

Bir sonraki kısımda, 8.2.10 Teoreminde de görüleceği üzere bir f fonksiyonunun P_0 noktasındaki u birim vektörli yönündeki yönlü türevi, bu fonksiyonun gradiyeni (ve dolayısıyla kısmi türevleri) yardımıyla da verilebilir.

8.1.5 Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ve vektör yönündeki yönlü türevlerini hesaplayınız.

$$1. f(x, y) = x + xy, P_0 = (0, 0), u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$2. f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2, P_0 = (2, 1), u = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$3. f(x, y) = xy + 6x - 3, P_0 = (1, 2), u = (1, -3)$$

$$4. f(x, y) = x^2 + 2xy^3 + 5xy, P_0 = (-1, 3), u = (-1, 2)$$

$$5. f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, P_0 = (1, 1), u = (-2, 4)$$

$$6. f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2, P_0 = (1, -1, 2), u = (-3, 4, 2)$$

$$7. f(x, y, z) = y^2 - xz + 2xyz, P_0 = (1, 3, -2), u = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$8. f(x, y, z) = \sin(2x - 3y + 4z), P_0 = (\pi/2, -\pi/3, \pi/4), u = (-1, 3, 5)$$

$$9. f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 - z^2 + w^2 + xyzw, P_0 = (-1, 2, 1, 3), u = (3, 1, 4, -2)$$

$$10. f(x, y, z, w) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}, P_0 = (-3, 0, 4, 0), u = (1, 1, -2, 1)$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada ve herhangi bir $u = (u_1, u_2)$ birim vektörü yönündeki yönlü türevinin olup olmadığını araştırınız.

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad 2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|}{2x} \sqrt{2x^2 + 3y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & x^2 \neq -y \\ 0 & x^2 = y \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $(0, 0)$ noktasında herhangi bir $u = (u_1, u_2)$ birim vektörü yönünde yönlü türevinin olduğunu, ancak bu noktada diferensiyellenemeyiğini gösteriniz.

9.1.7 Alıştırmalar.

Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını bulunuz ve cinslerini belirleyiniz.

$$1. f(x,y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$$

$$2. f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$$

$$3. f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x - 32y - 7$$

$$4. f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 4y^3$$

$$5. f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$6. f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

$$7. f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

$$8. f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

$$9. f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x + 4$$

$$10. f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 + 3$$

$$11. f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 6xy + 6$$

$$12. f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y - 6$$

$$13. f(x,y) = ye^x - y$$

$$14. f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$$

$$15. f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$$

$$16. f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

$$17. f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2$$

$$18. f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 6y$$

9.3.3 Alıştırmalar.

Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen B bölgesindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

1. $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2, \quad B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
2. $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1, \quad B = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$
3. $f(x, y) = xy(108 - 2x - 2y), \quad B = \{(x, y) : x + y \leq 54, x \geq 0, y \geq 0\}$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4, \quad B = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

5. $f(x, y) = xy^2, \quad B = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$
6. $f(x, y) = 2xy - (1 - x^2 - y^2)^{3/2}, \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
7. $f(x, y) = 1 + xy - x - y, \quad B; y = x^2 \text{ ve } y = 4 \text{ ile sınırlı bölge}$
8. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y, \quad B; \text{köşeleri } (1, 0), (5, 0) \text{ ve } (1, 4) \text{ olan üçgen}$
9. $f(x, y) = x^2(y + 1) - 2y, \quad B = \{(x, y) : \sqrt{1 + x^2} \leq y \leq 2\}$

9.4.6 Alıştırmalar.

1) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı yan şartlar altındaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$1. f(x,y) = x^2 - y^2, \quad xy = 1$$

$$2. f(x,y) = 4x + 6y, \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$3. f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x^4 + y^4 = 1$$

$$4. f(x,y) = xy, \quad x^2 + 3y^2 = 6$$

$$5. f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}, \quad 2x + y \geq 0$$

$$6. f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{3x}{2} + 1, \quad 4x^2 + y^2 = 1$$

$$7. f(x,y) = 2x^2 + y^2, \quad x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$8. f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1, \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$9. f(x,y,z) = x + y^2 + 2z, \quad 4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 36$$

$$10. f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$11. f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad x + 3y - 2z = 4$$

$$12. f(x,y,z) = xy^2z^2, \quad x + y + z = 12$$

$$13. f(x,y,z) = 8x - 4z, \quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$$

$$14. f(x,y,z) = x^2y^2z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$15. f(x,y,z) = xyz, \quad x + y + z = a, \quad a > 0 \text{ sabit}$$

$$16. f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$17. f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$$

$$18. f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (p > 1, a > 0)$$

$$19. f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \quad (a_i > 0)$$

20. $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = 40$ ve $x + y = z$

21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + 2y + 3z = 6$ ve $x + 3y + 9z = 9$

22. $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$, $2x - y = 0$ ve $y + z = 0$

23. $f(x, y, z) = x + y + z$, $x^2 - y^2 = 1$ ve $2x + z = 1$

24. $f(x, y, z) = 3x + 3y + 8z$, $x^2 + z^2 = 1$ ve $y^2 + z^2 = 1$

2) $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ yüzeyi üzerinde orjine en yakın ve en uzak olan noktaları bulunuz.

10.2.25 Alistirmalar.

1. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+3y) dy dx$$

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} 4x dy dx$$

$$\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{2y+1}^{y^2+2y} (x+3y) dx dy$$

$$\int_1^2 \int_y^2 xy dx dy$$

$$\int_0^\pi \int_0^y \sin x dx dy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^1 y \sin x \cos y dx dy$$

$$\int_0^1 \int_y^e \sqrt{x} dx dy$$

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$$

$$\int_{-1}^2 \int_{-y}^{y+2} (x+2y^2) dx dy$$

$$\int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-x^2} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_0^2 x^2 y e^{xy} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} y dy dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos y} e^{\sin y} dx dy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 x^2 y \cos(xy^2) dx dy$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_y^1 2xe^{-y} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dy dx$$

2. Aşağıdaki integralleri sınırların sırasını değiştirerek hesaplayınız.

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx dy$$

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{e^x - 1}{x} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{y^{2/3}}^1 x^{-3/4} y^{1/6} e^x dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{\pi y}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx dy$$

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2 dx dy$$

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi x}{2y} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 dy dx$$

3. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

1. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)dA, R = [0, 3] \times [0, 1]$

2. $\iint_R xy e^y dA, R = [0, 2] \times [0, 3]$

3. $\iint_R x \sin(x + y) dA, R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

4. $\iint_R \frac{x}{x^2+y^2} dA, R = [1, 2] \times [2, 3]$

5. $\iint_R \sin|x-y| dA, R = [0, \pi] \times [0, 1]$

6. $\iint_R y e^{-a|x-y|^2} dA, R = [0, 1] \times [0, 1], a \in R$

7. $\iint_B (x+y) dA, B = \{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b, 0 \leq a \leq b\}$

8. $\iint_B xy dA, B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x+1\}$

9. $\iint_B (2x + 3y) dA, B = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$

10. $\iint_B \sqrt{x} dA, B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq e^y\}$

11. $\iint_B e^{y^2} dA, B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

12. $\iint_B (x+y) dA, B, y = \ln x, x = 4, y = 0$ ile sınırlanan bölge

13. $\iint_B (x^2 + y^2) dA, B, y = x^2, xy = 8, x = 6$ ve $y = 0$ ile sınırlanan bölge

14. $\iint_B e^{x^2} dA, B, y = x, y = 0, x = 2$ ile sınırlı bölge

15. $\iint_B (2x - y) dA, B, y = x$ ve $x = 2 - y^2$ ile sınırlı bölge

16. $\iint_B (1 - y^2) dA, B, x = y^2$ ve $x = 1 + \frac{y^2}{2}$ ile sınırlı bölge

17. $\iint_B (3x + 5y + 1) dA, B, y = 3x, y = \frac{x}{2}$ ve $x + 3y = 10$ ile sınırlı bölge

18. $\iint_B x \cos y dA, B, y = 0, y = x^2$ ve $x = 1$ ile sınırlı bölge

4. Aşağıdaki fonksiyonlar için Leibniz teoremini gerçekleyiniz.

$$1. \ g(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} dy$$

$$2. \ g(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dy$$

$$3. \ g(x) = \int_0^1 \frac{\sin xy}{y} dy$$

$$4. \ g(x) = \int_0^1 \frac{-x}{x^2+y^2} dy$$

10.3.7 Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki iki katlı integralleri uygun değişken değişimi yaparak hesaplayınız.

1. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, R , köşeleri $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ ve $(0, 1)$ olan dikdörtgensel bölge.

2. $\iint_R (x+y) dA$, R , köşeleri $(0, 0), (2, 3), (5, 1), (3, -2)$ olan dikdörtgensel bölge.

3. $\iint_R (x-y)^2 \sin^2(x+y) dA$, R köşeleri $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ ve $(0, \pi)$ olan dikdörtgensel bölge.

4. $\iint_B (x+y)^4 dA$, B köşeleri $(1, 0), (2, 2), (1, 3)$ ve $(0, 1)$ olan paralelkenar.

5. $\iint_B \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) dA$, B köşeleri $(0, 0), (2, 0)$ ve $(1, 1)$ olan üçgen.

6. $\iint_B (2x-y)^2 dA$, B , $y = 2x-2$, $y = 2x-4$, $y = -x+2$ ve $y = -x+4$ doğruları ile sınırlanan bölge.

7. $\iint_B xy dA$, B , $y = x$, $y = -x$, $y = -x+4$ ve $y = x+2$ doğruları ile sınırlanan bölge.

8. $\iint_B \frac{(x-y)^2}{1+x+y} dA$, B birinci bölgede $x+y=1$ ve $x+y=2$ doğruları ve koordinat eksenleri ile sınırlanan bölge.

9. $\iint_B \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dA$, B , $y = x$, $y = x-1$, $x+2y=0$ ve $x+2y=2$ doğruları ile sınırlanan bölge.

10. $\iint_B \sin(9x^2+4y^2) dA$, B , $9x^2+4y^2=1$ elipsinin birinci bölgede kalan kısmı.

11. $\iint_B e^{(y-x)/(y+x)} dA$, B , $x+y=1$ doğrusu ve eksenler ile sınırlı bölge.

12. $\iint_B e^{x^2} dA$, B , $y=0$, $x=1$ ve $y=2x$ doğruları ile sınırlı bölge.

13. $\iint_B y^3 (2x-y) e^{(2x-y)^2} dA$, $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2, y \leq 2x \leq y+4\}$.

14. $\iint_B \frac{x^5 y^5 dA}{x^3 y^3 + 1}$, B , birinci bölgede $y = x$, $y = 3x$ doğruları ve $xy = 2$ ve $xy = 6$ hiperbollerile sınırlı bölge.

15. $\iint_B (x+y)^3 dA$, B , $x+y=2$ ve $x-2y=5$ doğruları ile sınırlı bölge.

16. $\iint_B xy^4 dA$, B , $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$ ve $x=2y^2$ parabolleri ile sınırlı bölge.

2. Aşağıdaki integralleri yanlarındaki değişken değişimlerini kullanarak hesaplayınız.

$$1. \int_0^1 \int_0^x \log(1+x^2+y^2) dy dx, \quad x = u+v \text{ ve } y = u-v.$$

$$2. \int_{-1}^1 \int_{1-y}^{1+y} \sqrt{1+x^2 y^2} dx dy, \quad x = u \text{ ve } y = u+v.$$

$$3. \int_0^1 \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 - 6x^2 y^2 + y^4} dy dx, \quad u = 2xy \text{ ve } v = x^2 - y^2.$$

$$4. \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2x}}{1+e^{4x} \cos^2 y \sin^2 y} dy dx, \quad u = e^x \cos y \text{ ve } v = e^x \sin y.$$

3. Kutupsal koordinatlardan faydalananarak aşağıdaki integralleri, yanlarındaki B bölgesi üzerinden hesaplayınız.

$$1. \iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dA, \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$2. \iint_B \frac{dA}{4+x^2+y^2}, \quad B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$3. \iint_B (x^2 + y^2) dA, \quad B = \{(x, y) : x^2 + (y+2)^2 \leq 4\}$$

$$4. \iint_B \arctan \frac{y}{x} dA, \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$$

$$5. \iint_B \sin \sqrt{x^2 + y^2} dA, \quad B = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$$

$$6. \iint_B (2x + y)^2 dA, \quad B, r = 1 \text{ ve } r = 2 \text{ çemberleri ile sınırlanan bölge.}$$

$$7. \iint_B \arctan \frac{y}{x} dA, \quad B = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x, y \geq 0\}$$

$$8. \iint_B \frac{dA}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2}}, \quad B = \{(x, y) : 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4\}$$

9. $\iint_B \sin(x^2 + y^2) dA$, B , $x^2 + y^2 = 3y$ ile $x^2 + y^2 = \sqrt{3}x$ çemberleri arasında kalan bölge.

10. $\iint_B dA$, B , $r = 2(1 + \cos \theta)$ kardioidinin dışında ve $r = 6 \cos \theta$ çemberinin içinde kalan bölge.

11. $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dA$, B , $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x = 0$ çemberinin içinde ve $x^2 + y^2 = 3x$ çemberinin dışında kalan bölge.

12. $\iint_B \arctan \frac{y}{x} dA$, B , $x^2 + y^2 = 2x$ çemberinin içinde ve $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberinin dışında kalan bölge.

13. $\iint_B \arctan \frac{y}{x} dA$, $B = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq |x|\}$

14. $\iint_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$, $B = \{(x, y) : y \geq 0, x + y \geq 0 \text{ ve } 3 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

15. $\iint_B xy dA$, $B = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$

16. $\iint_B (x + y) dA$, B , $r = 1 + \sin \theta$ ının içinde ve $y = \frac{3}{4}$ ün üzerinde kalan bölge.

17. $\iint_B \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} dA$, B : $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ elipsinin birinci bölgede kalan kısmı.

4. Kutupsal koordinatlardan faydalananarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx \quad \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} e^{x^2+y^2} dy dx \quad \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$$

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y^2 dx dy$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \quad \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

İki Katlı İntegraller

370

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx \quad \int_0^{3/2} \int_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^r r \sin \theta dr d\theta \quad \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin \theta} \cos \theta dr d\theta \quad \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sin 2\theta} \cos 2\theta dr d\theta$$

$$\int_{\pi/8}^{5\pi/18} \int_1^{2 \sin 3\theta} r dr d\theta \quad \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \int_1^{2 \sin \theta} \sin \theta r dr d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r \theta dr d\theta \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sin \theta r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_2^{2+2 \cos \theta} r dr d\theta \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{3/4 \sec \theta}^{1+\cos \theta} \cos \theta r dr d\theta$$