Токмаков Александр, ФКН, группа БПМИ165

Домашнее задание 5

№1

$$e \in (2.71828, 2.71829), \quad e' = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad q \leq 10$$

Подберём такие p и q, чтобы отклонение было минимальным:

$$e = \frac{2718285}{10^6} \pm \frac{5}{10^6}$$
$$\frac{2718285}{10^6} \pm \frac{5}{10^6} - \frac{p}{q} = \alpha, \quad |\alpha| \to \min$$
$$\frac{2718285q - 10^6 p \pm 5q}{10^6 q} = \alpha, \quad |\alpha| \to \min$$

Будем перебирать p в промежутке $[\lfloor 2.7q \rfloor, \lceil 2.8q \rceil]$ т.к. остальные p дадут заведомо плохие приближения:

$$\begin{array}{lll}
q = 1, \quad p = 2 & |\alpha| = \frac{718285 \pm 5}{1000000} & \approx 0.71835 \pm 0.00005 \\
q = 1, \quad p = 3 & |\alpha| = \frac{281715 \pm 5}{1000000} & \approx 0.28175 \pm 0.00005 \\
q = 2, \quad p = 5 & |\alpha| = \frac{436570 \pm 10}{2000000} & \approx 0.21835 \pm 0.00005 \\
q = 2, \quad p = 6 & |\alpha| = \frac{563430 \pm 10}{2000000} & \approx 0.28175 \pm 0.00005 \\
q = 3, \quad p = 8 & |\alpha| = \frac{154855 \pm 15}{3000000} & \approx 0.05165 \pm 0.00005 \\
q = 3, \quad p = 9 & |\alpha| = \frac{845145 \pm 15}{3000000} & \approx 0.28175 \pm 0.00005 \\
q = 4, \quad p = 10 & |\alpha| = \frac{873140 \pm 20}{4000000} & \approx 0.21835 \pm 0.00005 \\
q = 4, \quad p = 11 & |\alpha| = \frac{126860 \pm 20}{4000000} & \approx 0.03175 \pm 0.00005 \\
q = 4, \quad p = 12 & |\alpha| = \frac{1126860 \pm 20}{4000000} & \approx 0.28175 \pm 0.00005 \\
q = 5, \quad p = 13 & |\alpha| = \frac{591425 \pm 25}{5000000} & \approx 0.11835 \pm 0.00005 \\
q = 5, \quad p = 14 & |\alpha| = \frac{408575 \pm 25}{5000000} & \approx 0.08175 \pm 0.00005 \\
q = 6, \quad p = 16 & |\alpha| = \frac{309710 \pm 30}{6000000} & \approx 0.05165 \pm 0.00005 \\
q = 6, \quad p = 17 & |\alpha| = \frac{690290 \pm 30}{6000000} & \approx 0.11505 \pm 0.00005 \\
q = 7, \quad p = 18 & |\alpha| = \frac{1027995 \pm 35}{7000000} & \approx 0.14695 \pm 0.00005 \\
q = 7, \quad p = 19 & |\alpha| = \frac{27995 \pm 35}{7000000} & \approx 0.00405 \pm 0.00005 \\
q = 7, \quad p = 20 & |\alpha| = \frac{972005 \pm 35}{7000000} & \approx 0.13895 \pm 0.00005 \\
q = 8, \quad p = 21 & |\alpha| = \frac{746280 \pm 40}{8000000} & \approx 0.09335 \pm 0.00005 \\
q = 8, \quad p = 22 & |\alpha| = \frac{253720 \pm 40}{8000000} & \approx 0.03175 \pm 0.00005 \\
q = 8, \quad p = 23 & |\alpha| = \frac{1253720 \pm 40}{8000000} & \approx 0.15675 \pm 0.00005 \\
q = 9, \quad p = 24 & |\alpha| = \frac{464565 \pm 45}{9000000} & \approx 0.05165 \pm 0.00005 \\
q = 9, \quad p = 25 & |\alpha| = \frac{535435 \pm 45}{9000000} & \approx 0.05955 \pm 0.00005 \\
q = 9, \quad p = 26 & |\alpha| = \frac{1535435 \pm 45}{9000000} & \approx 0.17065 \pm 0.00005 \\
q = 10, \quad p = 27 & |\alpha| = \frac{182850 \pm 50}{10000000} & \approx 0.01835 \pm 0.00005 \\
q = 10, \quad p = 28 & |\alpha| = \frac{817150 \pm 50}{10000000} & \approx 0.08175 \pm 0.00005
\end{array}$$

Как оказалось, точности в 4 знака после запятой вполне достаточно, чтобы увидеть, что дробь $\frac{19}{7}$ является лучшим приближением числа e, со знаменателем не больше 10.

№2

Представим $\frac{55}{34}$ в виде цепной дроби:

$$\frac{55}{34} = 1 + \frac{21}{34} = 1 + \frac{1}{\frac{34}{21}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{13}{21}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{13}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{8}{13}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{8}}}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{5}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}$$

№3

Представим $\sqrt{5}$ в виде цепной дроби:

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} =$$
$$= 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

Если рекурсивно повторять эту процедуру, получится бесконечная цепная дробь $[2, 4, 4, 4, 4, \ldots]$

№4

Пусть цепная дробь конечна. Тогда она имеет вид $x = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots_{a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}}$ и её можно «свернуть»:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots_{a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots_{a_{n-2}+\cfrac{1}{\frac{1+a_{n-2}a_{n-1}}{a_n}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots_{a_{n-2}+\frac{a_n}{1+a_{n-2}a_{n-1}}}}}$$

Каждый такой шаг сворачивания дроби уменьшает её «глубину» (количество дробей) на 1, когда-то этот процесс закончится по причине конечности цепной дроби. В результате останется обыкновенная дробь вида $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Пусть $x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что $p > q$. (В противном случае можно рассмотреть дробь $\frac{q}{p}$ и получить разложение $x = 0 + \frac{1}{\frac{q}{p}}$) Разложим x в цепную дробь, используя следующий алгоритм (внезапно, это алгоритм Евклида):

Если $p = a \cdot q, a \in \mathbb{Z}$, то всё хорошо: $x = a$

Иначе $p = a \cdot q + b, \quad a, b \in Z, \quad 0 < b < q$ и тогда:

$$x = \frac{p}{q} = \frac{a \cdot q + b}{q} = a + \frac{b}{q} = a + \frac{1}{\frac{q}{b}}$$

Мы получили новую дробь $x_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{q}{b}$, которую нужно разложить в цепную, причём $0 < p_1 < p$ и $0 < q_1 < q$, т.е. на каждом шаге числитель и знаменатель уменьшаются. Значит, на некотором шаге мы получим числитель $p_i = 1$ или знаменатель $q_i = 1$, что будет означать конец работы алгоритма и конечность цепной дроби.

№5, рубрика «Доказательства от ФКН»

~~Напишем простую программу на Python, перебирающую степени двойки:~~ *Заметим, что:*

$$2^{393} =$$
$$= \mathbf{2017}382717255397335668686853127353026820082650647830869398952622297380954700657183304410432250107680809299353103708979\,2$$

Оно существует, десятичная запись степени двойки может начинаться с 2017.