01204213: Homework 1

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

Due: 23pm, 20 Jul 2022.

1. (Siper 1.6) Give state diagrams of finite automata recognizing the following languages. In all parts the alphabet is $\{0, 1\}$.

   (a) $\{w \mid w$ begins with a 1 and ends with 0$\}$

   (b) $\{w \mid w$ contains at least three 1's$\}$

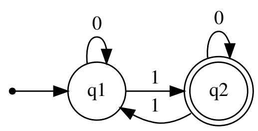
   (c) $\{w \mid w$ starts with 0 and has odd length, or starts with 1 and has even length$\}$

   (d) $\{\varepsilon, 0\}$

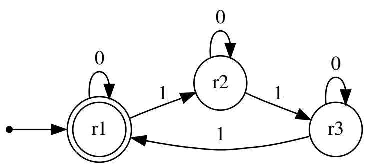
   (e) All strings except the empty string

2. (Sipser 1.12) Let $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ denote the alphabet. Let $D = \{w \mid$ w contains an even number of `a`'s and and odd number of `b`'s and does not contain the substring `ab` $\}$. Give a finite automaton with 5 states that recognizes D. (Suggestion: Describe D more simply.)

3. Consider the following finite automata M_1 and M_2.



M_1:



M_2:

   (a) What language does M_1 recognize?

   (b) What language does M_2 recognize?

   (c) For $i \in \{1, 2\}$, let A_i denote the language recognized by M_i. Use the construction we discussed in class to construct a finite automaton M that recognizes $A_1 \cup A_2$.

4. Let A_1 and A_2 be regular languages. Prove that $A_1 \cap A_2$ is also a regular language.

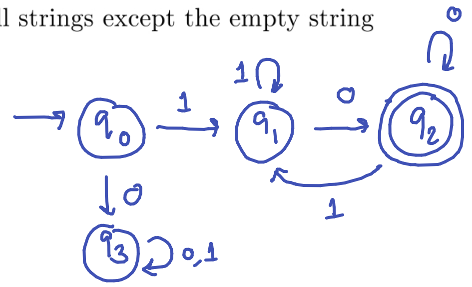
5. (Sipser 1.36) For any string $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, the *reverse of* w, written $w^{\mathcal{R}}$, is the string w in reverse order, $w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1$. For any language A, let $A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} | w \in A\}$. Prove that if A is regular, so is $A^{\mathcal{R}}$.

   (Hint: First, try to prove the case when the finite automaton recognizing A has only one accept state. Then, using the result proved in class (the union of regular languages is regular) to prove the required statement.)

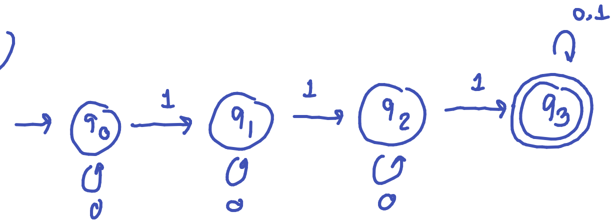
1. (Siper 1.6) Give state diagrams of finite automata recognizing the following languages. In all parts the alphabet is $\{0, 1\}$.

   (a) $\{w \mid w$ begins with a 1 and ends with $0\}$
   (b) $\{w \mid w$ contains at least three 1's$\}$
   (c) $\{w \mid w$ starts with 0 and has odd length, or starts with 1 and has even length$\}$
   (d) $\{\varepsilon, 0\}$
   (e) All strings except the empty string

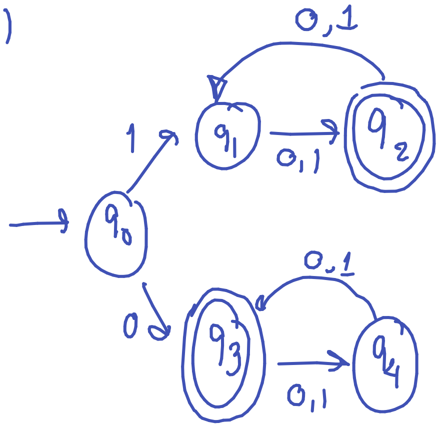
a)



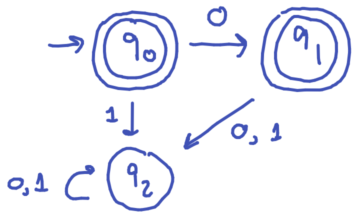
b)



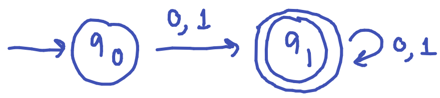
c)



d)



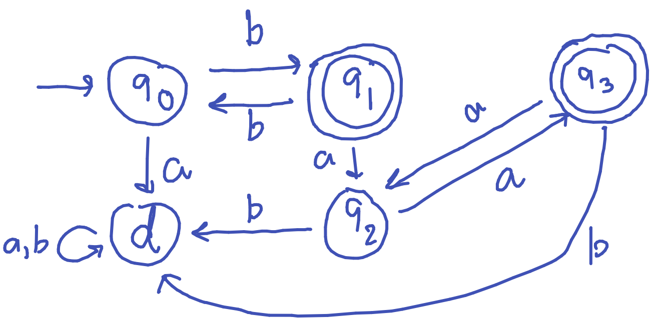
e)



2. (Sipser 1.12) Let $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ denote the alphabet. Let $D = \{w \mid$ w contains an even number of a's and and odd number of b's and does not contain the substring ab $\}$. Give a finite automaton with 5 states that recognizes D. (Suggestion: Describe D more simply.)

D = string ที่ขึ้นต้นด้วย b # คี่ ตามด้วย a # คู่ เท่านั้น

bbb aa|b แตก   aabbb แตก   babaa แตก



q_0 = b เป็นคู่ และยังไม่เกิด ab

d = dead state (เกิด ab)

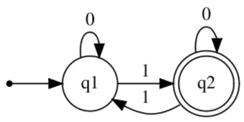
q_1 = b เป็นคี่ ไม่มี a

q_2 = a เป็นคี่ b เป็นคี่

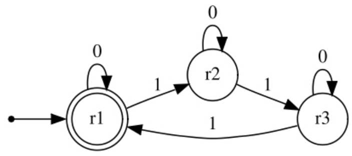
q_3 = a คู่ b คี่ และไม่มี ab

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

3. Consider the following finite automata M_1 and M_2.



$Q_1 = \{q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$F = \{q_2\}$



$Q_2 = \{r_1, r_2, r_3\}$
$\Sigma = 0,1$
$F = \{r_1\}$

M_1: M_2:

(a) What language does M_1 recognize?

(b) What language does M_2 recognize?

(c) For $i \in \{1, 2\}$, let A_i denote the language recognized by M_i. Use the construction we discussed in class to construct a finite automaton M that recognizes $A_1 \cup A_2$.

a) $L(M_1)$ = bit string ที่มี 1 เป็นจำนวนคี่

b) $L(M_2)$ = bit string ที่นำเลขโดดมาบวกกันแล้วหาร 3 ลงตัว

c) $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ โดยที่

$Q = \{q_1, q_2\} \times \{r_1, r_2, r_3\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

δ is defined as

$$\delta((s_1, s_2), in) = (\delta(s_1, in), \delta(s_2, in)), \quad in \in \Sigma, \quad s_1 \in Q_1, \; s_2 \in Q_2$$

$q_0 = (q_1, r_1)$

$F = \{(q_x, r_y) \mid x = 2 \text{ or } y = 1\}$

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

4. Let A_1 and A_2 be regular languages. Prove that $A_1 \cap A_2$ is also a regular language.

Prove by construction

กำหนดให้ Machine $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ recognizing A_1

Machine $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ recognizing A_2

สร้าง Machine $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ โดยที่

$Q = Q_1 \times Q_2$

Σ remains the same,

δ นิยามจาก

$$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a)) \quad , \quad a \in \Sigma, \; r_1 \in Q_1, \; r_2 \in Q_2$$

$q_0 = (q_1, q_2)$

$F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ and } r_2 \in F_2\}$

M recognizing $A_1 \cap A_2$

$\therefore A_1 \cap A_2$ มี finite automaton ที่ recognize มัน

ดังนั้น $A_1 \cap A_2$ เป็น regular language ∎

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

5. (Sipser 1.36) For any string $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, the *reverse of* w, written $w^{\mathcal{R}}$, is the string w in reverse order, $w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1$. For any language A, let $A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} | w \in A\}$. Prove that if A is regular, so is $A^{\mathcal{R}}$.

(Hint: First, try to prove the case when the finite automaton recognizing A has only one accept state. Then, using the result proved in class (the union of regular languages is regular) to prove the required statement.)

Prove by construction

กำหนดให้ Machine $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ เป็น DFA ที่ recognizing A.

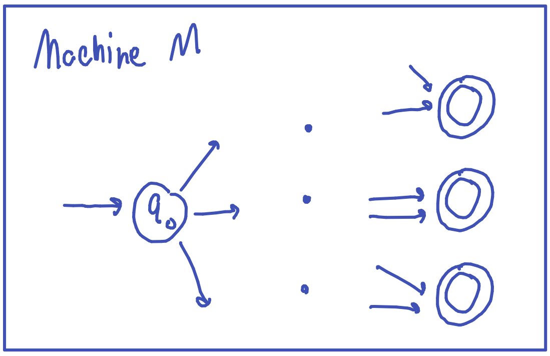
เราจะสร้าง $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ ที่เป็น NFA ที่ recognizing A^R

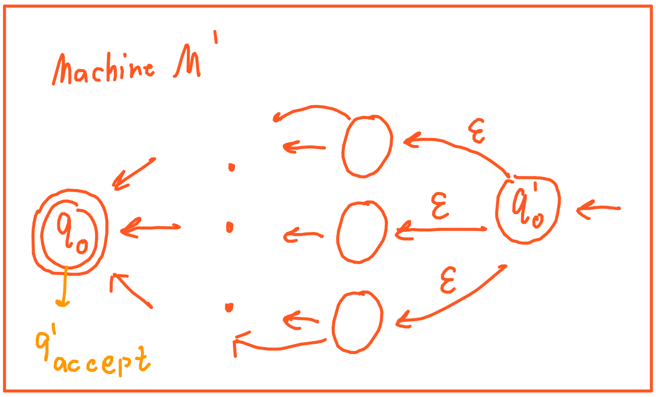
1) ให้ transition δ' = transition δ กลับทิศทาง

กล่าวคือ ถ้า $\delta(q_0, c) = q_1$, $\delta'(q_1, c) = q_0$

2) ให้ $F' = x$ โดยที่ $x \in q_0$ เพียงตัวเดียว ($n(F') = 1$)

3) เพิ่ม state q_0' ใหม่ สำหรับ M' โดยเพิ่ม ε-transition ไปกับ q_0' โดย มุ่งไปหา x โดยที่ $x \in F$





จะเห็นว่า ทุก $w \in \Sigma^*$ มี path ตาม w ที่เริ่มจาก q_0 ไปยัง accept state $x \in F$ ใน Machine M iff มี path ตาม w^R ที่เริ่มจาก q_0' ไปยัง q'_{accept} ที่ $q'_{accept} \in F'$ ใน Machine M'

$\rightarrow$ $w \in A$ iff $w^R \in A^R$

$\therefore$ สามารถสร้าง Machine M' ที่ recognizing A^R ได้

ดังนั้น เมื่อ A เป็น regular language

A^R ก็เป็น เช่นเดียวกัน ■

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา