01204213: Homework 4

Due: 23pm, 11 Aug 2022.

1. (Sipser 2.5) Give informal descriptions and state diagrams of pushdown automata for the followin languages. In all parts $\Sigma = \{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}$.

   (a) $\{w \mid w$ starts and ends with the same symbol$\}$

   (b) $\{w \mid$ the length of w is odd$\}$

   (c) $\{w \mid w = w^{\mathcal{R}}$, that is w is a palindrome$\}$

   (d) The empty set

2. (Sipser 2.8) Consider the simplified English grammar from class.

$$
\begin{aligned}
S &\to NP\,VP \\
NP &\to CN | CN\,PP \\
VP &\to CV | CV\,PP \\
PP &\to PREP\,CN \\
CN &\to ART\,N \\
CV &\to V | V\,NP \\
ART &\to \mathtt{a} | \mathtt{the} \\
N &\to \mathtt{boy} | \mathtt{girl} | \mathtt{flower} \\
V &\to \mathtt{touches} | \mathtt{likes} | \mathtt{sees} \\
PREP &\to \mathtt{with}
\end{aligned}
$$

   Show that the string `the girl touches the boy with the flower` has two different leftmost derivation in the grammar. Describe in English the two different meanings of this sentence.

3. (Sipser 2.11) Convert CFG in question 1 to an equivalent PDA, using the procedure discussed in class.

4. (Siper 2.42) Use the pumping lemma to show that the following languages are not context free.

   (a) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$

   (b) $\{t_1\mathtt{\#}t_2\mathtt{\#}\cdots\mathtt{\#}t_k \mid k \geq 2$, each $t_i \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, and $t_i = t_j$ for some $i \neq j\}$

5. (Sipser 2.43) Let B be the language of all palindromes over $\{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}$ containing equal numbers of `0`s and `1`s. Show that B is not context free.

1. (Sipser 2.5) Give informal descriptions and state diagrams of pushdown automata for the followin languages. In all parts $\Sigma = \{1, 0\}$.

   (a) $\{w \mid w$ starts and ends with the same symbol$\}$

   (b) $\{w \mid$ the length of w is odd$\}$

   (c) $\{w \mid w = w^{\mathcal{R}}$, that is w is a palindrome$\}$

   (d) The empty set

a) $S \to 0A0 \mid 1A1 \mid 0 \mid 1$

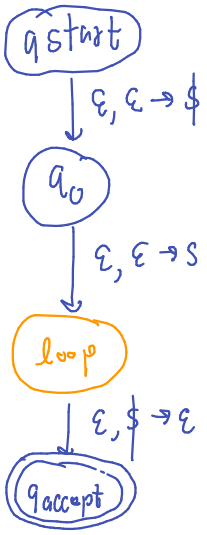
$A \to \varepsilon \mid 0A \mid 1A$

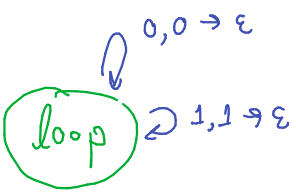
b) $S \to 0 \mid 1 \mid 00S \mid 01S \mid 10S \mid 11S$

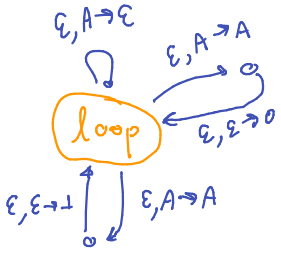
c) $S \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon \mid 0S0 \mid 1S1$

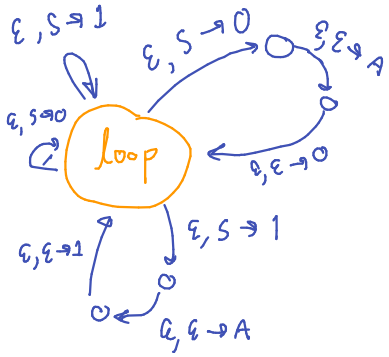
d) $S \to S$

PDA of A

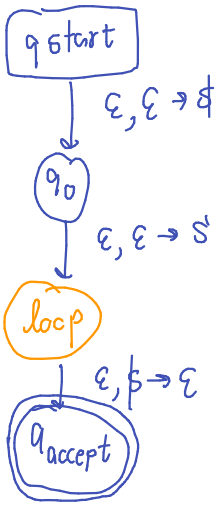


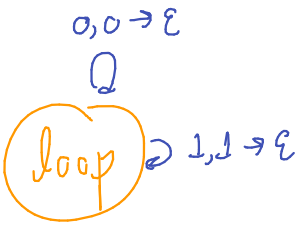


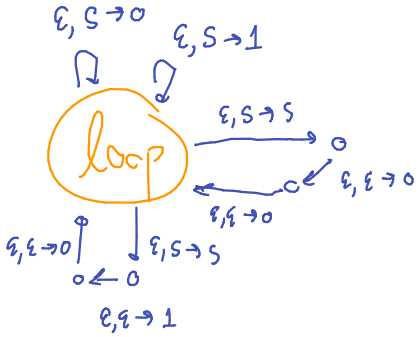


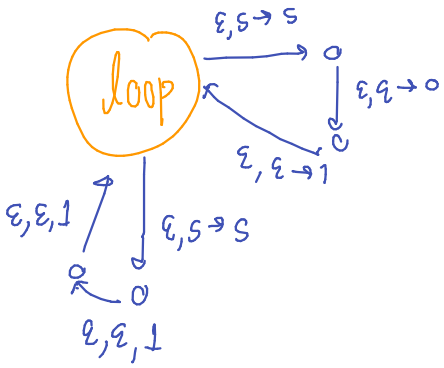


PDA of C

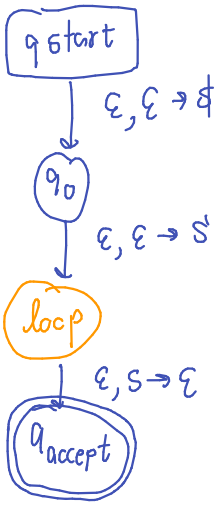


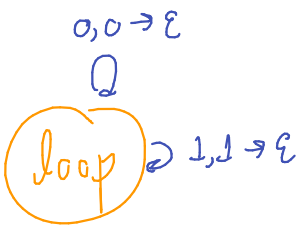


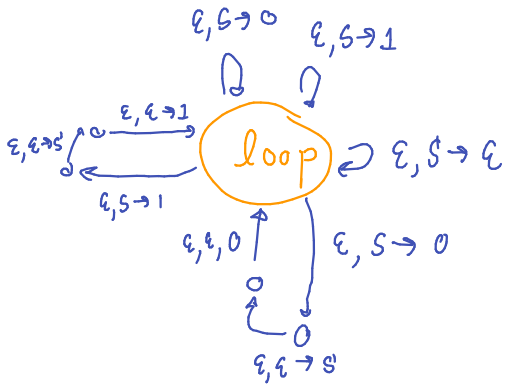




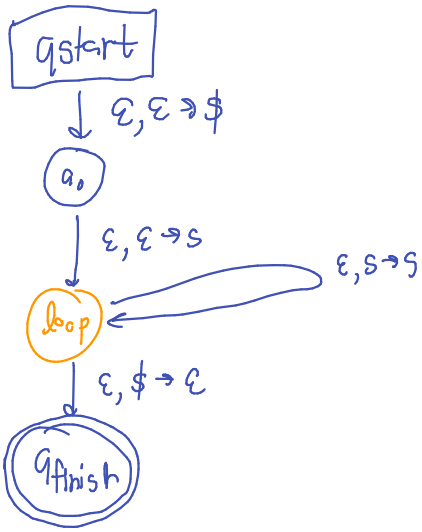
PDA of C







PDA of D



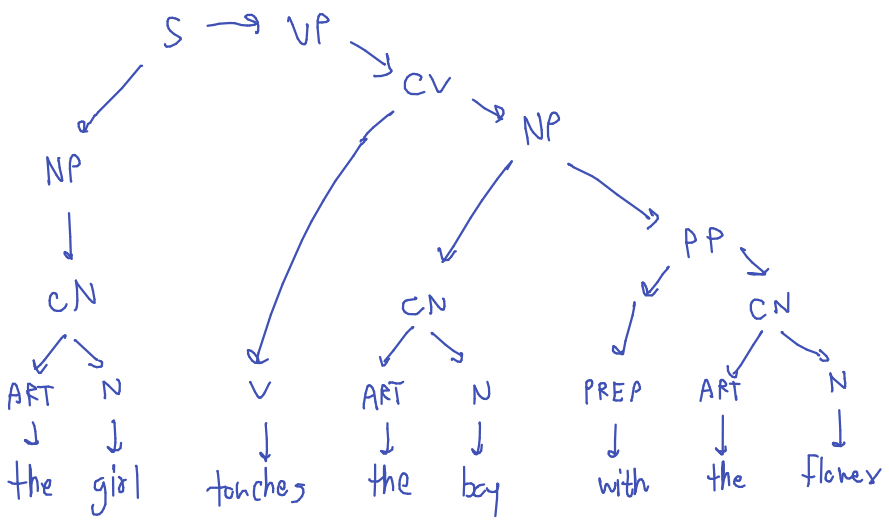
2. (Sipser 2.8) Consider the simplified English grammar from class.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow NP\,VP \\
NP &\rightarrow CN \mid CN\,PP \\
VP &\rightarrow CV \mid CV\,PP \\
PP &\rightarrow PREP\,CN \\
CN &\rightarrow ART\,N \\
CV &\rightarrow V \mid V\,NP \\
ART &\rightarrow \texttt{a} \mid \texttt{the} \\
N &\rightarrow \texttt{boy} \mid \texttt{girl} \mid \texttt{flower} \\
V &\rightarrow \texttt{touches} \mid \texttt{likes} \mid \texttt{sees} \\
PREP &\rightarrow \texttt{with}
\end{aligned}
$$

Show that the string the girl touches the boy with the flower has two different leftmost derivation in the grammar. Describe in English the two different meanings of this sentence.

Parse tree

(I) with the flower near the boy



Derivation

S → NP VP → CN VP → ART N VP → the N VP → the girl VP → the girl CV

→ the girl V NP → the girl touches CN PP → the girl touches ART N PP

→ the girl touches the N PP → the girl touches the boy PP

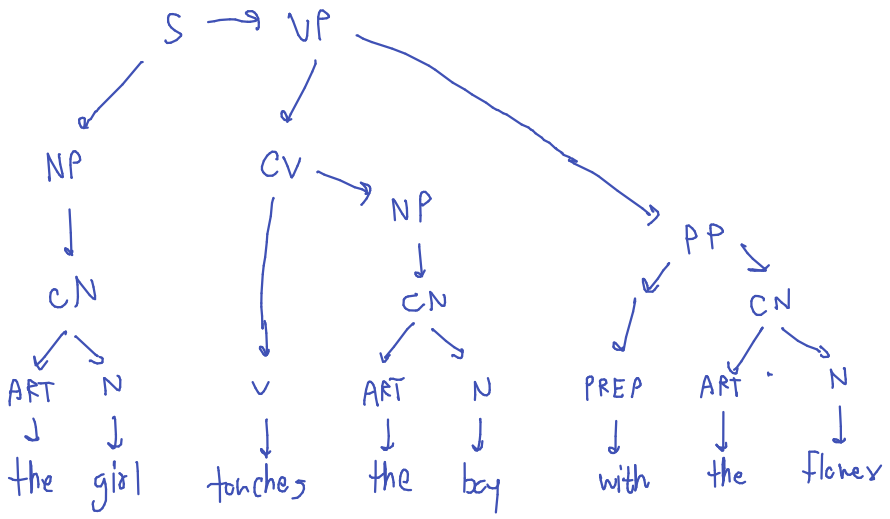
→ the girl touches the boy PREP CN → the girl touches the boy with CN

→ the girl touches the boy with ART N

→ the girl touches the boy with the N

→ the girl touches the boy with the flower

(II) with the flower vase touches



Derivation

S → NP VP → CN VP → ART N VP → the N VP → the girl VP

→ the girl CV PP → the girl V NP PP → the girl touches NP PP

→ the girl touches CN PP → the girl touches ART N PP → the girl touches the N PP

→ the girl touches the boy PP

→ the girl touches the boy PREP CN

→ the girl touches the boy with CN

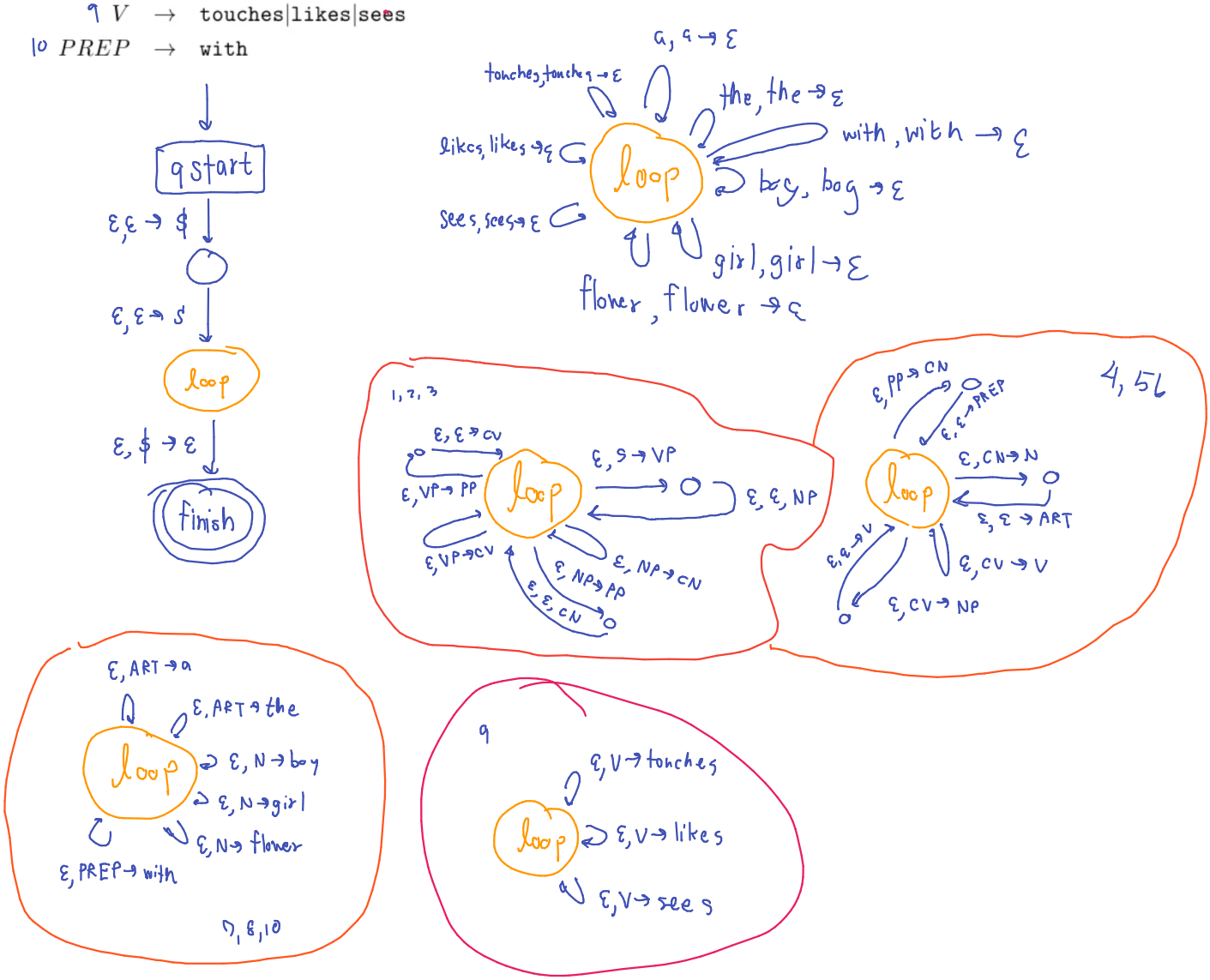
→ the girl touches the boy with ART N

→ the girl touches the boy with the N

→ the girl touches the boy with the flower

3. (Sipser 2.11) Convert CFG in question 1 to an equivalent PDA, using the procedure discussed in class.

1 $S \rightarrow NP\,VP$
2 $NP \rightarrow CN \mid CN\,PP$
3 $VP \rightarrow CV \mid CV\,PP$
4 $PP \rightarrow PREP\,CN$
5 $CN \rightarrow ART\,N$
6 $CV \rightarrow V \mid V\,NP$
7 $ART \rightarrow$ a|the
8 $N \rightarrow$ boy|girl|flower
9 $V \rightarrow$ touches|likes|sees
10 $PREP \rightarrow$ with



4. (Siper 2.42) Use the pumping lemma to show that the following languages are not context free.

   (a) $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$

   (b) $\{t_1\#t_2\#\cdots\#t_k \mid k \geq 2, \text{ each } t_i \in \{a,b\}^*, \text{ and } t_i = t_j \text{ for some } i \neq j\}$

4a) สมมติให้ $F = \{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$ โดยที่ F เป็น context free

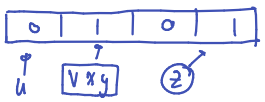
สมมติให้ $s \in F$ ตาม pumping lemma s จะมี pumping length p

โดยเราสามารถแบ่ง s ได้เป็น $s = uvxyz$ โดย $|vy| > 0$ และ $|vxy| \leq p$

ให้ $s = 0^p1^p0^p1^p$

ตาม pumping lemma $uv^2xy^2z \in F$ ด้วย

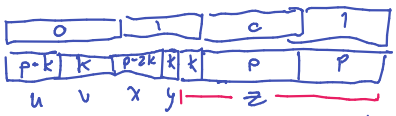
CASE I) v และ y เป็น alphabet เดียวกัน



~~ตาม $|vxy| \leq p$ จะได้ว่า vxy ต้องเป็น alphabet เดียวกัน~~ ให้ $v = 1^k$, $x = 1^{p-2k}$, $y = 1^k$

จะได้ว่า $uv^2xy^2z \notin F$ $\therefore$ เกิดข้อขัดแย้ง

CASE II) v และ y เป็นคนละ alphabet กัน (u เป็น ε ได้)



ให้ $u = 0^{p-k}$, $v = 0^k$, $x = 1^{p-2k}$, $y = 1^k$, $z = 1^k0^p1^p$

จะได้ว่า $uv^2xy^2z = 0^{p-k}\cdot 0^{2k}\cdot 1^{p-2k}\cdot 1^{2k}\cdot 1^k0^p1^p$

$= 0^{p+k}1^{p+k}0^p1^p \notin F$ $\therefore$ เกิดข้อขัดแย้งได้

$\therefore$ F ไม่เป็น context free

4. (Siper 2.42) Use the pumping lemma to show that the following languages are not context free.

(a) $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$

(b) $\{t_1\#t_2\#\cdots\#t_k \mid k \geq 2$, each $t_i \in \{a,b\}^*$, and $t_i = t_j$ for some $i \neq j\}$ → เหลือนกันอย่างน้อย ตำแหน่ง

4b) กำหนดให้ $F = \{t_1\#t_2\#\ldots\#t_k \mid k \geq 2$ each $t_i \in \{a,b\}^*$ and $t_i = t_j$ for some $i \neq j\}$

กำหนดให้ $s \in F$

สมมติให้ $s = ab\#ab$; $k = 2$ จะเห็นว่า string s เป็น string ที่ประกอบด้วย "ab" อยู่ทั้งหมด k ตัว กั่นด้วยอักขระ '#' จะเห็นว่าเราสามารถ แทน "ab" ด้วย string ใดๆ ที่ประกอบด้วย a หรือ b เช่น $b\#b$, $bab\#bab\#bab\#bab \in F$ ทั้งสิ้น

ดังนั้น หากเราจะพิสูจน์ว่า F ไม่เป็น context-free ⇒ สามารถพิสูจน์จาก $\boxed{s = a^pb^p\#a^pb^p}$ ไม่เป็น regular ได้ จาก pumpin lemma s จะมี pumping length p โดยเราสามารถเขียน s ในรูป $s = uvxyz$ โดย $|vy| > 0$ และ $|vxy| \leq p$

Case I: v and y contain # only → pump แล้ว # จะหาย

$u = a^pb^p$ $v = \#^{p-k}$, $x = \varepsilon$, $y = \#^{k-p+1}$, $z = a^pb^p$

$\therefore uv^0xy^0z = a^pb^pa^pb^p \notin F$ (ไม่มี #) ⇒ เคสนี้เกิดไม่ได้

Case II: v, y ตัวใดตัวหนึ่ง = empty → เมื่อ pump แล้ว ตัวที่ไม่ empty เมื่อ ถูก pump ฝั่งที่ pump ได้ จะเหลือน้อยกว่า

$u = a^pb$, $v = b^{p-2}$, $x = b\#$, $y = \varepsilon$, $z = a^pb^p$

$\therefore uv^0xy^0z = a^pb^2\#a^pb^p \notin F$ ⇒ ∴ เคสนี้เกิดไม่ได้

Case III v and y ไม่ empty และ vxy อยู่ด้านซ้าย # → เมื่อ pump ลงแล้ว จะทำให้ฝั่งซ้ายเหลือน้อยกว่า

$u = a^p$ $v = b^k$ $x = b^{p-2k}$ $y = b^k$ $z = \#a^pb^p$; $k > 0$

$\therefore uv^0xy^0z = a^pb^{p-2k}\#a^pb^p \notin F$ ⇒ ∴ เคสนี้เกิดไม่ได้

Case IV v and y ไม่ empty และ vxy อยู่ด้านขวาของ # → เมื่อ pump ลงแล้ว จะทำให้ฝั่งขวาเหลือน้อยกว่า

$u = a^pb^p\#$ $v = a^k$ $x = a^{p-2k}$ $y = a^k$ $z = b^p$; $k > 0$

$\therefore uv^0xy^0z = a^pb^p\#a^{p-2k}b^p \notin F$ ⇒ เคสนี้เกิดไม่ได้

Case V v and y ไม่ empty และ vxy มี # ด้วย

$u = a^pb$ $v = b^k$ $x = b^{p-2k-1}$ $y = b^k\#$ $z = a^pb^p$; $k > 0$

$\therefore uv^0xy^0z = a^pb.b^{p-2k-1}.a^pb^p$

$= a^pb^{p-2k}.a^pb^p \notin F$ (ไม่มี #) ⇒ เคสนี้เกิดไม่ได้

จะอยู่ใน v หรือ y เมื่อ pump แล้ว # จะหาย

จะเห็นว่า $s = a^pb^p\#a^pb^p$ ซึ่ง $s \in F$ ไม่สามารถ pumping จาก pumping lemma ได้

⇒ s ไม่เป็น regular

∴ F ไม่เป็น context free ■

5. (Sipser 2.43) Let B be the language of all palindromes over $\{1, 0\}$ containing equal numbers of 0s and 1s. Show that B is not context free.

กำหนดให้ B เป็น context free

กำหนดให้ $s \in B$ จาก pumpin lemma s จะมี pumping length p

โดยเราสามารถเขียน s ในรูป $s = uvxyz$ โดย $|vy| > 0$ และ $|vxy| \leq p$

กำหนดให้ $s = 0^p 1^p 1^p 0^p$; $s \in F$

จาก pumping lemma s สามารถเขียนในรูปของ $s = uvxyz$

$\boxed{\text{เคสที่ 1}}$ v, y เป็น alphabet เดียวกัน

จัดรูป $s = \underbrace{0^p}_{u}\underbrace{1^k}_{v}\underbrace{1^{p-2k}}_{x}\underbrace{1^k}_{y}\underbrace{1^p 0^p}_{z}$; $k > 0$

$\therefore uv^0xy^0z = 0^p 1^{p-2k} 1^p 0^p$

$= 0^p 1^{2p-2k} 0^p \notin B$ เพราะ 0 กับ 1 ไม่เท่ากัน

จะเห็นว่า หาก B เป็น context free จริง

$uv^0xy^0z \in B$ contradiction

$\boxed{\text{เคสที่ 2}}$ v, y เป็นคนละ alphabet $s = uvxyz$

$s = 0^p 1^p 1^p 0^p$

$= \underbrace{0^{p-k}}_{u} / \underbrace{0^k}_{v} / \underbrace{1^{p-2k}}_{x} / \underbrace{1^k}_{y} / \underbrace{1^{k+p} 0^p}_{z}$

$\therefore uv^0xy^0z = 0^{p-k} \cdot 1^{p-2k} \cdot 1^{p+k} \cdot 0^p$

จะเห็นว่า uv^0xy^0z ไม่เป็นพาลินโดรม ($\notin B$)

$\therefore$ B ไม่เป็น context-free