ชื่อ: เลขประจำตัว:

204213: สอบกลางภาค ปีการศึกษา 2564 ภาคต้น

1. (10 คะแนน) ให้ alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ จงเขียน Finite Automata ที่ recognize ภาษาต่อไปนี้ (จะเขียนเป็น deterministic FA หรือ nondeterministic FA ก็ได้)

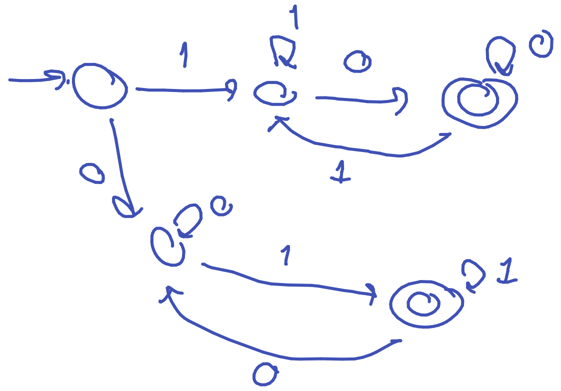
   (a) $\{w \mid w \in \{0,1\}^*$ และ w ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยตัวอักษรแตกต่างกัน $\}$
   ตัวอย่างสตริงในภาษา: 100, 0001 ตัวอย่างสตริงที่ไม่อยู่ในภาษา: 1, 010

   0 1

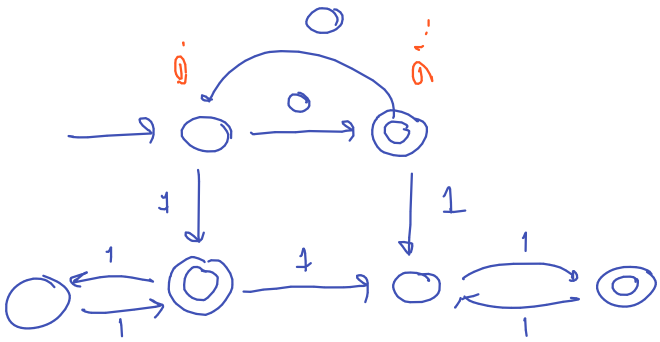
   คี่ + คู่ คู่ + คี่

   (b) $\{w \mid w = 0^p 1^q$ โดยที่ $p + q$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\}$
   หมายเหตุ: เงื่อนไขด้านบนอาจพิจารณาเป็น (p เป็นคู่และ q เป็นคี่) หรือ (p เป็นคี่และ q เป็นคู่) ได้
   ตัวอย่างสตริงในภาษา: 011, 111 ตัวอย่างสตริงที่ไม่อยู่ในภาษา: 100, 0011

a)



b)



2. (10 คะแนน) ให้ alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ จงเขียน regular expression ที่อธิบายภาษาต่อไปนี้

(a) $\{w \mid w \in \{0,1\}^*$ และ w ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยตัวอักษรแตกต่างกัน $\}$
ตัวอย่างสตริงในภาษา: 100, 0001 ตัวอย่างสตริงที่ไม่อยู่ในภาษา: 1, 010

(b) $\{w \mid w \in \{0,1\}^*$ และมี 00 หรือ 11 อยู่ใน w $\}$
ตัวอย่างสตริงในภาษา: 100, 01110 ตัวอย่างสตริงที่ไม่อยู่ในภาษา: 1, 010

a) $0\{0,1\}^*1 \cup 1\{0,1\}^*0$

b) $\Sigma^*00\Sigma^* \cup \Sigma^*11\Sigma^*$

3. (10 คะแนน) ให้ alphabet $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ พิจารณาภาษา

$$L_1 = \{\mathrm{a}^n \mathrm{b}^m \mathrm{c}^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \leq n + m\}$$

กล่าวอย่างไม่เป็นทางการ L_1 คือภาษาที่จำนวน c ไม่มากกว่าจำนวน a และ b รวมกัน จงพิสูจน์ว่า L_1 ไม่ regular. (hint: พิจารณารูปแบบที่เป็นไปได้ในการ pump)

Proof by contradiction

assume ให้ L_1 เป็น regular ⇒ จาก pumping lemma จะได้ว่า L_1 มี pumping length ขนาด $= p$ และจะมี s ที่ $s \in L_1$, $|s| \geq p$ s จะสามารถเขียนในรูป $s = xy^iz$; $i \geq 0$ และ $|xy| \leq p$ และ $|y| > 0$

ให้ $s = a^p b^p c^{2p}$ ⇒ $xy^iz \in L_1$

กรณีที่ 1 : x ไม่ empty ⇒ เมื่อเราทำการ pump y ลง (y^0) จะทำให้ xy^0z มี $|a| + |b|$ ไม่มากกว่า $|c|$

ex $x = a^{p-k}$, $y = a^k$, $z = b^p z^{2p}$

$xy^0z = a^{p-k} b^p z^{2p} \rightarrow k \leq n+m$

$2p \leq p+p-k$

$xy^0z \notin L_1$ contradict

กรณีที่ 2 : ให้ x empty ⇒ เมื่อทำการ pump y ลง (y^0) จะทำให้ xy^0z มี $|a| + |b| < |c|$

ex $x = \varepsilon$, $y = a^p$, $z = b^p c^{2p}$

$xy^0z = b^p c^{2p} \rightarrow$ ไม่มี a $\notin L_1$ contradict

จากข้อสรุปข้อนี้ ได้ว่า L_1 ไม่เป็น regular ∎

4. (10 คะแนน) ให้เซตของ terminals Σ คือ $\{a, \uparrow, (,)\}$ พิจารณา grammar G_1 ดังด้านล่าง

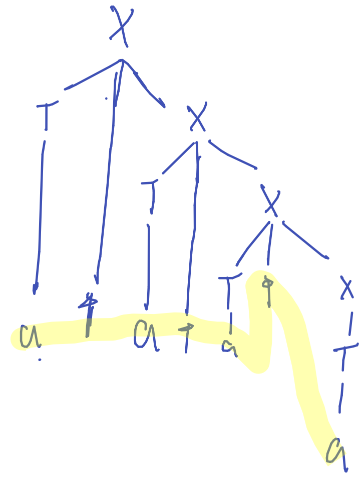
$$\begin{aligned} X &\rightarrow T \uparrow X \mid T \\ T &\rightarrow a \mid (X) \end{aligned}$$

เขียน parse tree สำหรับสตริง (1) a ↑ a ↑ a ↑ a และ

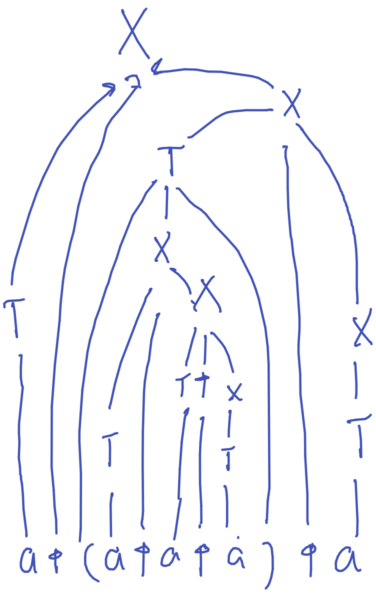
(2) a ↑ (a ↑ a ↑ a) ↑ a.

หมายเหตุ: ในการทำความเข้าใจสามารถพิจารณา ↑ เป็นการยกกำลังได้ grammar ด้านบน starting variable คือ X

1)



2)



$b > a + c$

5. (10 คะแนน) สำหรับภาษา L_2 บน alphabet $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ ต่อไปนี้

$$L_2 = \{\mathrm{a}^m \mathrm{b}^n \mathrm{c}^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0, n \geq m + k\}.$$

ให้เขียน PDA ที่ recognize ภาษา L_2 หรือ context-free grammar ที่สร้าง (generate) ภาษา L_2 (เขียนอย่างใดอย่างหนึ่งก็พอ)

หมายเหตุ: ภาษาดังกล่าวประกอบด้วยสตริงตามรูปแบบ ที่จำนวน b มีไม่น้อยกว่าจำนวน a และ c รวมกัน

$S \to A\ B$

$A \to aAb \mid P$

$B \to bBC \mid P$

$P \to bP \mid \varepsilon$

A ปั้ม a b

B ปั้ม b c

6. (10 คะแนน) พิสูจน์ว่าภาษา

$$C = \{\mathrm{a}^n \mathrm{b}^{2n} \mathrm{a}^n \mid n \geq 0\}$$

ไม่เป็น context-free

Prove by contradiction

assume ให้ C เป็น context free จาก pumping lemma C จะมี

pumping length = p และจะมี string s ที่ $s \in C$ โดยที่ $|s| \geq p$

และเราสามารถเขียน s ในรูปแบบ $s = uv^i x y^i z$ โดยที่ $i \geq 0$

เพราะ $|vy| > 0$ และ $|vxy| \leq p$

ให้ $s = a^p b^{2p} a^p = a^p b^p b^p a^p$

กรณีที่ 1 vxy เป็น a หมด

เมื่อเรา pump v และ y ลง จะทำให้ a มีจำนวนน้อยกว่า b $\notin C \Rightarrow$ เป็นไปไม่ได้

โดยกรณีที่เรากำหนดให้ v และ y เป็น a ข้างหน้า b หรือหลัง b จะเป็นไปในทางเดียวกัน

กรณีที่ 2 vxy เป็น b หมด

เมื่อเรา pump v และ y ลง จะทำให้ b มีจำนวนน้อยกว่า a $\notin C \Rightarrow$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 3 vxy เป็น ผสม alphabet
- v เป็น a และ xy เป็น b
- หรือ v เป็น b และ xy เป็น a

$\Rightarrow$ จะทำให้ จำนวนของ $a \neq b \notin C$

$\Rightarrow$ เป็นไปไม่ได้

$u = a^{p-k}$, $v = a^k$, $x = b^k$, $y = b^{p-2k}$, $z = b^k a^p$

$$uv^0xy^0z = a^{p-k} b^k b^{p-2k} \cdot b^k a^p = a^{p-k} b^k b^{p-k} a^p = a^{p-k} \cdot b^p a^p$$

จะเห็นว่า $uv^0xy^0z \notin C$ เพราะ a ลดลง

จะเห็นว่า s ไม่สามารถ pump ด้วย pumping lemma ได้ → contradiction

$\therefore$ C ไม่เป็น context free

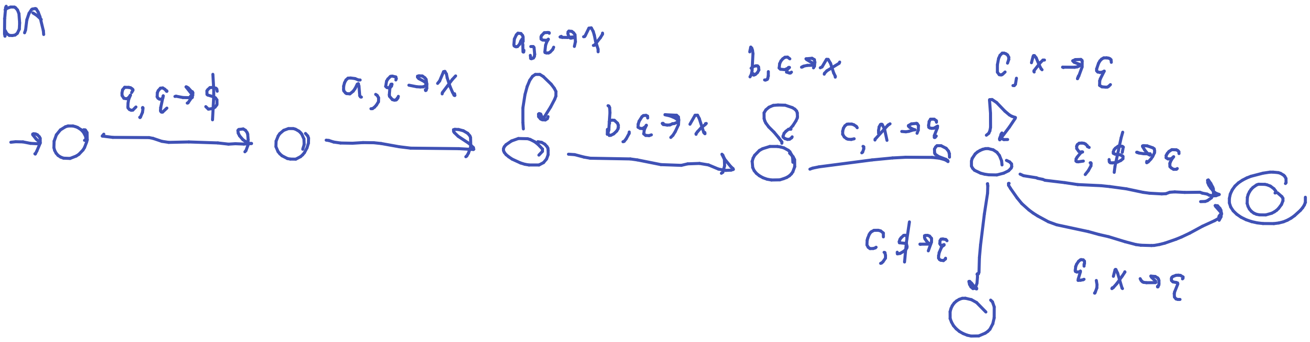
7. (10 คะแนน) ให้ alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ ให้แสดงว่าภาษา

$$L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \leq n + m\}$$

เป็นภาษา context-free (โดยการแสดง CFG หรือ PDA ก็ได้)

หมายเหตุ: ภาษาเดียวกับในข้อ 3

PDA



CFG

$S \to aSc \mid aS \mid X \mid \varepsilon$

$X \to bXc \mid bX \mid \varepsilon$

<u>Prove that</u> $C = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ ไม่เป็น context-free

Hint $p^2+p < p^2+2p+1 = (p+1)^2$ เมื่อ $p > 0$

Prove by contradiction

assume ว่า C เป็น context-free

จาก pumping lemma ได้ว่า C จะมี pumping length ขนาด $= p$

ให้ $s \in C$ จะได้ว่าเมื่อ $|s| \geq p$ จะสามารถเขียนได้ $s = uv^i x y^i z$ $i \geq 0$

โดยที่ $|vxy| \leq p$ และ $|vy| > 0$

ให้ $s = a^{(p+1)^2} = a^{p^2} . a^{2p} . a^1$

จาก pumping lemma ที่บอกว่า $|vxy| \leq p$ ได้ v หรือ $y = a$ เท่านั้น

ให้ $u = a^{p^2+2p}$, $v = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = a^1$, $z = \varepsilon$

$$\therefore \quad uv^0xy^0z = a^{p^2+2p} \Rightarrow p^2+2p < p^2+2p+1$$

$$\therefore \quad uv^0xy^0z \notin C$$

จาก pumping lemma หาก C เป็น context-free

แล้ว $uvxyz \in C$ แล้ว $uv^ixy^iz \in C$ ด้วย

contradiction

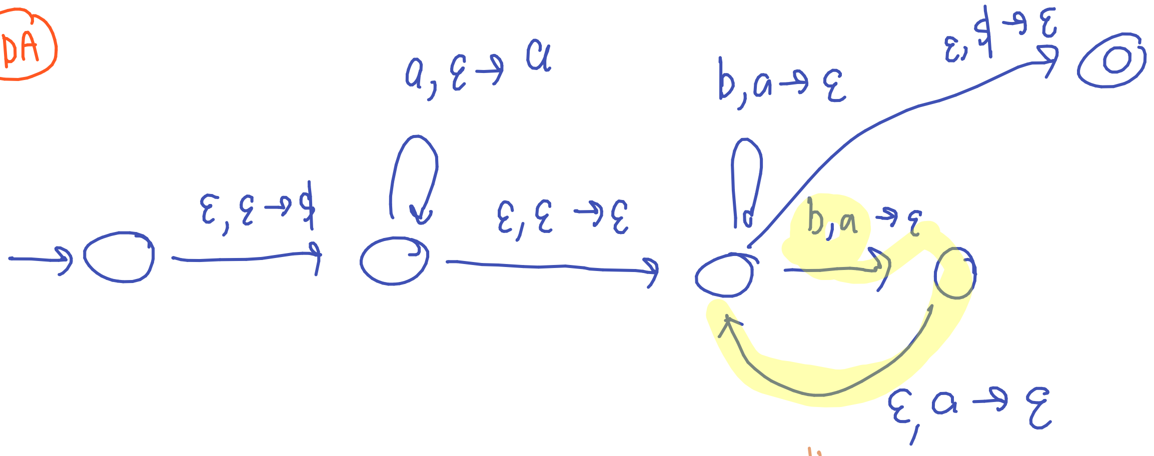
$\therefore$ C ไม่เป็น context-free

Prove that: $A = \{ a^m b^n \mid n \leq m \leq 2n \}$ A is context-free

(CFG | PDA)

CFG $S \rightarrow aSb \mid aaSb \mid \varepsilon$

PDA



$\Downarrow$

เจอ b 1 ครั้ง pop A ครั้ง

8. **สมาชิกไม่ซ้ำ** (10 คะแนน)

ให้รายการของจำนวนบวก เช่น 4, 2, 6 เราสามารถเขียนจำนวนแต่ละตัวออกมาในรูปของสตริงไบนารี จากนั้นนำมาต่อกันได้ เช่น ลำดับด้านบนเขียนเป็น `100#10#110` สำหรับปัญหาข้อนี้ เราสนใจภาษาที่ประกอบไปด้วยสตริงที่แสดงรายการที่ไม่มีจำนวนซ้ำกัน

ให้ $L = \{w \mid w = x_1\#x_2\#\cdots\#x_k$ เมื่อ $k \geq 0$, ทุก ๆ $x_i \in \{0,1\}^*$, และ $x_i \neq x_j$ เมื่อ $i \neq j\}$.

จงพิสูจน์ว่า L ไม่ regular   vxy

คำแนะนำ: จะทำอย่างไรให้หลังจาก pump แล้วจะมีสมาชิกซ้ำกัน

Prove by contradiction

assume ให้ L เป็น regular → จาก Pumping lemma กล่าวไว้ว่า L มี pumping length หนึ่ง $= p$ และจะมี s ที่ $s \in L$ โดย $|s| \geq p$

s จะสามารถเขียนได้ในรูป $s = xy^iz$; $i \geq 0$ และ $|xy| \leq p$ และ $|y| > 0$

ให้ $s = 1^p \# 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# \dots \# 1^2 \# 1^1$

ให้ $y = 1^k$ $x = 1^{p-k}$ $z = 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# \dots \# 1^1$

ซ้ำกับตัวใน z

$xy^0z = \boxed{1^{p-k}} \# 1^{p-1} \# 1^{p-2} \# 1^{p-3} \# 1^{p-4} \dots \# \boxed{1^{p-k}} \# \dots \# 1^1$

จะเห็นว่า 1^{p-k} จะต้องไปซ้ำกับตัวใดตัวหนึ่ง

$\therefore xy^0z \notin L$ → contradiction กับ pumping lemma

$\therefore L$ not regular