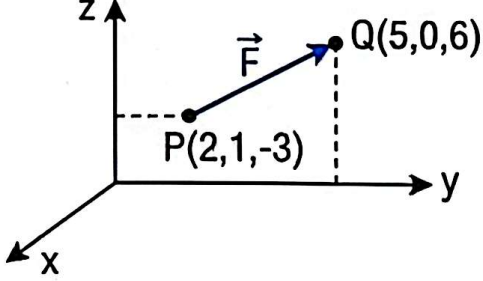


Concept 1 : কাজ ও ভেক্টর বিশ্লেষণ (Work & Vector Analysis)

এই কনসেপ্টের অংকগুলোকে ৩টি সাব-টাইপে (Sub-type) ভাগ করা হলো।

Type A : ভেক্টর ও ডট গুণন (Engineering Standard)



১. [মাস্টার প্রবলেম - ভেক্টর]

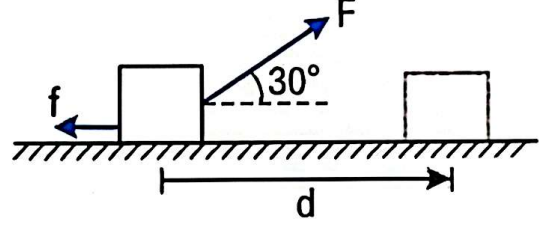
$\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\text{N}$ বল প্রযুক্ত হওয়ায়
কণাটি P হতে Q বিন্দুতে স্থানান্তরিত হলো।

- (ক) কৃতকাজের পরিমাণ?
- (খ) মধ্যবর্তী কোণ?
- (গ) Y-অক্ষ বরাবর ৪ মি. সরলে কাজ?
- (ঘ) বলটি কি সংরক্ষণশীল?

২. $\vec{F} = (-5\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k})\text{N}$, P(-6, 7, -1) থেকে Q(-3, -8, 4)।

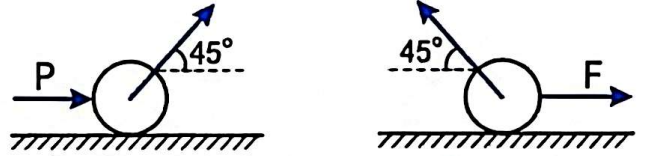
- (ক) কাজ কত?
- (খ) কেন্দ্রমুখী বল? (হিন্টস: কাজ=০)।

Type B : আনত তল, ঘর্ষণ ও লক্কি বল (Complex Scenarios)



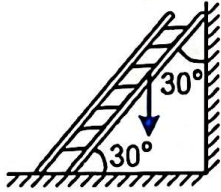
৩. [মাস্টার প্রবলেম] 50N বল 30° কোণে, 10N ঘর্ষণ, 5m সরণ।

- (ক) প্রযুক্ত বল দ্বারা কাজ?
- (খ) ঘর্ষণ দ্বারা কাজ?
- (গ) লক্কি বল দ্বারা কাজ?
- (ঘ) অনুভূমিকভাবে প্রয়োগ করলে পরিবর্তন?



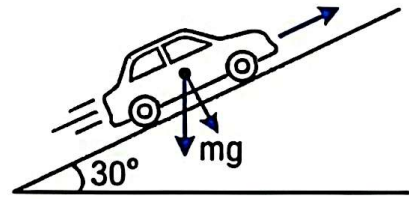
৪. [রোলার টানা ও ঠেলা] 20N বল 45° কোণে ঠেলা ও টানা, 75m সরণ। কার কাজ বেশি ও কেন?

Type C : অভিকর্ষজ কাজ - মই ও সিঁড়ি (Tricky Angles)



৫. [মাস্টার প্রবলেম] 70kg ব্যক্তি + 20kg বোঝা, 6m মই।

- (ক) ভূমির সাথে 30° কোণে কাজ?
- (খ) দেওয়ালের সাথে 30° কোণে কাজ?
- (গ) 4m খাড়া দড়ি বেয়ে উঠলে?



৬. 3000kg গাড়ি, 30° আনত তলে 500m শীর্ষে তোলা। কৃতকাজ?

Type D : অনুধাবন ও এমসিকিউ স্পেশাল (MCQ & Viva)

- ৭. 10N বল, 100m সরণ, কোণ 60°। কাজ কত?
- ৮. কোণ কত হলে কাজ শূন্য?
- ৯. কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কাজ?
- ১০. 40N বস্তু 3m উচুতে ২ সেকেন্ড ধরে রাখতে কাজ?

Type A: ভেক্টর ও ডট গুণন (Engineering Standard)

প্রশ্ন নং-০১

উদ্দীপক: একটি কণার উপর $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\text{N}$ বল প্রযুক্ত হওয়ায় কণাটি $P(2,1,-3)$ বিন্দু হতে $Q(5,0,6)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হলো।

(ক) বল দ্বারা কৃতকাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [KUET '15-16, IUT '18-19]

সমাধান: দেওয়া আছে, প্রযুক্ত বল, $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})\text{N}$

আদি অবস্থান, $\vec{r}_P = (2\hat{i} + 1\hat{j} - 3\hat{k})\text{m}$

শেষ অবস্থান, $\vec{r}_Q = (5\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k})\text{m}$

সরণ ভেক্টর, $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = (5-2)\hat{i} + (0-1)\hat{j} + (6-(-3))\hat{k}$
 $= 3\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}\text{m}$

আমরা জানি, কৃতকাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k})$
 $= (2 \times 3) + (3 \times -1) + (-4 \times 9)$
 $= 6 - 3 - 36 = -33\text{ J}$

উত্তর: কৃতকাজের পরিমাণ -33 J ।

(খ) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [Board Exam, Eng QB]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{r} = 3\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$

‘ক’ হতে পাই, $\vec{F} \cdot \vec{r} = -33$

মান নির্ণয়: $|\vec{F}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

$|\vec{r}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

আমরা জানি, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{|\vec{F}| |\vec{r}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{\sqrt{29} \times \sqrt{91}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{51.37}\right) = 129.97^\circ$ (প্রায়)

উত্তর: মধ্যবর্তী কোণ 129.97° ।

(গ) যদি কণাটি Y-অক্ষ বরাবর ৪ মিটার সরে যেত, তবে কাজের পরিমাণ কত হতো?

সমাধান: দেওয়া আছে, সরণ Y-অক্ষ বরাবর, তাই $\vec{r} = 4\hat{j}$

[Concept Book]

বল, $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

আমরা জানি, কাজ $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (4\hat{j}) = (3 \times 4)$ [শুধু \hat{j} এর সহগ গুণ হবে]
 $= 12\text{ J}$

উত্তর: কাজের পরিমাণ 12 J হতো।

(ঘ) বলটি কি সংরক্ষণশীল? গাণিতিক যুক্তি দাও। [Whiteboard Lecture]

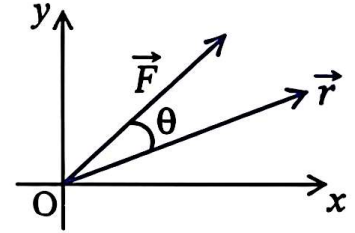
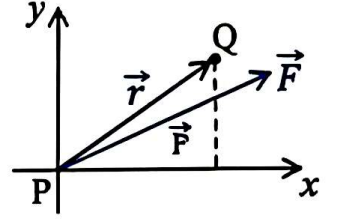
সমাধান: কোনো বল সংরক্ষণশীল হতে হলে তার কার্ল (Curl) শূন্য হতে হবে।

অর্থাৎ $\nabla \times \vec{F} = 0$ হতে হবে।

এখানে, $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ । এটি একটি ধ্রুব বল (Constant Force)। ধ্রুব ভেক্টরের ডিফারেন্সিয়েশন বা ব্যবকলন সর্বদা শূন্য হয়।

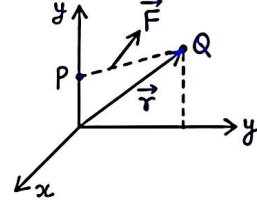
সুতরাং, $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

যেহেতু বলটির কার্ল শূন্য, তাই এটি একটি সংরক্ষণশীল বল।



প্রশ্ন নং-০২

উদ্দীপক: একটি কণার উপর $\vec{F} = (-5\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k})N$ বল প্রয়োগ
করায় কণাটি $P(-6, 7, -1)$ বিন্দু থেকে $Q(-3, -8, 4)$ বিন্দুতে
স্থানান্তরিত হলো।



(ক) বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ কত? [Rajshahi Board '23]

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\vec{F} = -5\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\begin{aligned}\text{সরণ, } \vec{r} &= \vec{r}_Q - \vec{r}_P = (-3 - (-6))\hat{i} + (-8 - 7)\hat{j} + (4 - (-1))\hat{k} \\ &= 3\hat{i} - 15\hat{j} + 5\hat{k}\end{aligned}$$

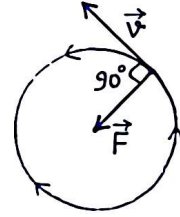
$$\begin{aligned}\text{আমরা জানি, } W &= \vec{F} \cdot \vec{r} = (-5 \times 3) + (-3 \times -15) + (-6 \times 5) \\ &= -15 + 45 - 30 = 0 \text{ J}\end{aligned}$$

উত্তর: কাজের পরিমাণ 0 J।

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত বলটি কি কেন্দ্রমুখী বল ছিল? গাণিতিকভাবে
বিশ্লেষণ কর। [Concept Book Q-24]

সমাধান: আমরা 'ক' হতে পাই, বল দ্বারা কৃতকাজ
 $W = 0$ ।

আমরা জানি, কেন্দ্রমুখী বল সর্বদা সরণের (বা
বেগের) সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে। ফলে বল ও
সরণের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$ হয়।



যেহেতু $W = Fs \cos 90^\circ = 0$, তাই কাজ শূন্য হলে বলটি কেন্দ্রমুখী
বল হওয়ার শর্ত পূরণ করে।

সিদ্ধান্ত: যেহেতু কৃতকাজ শূন্য, তাই উদ্দীপকের বলটি কেন্দ্রমুখী বল
হিসেবে ক্রিয়া করেছে।

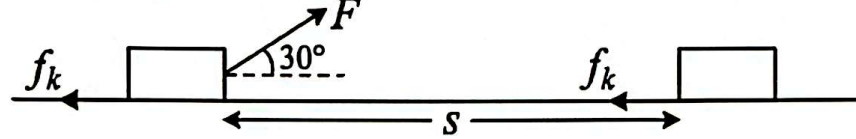
Type B : আনত তল, ঘর্ষণ ও লব্ধি বল (Complex Scenarios)

প্রশ্ন নং-০৩

উদ্দীপক: একটি বাক্সকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 50N বল দ্বারা একটি অমসৃণ মেঝের ওপর দিয়ে টানা হচ্ছে। বাক্সে 10N এর একটি ঘর্ষণ বল গতির বিপরীতে বাধা দেয়। বাক্সটি ডানদিকে 5m সরে গেল।

(ক) প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃতকাজ কত? [Concept Book Q-25]

সমাধান: দেওয়া আছে, প্রযুক্ত বল, $F = 50 \text{ N}$, কোণ, $\theta = 30^\circ$, সরণ, $s = 5 \text{ m}$



আমরা জানি, কাজ, $W = Fs \cos \theta$

$$= 50 \times 5 \times \cos 30^\circ$$

$$= 250 \times 0.866 = 216.5 \text{ J}$$

উত্তর: প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃতকাজ 216.5 J।

(খ) ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজ কত? [Concept Book]

সমাধান: দেওয়া আছে, ঘর্ষণ বল, $f_k = 10 \text{ N}$, সরণ, $s = 5 \text{ m}$

ঘর্ষণ বল সর্বদা গতির বিপরীতে কাজ করে, তাই $\theta = 180^\circ$ ।

আমরা জানি, ঘর্ষণ বল দ্বারা কাজ, $W_f = f_k s \cos 180^\circ$

$$= 10 \times 5 \times (-1) = -50 \text{ J}$$

উত্তর: ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজ -50 J।

(গ) বাক্সটির ওপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বা নিট বল (Net Force) দ্বারা কৃতকাজ নির্ণয় কর। [Concept Book, BUET Standard]

সমাধান: বাক্সটি অনুভূমিকভাবে সরে যাচ্ছে।

$$\begin{aligned} \text{গতির দিকে প্রযুক্ত বলের উপাংশ} &= F \cos 30^\circ \\ &= 50 \cos 30^\circ = 43.30 \text{ N} \end{aligned}$$

গতির বিপরীতে ঘর্ষণ বল = 10 N

$$\therefore \text{লব্ধি বল, } F_{\text{net}} = 43.30 - 10 = 33.30 \text{ N}$$

আমরা জানি, লব্ধি বল দ্বারা কাজ, $W_{\text{net}} = F_{\text{net}} \times s = 33.30 \times 5 = 166.5 \text{ J}$

(বিকল্প পদ্ধতি: মোট কাজ = প্রযুক্ত বলের কাজ + ঘর্ষণ বলের কাজ
 $= 216.5 - 50 = 166.5 \text{ J}$)

উত্তর: লব্ধি বল দ্বারা কৃতকাজ 166.5 J।

(ঘ) যদি একই বল অনুভূমিকভাবে প্রয়োগ করা হতো, তবে কাজের পরিমাণে কী পরিবর্তন আসতো? [Textbook Q-12]

সমাধান: বল অনুভূমিকভাবে প্রয়োগ করলে, $\theta = 0^\circ$ ।

$$\text{নতুন কাজ, } W' = Fs \cos 0^\circ = 50 \times 5 \times 1 = 250 \text{ J}$$

আগের কাজ ছিল 216.5 J।

$$\text{কাজের পরিবর্তন} = 250 - 216.5 = 33.5 \text{ J}$$

উত্তর: কাজের পরিমাণ 33.5 J বৃদ্ধি পেত।

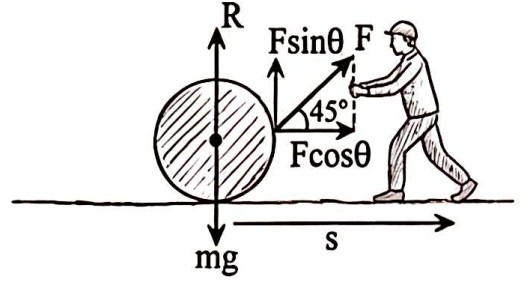
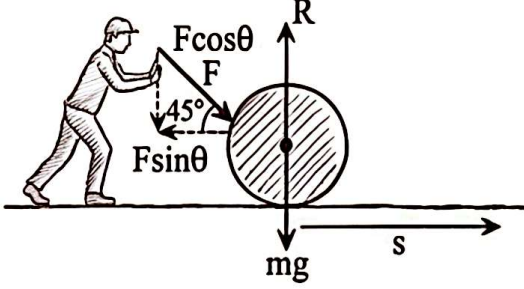
Type B: আনত তল, ঘর্ষণ ও লব্ধি বল (Complex Scenarios)

প্রশ্ন নং-০৪

উদ্দীপক: একজন রোলার চালক অনুভূমিকের সাথে 45° কোণ করে 20N বলে একটি রোলারকে ঠেলে 75m সরালো। আরেকজন একই ভরের রোলারকে একই কোণে একই বল প্রয়োগ করে টেনে একই দূরত্ব সরালো।

প্রশ্ন: কার দ্বারা কৃতকাজ বেশি হবে এবং কেন? গাণিতিকভাবে দেখাও।

[Concept Book Q-11, Board Exam]



সমাধান: দেওয়া আছে, বল, $F = 20\text{ N}$; সরণ, $s = 75\text{ m}$; কোণ, $\theta = 45^\circ$.

১ম ক্ষেত্রে (ঠেলা): কৃতকাজ, $W_{\text{push}} = Fs \cos\theta = 20 \times 75 \times \cos 45^\circ = 1500 \times 0.707 = 1060.66\text{ J}$.

২য় ক্ষেত্রে (টানা): কৃতকাজ, $W_{\text{pull}} = Fs \cos\theta = 20 \times 75 \times \cos 45^\circ = 1060.66\text{ J}$.

গাণিতিক বিশ্লেষণ: শুধুমাত্র প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃতকাজের পরিমাণ উভয় ক্ষেত্রে সমান (1060.66 J)। তবে, বাস্তবে ঠেলার সময় ওজন ও বলের উল্লম্ব উপাংশ যোগ হয়ে ঘর্ষণ বৃদ্ধি করে ($R = mg + F \sin\theta$), আর টানার সময় ওজন থেকে বলের উপাংশ বিয়োগ হয়ে ঘর্ষণ কমায় ($R = mg - F \sin\theta$)। তাই কার্যকর বা নিট কাজের ক্ষেত্রে টানার সময় কম শক্তি ব্যয় হয়। কিন্তু প্রশ্নে উল্লেখিত বল দ্বারা কৃতকাজ গাণিতিকভাবে সমান।

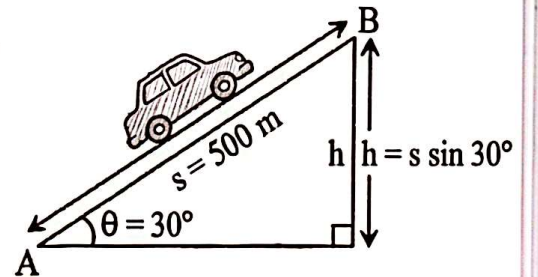
উত্তর: প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃতকাজ উভয় ক্ষেত্রে সমান।

Type C: অভিকর্ষজ কাজ - মই ও সিঁড়ি (Tricky Angles)

প্রশ্ন নং-০৬

উদ্দীপক: 3000kg ভরের একটি গাড়িকে ইঞ্জিনের সাহায্যে 30° কোণে আনত তলের পাদদেশ থেকে 500m দূরে শীর্ষবিন্দুতে তোলা হলো।

প্রশ্ন: গাড়িটি A হতে B তে নিতে কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। (ঘর্ষণ উপেক্ষা কর)। [Jashore Board '24]



সমাধান: দেওয়া আছে, ভর, $m = 3000\text{ kg}$; তলের দৈর্ঘ্য, $s = 500\text{ m}$; কোণ, $\theta = 30^\circ$.

উল্লম্ব উচ্চতা, $h = s \sin 30^\circ = 500 \times 0.5 = 250\text{ m}$.

আমরা জানি, কৃতকাজ, $W = mgh = 3000 \times 9.8 \times 250 = 7,350,000\text{ J} = 7.35 \times 10^6\text{ J}$.

উত্তর: কৃত কাজের পরিমাণ $7.35 \times 10^6\text{ J}$

প্রশ্ন নং-০৫

উদ্দীপক: 70kg ভরের একজন ব্যক্তি 20kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে একটি মই বেয়ে ওপরে উঠছেন। মইটির দৈর্ঘ্য 6m।

(ক) মইটি যদি অনুভূমিকের (Ground) সাথে 30° কোণে থাকে, তবে ব্যক্তিটি মোট কত কাজ করলেন? [RUET '04-05]

সমাধান:

দেওয়া আছে, মোট ভর, $m = 70 + 20 = 90 \text{ kg}$

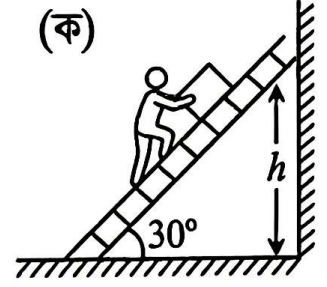
মইয়ের দৈর্ঘ্য (সরণ), $s = 6 \text{ m}$

ভূমির সাথে কোণ, $\theta = 30^\circ$

উল্লম্ব উচ্চতা, $h = s \sin 30^\circ = 6 \times 0.5 = 3 \text{ m}$

আমরা জানি, অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কাজ, $W = mgh = 90 \times 9.8 \times 3 = 2646 \text{ J}$

উত্তর: কৃতকাজ 2646 J।



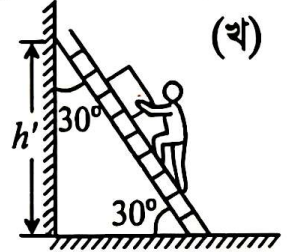
(খ) মইটি যদি উল্লম্ব দেওয়ালের (Wall) সাথে 30° কোণে থাকে, তবে কাজের পরিমাণ কত হবে? [Textbook Q-15]

সমাধান: দেওয়ালের সাথে কোণ 30° হলে, ভূমির সাথে মইয়ের কোণ $= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ।

\therefore উল্লম্ব উচ্চতা, $h' = s \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5.196 \text{ m}$

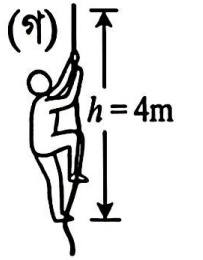
আমরা জানি, কাজ, $W = mgh' = 90 \times 9.8 \times 5.196 = 4582.87 \text{ J}$

উত্তর: কৃতকাজ 4582.87 J।



(গ) যদি মই না ব্যবহার করে তিনি 4m উচ্চতায় খাড়া দড়ি বেয়ে উঠতেন, তবে কাজের কোনো পরিবর্তন হতো কি? [Conceptual]

সমাধান: তখন উচ্চতা $h = 4 \text{ m}$ হতো। কাজ $W = mgh = 90 \times 9.8 \times 4 =$ 'ক' এর সাথে তুলনা করলে কাজ বাড়ত, কারণ উচ্চতা বেশি। অভিকর্ষজ কাজ পথের ওপর নির্ভর করে না, শুধুমাত্র উল্লম্ব উচ্চতার ওপর নির্ভর করে।



Type D: অনুধাবন ও এমসিকিউ স্পেশাল (MCQ & Viva Solutions)

৭. ১০N বল প্রয়োগে একটি গাড়িকে ১০০m সরাতে কত কাজ করতে হবে, যদি বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 60° হয়? [BUET '13-14]

সমাধান: $W = Fs \cos 60^\circ = 10 \times 100 \times 0.5 = 500 \text{ J}$ ।

৮. বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ কত হলে কাজের মান শূন্য হবে? [BUET '10-11]

সমাধান: $W = Fs \cos \theta$ । কাজ শূন্য হবে যদি $\cos \theta = 0$ হয়। অর্থাৎ $\theta = 90^\circ$ হলে।

৯. কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজের মান কত? [BUTEX '09-10]

সমাধান: শূন্য (0)। কারণ কেন্দ্রমুখী বল ও সরণের কোণ সর্বদা 90° থাকে।

১০. ৪০N ওজনের একটি বস্তুকে মেঝে থেকে ৩m উঁচুতে ২ সেকেন্ড ধরে রাখতে কাজের পরিমাণ কত? [BUET '10-11]

সমাধান: শূন্য (0)। কারণ বস্তুটিকে ধরে রাখা অবস্থায় কোনো সরণ ঘটছে না ($s = 0$), তাই কাজ $W = F \times 0 = 0$ ।