微分積分学演習第二 T

22B30460 知念 優 (ちねん ゆう)

2022/10/12

C10

(1) $|a| < 1$ のとき，a_n は 0 に収束する．それ以外のとき，a_n は収束しない． □

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}$$

である．これを利用すると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-\infty} = 0$$

となる． □

(3) e の定義より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e\times e = e^2$$

となる． □

C12

(1) a_n が有界でかつ単調であることを示す．

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1} = 2-\frac{1}{a_{n+1}}$$

であることと，$a_n 1 = 1$ より帰納的に $1 \leq a_n \leq 2$ である．よって，数列 $\{a_n\}$ は有界である．
また，$a_{n+1}-a_n$ を考えると，その正負は帰納的に a_2-a_1 と一致する．$a_2-a_1 = \frac{3}{2}-1 > 0$ なので，$a_{n+1}-a_n$ である．

以上より，数列 $\{a_n\}$ は有界で単調増加な数列なので，収束する． □

(2) (1) より数列 $\{a_n\}$ は収束するから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおく．これを $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$ に代入して α について解くと，$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となる．(1) より $1 \leq a_n \leq 2$ なので，$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる．よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である． □

C14

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})}+1} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

□

(2) $\frac{1}{x} \to \infty (x \to \infty)$ は既知とする．$x = 0$ 付近で，$0 < x^n < x$ であるから，$\frac{1}{x} < \frac{1}{x^n}$ である．追い出しの原理より，$\frac{1}{x^n} \to \infty (x \to \infty)$ である． □

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\cos x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

(4)$x \to \infty$ を考えるので，$x > 0$ としてもよい．$-1 \leq \sin x \leq 1$ なので，両辺を x で割ると

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

となる．$x \to \infty$ を両辺で考えると，それぞれ 0 に収束するから，はさみうちの原理より $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ となる． □

C16

(1) 答え：A

ϵ を任意にとれるので，$|f(x)| = 0$ を満たすのが必要で，$f(x) = 0$ はこれを満たし，かつ十分． □

(2) 答え：A，D，G

A，D，G 以外は $x = 0$ 近傍で満たさない． □

(3) 答え：A，C

$|f(x)|$ が有界であればいい． $\square$

(4) 答え：A，B，C，D，G

E，F は $x = 0$ 近傍で満たさない． $\square$

(5) 答え：A，B，C，G

D，E，F は有界でないから，δ を任意に取ることができない． $\square$

(6) 答え：A，G A，G 以外は，$|f(x)| \neq 0$ となる x が存在するので満たさない． $\square$