

粒子フィルタ

Particle Filter

Toshikazu Tayanagi

2017 年 7 月 9 日

1 はじめに

一般化状態空間モデルは以下ようになる. 状態方程式、観測方程式は共に非線形・非ガウスである.
 v_t と ω_t は誤差項, ξ_s と ξ_m は係数である.

$$x_t = f_t(x_{t-1}, \xi_s, v_t) \quad (1.1)$$

$$y_t = h_t(x_t, \xi_m, \omega_t) \quad (1.2)$$

2 デルタ関数

ディラックのデルタ関数^{*1}は以下の様に定義される.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty (x = 0) \\ 0 (x \neq 0) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (2.4)$$

(2.1) 式から $x = 0$ で無限大、それ以外で 0.

(2.2) 式から $x = 0$ 含む区間で積分すると 1 となる.

(2.3) 式は $x \neq 0$ で $\delta(x) = 0$ より $f(x)$ は $x \neq 0$ ではデルタ関数に無効化されている

(2.4) 式は原点からずらしていることを表す. $\delta(x - a)$ という形を使うことで、 $x - a = 0$ となるところでデルタ関数が発現していることを表す.

^{*1} デルタ関数は以下の様に正規分布の分散無限小の極限とも定義できる.

$$\delta(x - \mu) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(2.4) 式から以下の性質が示せる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x^{(i)}) dx = f(x^{(i)}) \quad (2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x^{(i)}) \right\} dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \quad (2.6)$$

3 アンサンブル近似

アンサンブル近似ではある確率変数 x の確率分布を N 個のサンプル集合 $\{x^{(i)}\}$ を用いて以下の様に近似する.

$$p(x) \doteq^{*2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x^{(i)}) \quad (3.1)$$

x が $p(x)$ に従うとき, (2.4) 式より

$$\begin{aligned} E[f(x)] &= \int f(x) p(x) dx \\ &\doteq \int f(x) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x^{(i)}) \right) dx \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int f(x) \delta(x - x^{(i)}) dx \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

と近似できる.

4 粒子フィルタ

パーティクルフィルタ、逐次モンテカルロフィルタと呼ばれたりもする。
「状態ベクトル $x_t^{(i)}$ とその点に対応する『尤度』 $w_t^{(i)}$ の集合で近似する」

4.1 一期先予測

各アンサンブルメンバー $x_{t-1|t-1}^{(i)}$ を状態方程式に基づいて更新し、予測分布のアンサンブル $\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ を得る.

$$x_{t|t-1}^{(i)} = f_t(x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)}), \quad v_t^{(i)} \sim q_t(v_t) \quad (4.1)$$

手続きとしては2ステップである.

1. $v_t^{(i)} \sim q_t(v_t)$ に従うシステムノイズのアンサンブル $\{v_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ を生成する

*2 \doteq はここではモンテカルロ近似を表す

2. 各 i に対して $x_{t|t-1}^{(i)} = f_t(x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)})$ を計算する

一期先予測を求める際、アンサンブルメンバーを $f_t(x_{t-1}, v_t)$ にそのまま代入している為 f_t の線形化が不要となる。

$\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ が $p(x_t|y_{1:t-1})$ のアンサンブル近似になっていることは以下で示される。

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) &= \int p(x_t|x_{t-1}, y_{1:t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \\
&= \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \quad *3 \\
&= \int \left\{ \int p(x_t, v_t|x_{t-1})dv_t \right\} p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \\
&= \int \left\{ \int p(x_t|x_{t-1}, v_t)p(v_t|x_{t-1})dv_t \right\} p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \\
&= \int \int p(x_t|x_{t-1}, v_t)p(v_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1}dv_t \quad (4.2)
\end{aligned}$$

v_t と $y_{1:t-1}$, v_t と x_{t-1} はそれぞれ独立なので、

$$\begin{aligned}
p(v_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) &= p(v_t)p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) \\
&= p(x_{t-1}, v_t|y_{1:t-1}) \\
&\doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta \left(\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ v_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{t-1|t-1}^{(i)} \\ v_t^{(i)} \end{pmatrix} \right) \quad *4 \quad (4.3)
\end{aligned}$$

(4.2) 式と (4.3) 式より、

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) &\doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int \int p(x_t|x_{t-1}, v_t) \delta \left(\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ v_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{t-1|t-1}^{(i)} \\ v_t^{(i)} \end{pmatrix} \right) dx_{t-1} dv_t \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p \left(x_t|x_{t-1} = x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t = v_t^{(i)} \right) \quad (4.4)
\end{aligned}$$

(1.1) 式から x_{t-1} と v_t を与えると x_t は一点に決まるので、

$$p \left(x_t|x_{t-1} = x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t = v_t^{(i)} \right) = \delta \left(x_t - f_t(x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)}) \right) \quad (4.5)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
p(x_t|y_{1:t-1}) &\doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta \left(x_t - f_t(x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)}) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

*3 マルコフ性により $p(x_t|y_{1:t-1}, x_{t-1}) = p(x_t|x_{t-1})$ が成り立つ為

*4 x_{t-1} と v_t は独立なので、

$$\delta \left(\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ v_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{t-1|t-1}^{(i)} \\ v_t^{(i)} \end{pmatrix} \right) = \delta \left(\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ v_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{t-1|t-1}^{(i)} \\ v_t^{(i)} \end{pmatrix} \right)$$

4.2 フィルタリング

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t} \quad (4.7)$$

(4.2) 式に予測分布の近似式 (4.2) 式を代入する.

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{1:t}) &= \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t} \\ &\doteq \frac{p(y_t|x_t) \frac{1}{N} \sum_i^N \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)})}{\int p(y_t|x_t) \frac{1}{N} \sum_j^N \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(j)})dx_t} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N p(y_t|x_{t|t-1}^{(j)})} \sum_{i=1}^N p(y_t|x_{t|t-1}^{(i)}) \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^N \lambda_t^{(j)}} \sum_{i=1}^N \lambda_t^{(i)} \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sum_{j=1}^N \lambda_t^{(j)}} \lambda_t^{(i)} \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \beta_t^{(i)} \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで $p(y_t|x_{t|t-1}^{(i)})$ は y_t が与えられたときの粒子 $x_{t|t-1}^{(i)}$ の尤度であり, $\beta_t^{(i)}$ は,

$$\beta_t^{(i)} = \frac{\lambda_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \lambda_t^{(j)}} \quad (4.9)$$

と定義さる。つまり $p(x_t|y_{1:t})$ は各粒子に重み $\beta_t^{(i)}$ (尤度の比) を加重したもので近似できることがわかる。

4.3 リサンプリング

アンサンブル $\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ の粒子が重み $\beta_t^{(i)}$ に比例する様に N 個復元抽出されたものを $\{x_{t|t}^{(i)}\}_{i=1}^N$ とする。

参考文献

- [1] 樋口知之『データ同化入門』