01204213: Homework 3

Due: 4 Aug 2022.

1. (Siper 1.20) For each of the following languages, give two strings that are members and two strings that are not members—a total of four strings for each part. Assume the alphabet $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ in all parts.

   (a) $\texttt{a}^*\texttt{b}^*$

   (b) $\texttt{a}(\texttt{ba})^*\texttt{b}$

   (c) $\Sigma^*\texttt{a}\Sigma^*\texttt{b}\Sigma^*\texttt{a}\Sigma^*$

   (d) $(\varepsilon \cup \texttt{a})\texttt{b}$

   (e) $(\texttt{a} \cup \texttt{ba} \cup \texttt{bb})\Sigma^*$

2. (Sipser 1.28) Convert the following regular expressions to NFAs using the procedure given in class. In all parts $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.

   (a) $\texttt{a}(\texttt{abb})^* \cup \texttt{b}$

   (b) $\texttt{a}^* \cup (\texttt{ab})^*$

   (c) $(\texttt{a} \cup \texttt{b}^*)\texttt{a}^*\texttt{b}^*$

3. Let $F = \{ww \mid w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\}$. Prove that F is not regular. *(Hint: choose the appropriate $s \in F$.)*

4. (Sipser 1.51) Prove that the following languages are not regular. You may use the pumping lemma and the closure of the class of regular languages under union, intersection, and complement.

   (a) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^m\texttt{0}^n \mid m, n \geq 0\}$

   (b) $\{w \mid w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ is not a palindrome$\}$

   (c) $\{wtw \mid w, t \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^+\}$

   Notes: A *palindrome* is a string that reads the same forward and backword. For example, `00100`, `1`, and `11` are palindromes, but `01` and `10011` are not.

   Hints: For 4(b), you can use the fact that the complement of a regular language is regular.

5. (Sipser 1.58) Let N be an NFA with k states that recognizes some language A. Show that if A is nonempty, A contains some string of length at most k.

6. (Siper 2.1) Consider the following CFG for expressions.

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E + T | T \\ T & \rightarrow & T \times F | F \\ F & \rightarrow & (E) | \texttt{a} \end{array}$$

   Give parse trees and derivations for each string.

   (a) $\texttt{a}$

   (b) $\texttt{a} + \texttt{a}$

   (c) $\texttt{a} + \texttt{a} + \texttt{a}$

   (d) $\texttt{a} + \texttt{a} \times \texttt{a}$

   (e) $((\texttt{a}))$

7. (Sipser 2.4) Give context-free grammars that generate the following languages. In all parts $\Sigma = \{\texttt{1}, \texttt{0}\}$.

   (a) $\{w \mid w$ starts and ends with the same symbol$\}$

   (b) $\{w \mid$ the length of w is odd$\}$

   (c) $\{w \mid w = w^{\mathcal{R}}$, that is w is a palindrome$\}$

   (d) The empty set

1. (Siper 1.20) For each of the following languages, give two strings that are members and two strings that are not members—a total of four strings for each part. Assume the alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ in all parts.

   (a) $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$

   (b) $\mathtt{a}(\mathtt{ba})^*\mathtt{b}$

   (c) $\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*\mathtt{b}\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*$

   (d) $(\varepsilon \cup \mathtt{a})\mathtt{b}$

   (e) $(\mathtt{a} \cup \mathtt{ba} \cup \mathtt{bb})\Sigma^*$

	Member	Not member
a	ab, aab	abab, bab
b	ab, abab	bbaa, ba
c	aba, baba	a, ba
d	ab, b	ba, baa
e	aa, bbb	ε, b

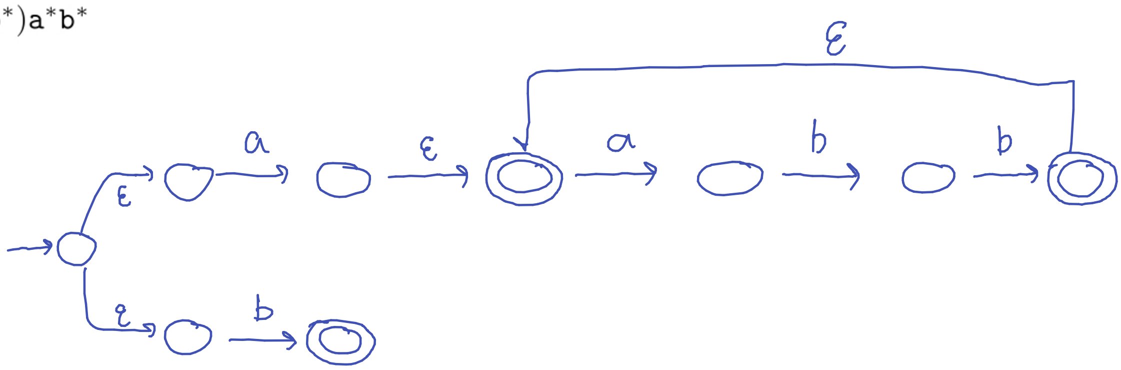
2. (Sipser 1.28) Convert the following regular expressions to NFAs using the procedure given in class. In all parts $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

(a) $\mathtt{a(abb)^* \cup b}$

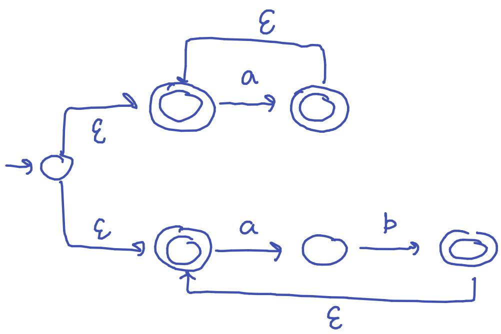
(b) $\mathtt{a^* \cup (ab)^*}$

(c) $\mathtt{(a \cup b^*)a^*b^*}$

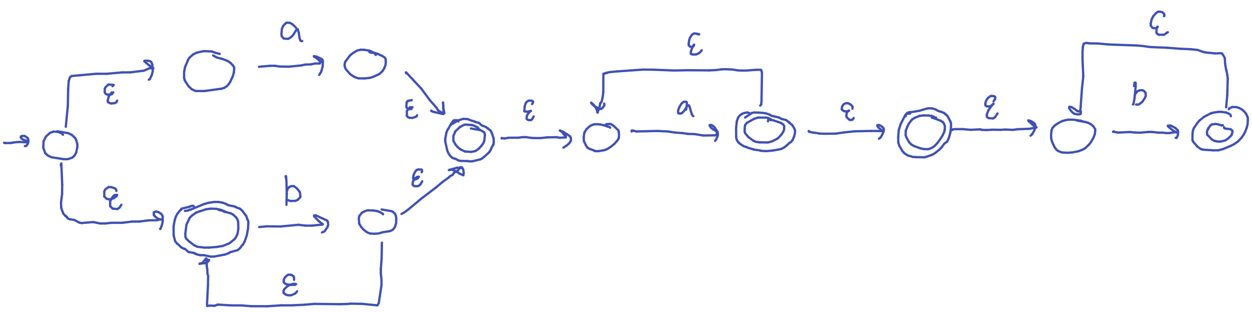
a)



b)



c)



3. Let $F = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Prove that F is not regular. *(Hint: choose the appropriate $s \in F$.)*

Proof by contradiction

assume ให้ F เป็น regular จาก pumping lemma จะมี string s ที่ $s \in F$

โดยมี pumping length = p

ให้ $s = 0^p 1 0^p 1$

จาก pumping lemma เราสามารถเขียน $s = xyz$ โดยที่ $|y| > 0$ และ $|xy| \le p$

นั่นคือ $y = 0^k$ เท่านั้น เพราะส่วนต้นของ s เป็น 0 ซึ่งสามารถ pump ได้

จะได้ว่า $xy^2z \in F$ ด้วย แต่ $xy^2z = 0^{p+k} 1 0^p 1$ จะเห็นว่า

0 ตัวหน้า และ 0 ตัวหลัง มีจำนวนไม่เท่ากัน โดยต่างกัน k ตัว

ดังนั้น $xy^2z \notin F$ จากนิยามของ F : เกิด contradiction

$\therefore$ F ไม่เป็น regular $\blacksquare$

4. (Sipser 1.51) Prove that the following languages are not regular. You may use the pumping lemma and the closure of the class of regular languages under union, intersection, and complement.

   (a) $\{0^n 1^m 0^n \mid m, n \geq 0\}$
   (b) $\{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ is not a palindrome}\}$
   (c) $\{wtw \mid w, t \in \{0,1\}^+\}$ At least 1

Notes: A *palindrome* is a string that reads the same forward and backword. For example, 00100, 1, and 11 are palindromes, but 01 and 10011 are not.

Hints: For 4(b), you can use the fact that the complement of a regular language is regular.

a) ให้ $F = \{0^n 1^m 0^n \mid m, n \geq 0\}$ และ assume ให้ F เป็น regular language

ให้ $s \in F$ จาก pumping lemma : s จะมี pumping length $= p$

ให้ $s = 0^p 1 0^p$ ดังนั้น s สามารถเขียนในรูป $s = xyz$ ได้ โดยที่ $|y| > 0$ และ $|xy| \leq p$

ให้ $x = 0^{p-k}$, $y = 0^k$, $z = 10^p$; $k > 0$

จะได้ $xy^0z = 0^{p-k}(0^k)^0 10^p$: $(0^k)^0 = \varepsilon$

$= 0^{p-k} 1 0^p \notin F$

จะเห็นว่า $xy^0z \notin F$ เนื่องจาก $p-k < p$ $\Rightarrow$ contradiction กับนิยามของ F

$\therefore F$ ไม่เป็น regular language ■

b) ให้ $F = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ isn't palindrome}\}$ และให้ F เป็น regular

ดังนั้น F' เป็น regular ด้วยเช่นเดียวกัน $\Rightarrow$ $\therefore F' = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ is palindrome}\}$ เป็น regular

ให้ $s \in F'$ จาก pumping lemma : s จะมี pumping length $= p$

ให้ $s = 0^p 1 0^p$ ดังนั้น s สามารถเขียนในรูป $s = xyz$ ได้ โดยที่ $|y| > 0$ และ $|xy| \leq p$

ให้ $x = 0^{p-k}$, $y = 0^k$, $z = 10^p$; $k > 0$

จะได้ $xy^0z = 0^{p-k}(0^k)^0 10^p$: $(0^k)^0 = \varepsilon$

$= 0^{p-k} 1 0^p \notin F'$

จะเห็นว่า xy^0z ไม่เป็นจำนวนพารินโดรม เนื่องจาก $p-k \neq p$ $\Rightarrow$ contradiction กับนิยามของ F'

$\therefore F$ ไม่เป็น regular language ■

c) ให้ $F = \{wtw \mid w, t \in \{0,1\}^+\}$ และ assume ให้ F เป็น regular language

ให้ $s \in F$ จาก pumping lemma : s จะมี pumping length $= p$

ให้ $s = 0^p 1 1 0^p 1$ ดังนั้น s สามารถเขียนในรูป $s = xyz$ ได้ โดยที่ $|y| > 0$ และ $|xy| \leq p$

ให้ $x = 0^{p-k}$, $y = 0^k$, $z = 110^p 1$; $k > 0$; จาก $|xy| \leq p$ $\therefore y = 0^k$ เท่านั้น และ $k < p$

จะได้ $xy^3z = 0^{p-k} \cdot 0^{3k} \cdot 110^p 1$

$= 0^{p+2k} 110^p 1$

จะเห็นว่า xy^3z ไม่เป็น format wtw เนื่องจาก $p+2k \neq p$ $\Rightarrow$ contradiction กับนิยามของ F

$\therefore F$ ไม่เป็น regular language ■

64

5. (Sipser 1.58) Let N be an NFA with k states that recognizes some language A. Show that if A is nonempty, A contains some string of length at most k.

- ให้ $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ เป็น NFA ที่มี k states และ recognizes language A.
- ให้ string w ถูก accept โดย N โดยเมื่อนำ string w เข้า N จะวิ่งจากสถานะ q_0 ไปจนถึง q ($q \in F$)
- ให้ $n = |w|$; ให้ ลำดับของ state $q_0, q_1, \dots q$ เป็นลำดับของ state ที่สั้นที่สุด จาก q_0 ไปยัง accept state $\Rightarrow$ จะมี state ทั้งหมด $n+1$ states
- ระหว่าง sequence $q_1, q_2, \dots, q$ จะไม่มี state ที่ซ้ำกัน เพราะไม่อย่างนั้น state sequence จาก q_0 ไปยัง q จะไม่ใช่ sequence ที่สั้นที่สุด โดยสามารถทำให้สั้นลงได้ โดยการลด state ที่มีการวนซ้ำ
- เนื่องจาก N มีทั้งหมด K state และมี $n+1$ state ที่แตกต่างกัน จาก sequence of state ที่สั้นที่สุด จาก q_0 ไปยัง q $\Rightarrow$ สรุปได้ว่า $n+1 \leq K$ หรือ $n < K$

$\therefore$ $L(N) = A$ จะมี string ที่มีความยาวอย่างมาก k แน่นอน ■

6. (Siper 2.1) Consider the following CFG for expressions.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + T \mid T \\ T &\rightarrow T \times F \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid \texttt{a} \end{aligned}$$

Give parse trees and derivations for each string.

(a) $\texttt{a}$

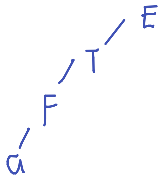
(b) $\texttt{a} + \texttt{a}$

(c) $\texttt{a} + \texttt{a} + \texttt{a}$

(d) $\texttt{a} + \texttt{a} \times \texttt{a}$

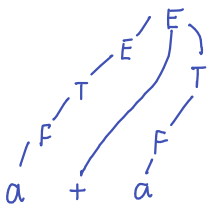
(e) $((\texttt{a}))$

a



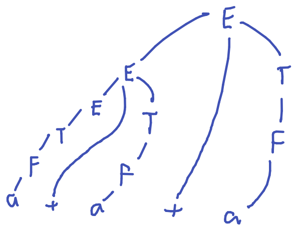
$E \rightarrow T \rightarrow F \rightarrow a$

b)



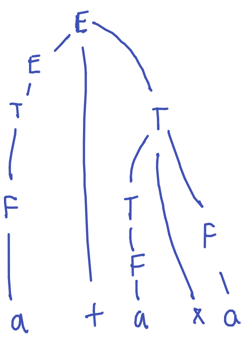
$E \rightarrow E+T \rightarrow$
$T+T \rightarrow F+T \rightarrow a+T \rightarrow$
$a+F \rightarrow a+a$

c)



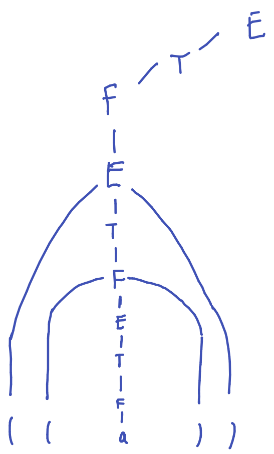
$E \rightarrow E+T$
$\rightarrow E+T+T \rightarrow E+F+T \rightarrow a+F+T$
$\rightarrow a+a+T \rightarrow a+a+F \rightarrow a+a+a$

d)



$E \rightarrow E+T \rightarrow T+T \rightarrow F+T \rightarrow a+T$
$\rightarrow a+T\times F \rightarrow a+F\times F \rightarrow a+a\times F$
$\rightarrow a+a\times a$

e)



$E \rightarrow T \rightarrow F \rightarrow (E)$
$\rightarrow (T) \rightarrow (F) \rightarrow ((E))$
$\rightarrow ((T)) \rightarrow ((F)) \rightarrow ((a))$

7. (Sipser 2.4) Give context-free grammars that generate the following languages. In all parts $\Sigma = \{1, 0\}$.

(a) $\{w \mid w \text{ starts and ends with the same symbol}\}$
(b) $\{w \mid \text{the length of } w \text{ is odd}\}$
(c) $\{w \mid w = w^{\mathcal{R}}, \text{ that is } w \text{ is a palindrome}\}$
(d) The empty set

a) $S \to 0A0 \mid 1A1 \mid 0 \mid 1$
$A \to \varepsilon \mid 0A \mid 1A$

b) $S \to 0 \mid 1 \mid 00S \mid 01S \mid 10S \mid 11S$

c) $S \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon \mid 0S0 \mid 1S1 \mid$

d) $S \to S$