Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 3

№9 (листок 2)

Пусть Ω - множество всех людей в городе, A_1 - множество здоровых, A_2 - множество богатых, A_3 - множество умных. При случайном равновероятном выборе человека вероятность того, что он окажется здоровым $P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} \geq \frac{1}{2}$ т.к. по условию $|A_1| \geq \frac{1}{2} \cdot |\Omega|$, аналогично $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} \geq \frac{1}{2}$. Существует хотя бы один умный человек $\Rightarrow P(A_3) > 0$. Выберем случайного умного человека. Поскольку богатство и ум независимы, вероятность того, что он окажется ещё и богатым равна $P(A_2)$. Здоровье и ум тоже независимы, поэтому он здоров с вероятностью $P(A_1)$. Тогда вероятность того, что он богат и здоров: $P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) > 0$ т.к. $P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \leq P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Вероятность того, что умный человек окажется здоровым и богатым ненулевая, значит такой человек найдётся.

№10 (листок 2)

$\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, $A_i = \{k \in \Omega \mid k \ mod \ i = 0\}$, $|A_i| = \left\lfloor \frac{|\Omega|}{i} \right\rfloor$, $P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor}{n}$
$A_2 \cap A_5 = \{k \in \Omega \mid k \ mod \ 2 = 0 \vee k \ mod \ 5 = 0\} = \{k \in \Omega \mid k \ mod \ 10 = 0\} = A_{10}$
События A_2 и A_5 - независимы $\Leftrightarrow P(A_2 \cap A_5) = P(A_2) \cdot P(A_5)$.

$$\frac{\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$$

Пусть $n = 10k + t$, где $0 \leq t < 10$, тогда:

$$(10k + t) \cdot \left\lfloor k + \frac{t}{10} \right\rfloor = \left\lfloor 5k + \frac{t}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor 2k + \frac{t}{5} \right\rfloor$$
$$(10k + t) \cdot \left(k + \left\lfloor \frac{t}{10} \right\rfloor\right) = \left(5k + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right) \cdot \left(2k + \left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor\right)$$
$$(10k + t) \cdot k = \left(5k + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right) \cdot \left(2k + \left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor\right)$$

Если $t < 5$:

$$(10k + t) \cdot k = \left(5k + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right) \cdot 2k$$
$$tk = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \cdot 2k \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \text{ или } t \text{ - чётное}$$

Если $t \geq 5$:

$$(10k + t) \cdot k = \left(5k + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor\right) \cdot (2k + 1)$$
$$tk = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \cdot 2k + 5k + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$$

Если t - чётное: $tk = tk + 5k + \frac{t}{2} \Leftrightarrow 5k + \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ и $t = 0$ - невозможно т.к. $n > 0$
Если t - нечётное: $2tk = 2(t-1)k + 5k + t - 1 \Leftrightarrow 3k + t = 1 \Leftrightarrow t = 1$ и $k = 0$ - невозможно т.к. $t \geq 5$
Таким образом, либо $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, либо $n = 10k + t$, где $t \in \{0, 2, 4\}$

№2b (листок 3)

Пусть в пункт I направили k снарядов, в пункт II $n - k$ снарядов:
$P_k = P(\text{не поражения цели}) = P(\text{не поражения цели} \mid \text{цель в пункте I}) \cdot P(\text{цель в пункте I}) + P(\text{не поражения цели} \mid \text{цель в пункте II}) \cdot P(\text{цель в пункте II}) = (1-q)^k \cdot p + (1-q)^{n-k} \cdot (1-p)$

$$P_k = (1-q)^k \cdot p + (1-q)^{n-k} \cdot (1-p) = \left(1 - \frac{4}{5}\right)^k \cdot \frac{5}{6} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{6-k} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{5}\right)^{6-k} \cdot \frac{1}{6}$$
$$\frac{dP_k}{dk} = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{6-k} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$
$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{6-k} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6-k}$$
$$k - 1 = 6 - k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{7}{2} \text{ - локальный максимум}$$

Но нужно, чтобы вероятность непопадания была минимальной, поэтому проверим границы:

$$P_0 = \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} > \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = P_6$$

Т.е. вероятность непопадания в цель минимальна (вероятность попадания максимальна), если $k = 6$ т.е. все снаряды нужно направить в пункт I.

№11 (листок 3)

Пусть A - ровно 2 успеха, B - чётное число успехов:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_N^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-2}}{P(B)} = \frac{\frac{N(N-1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N}{P(B)}$$

Всего есть 2^N последовательностей из 0 и 1 длины N, из них 2^{N-1} последовательностей содержат чётное число единиц ($N-1$ символов могут быть какими угодно, последний определяется однозначно чётностью числа единиц). Таким образом, $P(B) = \frac{2^(N-1)}{2^N} = \frac{1}{2}$.

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(N-1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N}{\frac{1}{2}} = N(N-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$