ローカルレベルモデル

田柳俊和

2017 年 2 月 2 日

1　モデル

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_t + \varepsilon_t & \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
\alpha_t &= \alpha_{t-1} + \eta_t & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\
& & \alpha_1 &\sim N(a_1, P_1)
\end{aligned}
$$

2　カルマンフィルタ

2.1　フィルタリング

$Y_t = \{y_1 \cdots y_t\}$ とすると
一期先状態予測とその分散

$$
\begin{aligned}
a_t &= E(\alpha_t | Y_{t-1}) \\
P_t &= E(\alpha_t | Y_{t-1})
\end{aligned}
$$

フィルタ化推定量とその分散

$$
\begin{aligned}
a_{t|t} &= E(\alpha_t | Y_t) \\
P_{t|t} &= E(\alpha_t | Y_t)
\end{aligned}
$$

一期先観測値予測

$$
\begin{aligned}
E(y_t | Y_{t-1}) &= E(\alpha_t + \varepsilon_t | Y_{t-1}) \\
&= E(\alpha_t | Y_{t-1}) \\
&= a_t
\end{aligned}
$$

一期先観測値予測誤差 (イノベーション) とその分散

$$
\begin{aligned}
\upsilon_t &= y_t - E(y_t | Y_{t-1}) \\
&= y_t - a_t \\
F_t &= Var(\upsilon_t | Y_{t-1})
\end{aligned}
$$

最初からみていくと

$$\begin{aligned} a_1 &= E(\alpha_1) \\ P_1 &= Var(\alpha_1) \end{aligned}$$

は既知である. したがって

$$\begin{aligned} E(\upsilon_1) &= E(y_1 - a_1) \\ &= a_1 - 0 - a_1 \\ &= 0, \\ F_1 &= Var(\upsilon_1) \\ &= Var(y_1 - a_1) \\ &= Var(\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1) \\ &= E[(E(\alpha_1 + \varepsilon_1) - (\alpha_1 + \varepsilon_1))^2] \\ &= E[a_1^2 - 2a_1(\alpha_1 + \varepsilon_1) + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2] \\ &= E[a_1^2 - 2a_1\alpha_1 + \alpha_1^2 + \varepsilon_1^2] \\ &= E[(a_1 - \alpha_1)^2] + E[(0 - \varepsilon_1)^2] \\ &= Var(\alpha_1) + Var(\varepsilon_1) \\ &= P_1 + \sigma_\varepsilon^2, \\ Cov(\alpha_1, \upsilon_1) &= Cov(\alpha_1, \alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1) \\ &= E[\alpha_1 - a_1]E[(\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1) - E[\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1]] \\ &= E[\alpha_1 - a_1]E[\alpha_1 + \varepsilon_1 - a_1] \\ &= E[\alpha_1 - a_1]E[\alpha_1 - a_1] \\ &= Var(\alpha_1) \\ &= P_1 \end{aligned}$$

$\upsilon_1 = y_1 - a_1$ は観測値 y_1 から定数 a_1 を差し引いたものなので,υ_1 と y_1 は一対一対応する.
したがって $E(\cdot|y_1) = E(\cdot|\mu_1)$ となるので,

$$\begin{aligned} a_{1|1} &= E(\alpha_1|\upsilon_1) = E(\alpha_1) + Cov(\alpha_1, \upsilon_1)Var(\upsilon_1)^{-1}(\upsilon_1 - E(\upsilon_1))^{*1} \\ &= E(\alpha_1) + Cov(\alpha_1, \upsilon_1)Var(\upsilon_1)^{-1}\upsilon_1 \\ &= a_1 + P_1F_1^{-1}\upsilon 1 \\ &= a_1 + K_1\upsilon_1 \\ P(1|1) &= Var(\alpha_1|\upsilon_1) = Var(\alpha_1) - Cov(\alpha_1, \upsilon_1)Var(\upsilon_1)^{-1}Cov(\upsilon_1, \alpha_1) \\ &= Var(\alpha_1|\upsilon_1) = Var(\alpha_1) - Cov(\alpha_1, \upsilon_1)^2Var(\upsilon_1)^{-1} \\ &= P_1 - P_1^2F_1^{-1} \\ &= P_1(1 - K_1) = P_1L_1 \end{aligned}$$

ここで,$K_1 = P_1/F1,\ L_1 = 1 - K_1$ とおく.
a_2, P_2 は

$$\begin{aligned} a_2 &= E(\alpha_2|y_1) = E(\alpha_1 + eta_1|y_1) = a_{1|1} \\ P_2 &= P(\alpha_2|y_1) = Var(\alpha_1 + \eta_1|y_1) = Var(\alpha_1|y_1) + 2Cov(\alpha_1, \eta_1|y_1) + Var(\eta_1|y_1) = P_{1|1} + \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

[*1] 多変量正規分布の条件付き期待値と分散

2.2　平滑化

2.3　予測

2.4　欠損値