6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

01204213: Homework 2

Due: 28 Jul 2022.

1. (Siper 1.6.cont) Give state diagrams of finite automata recognizing the following languages. In all parts the alphabet is $\{0, 1\}$.

   (a) $\{w \mid w$ contains the substring 0101, i.e., $w = x0101y$ for some x and $y\}$

   (b) $\{w \mid w$ is any string except 11 and 111$\}$

   (c) $\{w \mid$ every odd position of w is a 1$\}$

   (d) $\{w \mid$ the length of w is at most 5$\}$

2. (Sipser 1.8) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the union of languages in problem 1(a) and 1(c).

3. (Sipser 1.9) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the concatenation of languages in problem 1(d) and 1(b).

4. (Sipser 1.10) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the star of language in problem 1(c).

5. (Sipser 1.14)

   (a) Show that if M is a DFA that recognizes language B, swapping the accept and nonaccept states in M yields a new DFA recognizing the complement of B. Conclude that the class of regular languages is closed under complement.

   (b) Show by giving an example that if M is an NFA that recognizes language C, swapping the accept and nonaccept states in M doesn't necessarily yield a new NFA that recognizes the complement of C. Is the class of languages recognized by NFAs closed under complement? Explain your answer.

6. (Sipser 1.17)

   (a) Give an NFA recognizing the language $(\texttt{01} \cup \texttt{001} \cup \texttt{010})^*$

   (b) Convert this NFA to an equivalent DFA. Give only the portion of the DFA that is reachable from the start state.

7. (Sipser 1.19) Use the procedure described in lecture to convert the following regular expression to nondeterministic finite automata.

   (a) $(\texttt{0} \cup \texttt{1})^*\texttt{000}(\texttt{0} \cup \texttt{1})^*$

   (b) $(((\texttt{00})^*(\texttt{11})) \cup \texttt{01})^*$

   (c) $\emptyset^*$

8. (Sipser 1.41) Let $B_n = \{a^k \mid k$ is multiple of $n\}$. Show that the language B_n is regular.

9. (Sipser 1.31) For languages A and B, let the *perfect shuffle* of A and B be the language

   $$\{w \mid w = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_k b_k \text{ where } a_1 a_2 \cdots a_k \in A \text{ and } b_1 b_2 \cdots b_k \in B, \text{ each } a_i, b_i \in \Sigma\}\}$$

   Show that the class of regular languages is closed under perfect shuffle.

1. (Siper 1.6.cont) Give state diagrams of finite automata recognizing the following languages. In all parts the alphabet is $\{0,1\}$.

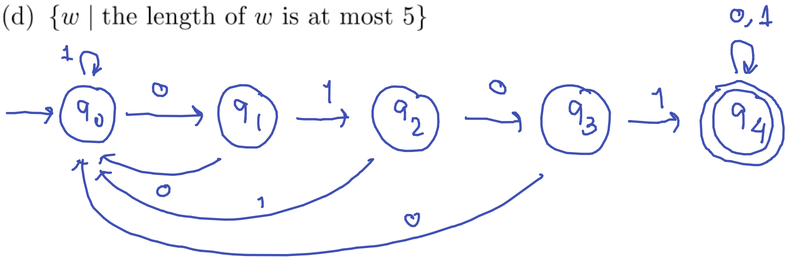
   (a) $\{w \mid w$ contains the substring 0101, i.e., $w = x0101y$ for some x and $y\}$

   (b) $\{w \mid w$ is any string except 11 and 111$\}$

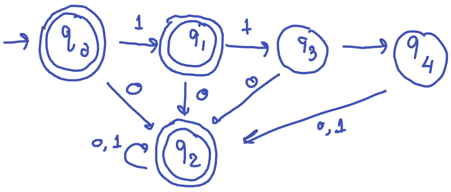
   (c) $\{w \mid$ every odd position of w is a 1$\}$

   (d) $\{w \mid$ the length of w is at most 5$\}$

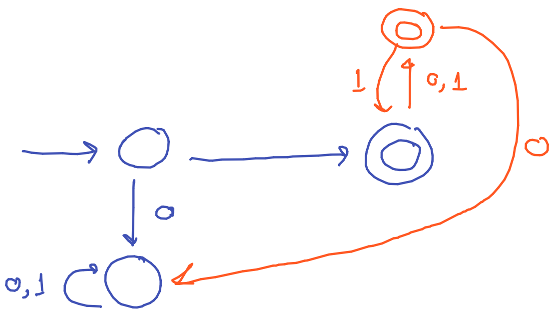
1.a)



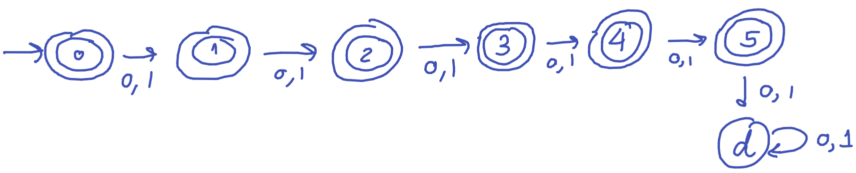
1.b)



1.c)

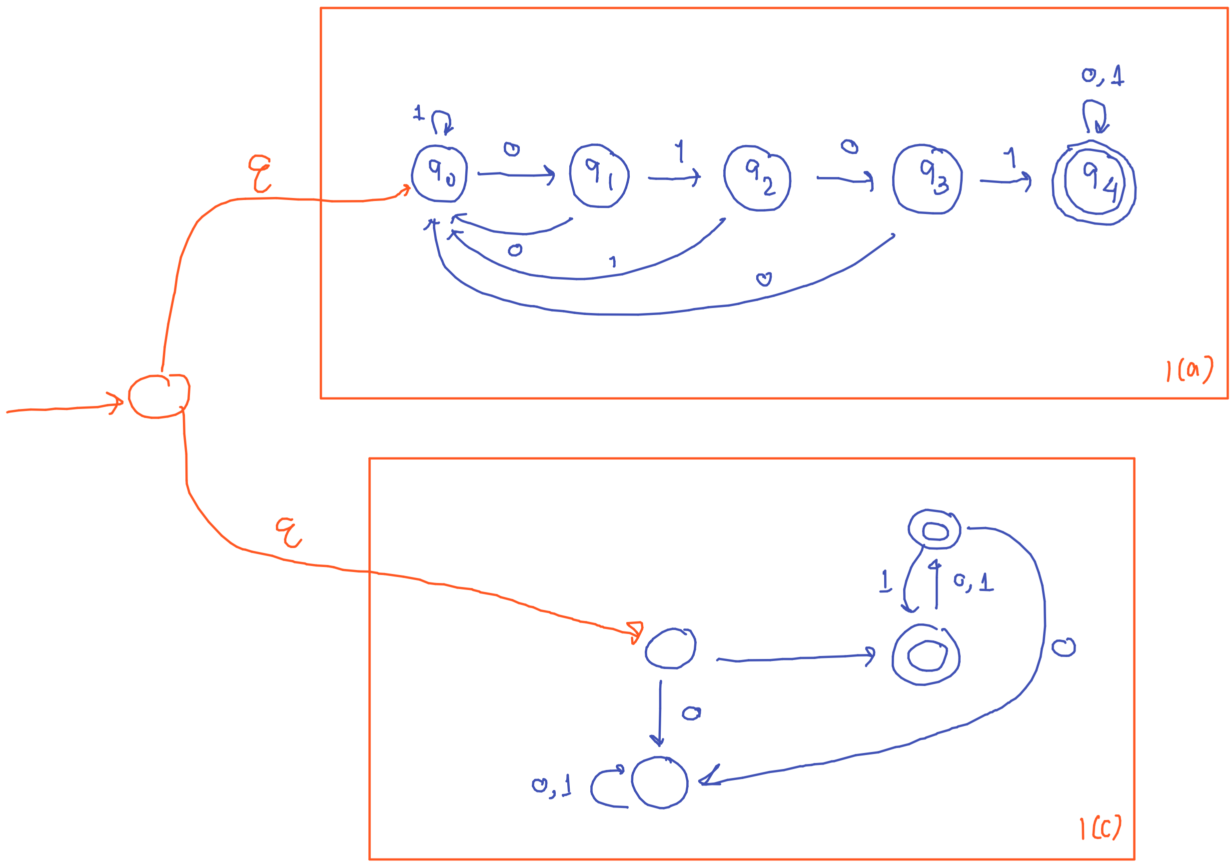


1.d)



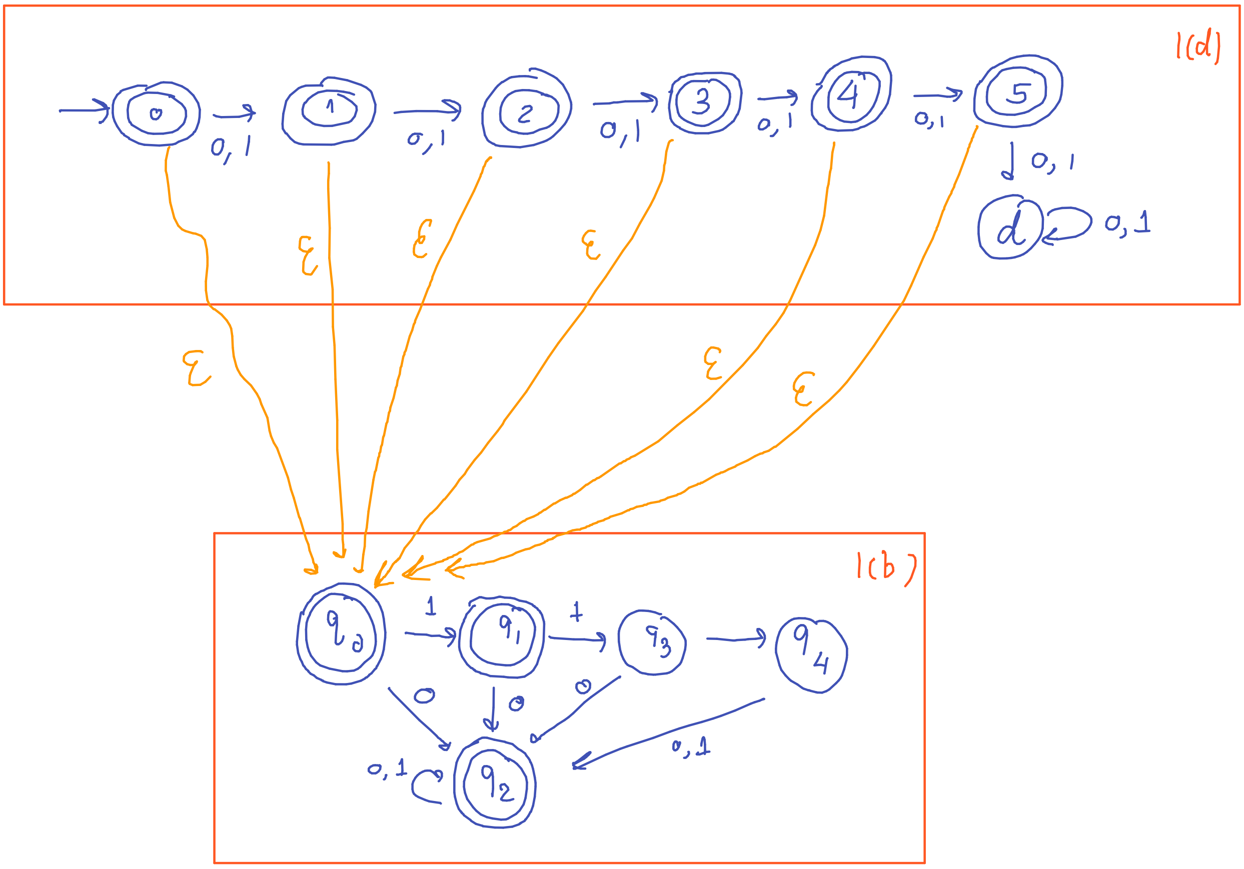
6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

2. (Sipser 1.8) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the union of languages in problem 1(a) and 1(c).



6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

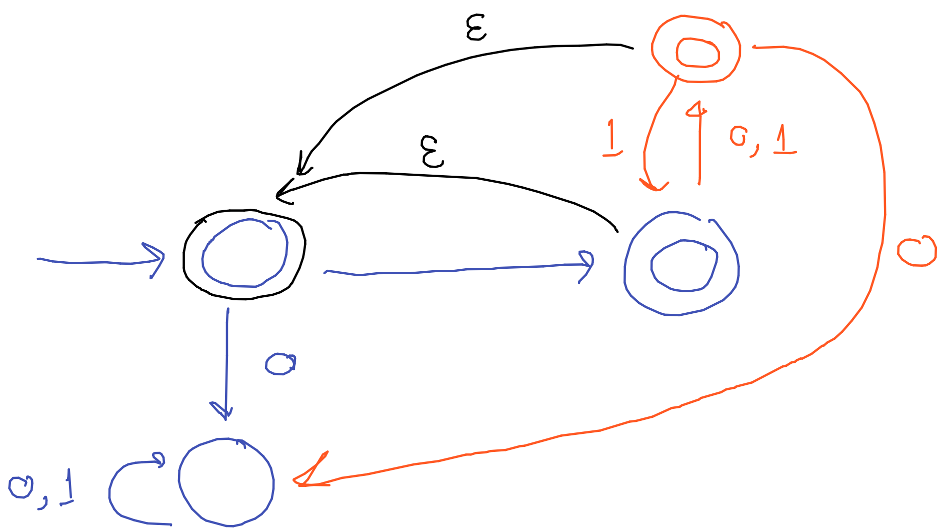
3. (Sipser 1.9) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the concatenation of languages in problem 1(d) and 1(b).

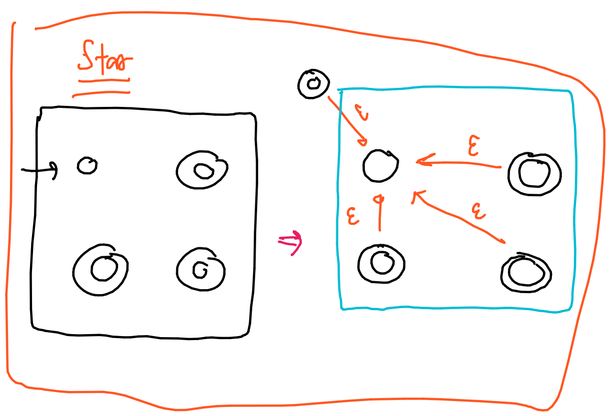


6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

4. (Sipser 1.10) Use the construction described in class to give an NFA recognizing the star of language in problem 1(c).

{w| ตำแหน่งต้นของ w เป็น 1}





6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

5. (Sipser 1.14)

(a) Show that if M is a DFA that recognizes language B, swapping the accept and nonaccept states in M yields a new DFA recognizing the complement of B. Conclude that the class of regular languages is closed under complement.

(b) Show by giving an example that if M is an NFA that recognizes language C, swapping the accept and nonaccept states in M doesn't necessarily yield a new NFA that recognizes the (I) complement of C. (II) Is the class of languages recognized by NFAs closed under complement? Explain your answer.

a) M เป็น DFA ที่ recognize regular language B

ให้ M' เป็น DFA ที่สลับระหว่าง accept state และ non-accept state จาก M

Proof by case

(I) • $\boxed{\text{ถ้า } M' \text{ accepts string } x}$ หมายความว่า x เข้าไปใน M' จะมั่นใจได้อย่างแน่นอนว่าไปถึง accept state ของ M' แน่นอน

• หากมี string x ไปรันใน M → M จะไปสู่ non-accept state ของ M

(II) • $\boxed{\text{ถ้า } M \text{ accepts string } x}$ หมายความว่า x เข้าไปใน M จะมั่นใจได้อย่างแน่นอนว่าไปถึง accept state ของ M แน่นอน

• หากมี string x ไปรันใน M' → M' จะไปสู่ non-accept state ของ M'

ดังนั้น M' จะรับ string ที่ไม่ acceptable โดย M

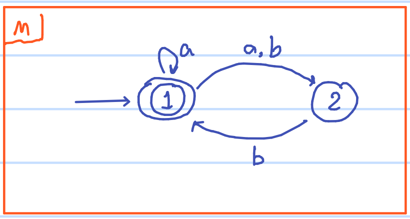
∴ M' recognize ภาษาที่เป็น complement ของ B

เนื่องจาก M recognize B และ M' recognize $\bar{B}$ ซึ่งเป็น regular

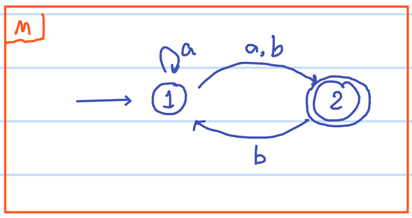
∴ class of regular language closed under complement ■

b) M เป็น NFA ที่ recognized language C

(I) กำหนดให้ M มีการทำงานดังนี้



ดังนั้น →
M' เป็นดังนี้



จะเห็นได้ชัดว่า M accept string "a" และจะเห็นว่า M' accept string "a" เช่นเดียวกัน

จึงแสดงให้เห็นว่า เมื่อเราทำการสลับ accept state และ non-accept state ของ NFA M' ไม่จำเป็นต้องรับ string ที่เป็น complement ของ input ที่ M acceptable ■

(II) พิจารณา facts ต่อไปนี้ : (1) NFA และ DFA แปลงไปกลับกันได้

(2) DFA มีสมบัติปิดของ complemen

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

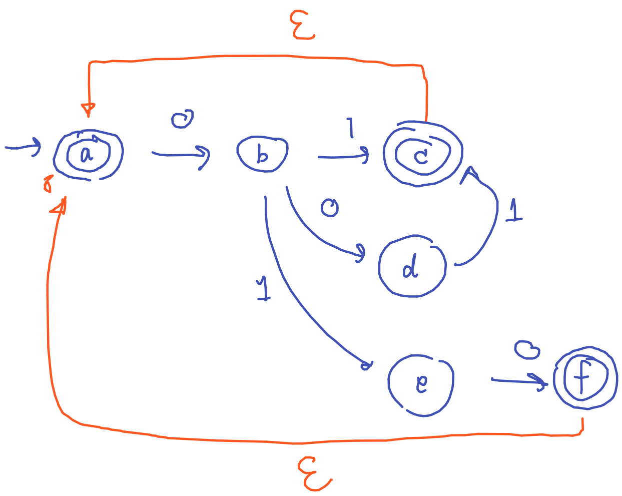
∴ recognizing language ด้วย NFA มีสมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ complement ■

6. (Sipser 1.17)

(a) Give an NFA recognizing the language $(01 \cup 001 \cup 010)^*$ → empty string ได้

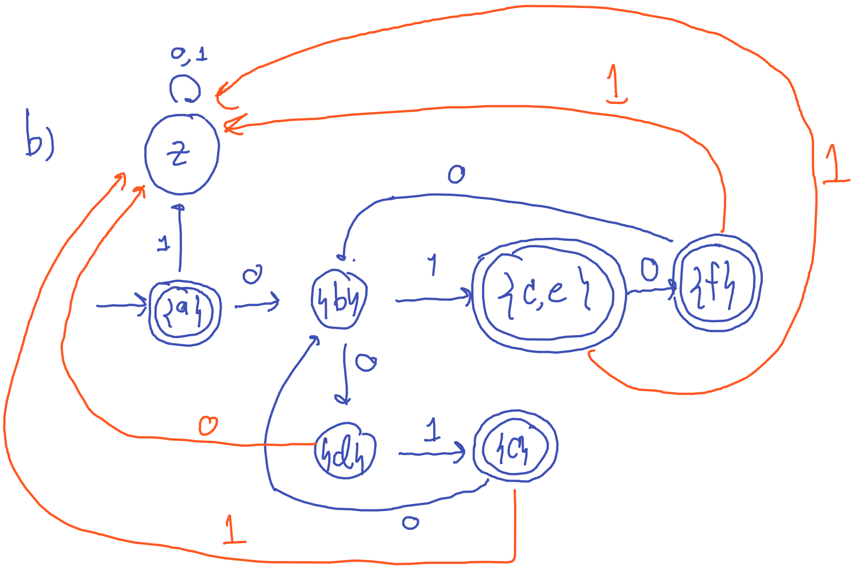
(b) Convert this NFA to an equivalent DFA. Give only the portion of the DFA that is reachable from the start state.

a)



$\Rightarrow M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

b)



$M = (P(Q), \Sigma, \delta', \{q\}, F')$

for z = garbage state

find $\delta'[\{c,e\},1] = \delta[c,1] \cup \delta[e,1]$

$= \{z\}$

$= z$

ที่จริงสามารถยุบ state f ไปรวม a ได้

แต่เพื่อความชัดเจน จึงเพิ่มขึ้นมา

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

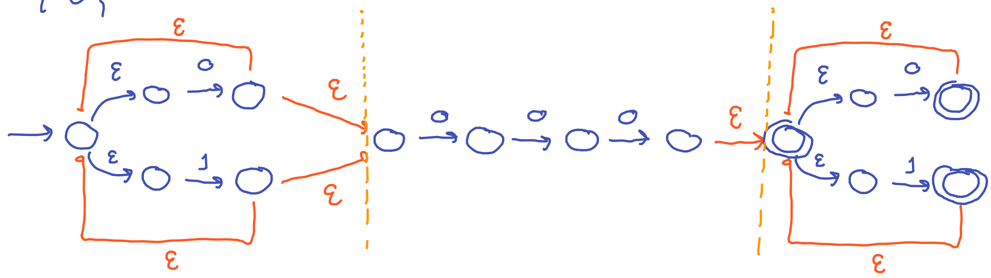
7. (Sipser 1.19) Use the procedure described in lecture to convert the following regular expression to nondeterministic finite automata. NFA

(a) $\boxed{(0 \cup 1)^*}000\boxed{(0 \cup 1)^*}$ = {_}

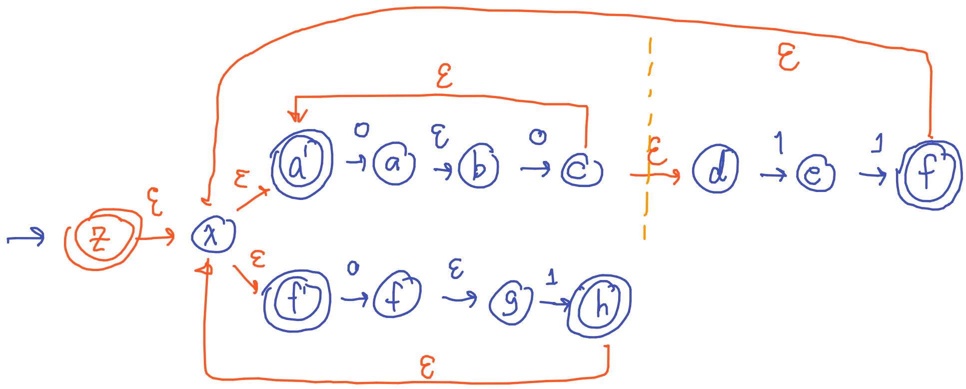
(b) $(((00)^*(11)) \cup 01)^*$ = {_}

(c) $\emptyset^*$ = {ε}

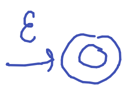
a)



b)



c) $\phi^* = \{\varepsilon\}$



6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

8. (Sipser 1.41) Let $B_n = \{a^k \mid k \text{ is multiple of } n\}$. Show that the language B_n is regular.

Proof by construction

เพราะพิสูจน์ว่า มี machine M ที่ recognize B_n

กำหนดให้ $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

โดยที่ $Q = \{q_0, q_1, q_2 \dots, q_{n-1}\}$

$\Sigma = \{a\}$

δ นิยามโดย

$\delta(q_i, a) = q_{(i+1) \% n}$ โดยที่ $i \in I^+$ และ $0 \leq i \leq n-1$

$q_0 = \{q_0\}$

$F = \{q_0\}$

จะเห็นว่า มี DFA M ที่ recognize B_n

$\therefore$ B_n จึงเป็น regular language ■

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา

41

9. (Sipser 1.31) For languages A and B, let the *perfect shuffle* of A and B be the language

$$\{w \mid w = a_1b_1a_2b_2\cdots a_kb_k \text{ where } a_1a_2\cdots a_k \in A \text{ and } b_1b_2\cdots b_k \in B, \text{ each } a_i, b_i \in \Sigma\}$$

Show that the class of regular languages is closed under perfect shuffle.

กำหนดให้ DFA $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ โดยที่ M_A recognize A

DFA $M_B = (Q_B, \Sigma\ \delta_B, s_B, F_B)$ โดยที่ M_A recognize B

DFA ที่ recognize "perfect shuffle" จะสลับจาก M_A ไปยัง M_B หลังจากที่แต่ละ character ถูกอ่าน และ track ถึงสถานะปัจจุบันของ M_A และ M_B แต่ละตัวอักษรจะต้องขึ้นอยู่กับ M_A หรือไม่ก็ M_B เช่น $a_i b_i \in \Sigma$ เมื่อแต่ละ character ถูกอ่าน DFA ที่ recognize "Perfect shuffle" สถานะจะถูกสลับไปสอดคล้องกับ DFA M_A หรือ M_B หลังจากที่ string ถูกอ่านจนหมด M_A และ M_B จะไปสู่ final state เมื่อ string acceptable จาก DFA ที่ recognize "Perfect shuffle"

Proof by construction

เราจะสร้าง DFA ที่ recognize "Perfect-shuffle" DFA $= (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ โดยที่

$Q = Q_A \times Q_B \times \{A, B\}$: เซตของสถานะที่เป็นไปได้จาก M_A และ M_B เพื่อ match กับ DFA$_{\text{Perfect shuffle}}$

ใช้บอกว่าสถานะถัดไปต้องมอง M_A หรือ M_B เพื่อ equivalent กับ DFA$_{\text{Perfect Shuffle}}$

$\Sigma = \Sigma$

δ นิยามจาก

กรณี $A \to B$: $\delta[(m,n,A), a] = (\delta_A(m,a), n, B)$

กรณี $B \to A$: $\delta[(m,n,B), b] = (m, \delta_B(n,b), A)$

$S = S_A \times S_B \times \{A\}$: โดย S_A และ S_B เป็น set ของ initial state ของ M_A และ M_B ตามลำดับ ซึ่ง state ถัดไปต้องการเริ่มรับ input ซึ่งจะรับจาก Q_A ก่อน

$F = F_A \times F_B \times \{A\}$: โดย F_A และ F_B เป็น set ของ accept state ของ M_A และ M_B ตามลำดับ โดยเราทราบว่าเรารับ string ที่ $b_i \in B$ ดังนั้น state ถัดไปจะต้องชี้ไปที่ M_A

จะเห็นว่ามี DFA ที่ recognize "Perfect shuffle"

แสดงว่า regular language มีสมบัติปิดภายใต้ Perfect shuffle

6310500287 ตะวันฉาย ฉัตรกุล ณ อยุธยา