методы отчислений

Лектор: Б. А. Самокиш

10.01.2019

Оглавление

1 Однородные дифференциальные уравнения 3
§ 1 Краевая задача для ОДУ 2 порядка и сведение к задаче Коши 3
§ 2 Метод дифференциальной прогонки 4
§ 3 Метод прогонки для систем ОДУ 5
1. Метод начальных данных 5
2. Метод прогонки, ... 5
§ 4 Ортогональная прогонка 6
§ 5 Разностный метод для краевой задачи 2 порядка 7
1. Алгоритм 7
2. Формулы численного дифференцирования 7
3. Разностное уравнение 7
4. Граничные условия 8
5. Составление системы линейных уравнений 9
§ 6 Метод разностной прогонки 9
§ 7 Лемма об оценке для системы разностных уравнений 10
§ 8 Теорема о сходимости разностного метода 11
§ 9 Жёсткие системы ОДУ 12
1. Методы численного интегрирования ОДУ 12
2. Жёсткие системы 13
§ 10 Неявные методы Рунге-Кутты 15

2 Методы линейной алгебры 17

3 Интегральные уравнения 18
§ 1 Интегральное уравнение II рода, метод замены ядра на вырожденное 18
§ 2 Метод квадратур для интегрального уравнения 22
§ 3 Вариационный принцип для ограниченного оператора; метод Ритца для интегрального уравнения II рода 23
§ 4 Интегральное уравнение I рода и его некорректность 25
§ 5 Условная корректность по Тихонову, метод квазирешений 26
§ 6 Метод регуляризации для уравнения I рода, сходимость 27

4 Вариационные методы 29
§ 1 Вариационный принцип для уравнения с неограниченным оператором 29
§ 2 Метод Ритца, сходимость 29
§ 3 Метод Ритца для обычной краевой задачи, вид энергетического пространства, естественные граничные условия 30
§ 4 ВРМ-1 для обычной краевой задачи 32
§ 5 ВРМ-2 для обычной краевой задачи 33
§ 6 Метод Ритца для эллиптического уравнения, энергетическое пространство и естественные условия 34

5 Уравения в частных производных 36
§ 1 Разностный метод для общего уравнения теплопроводности, явная схема 36

A Введение в функциональный анализ 38
§ 1 Пространства, отображения . . . 38
§ 2 Пара фактов про гильбертовы пространства . . . 38
§ 3 Спектр оператора . . . 39
§ 4 Компактные операторы . . . 40
§ 5 Спектры компактных операторов . . . 40
§ 6 Альтернатива Фредгольма . . . 41

B Обозначения 42

1 Однородные дифференциальные уравнения

§ 1. Краевая задача для ОДУ 2 порядка и сведение к задаче Коши

Определение 1. Рассмотрим ОДУ 2 порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad y \in C^2([a;b])$$

и 3 варианта условий на y

I $y(a) = A, \quad y(b) = B$

II $y'(a) = A, \quad y'(b) = B$

III $y'(a) = \alpha y(a) + A, \quad y'(b) = \beta y(b) + B$

Если y — решение для которого выполнено какое-то из условий выше, то y — решение граничной задачи.

Определение 2 (Однородная краевая задача). Положим $f \equiv 0$ в 1.1.1.

Определение 3 (Однородные граничные условия). Положим $A = B = 0$ в граничных условиях в 1.1.1

Теорема 1 (об альтернативе). Рассмотрим однородную граничную задачу с однородными граничными условиями. Пусть y_H — решение однородной задачи.

Тогда

1. $y_0 \equiv 0$ — единственное решение однородной задачи $\Rightarrow$ неоднородная краевая задача имеет единственное решение
2. $y_0 \equiv 0$ — неединственное решение однородной задачи $\Rightarrow$ неоднородная краевая задача имеет бесконечно много или не имеет решений вовсе

□ Рассмотреть решение неоднородной краевой в виде $y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ и подставить граничные условия, а дальше все следует из линейной алгебры. ■

Разберёмся как численно найти y_0, y_1, y_2, потребовавшиеся в предыдущем доказательстве. Будем считать что p, q, f определены на $I \ni [a;b]$, так что y можно продолжить на $(a - \varepsilon; b + \varepsilon)$.

1. $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$. Поскольку 0 явно решение однородной задачи, то что мы найдем будет как раз частным решением неоднородной задачи (Коши!).
2. $y_H(a) = 1$, $y_H'(a) = 0$ и решаем мы тут однородную задачу (Коши!). Будем считать то что нашлось y_1
3. $y_H(a) = 0$, $y_H'(a) = 1$. Скажем что это y_2. Здесь важно заметить про линейную независимость y_1 и y_2. Найдем определитель Вронского в точке a

   $$W = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

   А тогда он нигде не ноль. А значит y_1 и y_2 линейно независимы.

Всё это называется *методом начальных данных* для решения краевой задачи.

В рассуждении выше можно было бы взять другие начальные данные дабы упростить себе жизнь. Ведь никто не запрещает запихать, например, кусок y_2 в y_0 (если мы уже знаем правильное c_2). Нам просто были нужны какие-то линейно независимые решения однородной задачи.

Рассмотрим граничную задачу в форме III

1. $y(a) = 0, y'(a) = A$, нашли y_0.
2. $y_H(a) = 1, y_H'(a) = \alpha$, нашли y_1.
3. $y_H(a) = 0, y_H'(a) = 0$. Мы просто решили что $y_2 \equiv 0$. Эту ЗК мы даже не решаем, а сразу знаем ответ.

При таком раскладе $y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x)$. Проверим левое граничное условие

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0(a) + c_1\, y_1(a) = 0 + c_1\, 1 = c_1 \\ y'(a) &= y_0'(a) + c_1\, y_1'(a) = A + c_1\, \alpha = A + \alpha\, y(a) \end{aligned}$$

Как видно, всё получилось.

В случае I можно сделать так:

1. $y(a) = A, y'(a) = 0$, нашли y_0.
2. $y_H(a) = 0, y_H'(a) = 1$, нашли y_1.

Как видно, свободы в выборе c_1 хватает чтобы разобраться с правой границей.

Пример 1. $y'' - q^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y(b) = 1$

⟨⚒⟩, а он важный вообще-то, из него необходимость метода прогонки следует.

§ 2. Метод дифференциальной прогонки

Здесь будем решать краевую задачу с граничными условиями в форме III.

Рассмотрим $\alpha(x), \beta(x)$: (прогоночные коэффициенты)

$$y'(x) = \alpha(x)\, y(x) + \beta(x) \tag{1.1}$$

Такая форма напрашивается при вспоминании трюка, который мы делали в прошлом параграфе. Там как раз $y'(a) = y_0(a) + c_1\, y_1(a)$, а $c_1 = y(a)$. Здесь мы пока вводим прогоночные коэффициенты формально, а существование покажем конструктивно.

Найдем уравнения на α, β

$$\begin{aligned} y' &= \alpha y + \beta \\ y'' &= \alpha y' + \alpha' y + \beta' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & y'' + p y' + q y = f \\ \Leftrightarrow\ & \alpha y' + \alpha' y + \beta' + p(\alpha y + \beta) + q y = f \\ \Leftrightarrow\ & y\, \underbrace{(\alpha^2 + \alpha' + p\alpha + q)}_{0} + \underbrace{\alpha\beta + \beta' + p\beta}_{f} = f \end{aligned}$$

В итоге получаем систему ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\alpha^2 - p\alpha - q \\ \beta' &= f - p\beta - \alpha\beta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Посмотрим что происходит на правом конце[1]

$$\begin{aligned} y'(b) &= \alpha(b) y(b) + \beta(b) \\ y'(b) &= \beta y(b) + B \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y(b) = \frac{B - \beta(b)}{\alpha(b) - \beta}$$

Сам метод выглядит так:

прямая прогонка: решаем систему (1.2) с начальными данными $\alpha(a) = \alpha, \beta(a) = A$.

обратная прогонка: уже зная $\alpha(x), \beta(x)$ решаем (1.1) с начальными данными $y(b) = \frac{B-\beta(b)}{\alpha(b)-\beta}$.

Замечание 1. Рассмотрим однородную задачу с однородными граничными условиями. Тогда (1.1) переходит в $y'(x) = \alpha(x)\, y(x)$. Если при этом $\exists\, c \in (a; b)$: $y(c) = 0 \wedge y'(c) \neq 0$, то $\alpha(c)$ не существует. Так что, как видно, не всякое решение краевой задачи можно найти методом прогонки.

[1] а что делать если $\alpha(b) = \beta$ неясно

§ 3. Метод прогонки для систем ОДУ

Определение 1. Рассмотрим ОДУ

$$\boldsymbol{y}' = \hat{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x) \qquad \boldsymbol{y} \in C^2([a;b]), \quad y\colon\ [a;b] \to \mathbb{R}^s \tag{1.1}$$

и условия вида

$$\begin{aligned} x = a \quad & \hat{\alpha}\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{\beta} \qquad && \hat{\alpha}\colon\ \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^p \\ x = b \quad & \hat{\gamma}\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{\delta} \qquad && \hat{\gamma}\colon\ \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^q \\ & && s = p + q \end{aligned}$$

Если y — решение для которого выполнено условие выше, то y — решение граничной задачи.

Замечание 1. Вообще, граничные условия бывают куда более общего вида, но мы их не рассматриваем. То, что у нас — это линейные распадающиеся граничные условия.

А вот так выглядят нераспадающиеся:

$$\hat{\alpha}\boldsymbol{y}(a) + \hat{\gamma}\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{\beta}, \qquad \hat{\alpha}, \hat{\gamma}\colon\ \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$$

Общее решение задачи Коши 1.1 имеет вид

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_0(x) + \sum_{j=1}^{s} c_j \boldsymbol{y}_j(x)$$

где как обычно y_0 — решение неоднородной задачи Коши, а $\{y_j\}$ — фундаментальная система решений однородной.

1. Метод начальных данных такой же в § 1 — находим из граничных условий $\{c_j\}$ в общем решении.

Чтобы добыть решения задач Коши можно взять $\boldsymbol{y}_j(a) = \boldsymbol{e}_j$ (это единичный вектор с 1 на jом месте), $\boldsymbol{y}_0(a) = 0$

Можно снова уменьшить количество работы

1. в качестве начальных данных для y_0 — какое-нибудь решение системы $\hat{\alpha}y = \beta$
2. в качестве начальных данных для y_j, $j \in p+1\,..\,s$ — q линейно независимых решений $\hat{\alpha}y = 0$
3. $y_j \equiv 0$, $j \in 1\,..\,p$

В итоге решение примет вид

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_0(x) + \sum_{j=p+1}^{s} c_j \boldsymbol{y}_j(x)$$

`<+здесь снова этот понятный кусок про экспоненты и беды вычислений+>`⟨⚒⟩

2. Метод прогонки, в котором снова зададим $\hat{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$

$$\hat{\alpha}(x)\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\beta}(x), \qquad \hat{\alpha}\colon\ [a;b] \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^p \tag{1.2}$$

При таком условии $\forall\, x\ ::\ y(x) \in M \subset \mathbb{R}^s$, $\dim M = s - p$ (предполагая что $\operatorname{rk} \hat{\alpha}(x) = p$)

Найдем уравнения на $\hat{\alpha}(x), \boldsymbol{\beta}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\beta} \\ \hat{\alpha}\boldsymbol{y}' + \hat{\alpha}'\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\beta}' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & \boldsymbol{y}' = \hat{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f} \\ & \hat{\alpha}\hat{A}\boldsymbol{y} + \hat{\alpha}\boldsymbol{f} + \hat{\alpha}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta}' \\ \Leftrightarrow\ & (\underbrace{\hat{\alpha}\hat{A} + \hat{\alpha}'}_{})\,\boldsymbol{y} - \underbrace{\boldsymbol{\beta}'}_{} = -\hat{\alpha}\boldsymbol{f} \end{aligned}$$

Пусть α_j — строка $\hat{\alpha}$. Тогда мы получаем систему ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \alpha_j' &= -\hat{A}^T \alpha_j \\ \beta_j' &= (\alpha_j, \boldsymbol{f}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Посмотрим что происходит на правом конце

$$\begin{cases} \hat\alpha(b)\,\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{\beta}(b) \\ \quad\hat\gamma\,\boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{\delta} \end{cases} \tag{1.4}$$

это просто линейная система порядка s на $\boldsymbol{y}(b)$, решаем и находим.
Сам метод выглядит так:

прямая прогонка: решаем прогоночные уравнения(1.3) с начальными данными $\hat\alpha(a) = \hat\alpha$, $\boldsymbol{\beta}(a) = \boldsymbol{\beta}$.

обратная прогонка: уже зная $\alpha(x)$, $\beta(x)$ решаем (1.2) с начальными данными $y(b)$, найденным из системы (1.4).

Замечание 2. $\langle ? \rangle$ Метод с заменой $\hat A$ на сопряженную в прогоночных уравнениях уже пафосно называется методом *сопряжённых систем*, но ничем кроме названия по сути не отличается.

Замечание 3. Вообще, этот метод накладывает слишком жёсткие условия на $\hat\alpha$, β. Например краевая задача из § 1 им не решается. Проблема возникает в том месте, где из $(\hat\alpha\hat A + \hat\alpha')\,\boldsymbol{y} = 0$ выводится $\hat\alpha\hat A + \hat\alpha' = 0$. Произвольностью $\boldsymbol{y}$ мы вообще-то пользоваться не можем, так как на него есть условие $\hat\alpha(x)\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\beta}(x)$.

Замечание 4. У вышеописанного метода есть ещё пара недостатков:

1. $\alpha_j' = -\hat A^T \alpha_j$ отличается от исходной системы только отсутствием неоднородности, так от проблем связанных с потерей точности из-за собственных чисел разного знака в решениях задач Коши мы убежать не смогли.

2. $\hat\alpha\hat\alpha^T$ может быть плохо обусловленной и ища $\boldsymbol{y}(b)$ мы потеряем точность. [1]

Собственно, для того чтобы обойти эти проблемы и нужен § 4.

§ 4. Ортогональная прогонка

«будем решать немного другую задачу»
Заменим уравенение для $\hat\alpha$ в методе выше.

$$\hat\alpha' = -\hat\alpha\hat A \longrightarrow \hat\alpha' = -\hat\alpha\hat A + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T \left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right)^{-1} \hat\alpha$$

Крокодил в формуле сверху — ортогонанальная проекция $\hat\alpha\hat A$ на $\hat\alpha$, а скалярное произведение имеет вид $(\hat\alpha, \hat\beta) = \hat\alpha\hat\beta^T$[2]. Так что по идее, раз мы проекцию на $\hat\alpha$ вычли, $(\hat\alpha', \hat\alpha) = 0$. Проверим:

$$\hat\alpha'\hat\alpha^T = -\hat\alpha\hat A\hat\alpha^T + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T \left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right)^{-1} \hat\alpha\hat\alpha^T = -\hat\alpha\hat A\hat\alpha^T + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T = 0$$

Отсюда следует, что $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right) = 0$, так что матрица $\hat\alpha\hat\alpha^T$ постоянна на всём $[a; b]$
Получим уравнения на прогоночные коэффициенты

$$\begin{aligned} &\hat\alpha\hat A\boldsymbol{y} + \hat\alpha\boldsymbol{f} + \hat\alpha'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta}' \\ \Leftrightarrow\ &\hat\alpha\hat A\boldsymbol{y} + \hat\alpha\boldsymbol{f} - \hat\alpha\hat A\boldsymbol{y} + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T \left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right)^{-1} \underbrace{\hat\alpha\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}' \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} \hat\alpha' &= -\hat\alpha\hat A + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T \left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right)^{-1} \hat\alpha \\ \boldsymbol{\beta}' &= \hat\alpha\boldsymbol{f} + \hat\alpha\hat A\hat\alpha^T \left(\hat\alpha\hat\alpha^T\right)^{-1} \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Разберёмся что делать с $\left(\alpha\alpha^T\right)^{-1}$. Не очень приятно каждый раз искать обратную матрицу.
На левой границе $\hat\alpha(a)\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{\beta}(a)$. Проведём процесс Грамма-Шмидта и ортогонализуем строчки $\hat\alpha(a)$. При этом заменили переменную в исходном уравнении, соответственно поменялись $\hat A \to \hat B$, $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{g}$. Зато $\hat\alpha(a)\,\hat\alpha(a)^T = I$. Так что прогоночные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \hat\alpha' &= -\hat\alpha\hat B + \hat\alpha\hat B\hat\alpha^T\hat\alpha \\ \boldsymbol{\beta}' &= \hat\alpha\boldsymbol{g} + \hat\alpha\hat B\hat\alpha^T\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] $\operatorname{rk}\hat\alpha\hat\alpha^T \geqslant 2\operatorname{rk}\hat\alpha - s$ из теоремы Сильвестра о ранге, так что так в одну сторону вроде можно
[2] на самом деле оно несимметрично. Нужно здесь понимать матрицу как набор векторов-строк. Тогда какой-то смысл есть.

Поскольку $\hat{\alpha}\hat{\alpha}^T$ постоянна на $[a; b]$ (всюду I), то проблем с её плохой обусловленностью в $x = b$ нет. Правое граничное условие решится.

Судя по всему, это же условие исключает быстрый рост компонент $\hat{\alpha}$. Так что обе проблемы из замечания в конце предыдущего параграфа снимаются. $\langle ? \rangle$[1]

Вышеописанный метод ещё называется методом Абрамова.

§ 5. Разностный метод для краевой задачи 2 порядка

Предупреждение: в силу повышенной техничности этого параграфа он написан в соответствующем стиле. Что поделать. Приятного прочтения.

Решать краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad y \in C^2([a; b]) \tag{1.1}$$

1. Алгоритм

Определение 1 (Метод разностной прогонки)**.** Пусть задано дифференциальное уравнение с граничными условиями. Методом разностной прогонки называет следующий алгоритм:

1. Выбор сетки: узлы, шаг (если она равномерная)
2. Построение сеточных уравнений
   (a) Диффур в узлах сетки
   (b) Все производные через конечные разности
3. Решение получившейся линейной системы

Будем дальше всюду считать, что решение задано на $[a; b]$

$$n \text{ узлов} \qquad h = \frac{b-a}{n} \qquad x_k = a + kh$$

2. Формулы численного дифференцирования

Здесь $M_n = \max \left|y^{(m)}(x)\right|$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{hM_2}{2} \tag{1.2}$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{hM_2}{2} \tag{1.3}$$

$$y'(x) = \frac{-y(x+2h) + 4y(x+h) - 3y(x)}{2h} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{h^2M_3}{3} \tag{1.4}$$

$$y'(x) = \frac{3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{2h} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{h^2M_3}{3} \tag{1.5}$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{h^2M_3}{6} \tag{1.6}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + R \qquad |R| \leqslant \tfrac{h^2M_4}{12} \tag{1.7}$$

Схемы 1.2 и 1.3 называются простейшими.

3. Разностное уравнение

$$\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + R_1 + p(x_k)\frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + p(x_k)R_2 + q(x_k)\,y(x_k) = f(x_k)$$

Можно заметить, что $R_1 + p(x_k)R_2 = O(h^2)$. Так что можно вместо $y(x_k)$ получить приближённое решение y_k (по сути, решение уже совсем другой задачи). Попутно, обозначим

$$p(x_k) = p_k, \qquad q(x_k) = q_k, \qquad f(x_k) = f_k.$$

Получится

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k\,y_k = f_k \tag{1.8}$$

[1] про это два слова в Крылове написано и больше нигде нет.

4. Граничные условия будут рассматриваться III типа, но вообще это неважно. Всё равно раскрывать не будем.

1. *Трёхточечная односторонняя аппроксимация*

$$y'(x) = \frac{-y(x+2h) + 4y(x+h) - 3y(x)}{2h} + O(h^2)$$

Запишем это выражение для границ:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \frac{-y(a+2h) + 4y(a+h) - 3y(a)}{2h} + O(h^2) & &\to & \alpha y_0 + A &= \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \\ y'(b) &= \frac{3y(b) - 4y(b-h) + y(b-2h)}{2h} + O(h^2) & &\to & \beta y_n + B &= \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} \end{aligned}$$

2. *Метод фиктивных узлов*

(a) Введём $y_{-1} = y(a-h)$, $y_{n+1} = y(b+h)$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Запишем это выражение для границ:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \frac{y(a+h) - y(a-h)}{2h} + O(h^2) & &\to & \alpha y_0 + A &= \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \\ y'(b) &= \frac{y(b+h) - y(b-h)}{2h} + O(h^2) & &\to & \beta y_n + B &= \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \end{aligned}$$

Как правило, решение можно продолжить с отрезка на интервал побольше, подберём $h : \ y(a-h) \in I \wedge y(b+h) \in I$. Так что такой метод имеет смысл.

(b) Сдвинем сетку на $h/2$, $x_0 = a - h/2$, $x_{n+1} = b + h/2$

$$x_k = a - h/2 + kh \qquad k = 0, 1 \,..\, n+1$$

Значения в узлах сетки при этом придётся вводить с помощью интерполяции

$$y(a) = \frac{y(a - h/2) + y(a + h/2)}{2}$$

Сами выражения для производной имеют вид

$$y'(x) = \frac{y(x + h/2) - y(x - h/2)}{h} + O(h^2)$$

Запишем это выражение для границ:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \frac{y(a + h/2) - y(a - h/2)}{h} + O(h^2) & &\to & \alpha\frac{y_0 + y_1}{2} + A &= \frac{y_1 - y_0}{h} \\ y'(b) &= \frac{y(b + h/2) - y(b - h/2)}{h} + O(h^2) & &\to & \beta\frac{y_{n+1} + y_n}{2} + B &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \end{aligned}$$

Такой подход не очень удобен если нужны значения в узлах. Придётся уменьшать шаг в 2 раза.

3. *Использование ДУ для исключения главного члена простейшей формулы*

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + R, \quad R = O(h)$$

Теперь запишем разложение в ряд Тейлора:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + O(h^3) \ \Leftrightarrow \ y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(x) + O(h^2)$$

Из исходного уравнения (1.1) подстановкой простейшей формулы получаем

$$y''(x) = -\big(p(x)y'(x) + q(x)y(x)\big) + f(x) = -\Big(p(x)\,\tfrac{y(x+h)-y(x)}{h} + p(x)O(h) + q(x)y(x)\Big) + f(x)$$

$$\Rightarrow\ -\tfrac{h}{2}y''(x) = \tfrac{p(x)}{2}\Big(y(x+h) - y(x)\Big) + \tfrac{h}{2}\Big(q(x)y(x) - f(x)\Big) + O(h^2)$$

Оценка производной на краю

$$y'(a) = \frac{y(a+h) - y(a)}{h} + \frac{p(a)}{2}\Big(y(a+h) - y(a)\Big) + \frac{h}{2}\Big(q(a)y(a) - f(a)\Big) + O(h^2)$$
$$y'(b) = \frac{y(b) - y(b-h)}{h} - \frac{p(b)}{2}\Big(y(b) - y(b-h)\Big) - \frac{h}{2}\Big(q(b)y(b) - f(b)\Big) + O(h^2)$$

На сетке оно имеет вид

$$\alpha y_0 + A = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{p_0}{2}\Big(y_1 - y_0\Big) + \frac{h}{2}\Big(q_0 y_0 - f_0\Big)$$
$$\beta y_n + B = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{p_n}{2}\Big(y_n - y_{n-1}\Big) - \frac{h}{2}\Big(q_n y_n - f_n\Big)$$

5. Составление системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} c_0 y_1 - b_0 y_0 &= d_0 \\ c_k y_{k+1} - b_k y_k + y_{k-1} a_k &= d_k, \quad k = 1\,..\,n-1 \\ - b_n y_n + a_n y_{n-1} &= d_n \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из разностного уравнения (1.8) можно найти a_k, c_k, b_k, d_k

$$a_k = 1 - \tfrac{h}{2}\,p_k \quad b_k = 2 - h^2\,q_k \quad c_k = 1 + \tfrac{h}{2}\,p_k \quad d_k = h^2\,f_k$$

Явные выражения для a_0, b_0, c_0, d_0 и a_n, b_n, c_n, d_n зависят от способа учета граничных условий. Разве что $a_0 = 0 \wedge c_0 = 0$. Оставим остальные читателям из Беларуси в качестве упражнения.

§ 6. Метод разностной прогонки

Вспомним систему линейную систему 1.9. Её матрица, как видно чуть ниже, трёхдиагональная.

$$\begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & -b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & -b_n \end{pmatrix}$$

Такие СЛУ можно решать не за $O(n^3)$, а за $O(n)$. Опишем, как именно.

Преобразум систему: уберём поддиагональ, на самой диагонали оставим всюду 1. Тогда можно написать прогоночное соотношение, очень похожее на такое же для дифференциальной прогонки (в § 2).

$$y_k = \alpha_k y_{k+1} + \beta_k \tag{1.1}$$

Свяжем α, β с a, b, c, d.

$$\begin{cases} y_{k-1} = \alpha_{k-1} y_k + \beta_{k-1} \\ a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} & a_k \alpha_{k-1} y_k + a_k \beta_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k \\ \Leftrightarrow\ & y_k = \frac{c_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}} y_{k+1} + \frac{a_k \beta_{k-1} - d_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}} \end{aligned}$$

Отсюда получаются удобные рекурсивные соотношения для α_k, β_k

$$\alpha_k = \frac{c_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}; \qquad \beta_k = \frac{a_k \beta_{k-1} - d_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}} \tag{1.2}$$

Начальные значения α_k, β_k легко определяются из линейной системы на a_k, b_k, c_k, d_k (1.9).

Итак, алгоритм, следующий

прямая прогонка: решаем прогоночные уравнения (1.2) с начальными данными $\alpha_0 = \frac{c_0}{b_0}, \beta_0 = -\frac{d_0}{b_0}$.

обратная прогонка: уже зная α_k, β_k решаем прогоночное соотношение (1.1) с начальными данными $y_n = \beta_n$ ($c_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$).

Как видно, что прямая, что обратная прогонка имеют асимптотику $O(n)$, что не может не радовать. Теперь подумаем над корректностью метода.

§ 7. Лемма об оценке для системы разностных уравнений

Утверждение 1 (Достаточное условие). Пусть $\forall k :: a_k, c_k > 0$ ($c_n, a_0 = 0$), и СЛУ имеет диагональное преобладание: $b_k \geqslant a_k + c_k$.

Тогда если $\exists\, k : b_k > a_k + c_k$ прогоночные уравнения 1.2 разрешимы

▶ Проблемы у нас возникнут только если знаменатели обратятся в 0. Учитывая диагональное преобладание, это эквивалентно $\alpha_{k-1} \geqslant 1$.

(!) $0 < \alpha_{k-1} \leqslant 1$ (по индукции)

база: $\alpha_0 = \frac{c_0}{b_0}$, $b_0 \geqslant c_0 > 0$, $c_0 \leqslant b_0$. Кажется, все верно.[1]

переход: Знаем что $\alpha_{k-1} \leqslant 1$. Так что из условий теоремы

$$b_k - \alpha_{k-1}a_k \geqslant b_k - a_k \geqslant c_k > 0 \Rightarrow 0 < \alpha_k = \frac{c_k}{b_k - a_k\alpha_{k-1}} \leqslant 1$$

Если $\alpha_{k-1} < 1$, то $\alpha_k < 1$, поскольку $b_k - \alpha_{k-1}a_k > b_k - a_k \geqslant c_k$. Это означает, что если уж неравенство стало строгим, оно таким и останется.

Таким образом, все знаменатели кроме последнего > 0. В нём $c_n = 0 \not> 0$.

Разберёмся, что с ним делать. Поскольку мы предположили что диагональное преобладание хоть где-то строгое (в k_0), возможны варианты:

1. $k_0 < n \Rightarrow \alpha_{n-1} < 1$. Тогда $b_n - a_n\alpha_{n-1} > b_n - a_n \geqslant 0$
2. $k_0 = n \Rightarrow \alpha_{n-1} \leqslant 1$. Тогда $b_n - a_n\alpha_{n-1} \geqslant b_n - a_n > 0$

Как видно, даже последний знаменатель $\neq 0$ ◀

Посмотрим, какие условия утверждение выше накладывает на уравнение. Вспомним выражения для $a_k, \ldots$

$$a_k = 1 - \tfrac{h}{2}\, p_k \quad b_k = 2 - h^2 q_k \quad c_k = 1 + \tfrac{h}{2}\, p_k \quad d_k = h^2 f_k$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_k > 0 &\quad\Leftarrow\quad h < \tfrac{2}{\max|p_k|} \\ c_k > 0 &\quad\Leftarrow\quad h < \tfrac{2}{\max|p_k|} \\ b_k \geqslant c_k + a_k &\quad\Leftrightarrow\quad \boxed{q_k \leqslant 0} \end{aligned}$$

Можно ещё подумать про граничные условия. Тут всё зависит от способа вычисления производной на границе.

Пример 1. Оценим производную по простейшей схеме

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha y_0 + A$$

Тогда

$$y_1 + y_0(-1 - \alpha h) = Ah \Rightarrow \begin{matrix} b_0 = 1 + \alpha h \\ c_0 = 1 \end{matrix}$$

И по сути нам нужно $\boxed{\alpha \geqslant 0}$. Аналогично с правой границей, там $\boxed{\beta \leqslant 0}$.

[1] здесь бы и хотелось сразу $\alpha_0 < 1$, да $a_0 = 0$, так что неравенство $c_0 \leqslant b_0$ нестрогое

Если хотя бы одно из трёх условий в рамке строгое, прямая прогонка сработает.

Замечание 1. Рассмотрим однородную задачу с однородным левым граничным условияем ($A = 0$). Тогда $d_k = 0 \Rightarrow \beta_k = 0$ при $k < n$. Прогоночное соотношение примет вид $y_k = \alpha_k y_{k+1}$. Если один из узлов находится вблизи $y(x) = 0$, α_k окажется большим, что не очень хорошо с вычислительной точки зрения. Но, вообще, вероятность этого низкая, и можно просто узлы сдвинуть если что-то сломается.

Теперь видимо то, что в названии

Лемма 1. Пусть выполено условие достаточности прогонки 1.7.1 в усиленном виде:

$$b_k \geqslant a_k + c_k + \delta, \quad \delta > 0.$$

Тогда

$$\max_k |y_k| \leqslant \delta^{-1} \max_k |d_k|$$

▼

Пусть $M = \max |y_k| = y_{k_0}$ (их же конечное число). Тогда из разностной СЛУ (1.9)

$$\begin{aligned} & b_{k_0} y_{k_0} = a_{k_0} y_{k_0-1} + c_{k_0} y_{k_0+1} - d_{k_0} \\ \Rightarrow\ & b_{k_0} M \leqslant a_{k_0} M + c_{k_0} M - d_{k_0} \\ & \Rightarrow\ \delta M \leqslant (b_{k_0} - a_{k_0} - c_{k_0}) M \leqslant |d_{k_0}| \leqslant \max |d_k| \end{aligned}$$

◀

§ 8. Теорема о сходимости разностного метода

Теорема 1. Рассмотрим краевую задачу III типа для уравнения второго порядка. Пусть

1. $p, q, f \in C^2([a; b])$
2. $q(x) \leqslant -q_0$, $q_0 > 0$
3. $\alpha < 0, \beta > 0$

Тогда разностный метод сходится:

$$\forall\, k \ :: \ |y(x_k) - y_k| < Ch^2, \quad C = \text{const}$$

□ Запишем уравнение на сетке:

$$\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + R_1 + p(x_k) \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + p(x_k) R_2 + q(x_k) y(x_k) = f(x_k)$$

Вычтем теперь из него разностное (которое (1.8)), вводя $w_k = y(x_k) - y_k$

$$\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2h} + q_k w_k = R, \quad R = -R_1 - p_k R_2$$

Если вспомнить как выглядят оценки R_1 и R_2 то становится понятно зачем нужен первый пункт в условиях теоремы. Но мы вспоминать точный вид не будем, а просто запишем $R = Lh^2$

Чтобы оценить произодную на границе, можно воспользоваться формулой с фиктивными узлами и сдвинутой сеткой (на $h/2$), тогда:

$$\frac{w_1 - w_0}{h} = \alpha \frac{w_0 + w_1}{2} + R_0 \qquad \frac{w_{n+1} - w_n}{h} = \beta \frac{w_{n+1} + w_n}{2} + R_{n+1}$$

Выражения для R снова квадратичны по h, запишем их так: $R_0 = L_0 h^2$, $R_{n+1} = L_{n+1} h^2$.

Запишем выражения для коэффициентов линейной системы с w_k:

$$a_k = \tfrac{1}{h^2} - \tfrac{p_k}{2h} \quad b_k = \tfrac{2}{h^2} - q_k \quad c_k = \tfrac{1}{h^2} + \tfrac{p_k}{2h} \quad d_k = h^2 L$$

(они такие же как и раньше, только правая часть в уравнении поменялась)

Подгоним под условия леммы 1.7.1

$$b_k \geqslant a_k + c_k + \delta \;\Leftrightarrow\; -q_k \geqslant \delta \;\Leftarrow\; \delta = q_0$$

На границах

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0 & b_0 = \frac{1}{h} + \frac{\alpha}{2} & c_0 = \frac{1}{h} - \frac{\alpha}{2} & d_0 = h^2 L_0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{h} + \frac{\beta}{2} & b_{n+1} = \frac{1}{h} - \frac{\beta}{2} & c_{n+1} = 0 & d_{n+1} = -h^2 L_{n+1} \end{array}$$

Снова найдём δ

$$\begin{array}{lllll} b_0 \geqslant a_0 + c_0 + \delta & \Leftrightarrow & \alpha \geqslant \delta & \Leftarrow & \delta = \alpha \\ b_{n+1} \geqslant a_{n+1} + c_{n+1} + \delta & \Leftrightarrow & -\beta \geqslant \delta & \Leftarrow & \delta = -\beta \end{array}$$

Выберем:

$$\delta = \min\left\{q_0, \alpha, -\beta\right\} \quad C = \max\left\{|L|, |L_0|, |L_1|\right\}$$

Тогда по лемме

$$\max|w_k| \leqslant \delta^{-1} \max|d_k| \;\Rightarrow\; \max|y(x_k) - y_k| \leqslant \delta^{-1} C h^2$$

■

<+дальше идет каша из всяких обобщений, не буду пока их писать+>

§ 9. Жёсткие системы ОДУ

Будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\boldsymbol{y}'(x) = f(x, \boldsymbol{y}(x)), \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

Пусть x_n — узлы равномерной сетки с шагом h.

1. Методы численного интегрирования ОДУ

1. Метод Эйлера

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h f(x_n, \boldsymbol{y}_n)$$

2. Неявный метод Эйлера

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h f(x_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1})$$

оба метода выше имеют ошибку $\sim O(h)$. Поэтому они и называются простейшими.

Рассмотрим более точные методы

3. Улучшенный метод Эйлера

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{2}\Big(f(x_n, \boldsymbol{y}_n) + f\big(x_{n+1}, \boldsymbol{y}_n + h f(x_n, \boldsymbol{y}_n)\big)\Big)$$

4. Метод трапеций

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{h}{2}\Big(f(x_n, \boldsymbol{y}_n) + f(x_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1})\Big)$$

5. Метод средних прямоугольников

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_{n+1}}{2}\right)$$

6. Весовая формула трапеций

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\Big((1-\theta) f(x_n, \boldsymbol{y}_n) + \theta f(x_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1})\Big), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

7. Весовая формула прямоугольников

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h f\left(x_n + \theta h, (1-\theta)\boldsymbol{y}_n + \theta \boldsymbol{y}_{n+1}\right), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

Как видно, только первый метод явный, остальные неявные в той или иной степени.

<+можно их точность оценить+>

2. Жёсткие системы

Определение 1. Формального полного определения жёсткости нет.

Замечание 1. Обычно под жёсткими системами понимают следующую ситуацию: пусть в решении системы есть две области

1. «переходный слой» где решение быстро изменяется, как правило небольшой
2. область плавного изменения решения

Проблема исключительно вычислительная — хочется интегрировать переходный слой малым шагом, а область плавного изменения большим. А она может быть довольно большой. И времени у нас не вечность. И вот в процессе перехода от малого шага к большому и возникают некоторые трудности. Для систем эти области ещё могут перекрываться.

Если такие подобные трудности возникают, то система — жёсткая.

Пример 1. Рассмотрим $f(x, y) = Ay$, $y(0) = 1$ (всё одномерное). Его решение — $y = e^{Ax}$.

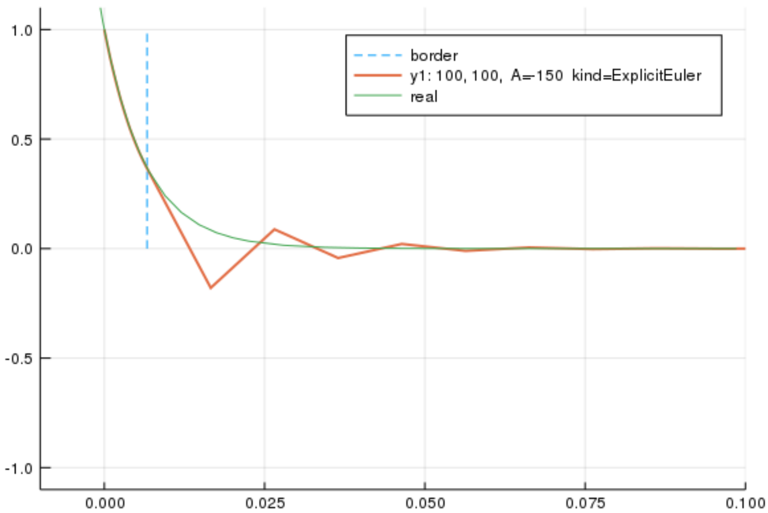
Попробуем решить методом Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n = y_n(1 + hA) = y_0(1 + hA)^{n+1}$$

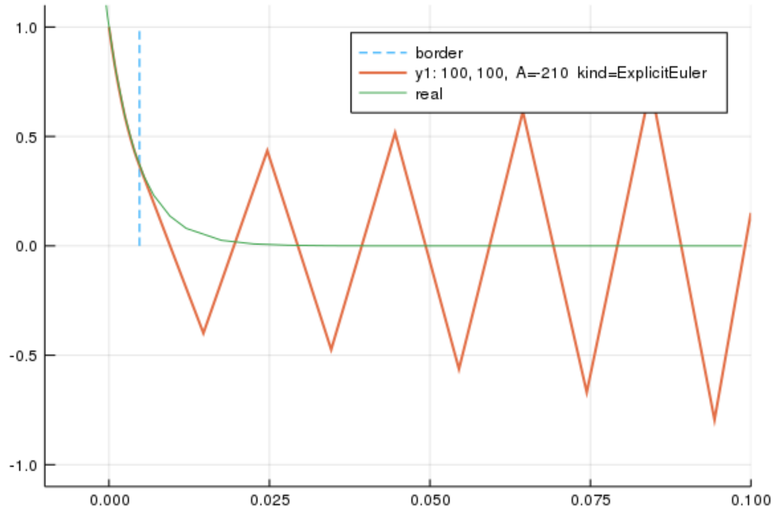
Из определения e при $h \to 0$ получается истинное решение. Однако, рассмотрим что происходит при $A \ll 0$.

1. $A < 0, 1 < |Ah| < 2$. Тогда $-1 < 1 + hA < 0$, $(1 + hA)^n$ меняет знак. При этом численное решение осциллирует, но осцилляции затухают. Истинное решение, как мы помним, убывающая экспонента. С ней такого точно не бывает.

   Выглядит это примерно вот так:



2. $A < 0, |Ah| \geqslant 2$. Тогда $1 + hA \leqslant -1$. Здесь колебания даже не затухают, а вообще растут. Что-то никак не связанное с экспонентой.

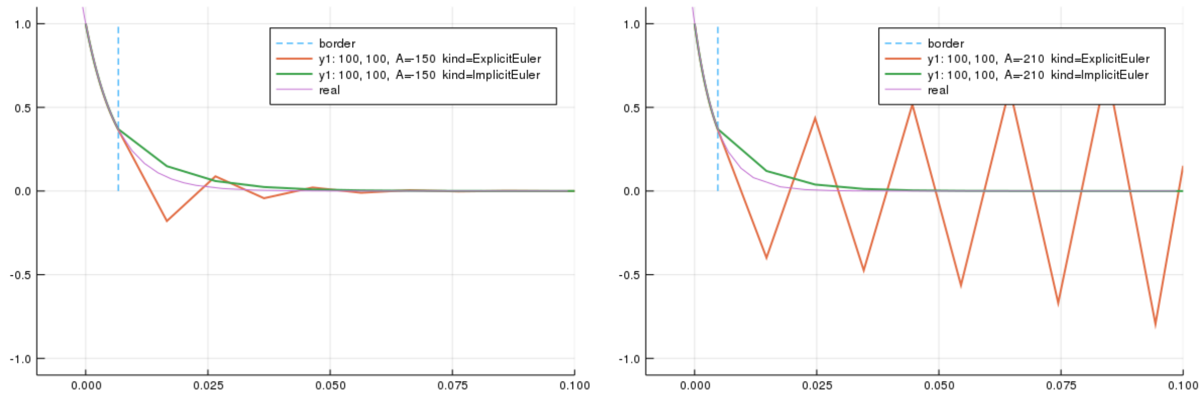


Пример 2. Снова рассмотрим $f(x, y) = Ay$, $y(0) = 1$ (всё одномерное). Его решение — $y = e^{Ax}$. Такую штуку называют пробным уравнением

Попробуем решить неявным методом Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hAy_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1 - Ah} y_n = \left(\frac{1}{1 - Ah}\right)^{n+1} y_0$$

И вот здесь никаких проблем с $A < 0$ нету, какое бы оно большое не было. Сравним его с явным методом Эйлера



Пример 3.

$$f(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad -A \gg 1,\ a \sim 1$$

вот такая штука точно жёсткая: на одном и том же отрезке один кусок решения резко изменяется, а другой ведёт себя весьма плавно.

В качестве некоторой попытки формализации рассуждений иногда вводят такое определение:

Определение 2. Пусть $f(x, \mathbf{y}) = \hat{A}\mathbf{y}$, λ_i — собственные числа $\hat{A}$. Тогда если

$$\frac{\max_i \left\{|\mathrm{Re}\,\lambda_i|\right\}}{\min_i \left\{|\mathrm{Re}\,\lambda_i|\right\}} \gg 1$$

систему называют жёсткой.

Определение 3. Рассмотрим одношаговый метод для $y' = Ay$, $R(z)\ :\ \ y_{n+1} = R(Ah)y_n$ — функция устойчивости ⟨?⟩переходный множитель ⟨?⟩ ⟨⚒⟩

Определение 4. Одношаговый метод называется A-устойчивым, если для него $|R(z)| \leqslant 1$ в левой полуплоскости.

Определение 5. $\{z \mid |R(z) \leqslant 1| \leqslant 1\}$ называется областью A-устойчивости метода.

Пример 4. Явный метод Эйлера устойчив в круге $|z + 1| < 1$: для него $R(z) = 1 + z$.

§ 10. Неявные методы Рунге-Кутты

Определение 1. Одношаговый метод называется L-устойчивым, если он A-устойчив и $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) = 0$. например, тот же неявный метод Эйлера.

Прежде чем вводить методы Рунге-Кутты, разберёмся с устойчивостью оставшихся методов 3–7

- Улучшенный метод Эйлера
$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$$
совсем неустойчив
- Метод трапеций/метод средних прямоугольников
$$R(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$
- Весовая формула
$$R(z) = \frac{1 + (1-\theta)\,z}{1 - \theta\,z}$$
A-устойчива при $\theta \geqslant \frac{1}{2}$. Просто при таком преобразовании прообразом единичного круга будет круг/внешность круга с центром в $\theta - \frac{1}{2}$ и радиусом $\left|\theta - \frac{1}{2}\right|$.

Всё, можно бросаться сеять паслёновые определения

Определение 2 (q-этапный метод РК).
$$k_i = f\left(x_n + \alpha_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j\right)$$
$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q}\gamma_i k_i$$
а α_i, β_{ij}, γ_i уже зависят от метода.

Определение 3. *Неявным методом называется* такой вариант метода РК, где у матрицы β_{ij} ненулевые диагональные и/или наддиагональные члены.

Определение 4. *Диагональным неявным методом* называется такой вариант метода РК, где у матрицы β_{ij} ненулевые диагональные члены, а наддиагональные все нулевые.

Закопаемся в варианты реализации этих методов. Все примеры будут иметь такой вид: $\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma \end{array}$
Сначала стоит заметить чем хороши неявные методы РК.

Утверждение 1. Существует реализация неявного метода с $p = 2q$, где p — порядок точности

Собственно, просто берём узлы и коэффициенты гауссовой квадратурной формулы.
Ещё стоит отметить что неявные методы A-устойчивы, а вот диагональные как повезёт.

Пример 1 (обычный `rk4`).
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Пример 2. (основанная на методе Гаусса)

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\
\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Пример 3. (дигонального неявного РК)

$$\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array} \qquad \gamma = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$$

<+ещё примеры?+>

2 Методы линейной алгебры

фыва!

3 Интегральные уравнения

§ 1. Интегральное уравнение II рода, метод замены ядра на вырожденное

Определение 1. *Интегральным уравнением Фредгольма II рода* называется уравнение вида

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int\limits_a^b K(x,\, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Функция K — его *ядро*, а μ — *характеристическое число*.[2]

Обозначим через K (хм, да, вольность) оператор

$$\varphi(t) \mapsto \int\limits_a^b K(x,\, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ясно, что он компактен. Уравнение теперь примет вид

$$(I - \mu K)\varphi = f.$$

Оператор $T = I - \mu K$, конечно, фредгольмов.

Утверждение 1. Сопряжённый в $L^2([a,\, b])$ оператор к K выражается следующим образом:

$$K^*\varphi(x) = \int\limits_a^b \overline{K(t,\, x)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Прямым вычислением (ну, там внутри ещё теорема Фубини) проверяется, что

$$\langle K\varphi,\, \psi\rangle = \langle \varphi,\, K^*\psi\rangle.$$

□

Замечание 1. У ядра меняются местами аргументы и оно сопрягается — точно так же, как транспонирование вместе с комплексным сопряжением дают матрицу сопряжённого оператора в конечномерном случае!

Сформулируем альтернативу Фредгольма 1.6.1 для такого уравнения:

Утверждение 2.

1. Уравнение $T\varphi = f$ разрешимо однозначно тогда и только тогда, когда μ^{-1} — не собственное число оператора K.
2. В противном случае уравнение $T\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция f ортогональна всем собственным векторам оператора K^*, соответствующим числу $\overline{\mu}^{-1}$.
3. μ^{-1} и $\overline{\mu}^{-1}$ — собственные числа операторов K и K^* соответственно одинаковой конечной кратности.

[2] Кажется, иногда в определении полагают $\mu = 1$, но всегда ведь можно внести его в ядро. Мы иногда тоже будем на него забивать.

Замечание 2. Для симметричного ядра (т.е. когда $K = K^*$) то же самое несложно доказать, используя разложение по собственному базису оператора K (которое есть по теореме Гильберта-Шмидта 1.5.1). Так можно быстро понять, что если μ^{-1} — собственное число K, то решений либо нет, либо их бесконечно много.

Рассмотрим уравнение 3.1 с вырожденным ядром

$$K(x,\,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t).$$

Функции α_i и β_i можно считать ЛНЗ: если это не так, нетрудно выразить одну из них через другие и избавиться от неё. Подставляя ядро в уравнение 3.1, получим

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} A_j\alpha_i(x), \text{ где } A_j = \mu \int_a^b \beta_j(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Это представление для функции φ теперь подставим в исходное уравнение:

$$f(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i(x) = f(x) + \mu \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t) \left(f(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j\alpha_j(t) \right) \mathrm{d}t$$

Чтобы переписать это покороче, введём обозначения

$$\beta_{ij} = \int_a^b \beta_i(t)\alpha_j(t)\,\mathrm{d}t, \quad f_i = \int_a^b f(t)\beta_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

и получим

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\alpha_i(x) = \mu \sum_{i=1}^{n} \left(f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}A_j \right) \alpha_i(x).$$

Поскольку α_i линейно независимы, коэффициенты при них слева и справа должны быть равны. Записав эти равенства, мы приходим к системе линейных уравнений

$$A_i = \mu f_i + \mu \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}A_j.$$

В векторном виде она будет выглядеть так:

$$A = \mu(\beta A + f),$$

где A и f — векторы, β — матрица, а μ всё ещё число.

Эта система решается так:

$$(I - \mu\beta)A = \mu f \;\Rightarrow\; \boxed{A = \mu(I - \mu\beta)^{-1} f}, \text{ если } \det(I - \mu\beta) \neq 0.$$

Пусть $\Delta = \det(I - \mu\beta)$ и Δ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\delta_{ij} - \mu\beta_{ij}$. Тогда можно записать явную формулу для A[1]:

$$A_i = \frac{\mu}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji} f_j$$

Подставляя теперь найденные A_i в 3.2, найдём, что

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\,t) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

где *резольвента* Γ имеет вид

$$\Gamma(x,\,t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ji}\alpha_i(x)\beta_j(s).$$

Трудная задача — приблизить произвольное ядро вырожденным. Есть несколько способов:

[1]Это просто формула для обратной матрицы через алгебраические дополнения.

1. Разложить ядро в ряд Тейлора.
2. Интерполировать ядро.
3. Разложить ядро по ортогональной системе функций.

Подробнее про них можно прочитать в книге [?].

Заменяя ядро на вырожденное, мы надеемся, что и решения тоже изменятся не сильно. Надо бы это обосновать (хотя бы как-то). Пусть есть уравнение

$$Au = f, \quad A = I - K$$

и приближающее его уравнение

$$A_n u_n = f, \quad A_n = I - K_n.$$

Нетрудно видеть, что

$$u - u_n = (A^{-1} - A_n^{-1})f \;\Rightarrow\; \|u - u_n\| \leqslant \left\|A^{-1} - A_n^{-1}\right\| \cdot \|f\|.$$

Поэтому интересно оценить норму разности обратных операторов. Займёмся этим.

Утверждение 3. Пусть P — ограниченный оператор, $\|P\| < 1$. Тогда оператор $I-$ обратим, причём

$$(I - P)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} P^n,$$

где сходимость — по операторной норме.

Утверждение 4. Пусть P и H — ограниченные операторы, P обратим, а $\|H\| < \|P^{-1}\|^{-1}$. Тогда элемент $P - H$ обратим, причём

$$\left\|(P - H)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|P\|^{-1}}{1 - \|H\|\,\|P^{-1}\|}.$$

и

$$\left\|(P - H)^{-1} - P^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|H\|\,\|P^{-1}\|^2}{1 - \|H\|\,\|P^{-1}\|}.$$

Доказательство. Позволим себе иногда использовать дроби и 1 вместо I, как если бы операторы были числами. Не составит труда переписать всё через обратные!

Заметим, что первое из двух утверждений теоремы для $P = I$ следует из 3.1.3:

$$\left\|(I - H)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} H^n\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|H\|^n = \frac{1}{1 - \|H\|}. \tag{3.3}$$

Далее,

$$\left\|\frac{1}{P - H}\right\| = \left\|P^{-1}\frac{1}{1 - P^{-1}H}\right\| \leqslant \|P^{-1}\| \cdot \left\|\frac{1}{1 - P^{-1}H}\right\| \leqslant \frac{\|P^{-1}\|}{1 - \|P^{-1}H\|} \leqslant \frac{\|P\|^{-1}}{1 - \|H\|\,\|P^{-1}\|}.$$

В предпоследнем переходе используется соотношение 3.3, где $H \to P^{-1}H$.

Наконец,

$$\left\|\frac{1}{P - H} - \frac{1}{P}\right\| = \left\|\frac{1}{P}\left(\frac{1}{1 - P^{-1}H} - 1\right)\right\| = \left\|\frac{1}{P}\,\frac{P^{-1}H}{1 - P^{-1}H}\right\| \leqslant \frac{\|H\|\,\|P^{-1}\|^2}{1 - \|H\|\,\|P^{-1}\|}.$$

□

Отсюда сразу же следует утверждение

Утверждение 5. При достаточно больших n

$$\left\|A^{-1} - A_n^{-1}\right\| \leqslant \frac{\rho\,\|A^{-1}\|^2}{1 - \rho\,\|A^{-1}\|} \text{ и } \left\|A^{-1} - A_n^{-1}\right\| \leqslant \frac{\rho\,\|A_n^{-1}\|^2}{1 - \rho\,\|A_n^{-1}\|},$$

где $\rho = \|A - A_n\| = \|K - K_n\|$.

Замечание 3. Рассмотрим теперь задачу с симметричным ядром (т.е. с самосопряжённым K). В ней есть ортонормированный собственный базис α_i, поэтому

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u,\, \alpha_i \rangle \alpha_i \;\Rightarrow\; Ku = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u,\, \alpha_i \rangle \lambda_i \alpha_i,$$

где λ_i — соответствующее собственное число. Расположим λ_i в порядке убывания модуля и положим

$$K_n u = \sum_{i=1}^{n} \langle u,\, \alpha_i \rangle \lambda_i \alpha_i$$

Это интегральный оператор с вырожденным ядром

$$K_n(x,\, t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(x) \overline{\alpha_i(t)}. \tag{3.4}$$

Можно доказать, что он является лучшей аппроксимацией ранга n для оператора K по операторной L^2-норме.

Посмотрим на разность:

$$(K - K_n)u = \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle u,\, \alpha_i \rangle \lambda_i \alpha_i.$$

Найдём её норму:

$$\left\|(K - K_n)u\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i|^2\, |\lambda_i|^2, \quad u_i = \langle u,\, \alpha_i \rangle.$$

При этом

$$\|K - K_n\| = \sup \frac{\left\|(K - K_n)u\right\|}{\|u\|},$$

и

$$\frac{\left\|(K - K_n)u\right\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |u_i|^2\, |\lambda_i|^2}{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |u_i|^2} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |u_i|^2\, |\lambda_{n+1}|^2}{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |u_i|^2} = |\lambda_{n+1}|^2.$$

С другой стороны, эта оценка достигается, когда u — собственный вектор числа λ_{n+1}. Поэтому

$$\boxed{\|K - K_n\| = |\lambda_{n+1}|}.$$

Отсюда и из утверждения 3.1.5 ясно: чем быстрее убывают собственные числа, тем лучше наша оценка! Из уравнения 3.4 видно, что собственные числа — что-то вроде коэффициентов в ряде Фурье по собственным функциям для ядра. Видимо, поэтому скорость их убывания возрастает, если ядро становится более гладким… А ядра гладкие не всегда.

Замечание 4. Есть способ сгладить ядро. Надо в уравнение 3.1 подставить

$$\varphi(t) = f(t) + \mu \int\limits_a^b K(t,\, \xi) \varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Получится уравнение

$$\varphi(x) = f_2(x) + \mu \int\limits_a^b K_2(x, \xi) \varphi(\xi)\, \delta\xi,$$

где

$$f_2(x) = f(x) + \mu \int\limits_a^b K(x,\, t) f(t)\, \mathrm{d}t, \quad K_2(x,\, \xi) = \mu \int\limits_a^b K(x,\, t) K(t,\, \xi)\, \mathrm{d}t.$$

У K_2 с гладкостью получше, но его надо считать.

§ 2. Метод квадратур для интегрального уравнения

Идея заключается в том, чтобы в уравнении

$$u(x) = f(x) + \int\limits_a^b K(x,\, t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

заменить интегрирование на вычисление по какой-нибудь квадратурной формуле:

$$\int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n A_k u(x_k) + R.$$

Получится

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n A_k K(x,\, x_k)u(x_k) + R.$$

Пусть $\tilde{u}$ — решение этого уравнения с отброшенным R, $u_k = \tilde{u}(x_k)$, $f_k = f(x_k)$ и $K_{ik} = K(x_i,\, x_k)$. Получаем систему линейных уравнений

$$u_i = f_i + \sum_{k=1}^n A_k K_{ik} u_k.$$

Её можно решить обычными методами; зная u_k, можно оценить $u(x)$ в любой точке:

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n A_k K(x,\, x_k)u_k.$$

Попробуем оценить погрешность результата. Для многих стандартных квадратурных методов верна формула

$$R[\theta] = \delta(n) \max|\theta^{(m)}(x)|.$$

Нас интересует $R\big[K(x,\, t)u(t)\big]$ при фиксированном x. m-е производные функции $K(x,\, t)u(t)$ выражаются через производные известной $K(x,\, t)$ и через производные $u(t)$ порядка не более m.

Чтобы оценить их, продифференцируем наше интегральное уравнение:

$$u^{(l)}(x) = f^{(l)}(x) + \int\limits_a^b K_x^{(l)}(x,\, t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда можно найти оценку для $u^{(l)}$ через известные f и K и максимум модуля решения. Решение же можно записать, как

$$u = (I-K)^{-1}f \;\Rightarrow\; \|u\| \leqslant \left\|(I-K)^{-1}\right\| \cdot \|f\| \leqslant \frac{\|f\|}{1-\|K\|} \leqslant \frac{\|f\|}{1-\varkappa},$$

где

$$\varkappa = (b-a)\max\big|K(s,\, t)\big|.$$

Предпоследний переход обусловлен утверждением 3.1.4.

Замечание 1. Во-первых, сейчас у нас все нормы — L^1, от этого ничего не портится. Во-вторых, мы только что неявно предположили, что $|\varkappa| < 1$.

Получив оценку для модуля решения, мы можем найти оценку

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial t^m}\big(K(x,\, t)u(t)\big)\right| \leqslant M,$$

зависящую только от известных функций.

Перейдём теперь непосредственно к оценке ошибки. У нас есть два уравнения

$$\begin{aligned} Au &= f, \quad & A &= I-K; \\ \tilde{A}\tilde{u} &= f, \quad & \tilde{A} &= I-\tilde{K}, \end{aligned}$$

где
$$\tilde{K}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i K(x,\, x_i)\varphi(x_i).$$
Заметим, что
$$\tilde{A}(u - \tilde{u}) = \tilde{A}u - Au \;\Rightarrow\; \|u - \tilde{u}\| \leqslant \boxed{\|\tilde{A}^{-1}\|\,\|\tilde{A}u - Au\|}\,.$$
Оценим норму $\tilde{A}^{-1}$. Для этого сначала оценим норму $\tilde{K}$:
$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i K(x,\, x_i)\varphi(x_i)\right| \leqslant \max|K| \cdot \|\varphi\| \cdot \sum_{i=1}^{n} A_i = (b-a)\max|K| \cdot \|\varphi\|,$$
поэтому $\|\tilde{K}\| \leqslant \varkappa$.

Отсюда
$$\|\tilde{A}^{-1}\| = \left\|(I - \tilde{K})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\varkappa}.$$
Теперь оценим $\|\tilde{A}u - Au\|$:
$$\|\tilde{A}u - Au\| = \max\left|R\big[K(x,\, t)u(t)\big]\right| \leqslant M\delta(n).$$
В конечном итоге находим
$$\boxed{\|u - \tilde{u}\| \leqslant \frac{M\delta(n)}{1-\varkappa}}\,.$$

Подробнее про этот метод можно прочитать в книгах [?] и [?].

§ 3. Вариационный принцип для ограниченного оператора; метод Ритца для интегрального уравнения II рода

Замечание 1. В этом параграфе все гильбертовы пространства вещественны.

Основная идея заключается в том, чтобы свести решение уравнения
$$Au = f$$
к минимизации некоторого функционала.

Определение 1. *Энергетическим* функционалом для такого уравнения называется
$$\tilde{f}(u) = (Au,\, u) - 2(f,\, u).$$

Чтобы работать с энергетическим функционалом, нужны дополнительные ограничения на оператор A.

Определение 2. Оператор A называют *положительно определённым*, если $(Au,\, u) \geqslant k^2(u,\, u)$[1].

Утверждение 1. Самосопряжённый положительно определённый оператор A обратим.

Доказательство. Положим в доказательстве $k^2 = 1$, ибо на обратимость это не влияет, можно просто разделить A на k^2. Заметим, что $\ker A = \{0\}$, поскольку
$$Au = 0 \;\Rightarrow\; (Au,\, u) = 0 \;\Rightarrow\; (u,\, u) = 0 \;\Rightarrow\; u = 0.$$
При этом ортогональное дополнение образа A — его ядро:
$$x \in \operatorname{Im} A^{\perp} \Leftrightarrow \forall u \quad 0 = (x,\, Au) = (Ax,\, u) \Leftrightarrow Ax = 0.$$
Поэтому
$$\overline{\operatorname{Im} A} = \ker A^{\perp} = H,$$
и образ оператора A плотен в H.

[1] Это необычное название, кажется. Их называют ещё *полуограниченными снизу*.

Докажем, что он на самом деле равен H. Для этого нам пригодится неравенство

$$\|u\|^2 \leqslant (Au, u) \leqslant \|Au\| \, \|u\| \;\Rightarrow\; \boxed{\|u\| \leqslant \|Au\|}.$$

Пусть $y \in H$. Поскольку образ плотен, найдётся последовательность $\{x_n\}$ такая, что $Ax_n \to y$. Однако

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|Ax_n - Ax_m\|,$$

поэтому $\{x_n\}$ сходится в себе; гильбертово пространство полно, поэтому $x_n \to x$. Но оператор A непрерывен, и

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; Ax_n \to Ax \;\Rightarrow\; Ax = y.$$

Таким образом, A сюръективен, и у него есть теоретико-множественный обратный.

При этом

$$\|A^{-1}y\| \leqslant \|y\|,$$

поэтому обратный оператор ограничен.

□

Утверждение 2. Если A — самосопряжённый и положительно определённый, то существует единственное решение u^* уравнения $Au = f$, которое совпадает с единственным минимумом энергетического функционала.

Доказательство. Существование и единственность решения следуют из обратимости оператора. Посчитаем значение функционала на векторе $u^* + h$:

$$\tilde{f}(u^* + h) = \big(A(u^* + h), u^* + h\big) - 2(f, u^* + h) = \tilde{f}(u^*) + (Au^*, h) + (Ah, u^*) + (Ah, h) - 2(f, h) =$$
$$= \tilde{f}(u^*) + (h, f) - (f, h) + (Ah, h).$$

Мы считаем всё вещественным, поэтому $(h, f) = (f, h)$ и

$$\tilde{f}(u^* + h) = \tilde{f}(u^*) + (Ah, h) \geqslant \tilde{f}(u^*).$$

□

Метод Ритца устроен примерно так:

1. Выбрать в пространстве H линейно независимый набор $\{\varphi_k\}$.
2. Рассмотреть конечномерное подпространство H_n, натянутое на первые n векторов базиса.
3. Найти в нём минимум функционала $\tilde{f}$ и считать его приближением.

Минимум в H_n будем искать в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Утверждение 3. Координаты c_n минимума $\tilde{f}$ в подпространстве H_n находится из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_i)\, c_n = (f, \varphi_i)$$

Доказательство. Если подставить

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

в формулу для функционала

$$\tilde{f}(u_n) = (Au_n, u_n) - 2(f, u_n),$$

получится

$$\tilde{f}(u_n) = \sum_{k,m} c_k c_m (A\varphi_k, \varphi_m) - 2\sum_{m} c_m (f, \varphi_m).$$

Дифференцируя это выражение по c_i и приравнивая к нулю, получим нужную СЛУ. □

Замечание 2. Симметричная матрица $a_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j)$ — матрица Грама положительно определённой симметрической билинейной формы $g(u, v) = (Au, v)$. Известно, что определитель матрицы Грама равен квадрату объёма параллелипипеда, натянутого на базисные вектора, в соответствующей метрике. Он, конечно, ненулевой, а потому система линейных уравнений разрешима однозначно.

Поговорим о сходимости метода Ритца.

Утверждение 4. Если набор $\{\varphi_k\}$ таков (это по сути означает, что он является базисом), что

$$\forall v \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n,\, \alpha_i : \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon,$$

то метод Ритца сходится, т.е. $\|u_n - u^*\| \to 0$.

Доказательство. Поскольку оператор A положительно определён, форма $g(u, v) = (Au, v)$ является настоящим скалярным произведением. Мы утверждаем, что u_n — элемент из H_n, ближайший к u^* с точки зрения метрики g. Докажем это. Для этого предположим, что

$$u_n = v_n + h,$$

где $v_n = u^* - v_n^{\perp}$ — ближайший к u^* элемент из H_n, а $v_n^{\perp} \perp H_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_n) = \tilde{f}(u^*) + \big(A(h - v_n^{\perp}),\, h - v_n^{\perp}\big) = \\ = \tilde{f}(u^*) + g(v_n^{\perp}, v_n^{\perp}) + g(h, h). \end{aligned}$$

Видно, что это выражение минимально, когда $h = 0$ и $u_n = u^* - v_n^{\perp}$.

Найдём теперь по ε такое N и $w \in H_N$, что $\|w - u^*\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|u_n - u^*\| \leqslant \frac{1}{k}\, \|u_n - u^*\|_A \leqslant \frac{1}{k} \|w - u^*\|_A \leqslant \frac{\sqrt{\|A\|}}{k} \|w - u^*\| < \frac{\sqrt{\|A\|}}{k} \varepsilon,$$

где $\|x\|_A = \sqrt{g(x, x)}$. Объясним переходы по пунктам:

1. Потому что $g(x, x) \geqslant k^2 (x, x)$.
2. Потому что u_n — самый близкий элемент к u^*.
3. Потому что $(Ax, x) \leqslant \|Ax\|\, \|x\| \leqslant \|A\|\, (x, x)$.
4. Прост)00

Эпсилон домножился на константу, но это не страшно: стремление к нулю всё равно есть. □

Замечание 3. Видно, что скорость сходимости метода от гладкости ядра не зависит (только от его нормы). По сути она определяется тем, насколько быстро убывают коэффициенты разложения u^* по базису φ_k, что связано с гладкостью решения. Зато ограничения на оператор сильные.

§ 4. Интегральное уравнение I рода и его некорректность

Определение 1. *Интегральным уравнением I рода* называют уравнение вида

$$\int_a^b K(x, t) u(t)\, \mathrm{d}t = f(x).$$

Определение 2. Говорят, что задача *корректна*, если при малых изменениях исходных данных решение меняется слабо.

Определение 3. Задачу вида $Au = f$ называют *корректной*, если у оператора A есть ограниченный обратный.

Кажется, эти два определения почти одинаковые. :)

Утверждение 1. Задача о решении уравнения Фредгольма I рода некорректна.

Доказательство. Интуитивно это понятно: мы решаем уравнение вида $Ku = f$, где K — компактный оператор. Его образ маленький, и логично, что слегка изменив f мы можем получить задачу с совсем другим решением или, скорее, вовсе неразрешимую.

Покажем это для случая симметричного ядра. Симметричность позволит нам выбрать собственный базис $\{\varphi_n\}$ с собственными числами λ_n. Пусть

$$u = \sum u_i \varphi_i; \quad u = \sum f_i \varphi_i.$$

Тогда уравнение перепишется, как

$$\sum u_i \lambda_i \varphi_i = \sum f_i \varphi_i \Leftrightarrow \boxed{u_i \lambda_i = f_i}.$$

Формально решение имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i.$$

Если $\lambda_i = 0$, а $f_i \neq 0$, то задача наверняка не имеет решения. Всё плохо, даже если это не так: известно, что собственные числа компактного оператора стремятся к нулю, поэтому ряд для u будет сходиться только если f_i убывают ещё быстрее.

Посмотрим, что будет при небольшом изменении начальных данных; пусть

$$Ku = f; \quad k\tilde{u} = \tilde{f}; \quad \tilde{f} = f + \delta f; \quad \tilde{u} = u + \delta u,$$

причём $\|\delta f\| < \varepsilon$. Функция δu удовлетворяет уравнению $K\delta u = \delta f$. Решение должно выглядеть как

$$\delta u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta f_i}{\lambda_i} \varphi_i.$$

Даже если этот ряд сходится, нельзя гарантировать, что при $\varepsilon \to 0$ δu тоже будет стремиться к нулю.

Действительно, всегда можно выбрать $\delta f = \varepsilon \varphi_n$, где n таково, что $\lambda_n < \varepsilon$. Тогда $\|\delta u\|$ будет больше 1. □

Подробнее про это можно прочитать в книге [?].

§ 5. Условная корректность по Тихонову, метод квазирешений

Теорема 1. (об условной корректности) Пусть оператор A на гильбертовом пространстве H некорректен, но инъективен (устанавливает взаимно однозначное отображение на образ). Рассмотрим компакт $L \in H$, пусть M — его образ. Отображение A^{-1} непрерывно на M[1].

Доказательство. Возьмём какую-нибудь последовательность $f_n \to f$ в M. Оператор A инъективен, поэтому элементы u_n такие, что $Au_n = f_n$ определены однозначно. Выберем в $\{u_n\}$ какую-нибудь сходящуюся подпоследовательность $u'_n \to u'$.

Поскольку оператор A непрерывен, $Au'_n \to Au'$; но $Au'_n \to f$, поэтому и $Au' = f \Rightarrow u' = A^{-1}f$. Но тогда выходит, что пределы всех сходящихся подпоследовательностей в $\{u_n\}$ одинаковы! Поэтому все частичные пределы совпадают, и u_n имеет предел, который равен $A^{-1}f$, что и даёт нам непрерывность. □

Определение 1. Это свойство — иметь непрерывный обратный на образах компактов — и называется *условной корректностью*.

Пусть мы решаем задачу $Au = f$, причём правая часть известна с погрешностью:

$$\|f - f_\delta\| \leqslant \delta,$$

но уравнение $Au = f_\delta$ не всегда имеет решение даже когда f_δ из этого шара. Приходим к определению *квазирешения*:

[1] На самом деле это просто стандартная теорема про то, что непрерывное отображение из компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом на образ.

Определение 2. Зафиксируем конкретную f_δ. Тогда *квазирешением* уравнения $Au = f_\delta$ называется вектор u_δ, при котором достигается

$$\min_{u\in D} \|Au - f_\delta\|, \quad D = \{u \mid \|u\| \leqslant R\}.$$

Если искать не при $\|u\| \leqslant R$, а при $\|u\| = R$, получится задача на условный экстремум. Используя метод множителей Лагранжа, будем минимизировать функционал

$$F(u) = \alpha\|u\|^2 + \|Au - f_\delta\|^2.$$

Утверждение 1. Минимум этого функционала удовлетворяет уравнению

$$(\alpha I + A^*A)u = A^*f.$$

Доказательство. Обычный поиск вариации, нужно расписать $F(u + th)$ через скалярные произведения, продифференцировать по t, а после положить t равным нулю. ☐

Мы получили уравнение, похожее на исходное, но оно уже второго типа, а при малых α похоже на исходное. Произошла *регуляризация*! Более того, оператор $\alpha I + A^*A$ самосопряжён, и

$$\big((\alpha I + A^*A)u,\, u\big) = \alpha(u,\, u) + (Au,\, Au) \geqslant \alpha(u,\, u),$$

поэтому применим вариационный принцип.

Замечание 1. Насколько я понимаю, метод квазирешений нам рассказан в основном для того, чтобы прийти к регуляризации. Из квазирешений следует, что при некотором α минимум функционала должен хорошо приближать решение — мотивация! Плюс демонстрация того, что не совсем очевидно, что альфу можно просто к нулю стремить.

§ 6. Метод регуляризации для уравнения I рода, сходимость

Замечание 1. Кажется, этого билета почти нет у Оли, поэтому я опускаю доказательства. Это хорошо написано у Ангелины.

Идея регуляризации заключается в том, чтобы минимизировать функционал вида

$$F(u) = \alpha\Omega(u) + \|Au - f\|^2,$$

где $\Omega(u) \geqslant 0$ и множества $\Omega(u) < C$ компактны.

Замечание 2. В методе квазирешений у нас получился $\Omega(u) = \|u\|^2$, для него эти множества — открытые шары, они совсем не компактны.

Стандартный выбор — функционал

$$\Omega(u) = \int\limits_a^b u'^2\, \mathrm{d}t.$$

Правда, при этом мы начинаем искать решение среди гладких функций.

Утверждение 1. Для такого функционала Ω множества $\Omega(u) < C$ компактны.

Доказательство. Стандартное рассуждение, использующее теорему Арцела-Асколи: подмножество в пространстве непрерывных функций на отрезке компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Из компактности в смысле топологии пространства непрерывных функций следует компактность в смысле L^2-нормы. ☐

Годятся и функционалы

$$\Omega(u) = \int\limits_a^b {u^{(p)}}^2\, \mathrm{d}t, \quad \Omega(u) = \int\limits_a^b u'^2 - u^2\, \mathrm{d}t.$$

Теорема 1. Пусть $\|f - f_\delta\| < \delta$, и мы решаем приближённую задачу $A\tilde{u} = f_\delta$ вместо точной. Если δ и α стремятся к нулю так, что

$$\frac{\delta^2}{\alpha} \leqslant \gamma < \infty,$$

то $\tilde{u} \to u$.

Доказательство. См. конспект Ангелины. □

Коэффициент α обычно подбирают эмпирически: если он мал, то решение будет ближе к $\tilde{u}$, если велик, оно будет глаже... Стандартный функционал приводит к вариационной задаче

$$K^*Ku - \alpha u'' = K^*f.$$

4 Вариационные методы

§ 1. Вариационный принцип для уравнения с неограниченным оператором

Определение 1. *Неограниченным* называется оператор A на гильбертовом пространстве, определённый на его всюду плотном линейном подпространстве $\mathcal{D}(A)$.

Мы будем требовать от A также симметричности (самосопряжённости) и положительной определённости.

Определение 2. Билинейная форма $(u, v)_A = (Au, v)$ называется *энергетическим скалярным произведением*, норма $\|u\|_A = (u, u)_A$ — *энергетической нормой*. Пополнение H_A пространства $\mathcal{D}(A)$ по энергетической норме называется *энергетическим пространством*.

Замечание 1. В доказательстве 3.3.4 мы видели, что

$$\|u\| \leqslant k^{-1}\|u\|_A.$$

Поэтому если последовательность сходится в себе по энергетической норме, то она сходится и по обычной; кофинальные последовательности тоже одинаковые и там, и там. Поэтому пополнение по энергетической норме можно рассматривать, как подмножество H.

Теорема 1. (О вариационном принципе) Рассмотрим энергетический функционал $F(u) = (u, u)_A - 2(f, u)$.

1. $F(u)$ имеет единственный минимум u^*.
2. Если $u^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $Au^* = f$.
3. Если $Au_0 = f$, то $u^* = u_0$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $\Phi(u) = (f, u)$. Он ограничен на H_A, поскольку

$$\big|(f, u)\big| \leqslant \|f\|\,\|u\| \leqslant k^{-1}\|f\|\,\|y\|_A.$$

По теореме Рисса он представим в виде $\Phi(u) = (u^*, u)_A$. Тогда

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u^*, u)_A = \|u - u^*\|^2 - \|u^*\|^2.$$

Ясно, что минимум достигается при $u = u^*$.

Третий пункт очевиден, ибо

$$(f, u) = (Au_0, u) = (u_0, u)_A \ \Rightarrow\ u_0 = u^*$$

То же самое в обратную сторону даёт пункт 2. □

§ 2. Метод Ритца, сходимость

Метод Ритца и в энергетической Африке метод Ритца. Ну да, φ_n теперь лежат в H_A, а в остальном — никакой разницы.

Теорема 1. Если набор $\{\varphi_k\}$ таков (это по сути означает, что он является базисом), что

$$\forall v \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n,\, \alpha_i : \left\| v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\|_A < \varepsilon,$$

то метод Ритца сходится, т.е. $\|u_n - u^*\|_A \to 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству 3.3.4. Первый абзац такой же, по сути, а дальше надо оставить только оценки, содержащие энергетическую норму (я случайно ей воспользовался, когда ещё не знал, что это, извините. то доказательство было непонятно, а то, что я придумал — скорее отсюда). □

§ 3. Метод Ритца для обычной краевой задачи, вид энергетического пространства, естественные граничные условия

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$L(y)(x) = -(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$$

на отрезке $[a,\, b]$ с граничными условиями

- I типа: $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.
- III типа: $y'(a) = \alpha y(a)$, $y'(b) = \beta y(b)$.

Определение 1. *Классическое решение* — лежит в $C^2\big([a,\, b]\big)$, ~~никого не трогает~~ удовлетворяет уравнению в каждой точке.

Ну и $\mathcal{D}(L) = C^2\big([a,\, b]\big)$.

Замечание 1. На самом деле, мы ищем решения не в $\mathcal{D}(L)$, а в более узких пространствах. В случае условия I типа нас интересует простанство

$$D_I = \big\{ y \in \mathcal{D}(L) \,\big|\, y(a) = y(b) = 0 \big\},$$

а в случае условия III типа

$$D_{III} = \big\{ y \in \mathcal{D}(L) \,\big|\, y'(a)\alpha y(a),\ y'(b) = \alpha y(b) \big\}.$$

Именно их мы будем пополнять, создавая соответствующее энергетическое пространство.

Утверждение 1. Если $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \leqslant 0$ в добавок к условиям

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0,$$

то оператор получится симметричный и положительно определённый.

Доказательство. Посмотрим, как будет выглядеть энергетическое скалярное произведение:

$$(Ly,\, z) = \int_a^b \big(-(py')' + qy\big) z\, \mathrm{d}x = -py'z\big|_a^b + \int_a^b (py'z' + qyz)\, \mathrm{d}z.$$

Интеграл обозначим через $I(X)$, а внеинтегральный член — $Q(x)$. Если условия первого типа, то $Q = 0$, а если третьего, то

$$Q(y,\, z) = -\beta p(b) y(b) z(b) + \alpha p(a) y(a) z(a).$$

Симметричность уже видна, и

$$(Ly,\, y) = \int_a^b (py'^2 + qy^2)\, \mathrm{d}x - \beta p(b) y(b)^2 + \alpha p(a) y(a)^2.$$

Если, $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \leqslant 0$, то и положительная определённость будет. □

Определение 2. *Пространством Соболева* $W_p^k(Q) \subset L^p(Q)$ называют пространство функций, обобщённые производные которых вплоть до k-й лежат в $L_p(Q)$.

Замечание 2. На пространствах Соболева есть норма. Нас будет интересовать пространство $W_2^1\big([a,\, b]\big)$; на нём эта норма имеет вид

$$\|f\|^2_{W_2^1} = \int\limits_a^b (f^2 + f'^2)\,\mathrm{d}x.$$

Можно доказать, что с такой нормой является гильбертовым (а произвольные пространства Соболева — банаховы).

Утверждение 2. Энергетическая норма для оператора L эквивалентна норме в W_2^1.

Доказательство. Пусть $P_m = \max p$, $Q_m = \max q$, $M = \max(P_m,\, Q_m)$. Нетрудно доказывается, что $\|y\|_{W_2^1} \leqslant C\|y\|_L$:

$$\int\limits_a^b (f^2 + f'^2)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{M}\int\limits_a^b (pf^2 + qf'^2)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{M}\|f\|_L.$$

Обратное утверждение очевидно для I типа граничных условий:

$$\int\limits_a^b (pf^2 + qf'^2)\,\mathrm{d}x \leqslant M\|f\|_{W_2^1}.$$

Чтобы разобраться с граничными условиями III типа, нам понадобится лемма:

Лемма 1. Для любой точки x значение $y(x)^2$ не превосходит константы, умноженной на $\|y\|^2_{W_2^1}$.

Доказательство. Ограничение соболевской нормы даёт ограничение на интеграл от квадрата функции + не позволяет ей расти слишком быстро, поэтому есть надежда, что значения и правда будут ограничены нормой. Займёмся оценкой. Очевидно, что

$$y(x) = y(\xi) + \int\limits_\xi^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Поскольку $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,

$$y(x)^2 \leqslant 2y(\xi)^2 + 2\left(\int\limits_\xi^x y'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

При этом интеграл

$$\int\limits_\xi^x y'(t)\,\mathrm{d}t$$

является L^2-произведением (в отрезке от ξ до x) $\big(y'(t),\, 1\big)_{L^2}$, и

$$\big(y'(t),\, 1\big)^2_{L^2} \leqslant \|1\|^2_{L^2([x,\,\xi])}\,\|y'\|^2_{L^2([x,\,\xi])} = (x-\xi)\int\limits_\xi^x y'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\|y'\|^2_{L^2}$$

В итоге получаем, что

$$y(x)^2 \leqslant 2y(\xi)^2 + 2(b-a)\|y'\|^2_{L^2}$$

Навесив слева и справа интегралы по ξ, получим, что

$$y(x)^2 \leqslant \frac{2}{b-a}\|y\|^2_{L^2} + 2(b-a)\|y'\|^2_{L^2} \leqslant C\|y\|^2_{W_2^1}.$$

□

Используя полученную оценку, нетрудно оценить отвечающий за граничные условия член $Q(x)$ через соболевскую норму. $\square$

Замечание 3. Ещё выполняется *теорема вложения*: все функции из W_2^1 непрерывны, при этом отображение вложения $W_2^1 \to C([a,\, b])$ непрерывно.

Утверждение 3. Энергетическое пространство H_L является подпространством в W_2^1.

Доказательство. Не очень важно, D_I или D_{III} придётся пополнять: они оба лежат в $\mathcal{D}(L)$, про которое мы доказали, что с энергетической нормой оно гомеоморфно вкладывается в W_2^1. Поскольку W_2^1 гильбертово, пополнение нас из него не выведет. $\square$

Замечание 4. Пополнение пространства D_I приведёт нас к пространству $\overset{\circ}{W}{}_1^2$ элементов W_1^2, удовлетворяющих граничному условию I типа. С условием III так не получится, поскольку производная — не непрерывный функционал, и мы придём ко всему W_1^2. По этой причине условия I типа называют *главными*, а III типа — *естественными*.

О пространствах Соболева в контексте вычислительных методов можно прочитать в книге [?], и ещё подробнее в книге [?].

§ 4. ВРМ-1 для обычной краевой задачи

Идея *вариационно-разностных методов* заключается в том, чтобы использовать сетку и минимизацию функционала одновременно.

Пусть в сетке n элементов, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$; рассмотрим пространство, состоящее из сеточных функций $y_{(n)} = \{y_k\}_0^n$. Суть ВРМ-1 в том, чтобы заменить интегралы на суммы, а производные — на разности, и минимизировать функционал на сеточных функциях.

Наш функционал имеет вид

$$F(y) = (y,\, y)_L - 2(f,\, y) = \int_a^b (py'^2 + qy^2 - 2fy)\,\mathrm{d}x - \beta p(b) y^2(b) + \alpha p(a) y^2(a).$$

Сделаем численные замены:

$$\int_a^b py'\,\mathrm{d}x \approx h \sum_{k=0}^{n-1} p\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right)^2;$$
$$\int_a^b (qy^2 - 2fy)\,\mathrm{d}x \approx k {\sum_{k=0}^{n-1}}' (q_k y_k^2 - 2f_k y_k),$$

где сумма со штрихом означает, что это формула трапеций (т.е. крайние слагаемые домножены на 1/2).

Не представляет труда теперь выписать сеточный функционал. Далее минимум ищется дифференцированием по y_k и приравниванием всех производных к нулю. В итоге для внутренних точек получаются уравнения

$$-\frac{1}{h}\left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) + q_i y_i = f_i.$$

Они напоминают уравнения разностной прогонки.

Для левого конца получится уравнение

$$-p_{\frac{1}{2}} \frac{y_1 - y_0}{2} + \frac{h}{2}(q_0 y_0 - f_0) + \alpha p_0 y_0 = 0$$

Второе слагаемое неожиданное! Ведь здесь стоило ожидать простейшее приближение $y'(a) = \alpha y(a)$. Оказывается, что оно компенсирует сдвиг:

$$\begin{aligned} p_{\frac{1}{2}}\frac{y_1 - y_0}{2} &= [py']\left(a + \frac{h}{2}\right) + O(h^2) = \\ &= p(a)y'(a) + \frac{h}{2}(py')'|_a + O(h^2) = \\ &= p(a)y'(a) + \frac{h}{2}\big(q(a)y(a) - f(a)\big) + O(h^2). \end{aligned}$$

§ 5. ВРМ-2 для обычной краевой задачи

Идея ВРМ-2 заключается в том, чтобы «поднять» сеточные функции до каких-нибудь функций из W_2^1 (с помощью некоторого сорта интерполяции), а потом минимизировать функционал на получившемся пространстве.

Будем работать с граничными условиями I типа.

Используем кусочно-линейную интерполяцию:

$$\tilde{y}_{(n)}(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h}y_k + \frac{x - x_k}{h}y_{k+1}.$$

Производная определена всюду, кроме узлов:

$$\tilde{y}'_{(n)}(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}.$$

Однако узлы — множество меры ноль, поэтому производная всё равно определена, как обобщённая функция. Можно доказать, что это и будет производная в смысле обобщённых функций от восполненной сеточной функции. Поэтому наши восполненные функции находятся в W_2^1.

Можно ввести базисные функции — это восполнения сеточных функций, которые равны нулю всюду, кроме одной точки, а в ней равны единица, т.е.

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{k+1} - x}{h}, & [x_k, x_{k+1}]; \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{h}, & [x_{k-1}, x_k]; \\ 0. \end{cases}$$

Получилось что-то очень похожее на метод Ритца, но только теперь у нас не фиксированный бесконечный набор $\{\varphi_k\}$, а для каждого n есть набор $\{\psi_k\}$ с понятным геометрическим смыслом.

Уравнение для минимизации получится такое же:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\psi_k, \psi_m)_A y_k = (f, \psi_m),$$

матрица системы — $\{a_{km}\} = (\psi_k, \psi_m)_A$.

Носители базисных функций почти не пересекаются, поэтому

$$|k - m| > 1 \;\Rightarrow\; a_{km} = 0.$$

Поэтому система уравнений снова выходит трёхдиагональной:

$$a_m y_{m-1} + b_m y_m + a_{m+1}y_{m+1} = (f, \psi_m),$$

где

$$a_m = a_{m-1,m} \text{ и } b_m = a_{mm}.$$

На негладких решениях мы не получим точности лучше, чем $O(h)$. Однако этот метод для них надёжнее, чем просто сеточный.

§ 6. Метод Ритца для эллиптического уравнения, энергетическое пространство и естественные условия

Рассмотрим уравнение

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + au = f.$$

Коэффициенты должны удовлетворять нескольким условиям:

1. Все функции действуют в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В классическом сеттинге решение считается дважды непрерывно дифференцируемыми в Ω и непрерывным на $\overline{\Omega}$; a_{ij} — один раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$, а остальные коэффициенты просто непрерывны.
2. Симметричность (эллиптичность): $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$.
3. Положительная определённость:

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant k^2 \sum_i \xi_i^2.$$

Граничные условия бывают

1. $u|_{\partial\Omega} = 0$ — I типа (задача Дирихле).
2. Пусть

   $$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cos(n,\, x_i)\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\partial\Omega}.$$

   Этот оператор называется *конормальной производной*. Тогда граничное условие выглядит, как

   $$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u|_{\partial\Omega}.$$

   Это — задача третьего рода (задача Фон-Неймана).
3. Задача второго рода — когда $\sigma = 0$.

Найдём вид энергетического произведения.

Утверждение 1.

$$(Lu,\, v) = \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + auv\right)\partial x + \int\limits_{\partial\Omega}\sigma uv\,\mathrm{d}S.$$

Доказательство.

$$(Lu,\, v) = \int\limits_{\Omega}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + au\right)v\,\mathrm{d}x$$

Используя формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\Omega}u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega}u\varphi\cos(n,\, x_i)\,\mathrm{d}S,$$

найдём искомый результат. □

Утверждение 2. Оператор положительно определён, если

1. Задача первого типа: $a(x) \geqslant 0$;
2. Задача второго типа: $a(x) \geqslant a_0 > 0$;
3. Задача третьего типа: $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $\sigma(x) \geqslant 0$ или $a(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$.

Доказательство.

$$(Lu,\, u) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + au^2 \right) \partial x + \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 \, \mathrm{d}S}_{\text{III}}.$$

Нам понадобится неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x \leqslant c_1 \left(\int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}S \right).$$

1. Здесь работает совсем грубая оценка:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + au^2 \right) \partial x \geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \partial x \geqslant k^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \partial x \geqslant \frac{k^2}{c_1} \int\limits_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x.$$

2. Ещё проще, как это ни странно.

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + au^2 \right) \partial x \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x$$

3. Первый вариант доказывается точно так же, как для II типа, а второй:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + au^2 \right) \partial x + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 \, \mathrm{d}S \geqslant k^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \partial x + \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} u^2 \, \mathrm{d}S \geqslant \frac{\min(k^2,\, \sigma_0)}{c_1} \int\limits_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}x.$$

□

Замечание 1. Можно доказать, что эта энергетическая норма эквивалентна норме в $W_2^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{W_2^1}^2 = \int\limits_{\Omega} \left(\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Энергетическое пространство для II и III типов совпадёт с W_2^1, а для типа I унаследует граничное условие и будет состоять из элементов W_2^1, обращающихся в ноль на границе.

Замечание 2. Вообще всё это очень похоже на обычную краевую задачу, только многомерную. При подборе базиса $\{\varphi_k\}$ для метода Ритца в задаче I типа нужно как-то заставить φ_k обращаться в ноль на границе области Ω, которая может быть некрасивой. Чтобы это сделать, можно найти функцию $\omega(x,\, y)$ — это на плоскости — которая положительна в Ω и равна нулю на границе. Читатель сможет придумать такие функции для квадрата/круга/сектора круга, но вообще это, видимо, искусство.

По поводу этого билета стоит заглянуть в книгу [?].

5 Уравения в частных производных

§ 1. Разностный метод для общего уравнения теплопроводности, явная схема

Определение 1. Общее *уравнение теплопроводности* выглядит вот так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial y}{\partial x} + a_2 u + f.$$

Функции a_i и f зависят от x и t.

Работать будем, как всегда, на отрезке $[a,\ b]$; временной отрезок будет $[0,\ T]$.

Определение 2. У уравнения теплопроводности бывает *начальное условие*:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),$$

а также три типа *граничных условий*

1. $u(a,\ t) = \psi_0(t)$, $u(b,\ t) = \psi_1(t)$.
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,\ t) = \psi_0(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(b,\ t) = \psi_1(t)$.
3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\Big|_{x=a} = \psi_0(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \beta u\Big|_{x=b} = \psi_1(t)$.

Сетка характеризуется такими же, как обычно, величинами:

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, & h &= \frac{b-a}{h}, & i &\in 0 \dots n; \\ t_k &= k\tau, & \tau &= \frac{T}{M}, & k &\in 0 \dots M. \end{aligned}$$

Положим $u_i^k = u(x_i,\ t_k)$ и

$$Lu = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial y}{\partial x} + a_2 u.$$

Тогда

$$(\tilde{L}u)_i^k = a_0 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + a_1 \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + a_2 u_i^k.$$

Есть два варианта для производной по времени:

$$\begin{aligned} &\text{A:} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ t_k) \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}, \\ &\text{B:} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ t_k) \approx \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau}. \end{aligned}$$

Для варианта A получается

$$\boxed{\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \tilde{L}u_i^k + f(x_i,\ t_k)}.$$

Это простейшая явная схема.

В таком виде уравнения можно писать для $i \in 1 \dots n-1$, $k \in 0 \dots M-1$; нужны дополнительные с граничными условиями.

забыли

Рис. 5.1: Простейшая явная схема для уравнения теплопроводности.

- Начальные условия: $u_i^0 = \varphi(x_i)$.
- Граничные условия:
  1. $u_0^k = \alpha_1(t_k)$, $u_n^k = \alpha_2(t_k)$; при этом выполняются условия согласования *нулевого порядка*
  $$\varphi(a) = \alpha_1(0), \quad \varphi(b) = \alpha_2(0).$$
  2. Для типов II, III используются такие же трюки, как в обычных диффурах. Надо аппроксимировать производные. Можно применять метод фиктивных точек или метод исключения главного члена погрешности.

     В угловых точках снова возникнет два разных условия:
  $$u_0^0 = \varphi(a) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}(a,\, 0) = \beta_1(0)u_0^0 + \alpha_1(0).$$
     Будет ли выполняться равенство
  $$\varphi'(a) = \beta_1(0)u_0^0 + \alpha_1(0)?$$
     Оно называется *условием согласования I порядка*. Без него уравнения не станут формально противоречивы.

Если разрешить уравнения относительно u_i^{k+1}, получится

$$u_i^{k+1} = A_i^k u_{i-1}^k + B_i^k u_i^k + C_i^k u_{i+1}^k + D_i^k.$$

Коэффициенты выражаются по формулам

$$\begin{aligned} A_i^k &= \sigma a_0 - \sigma a_1 \frac{h}{2}, & C_i^k &= \sigma a_0 + \sigma \frac{h}{2} a_1, \\ B_i^k &= 1 - 2\sigma a_0 + \tau a_2, & D_i^k &= \tau f(x_i,\, t_k), \end{aligned}$$

где $\sigma = \dfrac{\tau}{h^2}$.

Можно просто двигаться вперёд по *слоям* — множествам точек с постоянным временем; значения находятся последовательно.

A Введение в функциональный анализ

§ 1. Пространства, отображения

Бесконечномерные пространства во многом похожи на конечномерные, но есть и различия. Приведём наглядный пример:

Теорема 1. (Рисса) В бесконечномерном пространстве с нормой единичный замкнутый шар не компактен. [2]

Доказательство. Чтобы доказать, что что-то не компактно, нужно найти там последовательность, у которой нет сходящейся подпоследовательности. Здесь это нетрудно: подойдёт любой счётный ортнормированный набор векторов!

Представьте себе: у вас есть n единичных ортогональных друг другу векторов. Вы можете добавить ещё один, и ещё, и ещё... Конечно, в такой последовательности не выбрать сходящейся. □

В том, что касается линейных отображений, тоже есть тонкости. Мы знаем, что любое линейное отображение конечномерных пространств непрерывно и *ограничено* (т.е. образ единичного замкнутого шара при нём ограничен). В бесконечномерном случае это не так! Однако выполняется такое утверждение:

Утверждение 1. Для нормированных пространств непрерывность и ограниченность линейных отображений равносильны.

В реальности почти все интересные отображения ограничены. Да и у неограниченных слишком плохие свойства, поэтому в большинстве теорем ограниченность предполагается.

Замечание 1. Будем все гильбертовы пространства считать *сепарабельными*. Это по сути равносильно тому, что в них есть счётный базис.

§ 2. Пара фактов про гильбертовы пространства

Замечание 1. В бесконечномерных пространствах не все подпространства замкнуты; в частности, там бывают всюду плотные подпространства (как, например, многочлены в пространстве непрерывных функций). Об этом не стоит забывать.

Оказывается, в гильбертовых пространствах ортогональные дополнения устроены почти так же, как и в конечномерной ситуации.

Утверждение 1. Ортогональное дополнение любого множества является замкнутым линейным подпространством. Если $A \subset H$ — замкнутое линейное подпространство, то $H = A \oplus A^{\perp}$.

Этот факт используется для того, чтобы доказать теорему Рисса: линейные функционалы в гильбертовом пространстве — просто скалярные умножения на какие-то вектора.

Теорема 1 (Рисс). Пусть H — гильбертово пространство. Тогда каждый вектор e задаёт ограниченный функционал $f_e\colon H \to \mathbb{C}$ по правилу $x \mapsto (x, e)$, и каждый ограниченный функционал на H есть f_e для некоторого однозначно определённого вектора $e \in H$. Определённая этим биекция $H \to H^*$ есть сопряжённо-линейный изометрический изоморфизм нормированных пространств.

[2] Верно и обратное утверждение: если в нормированном пространстве единичный замкнутый шар компактен, то оно конечномерно.

§ 3. Спектр оператора

Ещё одно различие, не столь наглядное, но очень важное, связано со *спектром* оператора.

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство, $A\colon H \to H$ — ограниченный оператор. *Спектром* A называют множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что оператор $A - \lambda I$ необратим.

Понятие спектра тесно связано с собственными числами:

Определение 2. Говорят, что $\lambda \in \mathbb{C}$ — *собственное число* оператора A, если есть такой вектор $v \in H$, что $Av = \lambda v$.

Собственные числа можно охарактеризовать в терминах оператора $A - \lambda I$:

Утверждение 1. λ — собственное число A тогда и только тогда, когда оператор $A - \lambda I$ не инъективен (то есть склеивает какие-то векторы в один).

Доказательство. Пусть λ — собственное число, v — собственный вектор. Тогда $(A-\lambda I)v = 0 = A0$, поэтому оператор не инъективен.

Докажем в обратную сторону. Пусть оператор $A - \lambda I$ не инъективен. Тогда есть вектор из ядра — такой, что $(A - \lambda I)v = 0$, т.е. $Av = \lambda v$. ☐

Отсюда сразу следует утверждение:

Утверждение 2. Для конечномерных пространств спектр и множество собственных чисел — одно и то же.

Доказательство. Как мы знаем,

необратимость ⇔ неинъективность или несюръективность.

Но в конечномерном случае

несюръективность ⇒ неинъективность.

Это связано с тем, что несюръективный оператор понижает размерность пространства, что вынуждает его склеивать вектора.

Поэтому необратимость либо сразу влечёт неинъективность, либо сначала влечёт несюръективность, а потом уже неинъективность. Отсюда

необратимость ⇔ неинъективность,

что и требовалось доказать. ☐

В бесконечномерном случае всё не так. Из необратимости неинъективность больше не следует, и у оператора появляются два разных способа быть необратимым:

1. Оператор склеивает векторы.
2. Образ оператора меньше, чем всё пространство.

Поэтому спектр оператора A в бесконечномерном пространстве разбивается на собственные числа и те точки, в которых $A - \lambda I$ не является сюръективным (хоть и векторы не склеивает).

Замечание 1. Это не мифическая ситуация: обычный оператор умножения на координату (т.е. $Af(x) = xf(x)$) в $L^2([a,\,b])$ не имеет собственных чисел, но его спектр равен всему отрезку!

Когда мы занимались квантовой механикой, мы находили «собственные вектора» — дельта-функции. То, что они на самом деле не функции и в L^2 не лежат — свидетельство описанного феномена!

§ 4. Компактные операторы

Обсудим один класс операторов, очень полезный на практике.

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство, B — единичный замкнутый шар в нём. Оператор $A\colon H \to H$ называют *компактным*, если замыкание множества $A(B)$ компактно.

Замечание 1. На самом деле, компактный оператор переводит любое ограниченное множество в множество с компактным замыканием.

Мы знаем, что даже единичный шар в H не компактен. Это значит, что A — оператор с очень маленьким образом, он сжимает всё пространство во что-то крохотное! Это объясняет простоту (и близость к конечномерию) свойств компактных операторов.

Утверждение 1. Если операторы A_n компактны и $\|A_n - A\| \to 0$, то оператор U компактен.

Следствие 1. Если операторы A_n конечного ранга (т.е. их образы конечномерны), и $\|A - A_n\| \to 0$, то оператор A компактен.

Главный пример компактного оператора — *интегральный оператор*.

Пример 1. Пусть $\square = [a,\, b]\times[a,\, b]$. Рассмотрим оператор A на $L^2\big([a,\, b]\big)$, действующий по правилу

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

где $K \in L^2(\square)$. Такой оператор называют *интегральным*, а функцию K называют его *ядром*. В принципе, вместо L^2 можно жить в C — пространстве непрерывных функций, но оно не гильбертово.

Утверждение 2. Интегральный оператор компактен.

Почти доказательство. Разложим функцию K по базису (так можно, правда):

$$K(x,\, y) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} c_{nm} e_n(x) e_m(y).$$

Рассмотрим последовательность интегральных операторов A_N с ядрами

$$K_N(x,\, y) = \sum_{n,\, m=0}^{N} c_{nm} e_n(x) e_m(y).$$

Простым преобразованием находим, что

$$A_N f(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} c_{nm} \int_a^b e_m(y) f(y)\, \mathrm{d}y \right) e_n(x).$$

Образ оператора A_N находится внутри линейной оболочки векторов $e_1, \ldots, e_N$! Это значит, что наш оператор A приближается операторами конечного ранга, а потому компактен. □

§ 5. Спектры компактных операторов

Спектр компактного оператора обладает замечательным свойством:

Утверждение 1. Пусть A — компактный оператор. Для любого $\delta > 0$ множество собственных чисел A таких, что $|\lambda| \geqslant \delta$ конечно. Собственное пространство любого $\lambda \neq 0$ конечномерно.

Спектр произвольного самосопряжённого оператора, с другой стороны, обладает такими свойствами:

Утверждение 2.

1. Собственные значения самосопряжённого оператора вещественны.

2. Собственные векторы самосопряжённого оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

Для операторов, одновременно компактных и самосопряжённых, удаётся доказать вариант *спектральной теоремы* — бесконечномерного аналога утверждения о том, что симметричную матрицу можно привести к диагональному виду:

Теорема 1 (Гильберта-Шмидта). Пусть A — компактный и самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H. Существует ортогональный базис $\{e_i\}$, состоящий из собственных векторов A.

§ 6. Альтернатива Фредгольма

Определение 1. *Фредгольмовым* называют такой оператор T на гильбертовом пространстве, что $T = I - A$, где A компактен.

Утверждение 1. Сопряжённый к компактному оператор компактен.

Теорема 1 (Альтернатива Фредгольма).

1. Уравнение $T\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогонально любому решению уравнения $T^*\psi_0 = 0$.

2. Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом f ровно одно решение, либо уравнение $T\varphi_0$ имеет ненулевое решение.

3. Уравнения $T^*\psi_0 = 0$ и $T\varphi_0 = 0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Замечание 1. Эту теорему называют *альтернативой*, потому что трудно вынести безальтернативность приближения сдачи вычей. Представьте себе, что вы смотрите на уравнение $T\varphi = f$. Есть два варианта:

1. Уравнение $T\varphi_0$ не имеет ненулевых решений, и ваша задача разрешима единственным способом. Всё прекрасно!

2. Оно их таки имеет, и всё не столь прекрасно.

Пусть вы попали во второй вариант. Снова выбор:

1. f ортогонально всем решениям уравнения $T^*\psi_0 = 0$ (которые теперь уже точно есть по третьему пункту). Тогда ваша задача разрешима, но не одним способом (видимо, их будет бесконечно много).

2. f не такое. Тогда ваша задача неразрешима.

B Обозначения