ชื่อ: เลขประจำตัว:

204213: สอบกลางภาค

1. (8 คะแนน) จงเขียน regular expression ที่อธิบายภาษาต่อไปนี้

$$\{w \mid \ w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \text{ และ } w \text{ ไม่มี } \mathtt{aa} \text{ เป็นสตริงย่อย } \}$$

คำใบ้: จะรับประกันได้อย่างไรว่า a *จะไม่ตามหลัง* a*?*

$(b^* (ab)^* b^*)^* \cup b^* a \cup a$

2. (8 คะแนน) พิจารณาภาษา $L = \{\boxed{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^{n+m}} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ กล่าวอย่างไม่เป็นทางการ L คือภาษาสำหรับการบวก (จำนวนของ c เท่ากับผลบวกของจำนวนของ a กับจำนวนของ b)

จงพิสูจน์ว่า L ไม่ regular.

Proof . by contradiction

ให้ L เป็น regular จาก Pumping lemma กล่าวได้ว่า L จะมี pumping length ขนาด $= p$ และจะมี s ที่ $s \in L$ และ $|s| \geq p$ ซึ่ง s สามารถ เขียนให้อยู่ในรูปของ $s = xy^iz$; $i \geq 0$ โดยที่ $|xy| \leq p$ และ $|y| > 0$

ให้ $s = a^p b^p c^{2p}$ หาก s เป็น regular จริง $xy^iz \in L$

จาก pumping lemma $|xy| \leq p \Rightarrow x$ และ y เป็นได้แค่ a เท่านั้น

หาก y เป็น a อย่างเดียว $\Rightarrow$ จะได้ว่า x และ y ต้องเป็น a อย่างเดียวเท่านั้น (จาก $|xy| \leq p$)

ดังนั้น xy^0z จะมี $|a| + |b| \neq |c| \Rightarrow xy^0z \notin L \Rightarrow$ contradiction

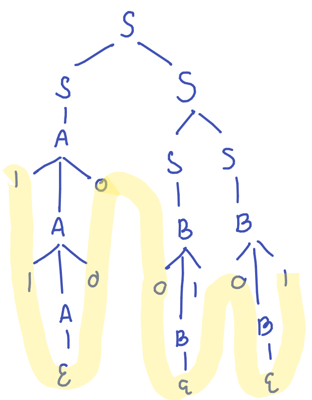
$\therefore L$ ไม่เป็น regular

ชื่อ:	เลขประจำตัว:

3. (8 คะแนน) พิจารณา grammar G_1 ดังด้านล่าง

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SS \mid A \mid B \\
A &\rightarrow 1A0 \mid \varepsilon \qquad 1 \quad 0 \\
B &\rightarrow 0B1 \mid \varepsilon \qquad 0 \quad 1
\end{aligned}
$$

เขียน parse tree สำหรับสตริง 11000101.



= 11ε000ε10ε1

= 11000101

CFG

4. (8 คะแนน) เขียน context-free grammar ที่สร้าง (generate) ภาษา

b ≥ a

$$L_2 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid n \geq m \geq 0\}.$$

S → aSb | B | ε

B → Bb | ε

ปั๊ม a ต้องปั๊ม b ด้วย

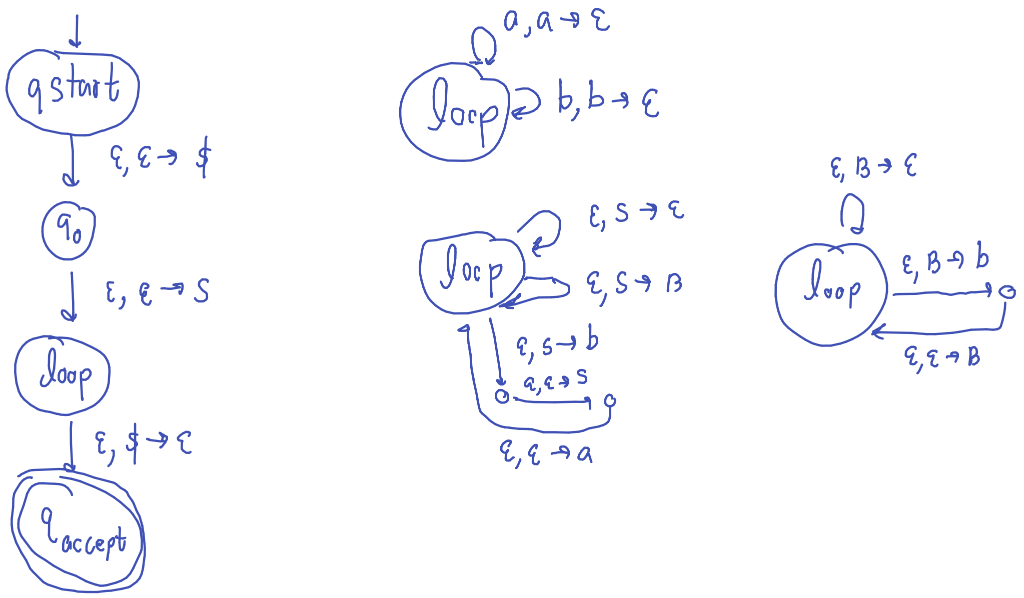
ปั๊ม b ได้ยาว

ชื่อ:	เลขประจำตัว:

5. (8 คะแนน) จงเขียน PDA ที่ recognize ภาษา L_2 (จากข้อ 4)

$S \to aSb \mid B \mid \varepsilon$

$B \to Bb \mid \varepsilon$



ชื่อ:	เลขประจำตัว:

6. (8 คะแนน) พิสูจน์ว่าภาษา

$$C = \{\mathrm{a}^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

ไม่เป็น context-free (C เป็นภาษาของสตริงที่มีความยาวเป็นกำลังสองของจำนวนเต็มบางตัว)

Hint: $p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ *เมื่อ* $p > 0$.

Prove by contradiction

assume ว่า C เป็น context-free

จาก pumping lemma ได้ว่า C จะมี pumping length ขนาด $= p$

ให้ $s \in C$ จะได้ว่าเมื่อ $|s| \geq p$ จะสามารถเขียน $s = uv^ixy^iz$ $i \geq 0$

โดยที่ $|vxy| \leq p$ และ $|vy| > 0$

ให้ $s = a^{(p+1)^2} = a^{p^2} . a^{2p} . a^1$

จาก pumping lemma ที่ว่า $|vxy| \leq p$ ได้ v หรือ y $= a$ เท่านั้น

ให้ $u = a^{p^2+2p}$, $v = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = a^1$, $z = \varepsilon$

$\therefore$ $uv^0xy^0z = a^{p^2+2p} \Rightarrow p^2+2p < p^2+2p+1$

$\therefore$ $uv^0xy^0z \notin C$

จาก pumping lemma หาก C เป็น context-free

contradiction

$uvxyz \in C$ แล้ว $uv^ixy^iz \in C$ ด้วย

$\therefore$ C ไม่เป็น context-free

ชื่อ: เลขประจำตัว:

7. (10 points) แสดงว่าภาษา

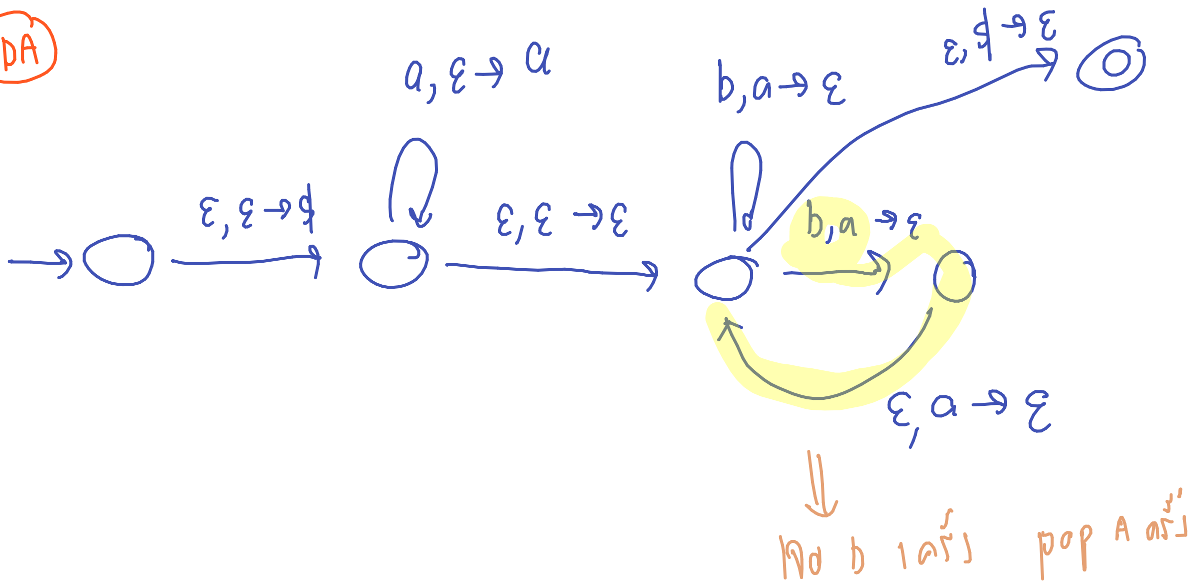
$$A = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid n \le m \le 2n\}$$

เป็นภาษา context-free (โดยการแสดง CFG หรือ PDA ก็ได้)

a = b
หรือ a = 2b

CFG $S \to aSb \mid aaSb \mid \varepsilon$

PDA



ชื่อ:	เลขประจำตัว: 6310500287

8. **สมาชิกไม่ซ้ำ** (10 คะแนน)

ให้รายการของจำนวนบวก เช่น $4, 2, 6$ เราสามารถเขียนจำนวนแต่ละตัวออกมาในรูปของสตริงไบนารี จากนั้นนำมาต่อกันได้ เช่น ลำดับด้านบนเขียนเป็น `100#10#110` สำหรับปัญหาข้อนี้ เราสนใจภาษาที่ประกอบไปด้วยสตริงที่แสดงรายการที่ไม่มีจำนวนซ้ำกัน

ให้ $L = \{w \mid w = x_1\#x_2\#\cdots\#x_k$ เมื่อ $k \geq 0$, ทุก ๆ $x_i \in \{0,1\}^*$, และ $x_i \neq x_j$ เมื่อ $i \neq j\}$. จงพิสูจน์ว่า L ไม่ regular

คำแนะนำ: จะทำอย่างไรให้หลังจาก pump แล้วจะมีสมาชิกซ้ำกัน

Prove by contradiction

assume ให้ L เป็น regular → จาก Pumping lemma กล่าวไว้ว่า L มี pumping length เท่ากับ $= p$ และจะมี s ที่ $s \in L$ โดย $|s| \geq p$

s จะสามารถเขียนได้ในรูป $s = xy^iz$; $i \geq 0$ และ $|xy| \leq p$ และ $|y| > 0$

ให้ $s = 1^p \# 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# \ldots \# 1^2 \# 1^1$

ให้ $y = 1^k$ $v = 1^{p-k}$ $z = 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# \ldots \# 1^1$

ซ้ำกับตัวใน z

$xy^0z = \boxed{1^{p-k}} \# 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# 1^{p-3} \# 1^{p-4} \ldots \# \boxed{1^{p-k}} \# \ldots \# 1^1$

จะเห็นว่า 1^{p-k} จะต้องไปซ้ำกับตัวใดตัวหนึ่ง

$\therefore xy^0z \notin L$ → contradiction กับ pumping lemma

$\therefore L$ not regular