Токмаков Александр, группа БПМИ165
Домашнее задание 4

№1

Не правильно. Если будет дождь (A), то Петя чихает (B): $A \to B$. Петя подумал, что если он чихает, то будет дождь: $B \to A$. Эти утверждения не эквивалентны. Например, при $A = 0, B = 1$ первое истинно, а второе ложно.

№2

Есть три способа присвоить истину ровно двум переменным: $(1,1,0), (1,0,1)$ и $(0,1,1)$. При таких и только при таких означиваниях формула должна быть истинна, легко записать такую формулу в ДНФ:

$$(p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r)$$

№3

$$(u \to v) \to (w \wedge u) \equiv (\overline{u} \vee v) \to (w \wedge u) \equiv \overline{(\overline{u} \vee v)} \vee (w \wedge u) \equiv \overline{\overline{u}} \wedge \overline{v} \vee w \wedge u \equiv u \wedge \overline{v} \vee w \wedge u \equiv u \wedge (\overline{v} \vee w)$$

№4

$$a \vee b,\ \ b \vee c,\ \ c \vee d,\ \ d \vee e,\ \ e \vee a,\ \ \neg a \vee \neg b,\ \ \neg b \vee \neg c,\ \ \neg c \vee \neg d,\ \ \neg d \vee \neg e,\ \ \neg e \vee \neg a$$

$$\frac{a \vee b \qquad \neg a \vee \neg e}{b \vee \neg e} \quad \frac{b \vee \neg e \qquad \neg b \vee \neg c}{\neg c \vee \neg e} \quad \frac{\neg c \vee \neg e \qquad c \vee d}{d \vee \neg e} \quad \frac{d \vee \neg e \qquad \neg d \vee \neg e}{\neg e}$$

$$\frac{e \vee a \qquad \neg e}{a} \quad \frac{\neg a \vee \neg b \qquad a}{\neg b} \quad \frac{b \vee c \qquad \neg b}{c} \quad \frac{\neg c \vee \neg d \qquad c}{\neg d}$$

$$\frac{d \vee e \qquad \neg d}{e} \quad \frac{\neg e \qquad e}{\perp}$$

№5

$$p \vee q,\ \ \neg p \vee q \vee r,\ \ p \vee \neg q \vee r,\ \ \neg p \vee \neg r,\ \ p \vee \neg q \vee \neg r$$

Попробуем вывести пустой дизъюнкт:

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p \vee q \vee r}{q \vee r} \quad \frac{q \vee r \qquad \neg p \vee \neg r}{q \vee \neg p} \quad \frac{p \vee q \qquad q \vee \neg p}{q} \quad \frac{p \vee \neg q \vee \neg r \qquad q}{p \vee \neg r}$$

$$\frac{\neg p \vee \neg r \qquad p \vee \neg r}{\neg r} \quad \frac{p \vee \neg q \vee r \qquad \neg r}{p \vee \neg q} \quad \frac{p \vee q \qquad p \vee \neg q}{p}$$

При $p = 1,\ q = 1,\ r = 0$ все дизъюнкты истинны, значит набор дизъюнктов совместен, значит пустой дизъюнкт вывести нельзя.

№6

$$((a \to b) \to \neg b) \wedge b$$

Построим равновыполнимую формулу:

$$(x_1 \equiv a \to b) \bigwedge (x_2 \equiv \neg b) \bigwedge (x_3 \equiv x_1 \to x_2) \bigwedge (x_4 \equiv x_3 \wedge b) \bigwedge x_4$$

Заменим каждую скобку на её КНФ:

$$(y_1 \equiv y_2 \to y_3) \equiv (y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee y_3)$$
$$(y_1 \equiv \neg y_2) \equiv (y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2)$$
$$(y_1 \equiv y_2 \wedge y_3) \equiv (\neg y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee y_3)$$

И получим формулу в КНФ, равновыполнимую с исходной:

$$(x_1 \vee a) \wedge (x_1 \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (\neg x_1 \vee \neg a \vee b) \bigwedge (x_2 \vee b) \wedge (\neg x_2 \vee \neg b) \bigwedge (x_3 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2) \bigwedge (\neg x_4 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_3 \vee \neg b) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_3 \vee b) \bigwedge x_4$$

Из этого выводится пустой дизъюнкт, значит исходная формула не выполнима:

$$\frac{x_1 \lor a \qquad x_1 \lor \neg a \lor \neg b}{x_1 \lor \neg b} \quad \frac{x_1 \lor a \qquad \neg x_1 \lor \neg a \lor b}{b} \quad \frac{x_1 \lor \neg b \qquad b}{x_1} \quad \frac{\neg x_4 \lor x_3 \qquad x_4}{x_3}$$

$$\frac{\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor x_2 \qquad x_3}{\neg x_1 \lor x_2} \quad \frac{\neg x_1 \lor x_2 \qquad x_1}{x_2} \quad \frac{\neg x_2 \lor \neg b \qquad x_2}{\neg b} \quad \frac{\neg b \qquad b}{\perp}$$

№7

$$((a \to b) \land \neg b) \land \neg b$$

Чтобы доказать тавтологичность формулы, докажем невыполнимость её отрицания:

$$\neg(((a \to b) \land \neg b) \to \neg b)$$

Построим равновыполнимую формулу:

$$(x_1 \equiv a \to b) \bigwedge (x_2 \equiv \neg b) \bigwedge (x_3 \equiv x_1 \land x_2) \bigwedge (x_4 \equiv x_3 \to x_2) \bigwedge \neg x_4$$

Заменим каждую скобку на её КНФ:

$$(y_1 \equiv y_2 \to y_3) \equiv (y_1 \lor y_2) \land (y_1 \lor \neg y_2 \lor \neg y_3) \land (\neg y_1 \lor \neg y_2 \lor y_3)$$
$$(y_1 \equiv \neg y_2) \equiv (y_1 \lor y_2) \land (\neg y_1 \lor \neg y_2)$$
$$(y_1 \equiv y_2 \land y_3) \equiv (\neg y_1 \lor y_2) \land (y_1 \lor \neg y_2 \lor \neg y_3) \land (\neg y_1 \lor \neg y_2 \lor y_3)$$

И получим формулу в КНФ, равновыполнимую с исходной:

$$(x_1 \lor a) \land (x_1 \lor \neg a \lor \neg b) \land (\neg x_1 \lor \neg a \lor b) \bigwedge (x_2 \lor b) \land (\neg x_2 \lor \neg b) \bigwedge (\neg x_3 \lor x_1) \land (x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_3 \lor \neg x_1 \lor x_2) \bigwedge (x_4 \lor x_3) \land (x_4 \lor \neg x_3 \lor \neg x_2) \land (\neg x_4 \lor \neg x_3 \lor x_2) \bigwedge \neg x_4$$

Из этого выводится пустой дизъюнкт, значит исходная формула – тавтология:

$$\frac{x_1 \lor a \qquad x_1 \lor \neg a \lor \neg b}{x_1 \lor \neg b} \quad \frac{x_1 \lor a \qquad \neg x_1 \lor \neg a \lor b}{b} \quad \frac{x_1 \lor \neg b \qquad b}{x_1} \quad \frac{x_3 \lor \neg x_1 \lor \neg x_2 \qquad x_1}{x_3 \lor \neg x_2}$$

$$\frac{x_4 \lor \neg x_3 \lor \neg x_2 \qquad x_3 \lor \neg x_2}{x_4} \quad \frac{\neg x_4 \qquad x_4}{\perp}$$

№8

Очевидно, что такое расширение корректно (оно не сломает ИР), потому что если A истинно, то $A \lor B$ тоже истинно, т.е. после добавления такого дизъюнкта совместность множества дизъюнктов не изменится. По теореме о полноте ИР если из множества дизъюнктов выводится $\perp$ в ИР, то это множество дизъюнктов не выполнимо. Т.е. для любого множества дизъюнктов если оно не выполнимо, то это можно доказать в ИР (нет таких множеств, для которых этого нельзя сделать). Значит, это можно доказать и в любых корректных корректных расширениях ИР (например, можно просто не использовать дополнительные правила).