrac{p}{q} - \tfrac{q}{p} = \tfrac{p^2-q^2}{2pq} \cdot \tfrac{n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, любая пифагорова тройка представима в виде

$$x = 2npq, y = np^2 - nq^2, z = np^2 + nq^2, n, p, q \in \mathbb{N}$$

Пусть $x = 2npq, y = np^2 - nq^2, z = np^2 + nq^2, n, p, q \in \mathbb{N}$, тогда:

$$x^2 + y^2 = n^2(4p^2q^2 + p^4 - 2p^2q^2 + q^4) = n^2(p^4 + 2p^2q^2 + q^4) = z^2 \quad \Rightarrow \quad x, y, z \text{ - пифагорова тройка}$$