

**ANALİZ IV**  
**DERS NOTLARI**

**Prof.Dr. H. Nurettin ERGUN**



# İçindekiler

<b>1</b>	<b>Çok Değişkenli Fonksiyonlar</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vektör Analizi</b>	<b>81</b>
<b>3</b>	<b>Kısmi Türev Uygulamaları</b>	<b>121</b>
<b>4</b>	<b>Çok Kathlı Riemann Tümlevleri</b>	<b>176</b>



## Bölüm 1

# Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Bu bölümde, iki ya da üç değişkenli gerçek değerli fonksiyonların Analizi ile ilgileneceğiz.

**Tanım 1.** Bazı sıralı gerçek sayı ikilileri ya da sıralı gerçek sayı üçlülerine birer gerçek sayı eşlestiren fonksiyonlara **çok değişkenli gerçek değerli fonksiyonlar** denir.

$$f(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y + x + y^2,$$

$$g(x, y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{y^3},$$

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$F(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2 + y^2 + \frac{1}{2}}\right),$$

$$G(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$H(x, y) = \arctan \frac{x}{\sqrt{y}},$$

$$H^*(x, y) = e^{x+y^2},$$

$$f^*(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$g^*(x, y, z) = \frac{\sin x + \sin yz + \cos xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 1}$$

bu tür fonksiyon örnekleridir.  $f$  beşinci dereceden iki değişkenli bir polinomdur ve ayrıca daima  $0 < x^2 + y^2 + 1$  olduğundan, bunların tanım kümesi

$$\text{Tan}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \text{Tan}(h) = \text{Tan}(G) = \text{Tan}(H^*)$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

oysa  $\text{Tan}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \text{ ve } 0 \leq y\} = [0, \infty) \times [0, \infty)$  olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\text{Tan}(F) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy\} = ((0, \infty) \times (0, \infty)) \cup ((-\infty, 0) \times (-\infty, 0)), \\ \text{Tan}(H) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y\} = \mathbb{R} \times (0, \infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tan}(f^*) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \neq x^2 + y^2 + z^2\} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \text{ ve} \\ \text{Tan}(g^*) &= \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

kolayca gözlenir. Buna karşılık her  $y \in \mathbb{R}$  için  $\sqrt[3]{y} = sgn y \cdot \sqrt[3]{|y|}$  olduğundan

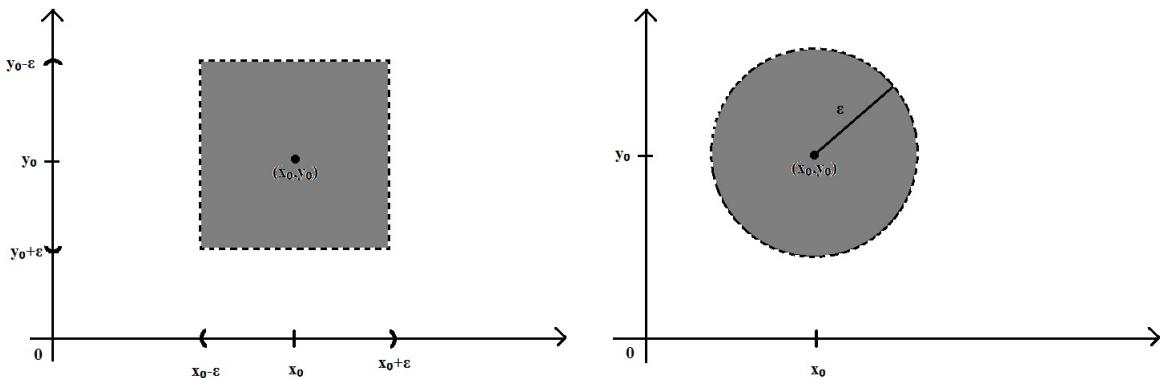
$$F^*(x, y) = x^2 \cdot \sqrt[3]{y}, \quad h^*(x, y) = \frac{x - y}{xy(x^2 + y^2)}$$

için  $\text{Tan}(F^*) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ve  $\text{Tan}(h^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \neq xy(x^2 + y^2)\} = (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\})$  olur.

**Tanım 2.**  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ve  $0 < \varepsilon$  ne olursa olsun.

$$\begin{aligned}K_\varepsilon(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \varepsilon \text{ ve } |y - y_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon), \\ D_\varepsilon(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}\end{aligned}$$

kümelerine, sırasıyla  $(x_0, y_0)$  sıralı gerçek sayı ikilisinin(=düzlem noktasının) **açık kare komşuluğu** ve **açık daire komşuluğu** denir.



Dikkat edilirse bu komşuluklar arasında

$$K_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}(x_0, y_0) \subseteq D_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq K_\varepsilon(x_0, y_0) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

---

kapsamaları geçerlidir, yani bu farklı türde komşuluklar **İç içe geçmiştir**. Gerçekten  $(x, y) \in K_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}(x_0, y_0)$  ise hem  $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  hem de  $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  olduğundan

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

nedeniyle  $(x, y) \in D_\varepsilon(x_0, y_0)$  bulunur, burada her  $x \in \mathbb{R}$  için  $x^2 = |x|^2$  temel bilgisiyle örneğin  $(x - x_0)^2 = |x - x_0|^2$  yazılmıştır. Herbir  $(x, y) \in D_\varepsilon(x, y)$  için  $|x - x_0|^2 \leq |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  nedeniyle  $|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$  yani  $|x - x_0| < \varepsilon$  ve benzer biçimde  $|y - y_0| < \varepsilon$  bulup  $(x, y) \in K_\varepsilon(x_0, y_0)$  elde edilir. Yukarda tanımlanan komşuluklar birer **açık kümedir**, yani aşağıdakiler geçerlidir(bkz.Tanım3):

$$\forall (x, y) \in K_\varepsilon(x_0, y_0), \exists \delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x, y) > 0, K_{\delta_\varepsilon}(x, y) \subseteq K_\varepsilon(x_0, y_0)$$

$$\forall (x, y) \in D_\varepsilon(x_0, y_0), \exists \delta'_\varepsilon = \delta'_\varepsilon(x, y) > 0, D_{\delta'_\varepsilon}(x, y) \subseteq D_\varepsilon(x_0, y_0)$$

Gerçekten  $(x, y) \in K_\varepsilon(x_0, y_0)$  yani hem  $|x - x_0| < \varepsilon$  hem de  $|y - y_0| < \varepsilon$  ise  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  ve  $(y - \delta_y, y + \delta_y) \subseteq (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  olacak biçimde  $\delta_x > 0$  ve  $\delta_y > 0$  pozitif sayıları vardır, çünkü bilindiği gibi  $x \in (a, b)$  ise  $0 < \delta < (b - a) \wedge (b - x) = \min\{x - a, b - x\}$  gerçekleyen herhangi  $\delta \in \mathbb{R}^+$  için, hem  $\delta < x - a$  yani  $a < x - \delta$  hem de  $\delta < b - x$  yani  $x + \delta < b$  nedeniyle  $a < x - \delta < x + \delta < b$  böylece  $(x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$  olduğundan, yukarıda  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  ve  $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  bilgileriyle istenen  $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{R}^+$  vardır, sonuçta  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_x \wedge \delta_y$  için

$$\begin{aligned} (x - \delta_\varepsilon, x + \delta_\varepsilon) \times (y - \delta_\varepsilon, y + \delta_\varepsilon) &\subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x) \times (y - \delta_y, y + \delta_y) \\ &\subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) = K_\varepsilon(x_0, y_0) \end{aligned}$$

kısacası  $K_{\delta_\varepsilon}(x, y) = (x - \delta_\varepsilon, x + \delta_\varepsilon) \times (y - \delta_\varepsilon, y + \delta_\varepsilon) \subseteq K_\varepsilon(x_0, y_0)$  istenen sonucu bulunur; yukarıda  $A_1 \subseteq B_1$  ve  $A_2 \subseteq B_2$  ise  $A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2$  olduğu gerçeği (nerede?) kullanılmıştır. Öte yandan  $(x, y) \in D_\varepsilon(x_0, y_0)$  yani  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$  ise

$$0 < \delta'_\varepsilon < \varepsilon - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

gerçekleyen herhangi bir pozitif  $\delta'_\varepsilon$  gerçel sayısı için  $D_{\delta'_\varepsilon}(x, y) \subseteq D_\varepsilon(x_0, y_0)$  olur. Gerçekten  $(x_1, y_1) \in D_{\delta'_\varepsilon}(x, y)$  ise  $(x_1, y_1) \in D_\varepsilon(x_0, y_0)$  bulmak güç değildir çünkü

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} &= \sqrt{((x_1 - x) + (x - x_0))^2 + ((y_1 - y) + (y - y_0))^2} \\ &\stackrel{*}{\leq} \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &< \delta'_\varepsilon + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

bulunur, burada (\*) eşitsizliği yazılrken aşağıdaki ünlü **Minkowski eşitsizliği** kullanılmıştır:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Bu sonuncu eşitsizliği göstermesi ise güç değildir, her iki yanın karesini alıp, ünlü **Cauchy-Schwarz eşitsizliği** olan

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

eşitsizliğinden yararlanmak yeterlidir.

**Tanım 3.** Açık ve bağıntılı  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^2$  alt kümesine, düzlemde bir **bölge** denir. Bilindiği gibi düzlemde, bir kümenin herhangi iki noktası, küme içinde kalan bir eğriyle birleştirilebildiğinde o kümeye **bağıntılı** denir. Bölge(ingilizcesi:region)'ler genellikle  $R$  harfi ile yazılırlar. Bir  $A (\subseteq \mathbb{R}^2)$  kümesine, ancak ve yalnız

$$\forall (x, y) \in A, \exists \varepsilon = \varepsilon(x, y) > 0, K_\varepsilon(x, y) \subseteq A$$

koşulunu gerçeklerse **açık küme** ve

$$\forall (x, y) \notin A, \exists \varepsilon = \varepsilon(x, y) > 0, K_\varepsilon(x, y) \cap A = \emptyset$$

koşunu gerçeklerse **kapalı küme** denir.

Fakat biz, boş olmayan bağıntılı kümelere de bölge diyeceğiz. **Temel Bilgi:** Sonlu elemanlı tüm  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  alt kümeleri **kapalıdır**, çünkü

$$(x_0, y_0) \notin A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

ise, herbir  $1 \leq k \leq n$  indis için  $(x_0, y_0) \neq (x_k, y_k)$  olur böylece ya  $x_0 \neq x_k$  ve  $0 < |x_0 - x_k|$  ya da  $y_0 \neq y_k$  ve  $0 < |y_0 - y_k|$  bulup  $0 < |x_k - x_0| \vee |y_k - y_0|$  gözleyerek

$$0 < \delta_k < |x_k - x_0| \vee |y_k - y_0|$$

pozitif sayıları ve onlar aracılığıyla  $0 < \delta_0 < \min_k \delta_k$  pozitif sayısı tanımlanırsa, herbir  $k$  indis için ya  $\delta_0 < \delta_k < |x_k - x_0|$  ya da  $\delta_0 < \delta_k < |y_k - y_0|$  böylece her iki durumda da  $(x_k, y_k) \notin K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  gerçekleştiğinden  $A \cap K_{\delta_0}(x_0, y_0) = \emptyset$  istenen sonucu bulunur. **Dikkat:** Sonlu kümeler bağıntılı değildir!

**Uyarı 1** Buna karşılık sayılabilir sonsuz elemanlı olup **kapalı olmayan** alt kümeler vardır, örneğin  $r_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) (\forall n \in \mathbb{N})$  olmak üzere  $E = \{r_1, r_2, r_3, \dots\} (\subseteq (0, 1) \times (0, 1))$  alt kümesi kapalı değildir çünkü  $r_0 = (0, 0) \notin E$  fakat

$$\forall \delta > 0 \text{ i} \tilde{\text{A}} \text{şin } K_\delta(0, 0) \cap E \neq \emptyset$$

---

gerçekleşir, çünkü herhangi  $\delta > 0$  verildiğinde  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, 1 < n_0 \cdot \delta$  olduğundan, her  $n > n_0$  için  $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta$  böylece  $r_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in E \cap K_\delta(0, 0)$  kolayca gözlenir. Dikkat edilirse  $a < b$  ve  $c < d$  gerçek sayıları ne olursa olsun  $R_1 = (a, b) \times (c, d)$  bölgesi açık  $R_2 = [a, b] \times [c, d]$  bölgesi ise kapalıdır. Yalnızca ikinci iddiayı gösterelim. Herhangi bir  $(x, y) \notin R_2$  düzlem noktası için ya  $x \notin [a, b]$  ya da  $y \notin [c, d]$  olur. Eğer birinci seçenek geçerliyse, ister  $x < a$  isterse  $b < x$  olsun  $\exists \varepsilon_x > 0, (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap [a, b] = \emptyset$  gerçekleşir, burada şu **Temel Bilgi** kullanılmıştır: **Temel Bilgi:**  $x, y \in \mathbb{R}$  ise  $x < y$  için gerek  $\exists \varepsilon_0 > 0, x + \varepsilon_0 < y - \varepsilon_0$  olmalıdır. Yeterlik apacaktır, tersine  $x < y$  ise hem  $0 < y - x$  hem de  $\varepsilon_0 = \frac{y-x}{3} > 0$  için  $\varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \frac{2(y-x)}{3} < y - x$  ve sonuçta  $x + \varepsilon_0 < y - \varepsilon_0$  bulunur. Bu nedenle eğer  $x < a$  ise  $x + \varepsilon_x < a - \varepsilon_x$  ve böylelikle  $x - \varepsilon_x < x + \varepsilon_x < a - \varepsilon_x < a$  nedeniyle  $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap [a, b] = \emptyset$  gerçekleşecek biçimde  $\varepsilon_x > 0$  vardır, yok eğer  $a \leq x$  fakat  $b < x$  ise  $b < b + \delta_b < x - \delta_b < x + \delta_b$  ve sonuçta  $[a, b] \cap (x - \delta_b, x + \delta_b) = \emptyset$  olacak biçimde  $\delta_b \in \mathbb{R}^+$  vardır,  $\delta_b = \varepsilon_x$  alınır; böylelikle

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_x}(x, y) \cap R_2 &= ((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \times (y - \varepsilon_x, y + \varepsilon_x)) \cap ([a, b] \times [c, d]) \\ &= ((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap [a, b]) \times ((y - \varepsilon_x, y + \varepsilon_x) \cap [c, d]) \\ &= \emptyset \times ((y - \varepsilon_x, y + \varepsilon_x) \cap [c, d]) = \emptyset \end{aligned}$$

bulunur, burada  $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$  temel bilgisi kullanılmıştır. Ayrıca,  $I = [0, 1]$  olmak üzere  $A = I \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} : r \in [0, 1]\}$  kümesi, Analiz III derslerinde gözlendiği gibi sayılabilir sonsuz elemanlıdır, dolayısıyla  $A \times A$  kümesi de sayılabilir sonsuz elemanlıdır oysa bu sonuncu küme aşağıdaki gerçek nedeniyle **kapalı değildir**.

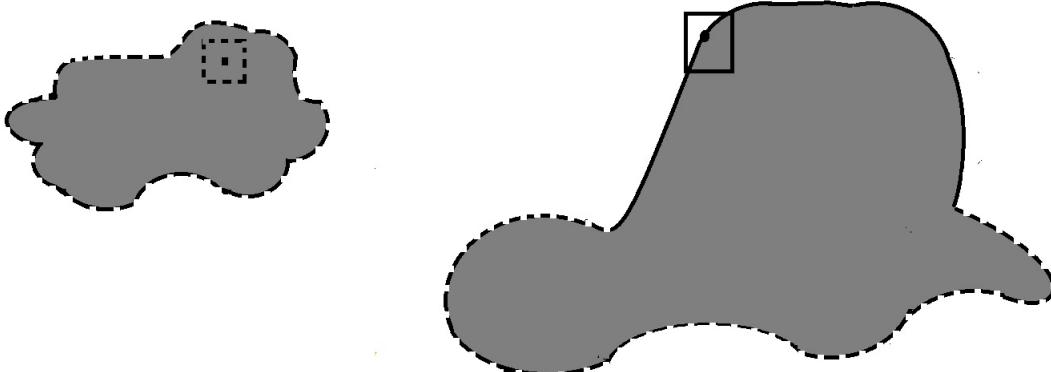
$$\forall q \in I - \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, K_\varepsilon(q, 0) \cap (A \times A) \neq 0 \text{ ve } (q, 0) \notin A \times A$$

çünkü Analiz III derslerinde gözlendiği gibi  $A$  kümesi  $I$  aralığında yoğun, yani  $0 \leq x < y \leq 1$  gerçekleyen  $x, y$  gerçek sayıları ne olursa olsun,  $x < r < y$  gerçekleyen sonsuz tane  $r \in \mathbb{Q}$  var olduğundan, **her**  $q \in I - \mathbb{Q} = I - A$  ve **her**  $\varepsilon > 0$  için  $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  bulunur (neden?) ayrıca  $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A = [0, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$  olduğundan

$$K_\varepsilon(q, 0) \cap (A \times A) = ((q - \varepsilon, q + \varepsilon) \cap A) \times ((-\varepsilon, \varepsilon) \cap A) \neq \emptyset \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

gerçeklenir; eğer  $A \times A$  kümesi *kapalı olsaydı*  $q \notin A$  nedeniyle  $(q, 0) \notin A \times A$  olduğundan  $\exists \delta_\varepsilon > 0, K_\delta(q, 0) \cap (A \times A) = \emptyset$  gerçekleşmesi gerekiirdi, bununsa doğru olmadığı yukarıda gözlenmiştir! Aşağıda çizili kümelerin, solda yer alanının açık bir bölge olduğunu, sağdakinin ise bağlantılı olmasına karşın ne açık ne de kapalı olduğunu gözleyiniz:

$\mathbb{R}^2$  uzayında,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kümesinden başka boştan farklı olup hem açık hem kapalı olan **küme yoktur**.



$\mathbb{R}^3$  uzayında, açık bir küp komşuluk ile açık küre komşuluklar

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon, |z - z_0| < \varepsilon\} \\ &= (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon), \\ S_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır, bunların sırasıyla, ağırlık merkezi  $(x_0, y_0, z_0)$  noktası olan ve alanları  $4\varepsilon^2$  olan çevre yüzeyler üzerindeki noktaların hiçbirisini içermeyen (ihtiva etmeyen) bir küp ile, merkezi  $(x_0, y_0, z_0)$  noktası olan  $\varepsilon$  yarıçaplı kürenin içindeki tüm noktalar kümesi olduğuna dikkat ediniz.

**Delikli komşuluk**  $\mathbb{R}^2$  uzayında

$$K_\varepsilon^*(x_0, y_0) = K_\varepsilon(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in K_\varepsilon(x_0, y_0) : (x, y) \neq (x_0, y_0)\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu komşulukta  $(x_0, y_0)$  noktası **bulunmaz**!

**Tanım4:** Ancak ve yalnız

$$\textbf{Koş} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0) \text{ iñin } |f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon$$

koşulu gerçekleştiğinde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell_0$  yazılır. Buna karşılık ancak ve yalnız

$$\forall M > 0, \exists \delta_M > 0, M < f(x, y) (\forall (x, y) \in K_{\delta_M}^*(x_0, y_0)) \text{ ise } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty$$

yazılır.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = -\infty$  tanımı benzer biçimde verilir.

---

**Tanım5:** Bir sıralı gerçek sayı ikilileri dizisi  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  için, ancak ve yalnız **Koş:**  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in K_{\varepsilon}(x_0, y_0) (\forall n \geq n_{\varepsilon})$  koşulu gerçekleştiğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \quad (*)$$

yazılır. Öğrenci, ancak ve yalnız hem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ve hem de  $\lim_{y \rightarrow \infty} y_n = y_0$  koşul ikilisi gerçekleştiğinde (\*) koşulunun gerçekleşebildiğini gösterebilmesi gereklidir, örneğin bu koşullar geçerliyken sırasıyla

$$\exists n_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}, x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad (\forall n \geq n_{1,\varepsilon})$$

$$\exists n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}, y_n \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \quad (\forall n \geq n_{2,\varepsilon})$$

olur, böylece  $n_{\varepsilon} = n_{1,\varepsilon} + n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tanımlayıp herbir  $n \geq n_{\varepsilon}$  için  $(x_n, y_n) \in K_{\varepsilon}(x_0, y_0)$  bulunur.

**Temel Bilgi:**  $\mathbb{R}^2$  uzayında  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  gerçekleyen *herhangi* bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $K = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_3), \dots\} (\subseteq \mathbb{R}^2)$  alt kümesi **hem kapalı hem sınırlıdır**. Bu bilgi **Topoloji** derslerinde kolayca gösterilir.

**Önerme1:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell_0$  için gyk terimleri ikişer ikişer farklı olup  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  koşulunu gerçekleyen **her**  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \ell_0$  olmalıdır.

**Kanıtlama: Gereklik** Terimleri ikişer ikişer farklı olup  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  koşulunu gerçekleyen herhangi bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  düzlem noktaları dizisi alınsın. Üstelik  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell_0$  olsun. O halde  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık Tanım4'deki  $\delta_{\varepsilon} > 0$  vardır(belirlidir). Dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  yakınsama koşulları nedeniyle  $\exists n_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}, |x_n - x_0| < \delta_{\varepsilon} (\forall n \geq n_{1,\varepsilon})$  ve ayrıca  $\exists n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}, |y_n - y_0| < \delta_{\varepsilon} (\forall n \geq n_{2,\varepsilon})$  gerçekleşir.  $n_{\varepsilon} = n_{1,\varepsilon} + n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  yazılırsa her  $n \geq n_{\varepsilon} (> n_{1,\varepsilon})$  için  $|x_n - x_0| < \delta_{\varepsilon}$  ve  $n \geq n_{\varepsilon} > n_{2,\varepsilon}$  nedeniyle  $|y_n - y_0| < \delta_{\varepsilon}$  olur.  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin terimleri arasında  $(x_0, y_0)$  noktasına eşit olabilen **en fazla tek bir tane terim** bulunabilir çünkü  $(x_{n_0}, y_{n_0}) = (x_0, y_0) = (x_{n_1}, y_{n_1})$  olamaz, çünkü  $n \neq m$  ise terimlerin ikişerli farklılığı nedeniyle  $(x_n, y_n) \neq (x_m, y_m)$  olmaktadır; böylelikle genelliği bozmaksızın her  $n \geq n_{\varepsilon}$  için  $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$  varsayılabileceğinden, yukarıdaki bilgilerle hem  $(x_n, y_n) \in K_{\delta_{\varepsilon}}(x_0, y_0)$  ve  $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0) (\forall n \geq n_{\varepsilon})$  nedeniyle  $(x_n, y_n) \in K_{\delta_{\varepsilon}}^{*}(x_0, y_0) (\forall n \geq n_{\varepsilon})$  ve Tanım4 nedeniyle  $|f(x_n, y_n) - \ell_0| < \varepsilon (\forall n \geq n_{\varepsilon})$  olur, buysa  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \ell_0$  demektir. **Yeterlik:** Yeterlik varsayıımı geçerliyken **eğer**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \neq \ell_0$  OLSAYDI, limit tanımı nedeniyle

**Koş:**  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0, |f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon (\forall (x, y) \in K_{\delta_{\varepsilon}}^{*}(x_0, y_0))$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

koşulu **gerçeklenmez**, dolayısıyla aşağıdaki bulunurdu

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists (x_\delta, y_\delta) \in K_\delta^*(x_0, y_0), \varepsilon_0 \leq |f(x_\delta, y_\delta) - \ell_0| \quad (*)$$

böylelikle her  $\delta > 0$  için **sonsuz tane**  $(x_\delta, y_\delta) \in K_\delta^*(x_0, y_0)$  noktasının  $\varepsilon_0 \leq |f(x_0, y_0) - \ell_0|$  gerçeklediği anlaşılır, çünkü eğer yalnızca sonlu tane  $(x_{\delta,1}, y_{\delta,1}), \dots, (x_{\delta,m}, y_{\delta,m}) \in K_\delta^*(x_0, y_0)$  noktası için,  $\varepsilon_0 \leq |f(x_{\delta,k}, y_{\delta,k}) - \ell_0|$  ( $k = 1, \dots, m$ ) **olsaydı**  $(x_{\delta,1}, y_{\delta,1}), \dots, (x_{\delta,m}, y_{\delta,m})$  noktalarından farklı **herbir**  $(x, y) \in K_\delta^*(x_0, y_0)$  noktası için  $|f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon_0$  gerçekleşirdi, oysa  $(x_0, y_0)$  tüm  $(x_{\delta,1}, y_{\delta,1}), \dots, (x_{\delta,m}, y_{\delta,m})$  noktalarından farklı yani  $(x_0, y_0) \notin A = \{(x_{\delta,1}, y_{\delta,1}), \dots, (x_{\delta,m}, y_{\delta,m})\}$  olduğu üstelik  $A$  kümesi kapalı olduğundan (sonlu noktalı kümeler bilindiği gibi kapalıdır) uygun bir  $0 < \delta_0 < \delta$  için  $K_{\delta_0}(x_0, y_0) \cap A = \emptyset$  bulunurdu, böylece herbir  $(x, y) \in K_{\delta_0}^*(x_0, y_0)$  ( $\subseteq K_\delta(x_0, y_0)$ ) noktası, tüm  $(x_{\delta,1}, y_{\delta,2}), \dots, (x_{\delta,m}, y_{\delta,m})$  noktalarından farklı olduğundan, yukarıda gözlediği gibi  $|f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon_0$  olur, kısacası

$$\forall (x, y) \in K_{\delta_0}^*(x_0, y_0), |f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon_0$$

bolunurdu, buysa (\*) varsayımlına aykırıdır. Demek ki (\*) koşulunu gerçekleyen  $(x_\delta, y_\delta) \in K_\delta^*(x_0, y_0)$  noktaları aslında **sonsuz tanedir** yani  $\delta > 0$  ve  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in K_\delta^*(x_0, y_0)$  sonlu tane noktası ne olursa olsun

$$\exists (x_\delta, y_\delta) \in K_\delta^*(x_0, y_0) - \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}, \varepsilon_0 \leq |f(x_\delta, y_\delta) - \ell_0|$$

gerçekleşir. Şimdi  $\delta_n = \frac{1}{2^n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) olmak üzere bu son bilgiyle, önce  $\exists (x_1, y_1) \in K_{\delta_1}^*(x_0, y_0), \varepsilon_0 \leq |f(x_1, y_1) - \ell_0|$  olur sonra  $\exists (x_2, y_2) \in K_{\delta_2}^*(x_0, y_0) - \{(x_1, y_1)\}, \varepsilon_0 \leq |f(x_2, y_2) - \ell_0|$  olur ve tümevarım yardımıyla, ilk  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  noktaları bu yolla belirlenmiş olduğunda,  $n + 1$ 'inci adımda

$$\exists (x_{n+1}, y_{n+1}) \in K_{\delta_{n+1}}^*(x_0, y_0) - \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}, \varepsilon_0 \leq |f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \ell_0|$$

noktası belirlenerek, tümevarım işlemi sürdürülür. Sonunda

$$(x_n, y_n) \in K_{\delta_n}^*(x_0, y_0) \subseteq K_{\delta_n}(x_0, y_0) = (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \times (y_0 - \delta_n, y_0 + \delta_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

nedeniyle,  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n)$  yani  $|x_n - x_0| < \frac{1}{2^n}$  ve  $|y_n - y_0| < \frac{1}{2^n}$  bularak  $x_n \rightarrow x_0$  ve  $y_n \rightarrow y_0$  yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  bulunur. Üstelik bu yakınsak dizi,  $n \neq m$  için  $(x_n, y_n) \neq (x_m, y_m)$  gerçeklediği için **terimleri ikişer ikişer farklıdır**, çünkü sözelimi  $n < m$  ise  $(x_m, y_m) \in K_{\delta_m}^*(x_0, y_0) - \{(x_1, y_1), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})\}$  oysa  $n \leq m - 1$  nedeniyle  $(x_n, y_n) \in \{(x_1, y_1), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1})\} \not\ni (x_m, y_m)$  böylece  $(x_n, y_n) \neq (x_m, y_m)$  olmaktadır. Dolayısıyla terimleri ikişer ikişer farklı olup  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$  koşulunu gerçekleyen, tümevarımla tanımlanan

---

bu  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için yeterlik varsayıımı gereği  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \ell_0$  OLMASI GEREKİRKEN, aslında

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_n, y_n) - \ell_0| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçekleştiği ve böylelikle  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n, y_n) - \ell_0| \neq 0$  nedeniyle  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \ell_0$  OLMAZ! Çelişki! Demek ki yeterlik varsayıımı geçerliyken zorunlu olarak  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell_0$  gerçekleşmesi gerektiği anlaşıılır. Bitti!

**Önerme 2:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty$  için gerekli terimleri ikişerli farklı olup  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  gerçekleyen her  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $f(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$  olmalıdır.

**Kanıtlama:** Yalnızca yeterliği kanıtlayalım. Yeterlik varsayıımı geçerliyken, eğer  $\exists M_0 > 0$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $f(x, y) \leq M_0$  ( $\exists (x, y) \in K_{\delta}^*(x_0, y_0)$ ) koşulu geçerli olsaydı, her  $\delta > 0$  için, sonsuz tane  $(x_{\delta}, y_{\delta}) \in K_{\delta}^*(x_0, y_0)$  için  $f(x_{\delta}, y_{\delta}) \leq M_0$  bulunurdu (neden?) ve bir önceki önermedeki gibi  $\delta_n = \frac{1}{2^n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) rasyonel sayıları ile çalışarak önce  $\exists (x_1, y_1) \in K_{\delta_1}^*(x_0, y_0)$ ,  $f(x_1, y_1) \leq M_0$  ve  $n$ -inci adımda  $\exists (x_n, y_n) \in K_{\delta_n}^*(x_0, y_0) - \{(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ ,  $f(x_n, y_n) \leq M_0$  gerçekleyen düzlem noktaları belirlenerek  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için, yeterlik varsayıımına aykırı olarak  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  olmasına karşın  $f(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$  OLMAZDI, çünkü  $f(x_n, y_n) \leq M_0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) nedeniyle  $\overline{\lim} f(x_n, y_n) \leq M_0 < +\infty$  geçerlidir. Gereklik öğrenciye bırakılmıştır.

**Uyarı 1:** Eğer terimleri ikişerli farklı olup  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  ile  $f(x_n, y_n) \rightarrow \ell_1$  koşullarını gerçekleyen bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi ile benzer nitelikte olup  $(x_n^*, y_n^*) \rightarrow (x_0, y_0)$  ve  $f(x_n^*, y_n^*) \rightarrow \ell_2$  koşullarını gerçekleyen bir başka  $\{(x_n^*, y_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi tanımlanabiliyor ve üstelik  $\ell_1 \neq \ell_2$  oluyorsa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ limiti TANIMSIZ}$$

olur, çünkü bu limit var ve sözgelimi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$  OLSAYDI Önerme1 kullanılarak  $\ell_1 \neq \ell_2$  geçerliğiyle çelişen

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*, y_n^*) = \ell_2 \text{ sonucu bulunurdu.}$$

Benzer uyarı  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  ve  $f(x_n, y_n) \rightarrow \ell_1$  koşullarını gerçekleyen terimleri ikişerli farklı bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi ile  $(x_n^*, y_n^*) \rightarrow (x_0, y_0)$  ve  $f(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$  koşullarını gerçekleyen bir  $\{(x_n^*, y_n^*)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi tanımlanabildiğinde de geçerlidir.

### Örnekler 1:

- 1)  $n_0, m_0$  sabit doğal sayıları ve düzlemin  $(x_0, y_0)$  noktası ne olursa olsun  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x^{n_0} y^{m_0} = x_0^{n_0} \cdot y_0^{m_0}$  geçerlidir.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

Gerçekten Önerme 1 kullanılarak bu kolayca gösterilir. Terimleri ikişer ikişer farklı olup  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  gerçekleyen herhangi bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $f(x, y) = x^{n_0} \cdot y^{m_0}$  biçimindeki fonksiyon  $f(x_n, y_n) \rightarrow x_0^{n_0} \cdot y_0^{m_0}$  gerçekler, çünkü hem  $x_n \rightarrow x_0$  hem de  $y_n \rightarrow y_0$  olduğundan yakınsak gerçel sayı dizilerine ilişkin temel bilgiler nedeniyle hem  $x_n^{n_0} \rightarrow x_0^{n_0}$  ve hem de  $y_n^{m_0} \rightarrow y_0^{m_0}$  ve sonuçta  $f(x_n, y_n) = x_n^{n_0} \cdot y_n^{m_0} \rightarrow x_0^{n_0} \cdot y_0^{m_0}$  bulunur.

2) Yukardaki sonuç  $\varepsilon, \delta$  yöntemiyle de gösterilir. Kısacası

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0, |x^{n_0} y^{m_0} - x_0^{n_0} y_0^{m_0}| < \varepsilon \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_{\varepsilon}}^*(x_0, y_0))$$

göstermek güç değildir. Gerekli olduğu için önce şunları gözleyelim:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^n x^{n-k} \cdot y^{k-1},$$

ve Eratostanes Eşitsizliğiyle  $|ax - by| \leq |a||x - y| + |a - b||y|$  geçerli olup (sonucusu için  $ax - by = ax - ay + ay - by = a(x - y) + (a - b)y$  gözleyip üçgen eşitsizliğini yani  $|c + d| \leq |c| + |d|$  bilgisini kullanın), sonuçta  $0 < M = (m_0 + n_0)(|x_0| + 1)^{n_0}(|y_0| + 1)^{m_0}$  tanımlayarak

$$\begin{aligned} |x^{n_0} y^{m_0} - x_0^{n_0} y_0^{m_0}| &\leq |x^{n_0}| \cdot |y^{m_0} - y_0^{m_0}| + |x^{n_0} - x_0^{n_0}| \cdot |y_0^{m_0}| \\ &\leq (|x_0| + 1)^{n_0} \cdot |y - y_0| \cdot \left| \sum_{k=1}^{m_0} y^{m_0-k} \cdot y_0^{k-1} \right| + |y_0|^{m_0} \cdot |x - x_0| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n_0} x^{n_0-k} \cdot x_0^{k-1} \right| \\ &\leq M|y - y_0| + M|x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur, çünkü öncelikle  $|y - y_0| < 1$  ve  $|x - x_0| < 1$  yani  $(x, y) \in K_1(x_0, y_0)$  alınırsa  $|y| - |y_0| \leq ||y| - |y_0|| \leq |y - y_0| < 1$  nedeniyle  $|y| < |y_0| + 1$  ve benzer biçimde  $|x| < |x_0| + 1$  gözleyip, böylece

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m_0} y^{m_0-k} \cdot y_0^{k-1} \right| &\leq \sum_{k=1}^{m_0} |y|^{m_0-k} \cdot |y_0|^{k-1} < \sum_{k=1}^{m_0} (|y_0| + 1)^{m_0-k} \cdot |y_0|^{k-1} \\ &< \sum_{k=1}^{m_0} (|y_0| + 1)^{m_0-k} \cdot (|y_0| + 1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{m_0} (|y_0| + 1)^{m_0-1} = m_0 (|y_0| + 1)^{m_0-1} \\ &\leq m_0 (|y_0| + 1)^{m_0} \end{aligned}$$

olur, çünkü  $1 \leq |y_0| + 1$  nedeniyle  $(|y_0| + 1)^{m_0-1} \leq (|y_0| + 1)^{m_0}$  gözlenmiştir, ayrıca  $|x^{n_0}| = |x|^{n_0} \leq (|x_0| + 1)^{n_0}$  kullanılıp yukarıdaki  $M$  pozitif sabiti aracılığıyla

$$|x^{n_0} y^{m_0} - x_0^{n_0} y_0^{m_0}| \stackrel{(*)}{\leq} M|y - y_0| + M|x - x_0|$$

elde edilmiştir. Dikkat edilirse  $M \geq (m_0 + n_0)(|x_0| + 1) \cdot (|y_0| + 1) \geq m_0 + n_0 > n_0 \geq 1$  olur. Dolayısıyla  $0 < \varepsilon \leq 1$  verildiğinde  $0 < \delta_{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2M}$  gerçekleyen pozitif  $\delta_{\varepsilon}$  sayısı seçilirse  $M \geq 1$

---

nedeniyle, hem  $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  hem de  $\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2} < 1$  olur, böylelikle her  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  ( $\subseteq K_1(x_0, y_0)$ ) için tüm yukarıdaki eşitsizlikler geçerli, çünkü  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M} < 1$  nedeniyle  $|x - x_0| < 1$  ve  $M|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  hem de  $|y - y_0| < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M}$  nedeniyle  $M|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  olur ve (\*) eşitsizliği kullanılarak, değil  $K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$  delikli komşuluğunda,  $K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  komşuluğunda bile  $\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  için  $|x^{n_0}y^{m_0} - x_0^{n_0}y_0^{m_0}| < \varepsilon$  bulunur.

Göründüğü gibi dizilerle çalışmak daha kısa çözüm verir.

3)  $0 < x_0$  ve  $0 < y_0$  olsun. Sabit  $\alpha_0, \beta_0$  gerçek sayıları ne olursa olsun  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x^{\alpha_0}y^{\beta_0} = x_0^{\alpha_0} \cdot y_0^{\beta_0}$  gerçekleşir, bunun için yukarıdaki 1) örneğindeki dizisel karakterizasyon kullanılır, çünkü  $x_n \rightarrow x_0 (> 0)$  ise,  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  sabit gerçek sayısı ne olursa olsun  $x_n^{\alpha_0} \rightarrow x_0^{\alpha_0}$  geçerli olduğu bilinmektedir. Bu nedenle örneğin aşağıdaki geçerlidir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{y^3} = \sqrt{1} \cdot \sqrt[4]{2^3} = \sqrt{2\sqrt{2}}.$$

4)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ise  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  gerçekleşir, çünkü **daima**  $-(x^2 + y^2) = -x^2 - y^2 \leq x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$  nedeniyle **daima**  $\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$  ( $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ ) olur, böylelikle herhangi  $0 < \varepsilon \leq 1$  verildiğinde, her  $(x, y) \in K_\varepsilon^*(0, 0)$  için hem  $(x, y) \neq (0, 0)$  nedeniyle  $\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$  olur, hem de  $|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = |xy| \cdot \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |xy| = |x| \cdot |y| < \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 \leq \varepsilon$  kısacası  $\delta_\varepsilon = \varepsilon$  için  $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(0, 0)$ ) bulunur bu isteneni verir.

5)

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ise  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = +\infty$  olur, gerçekten her  $M > 0$  için  $\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2M}} \in \mathbb{R}^+$  tanımlanırsa, her  $(x, y) \in K_{\delta_M}^*(0, 0)$  ( $\subseteq K_{\delta_M}(0, 0) \subseteq D_{\sqrt{2}\delta_M}(0, 0) = D_{\frac{1}{\sqrt{M}}}(0, 0)$ ) noktası için (dikkat: her  $r > 0$  için  $K_r(x, y) \subseteq D_{\sqrt{2}r}(x, y)$  kapsamasının geçerli olduğu sayfa 2'de gösterilmiştir)  $(x, y) \in D_{\frac{1}{\sqrt{M}}}(0, 0)$  bularak  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \frac{1}{\sqrt{M}}$  ve böylece  $x^2 + y^2 < \frac{1}{M}$  ve hem de  $(x, y) \neq (0, 0)$  nedeniyle  $0 < x^2 + y^2 < \frac{1}{M}$  bularak  $M < \frac{1}{x^2+y^2} = g(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_M}^*(0, 0)$ ) kısacası  $\forall M > 0$ ,  $\exists \delta_M \in \mathbb{R}^+$ ,  $M < g(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_M}^*(0, 0)$ ) bulup  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = +\infty$  istenen sonucu bulunur.

6)

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

ise  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y)$  tanımsızdır. Gerçekten  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  gerçekleyen pozitif terimli  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$  dizisiyle  $0 < a < 1$  sabiti ne olursa olsun  $(\varepsilon_n, a\varepsilon_n) \rightarrow (0,0)$  olmasına karşın,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\varepsilon_n, a\varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_n^2 - a^2\varepsilon_n^2}{\varepsilon_n^2 + a^2\varepsilon_n^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2}$  ve bir başka  $0 < b < 1$  sabiti için  $(\varepsilon_n, b\varepsilon_n) \rightarrow (0,0)$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\varepsilon_n, b\varepsilon_n) = \frac{1-b^2}{1+b^2} \neq \frac{1-a^2}{1+a^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\varepsilon_n, a\varepsilon_n)$  nedeniyle **Uyarı1** uygulanır, hipotezler altında  $\frac{1-b^2}{1+b^2} \neq \frac{1-a^2}{1+a^2}$  gözlenmelidir.

7)

$$F(x,y) = \begin{cases} \ln \left( \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| + 1 \right) & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu için  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y)$  limitinin tanımsız olduğunu gösteriniz. Gerçekten, bir önceki örnekteki dizilerle çalışınız.

8)

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{xy(x^2+y^2)} & ; x \neq 0 \text{ ve } y \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \text{ ya da } y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için aynı soruyu çözünüz.

Dikkat edilirse  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  dizisi alındığında  $G(\varepsilon_n, \frac{\varepsilon_n}{2}) = \frac{4}{5\varepsilon_n^3} \rightarrow +\infty$  buna karşılık  $G(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) \rightarrow -\infty$  nedeniyle, fakat hem  $(\varepsilon_n, \frac{\varepsilon_n}{2}) \rightarrow (0,0)$  hem de  $(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) \rightarrow (0,0)$  olduğundan  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} G(x,y)$  limitinin **tanımsız** olduğu anlaşıllır.

9)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = \ell_1$  ve  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x,y) = \ell_2$  olsun. Bu durumda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y).g(x,y) = \ell_1.\ell_2 \text{ ve } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (af(x,y) + bg(x,y)) = a\ell_1 + b\ell_2 \text{ olur.}$$

Yalnızca birincisini gösterelim.  $M = |\ell_1| + |\ell_2| + 1 \geq 1$  pozitif sabitini tanımlarsak  $\exists \delta_{1,\varepsilon} > 0$ ,  $|f(x,y) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$  ( $\forall (x,y) \in K_{\delta_{1,\varepsilon}}^*(x_0, y_0)$ ) ve  $\exists \delta_{2,\varepsilon} > 0$ ,  $|g(x,y) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$  ( $\forall (x,y) \in K_{\delta_{2,\varepsilon}}^*(x_0, y_0)$ ) olur, o halde  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon} \wedge \delta_{2,\varepsilon}$  tanımlanırsa, her  $(x,y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$  için, her iki eşitsizlik geçerli olacağından (neden?), özel olarak her  $(x,y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$  için  $|f(x,y) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq 1$  ve böylece  $|f(x,y)| - |\ell_1| \leq |f(x,y) - \ell_1| < 1$  nedeniyle  $|f(x,y)| < |\ell_1| + 1 \leq M$  ve

$$\begin{aligned} |f(x,y).g(x,y) - \ell_1\ell_2| &\leq |f(x,y)|.|g(x,y) - \ell_2| + |f(x,y) - \ell_1|.|\ell_2| \\ &\leq M.|g(x,y) - \ell_2| + (|\ell_2| + 1).|f(x,y) - \ell_1| \\ &\leq M.|g(x,y) - \ell_2| + M.|f(x,y) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

kısacası  $\forall \varepsilon \in (0,1)$ ,  $\exists \delta_\varepsilon > 0$ ,  $|f(x,y).g(x,y) - \ell_1\ell_2| < \varepsilon$  ( $\forall (x,y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$ ) bulunarak istenen elde edilir.

İkinci iddia kullanılırsa, sözelimi şu bulunur:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^3y^2 + 2x^2y) = x_0^3y_0^2 + 2x_0^2y_0$$

$$10) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell_0 \text{ ve } \ell_0 \neq 0 \text{ ise } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{1}{f(x, y)} = \frac{1}{\ell_0} \text{ olur.}$$

Gerçekten  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_0 \wedge \delta_1(\varepsilon)$  alınarak her  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$  için  $\left| \frac{1}{f(x, y)} - \frac{1}{\ell_0} \right| = \frac{|f(x, y) - \ell_0|}{|f(x, y)| \cdot |\ell_0|} < \frac{|f(x, y) - \ell_0|}{\varepsilon_0 \cdot |\ell_0|} < \varepsilon$  bulunur; burada  $\varepsilon_0 = \frac{|\ell_0|}{2} > 0$  sayesinde, önce var olan uygun bir  $\delta_0 > 0$  için her  $(x, y) \in K_{\delta_0}^*(x_0, y_0)$  için  $|f(x, y) - \ell_0| \leq |f(x, y) - \ell_0| < \frac{|\ell_0|}{2} = \varepsilon_0$  böylece  $-\varepsilon_0 < |f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon_0$  ve sonuçta  $0 < \varepsilon_0 = |\ell_0| - \varepsilon_0 < |f(x, y)|$  yani  $\frac{1}{|f(x, y)|} < \frac{1}{\varepsilon_0}$  olur, ayrıca limit tanımından  $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$ ,  $|f(x, y) - \ell_0| < \varepsilon \varepsilon_0 |\ell_0|$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_1(\varepsilon)}^*(x_0, y_0)$ ) geçerlidir, bunlar yukarıda kullanılır. Demek ki  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $\left| \frac{1}{f(x, y)} - \frac{1}{\ell_0} \right| < \varepsilon$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0)$ ) bulunur, bu istenendir.

$$11) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell_0 \neq 0 \text{ ve } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = \ell_1 \text{ ise } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = \frac{\ell_1}{\ell_0} \text{ olur,}\\ \text{çünkü } \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = g(x, y) \cdot \frac{1}{f(x, y)} \text{ nedeniyle 9) ve 10) kullanılır.}$$

$$12) \lim_{(x,y) \rightarrow (1, 2)} \frac{3-x-y}{4+x-2y} = 0 \text{ bulunur, çünkü 11) kullanılır, ayrıca dikkat edilirse}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

olur, çünkü her  $(x, y) \in K_\varepsilon^*(0, 0)$  için  $0 < x^2 + y^2$  ve  $\left| x \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x| \cdot \left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| < \varepsilon$  olur, çünkü iyi bilindiği gibi her  $\xi \in \mathbb{R}$  için  $|\sin \xi| \leq |\xi|$  yani  $\left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| \leq 1$  geçerlidir. Öte yandan  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x-y}{x^2+y^2}$  limiti tanımsızdır, çünkü  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  dizisi aracılığıyla  $(\varepsilon_n, 4\varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  fakat  $\frac{2\varepsilon_n - 4\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2 + 16\varepsilon_n^2} = -\frac{1}{17\varepsilon_n} \rightarrow -\infty$ , buna karşılık  $(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  dizisi için  $\frac{2\varepsilon_n - \varepsilon_n}{5\varepsilon_n^2} \rightarrow +\infty$  olmaktadır. Benzer biçimde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$  limiti de tanımsızdır. Buna karşılık

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2, 1)} \frac{\arcsin(xy - 2)}{\arctan(3xy - 6)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2, 1)} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\arcsin(xy - 2)}{xy - 2} \cdot \frac{3xy - 6}{\arctan(3xy - 6)} \right] = \frac{1}{3}$$

çünkü  $h(x, y) = xy - 2 \rightarrow 0$  ve  $g(x, y) = 3xy - 6 = 3 \cdot h(x, y) \rightarrow 0$  ve ayrıca  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, 2)} \frac{\arcsin h(x, y)}{h(x, y)} = 1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (1, 2)} \frac{g(x, y)}{\arctan g(x, y)}$  olur, çünkü iyi bilindiği gibi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x}$  geçerlidir.

Artık çok değişkenli fonksiyonların sürekliliği ile ilgilenebiliriz:

**Önerme 3:** Uygun bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  kare komşuluğunda tanımlı gerçek değerli  $f = f(x, y)$  fonksiyonu için, aşağıdaki iddialar geçerlidir:

- i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$
- ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, f(K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)) \subseteq (f(x_0, y_0) - \varepsilon, f(x_0, y_0) + \varepsilon)$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

iii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon (\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0))$

iv)  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  gerçekleyen **her**  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  dizisi için  $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$  olur.

**Kanıtlama:** Dikkat edilirse  $f(A) \subseteq (a, b)$  kapsama koşulu ile  $a < f(x) < b (\forall x \in A)$  koşulu eşdeğer olduklarından ii) ve iii) iddialarının eşdeğer oldukları anlaşılır. Şimdi i) doğru yani,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \text{ olsun. } \varepsilon > 0 \text{ verildiğinde limit tanımı nedeniyle}$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0, |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0))$$

ve zaten  $|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = 0 < \varepsilon$  olduğundan, sonuçta

$$\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0) = K_{\delta_\varepsilon}^*(x_0, y_0) \cup \{(x_0, y_0)\} \text{ noktası için}$$

$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$  gerçekleştiği anlaşılmır, yani i)  $\Rightarrow$  iii)  $\equiv$  ii) çıkarması gösterilmiş olur. iii) iddiası doğrulenken  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  gerçekleyen herhangi bir  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  dizisi için hem  $x_n \rightarrow x_0$  hem de  $y_n \rightarrow y_0$  nedeniyle  $\exists n_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}, |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon (\forall n \geq n_{1,\varepsilon})$  ve ayrıca  $\exists n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}, |y_n - y_0| < \delta_\varepsilon (\forall n \geq n_{2,\varepsilon})$  gerçekleşir  $n_\varepsilon = n_{1,\varepsilon} + n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tanımlanırsa  $|x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$  ve  $|y_n - y_0| < \delta_\varepsilon$  yani  $(x_n, y_n) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0) (\forall n \geq n_\varepsilon)$  bulunur ve iii) doğru ve herbir  $n \geq n_\varepsilon$  için  $(x_n, y_n) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  olduğundan iii) kullanılarak  $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon (\forall n \geq n_\varepsilon)$  bulunur buyسا  $z_n = f(x_n, y_n)$  gerçek sayılarının  $f(x_0, y_0)$  gerçek sayısına yakınsaması yani  $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$  demektir, böylelikle iii)  $\Rightarrow$  iv) çıkarsaması elde edilir. Önerme1 kullanılarak iv)  $\Rightarrow$  i) çıkarsaması kolayca bulunur, kısacası i)  $\Rightarrow$  iii)  $\equiv$  ii)  $\Rightarrow$  iv)  $\Rightarrow$  i) çıkarsamları nedeniyle bu dört iddianın ikişer ikişer eşdeğer oldukları anlaşılmır. Bitti!

**Tanım5:** Yukardaki önermedeki eşdeğer koşullardan herhangi birisini (ve sonuçta tümünü) gerçekleyen  $f$  fonksiyonuna  $(x_0, y_0)$  **noktasında sürekli** denilir.

Dikkat edilirse

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonlarının her ikisi de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$  ve ayrıca  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$  nedeniyle  $(0, 0)$  noktasında **sürekli**dirler. Aslında gerek  $f$  gerekse  $g$  fonksiyonu, **herhangi** bir  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  noktasında da sürekli dir, çünkü  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  gerçekleyen  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  dizisi ne olursa olsun  $x_n \rightarrow x_0$  ve  $y_n \rightarrow y_0$  nedeniyle  $x_n^2 \rightarrow x_0^2$  ve  $y_n^2 \rightarrow y_0^2$  ve  $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow x_0^2 + y_0^2 > 0$  ve sinüs sürekli olduğundan  $\sin(x_n^2 + y_n^2) \rightarrow \sin(x_0^2 + y_0^2)$  ve böylece  $\frac{\sin(x_n^2 + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \frac{\sin(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2 + y_0^2}$  ve  $f(x_n, y_n) = x_n \cdot \frac{\sin(x_n^2 + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow x_0 \cdot \frac{\sin(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$  bulunur. Ayrıca

$$h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad F(x, y) = \ln(\frac{xy}{x^2 + y^2 + a}) (a > 0)$$

fonksiyonları tanımlı oldukları her noktada sürekli dirler. Benzer biçimde

$$p(x, y) = a_1 x^{n_1} y^{m_1} + a_2 x^{n_2} y^{m_2} + \dots + a_k x^{n_k} y^{m_k}$$

iki değişkenli polinomu,  $a_i$  sabit katsayıları  $n_i, m_i \geq 0$  tam sayıları ne olursa olsun, düzlemin **her**  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli dir, neden?

**Örnek:** Şimdi, düzlemede  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  kapalı birim çemberinin **her noktasında süreksiz** olan aşağıdaki örneği görelim: (Dikkat:  $R$  kapalı bölgesi  $D_1(0, 0)$  birim açık dairesinin sınıridir.)

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} & ; (x, y) \notin R \\ 0 & ; (x, y) \in R \end{cases}$$

Yalnızca, örnek olması amacıyla, ikinci bileşeni  $0 < y_0$  koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0) \in R$  noktasındaki süreksizliği görelim. Ünlü Arşimet İlkesi yardımı ile, herhangi  $\varepsilon \in (0, 1)$  verildiğinde  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, 1 < n_0\varepsilon$  ve  $\exists n_1 \in \mathbb{N}, 1 < n_1(4y_0)$  doğal sayılarını ve onlar aracılığıyla  $N_0 = n_0 + n_1$  tanımlansın. Dikkat edilirse herbir  $n > N_0$  doğal sayısı için  $P_0 \in R$  böylece  $x_0^2 + y_0^2 = 1$  unutmadan  $P_n(x_0, y_0 - \frac{1}{2n})$  noktaları, hem  $x_0^2 + (y_0 - \frac{1}{2n})^2 = 1 - \frac{y_0}{n} + \frac{1}{4n^2} < 1$  ve hem de  $|(y_0 - \frac{1}{2n}) - y_0| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$  ve  $P_n \in D_1(0, 0) \cap K_\varepsilon(x_0, y_0)$  olur ama bu sonsuz tane  $P_n(x_0, y_0 - \frac{1}{2n}) \in K_\varepsilon(x_0, y_0)$  noktaları için  $P_0 \in R$  ve  $g(P_0) = 0$  olduğundan  $|g(P_n) - g(P_0)| = |g(P_n)| = \frac{1}{|x_0^2 + (y_0 - \frac{1}{2n})^2 - 1|} = \frac{4n^2}{4ny_0 - 1} > 1$  böylece  $|g(P_n) - g(P_0)| > 1 > \frac{1}{2}$  bulunur, çünkü  $P_0(x_0, y_0) \in R$  nedeniyle  $0 < y_0 = |y_0| \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1$  ve  $n > N_0 > n_1$  nedeniyle  $4ny_0 > 4n_1y_0 > 1$  ve  $0 < 4ny_0 - 1 < 4ny_0 \leq 4n < 4n^2$  olmaktadır; oysa  $P_0$  noktasında süreklilik için,  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall (x, y) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0), |g(x, y) - g(P_0)| < \frac{1}{2}$  koşulu gerçekleşmemeliydi.  $g$  fonksiyonunun  $\mathbb{R} - R$  açık bölgesinde sürekli olduğunu göstermek güç değildir çünkü herhangi  $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 - R$  alındığında  $\exists \delta_0 > 0, K_{\delta_0}(\xi_0, \xi_1) \subseteq \mathbb{R}^2 - R$  olduğundan  $(x_n, y_n) \rightarrow (\xi_0, \xi_1)$  gerçekleyen **herhangi**  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  dizisi için  $\exists m_0 \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in K_{\delta_0}(\xi_0, \xi_1) \subseteq \mathbb{R}^2 - R$  ( $\forall n \geq m_0$ ) böylece  $g(x_n, y_n) = \frac{1}{x_n^2 + y_n^2 - 1} \rightarrow \frac{1}{\xi_0^2 + \xi_1^2 - 1} = g(\xi_0, \xi_1)$  bulunur.

**Ödev:** Okuyucu aşağıda tanımlanan ilginç

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & ; (x, y) \in D_1(0, 0) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 1 & ; (x, y) \in D_1(0, 0) - (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \end{cases}$$

$h$  fonksiyonunun  $D_1(0, 0)$  kümesinde her noktada süreksiz olduğunu göstermelidir.

**Önerme:**  $\mathbb{R}^2$  kümesinde tanımlı, sürekli ve gerçel değerli  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ne olursa olsun

$$A_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < g(x, y)\}, \quad K_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = g(x, y)\}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

kümelerinin birincisi **açık** ikincisi de **kapalıdır**.

**Kanıtlama:** Gerçekten herhangi  $(x_0, y_0) \in A_{f,g}$  alındığında  $K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq A_{f,g}$  olacak biçimde  $\delta_0 > 0$  sayısı tanımlamak güç değildir, çünkü  $(x_0, y_0) \in A_{f,g}$  böylece  $f(x_0, y_0) < g(x_0, y_0)$  nedeniyle, bilindiği gibi  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $f(x_0, y_0) + \varepsilon_0 < g(x_0, y_0) - \varepsilon_0$  olur ve her iki fonksiyon da  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  noktasında sürekli olduğundan sırasıyla

$$\begin{aligned}\exists \delta_1 > 0, \forall (x, y) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0), f(x, y) &< f(x_0, y_0) + \varepsilon_0 , \\ \exists \delta_2 > 0, \forall (x, y) \in K_{\delta_2}(x_0, y_0), g(x, y) &> g(x_0, y_0) - \varepsilon_0\end{aligned}$$

gerçekleşeceğini, herhangi bir  $0 < \delta_0 < \delta_1 \wedge \delta_2$  seçildiğinde herbir  $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0) (\subseteq K_{\delta_1}(x_0, y_0) \cap K_{\delta_2}(x_0, y_0))$  noktası için  $f(x, y) < f(x_0, y_0) + \varepsilon_0 < g(x_0, y_0) - \varepsilon_0 < g(x, y)$  böylece  $f(x, y) < g(x, y)$  yani  $(x, y) \in A_{f,g}$  bulunur, bitti. O halde  $A_{f,g} \cup A_{g,f}$  kümesi de **açık** olur(neden?), sonuçta  $K_{f,g} = \mathbb{R}^2 - (A_{f,g} \cup A_{g,f})$  tümleyen kümesi **kapalı** olur. Dikkat edilirse

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq g(x, y)\} = \mathbb{R}^2 - A_{g,f}$$

ve sözgelimi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x + y) \leq x^2 + y^2\}$$

kümeleri **kapalıdır**. Buna karşılık  $\mathbb{R}^2 - K_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \neq g(x, y)\}$  kümesi elbette **açiktır**.

**Uyarı2:** Üç değişkenli gerçek değerli fonksiyonlarda limit ve süreklilik kavramları, tümüyle benzer biçimde verilir ve Önerme1 ve Önerme3'ün benzerleri kanıtlanır. Bu arada Önerme3 bize şu gerçeği **anımsatır**:  $[a, b]$  aralığında tanımlı gerçek değerli bir  $f$  fonksiyonunun bir  $x_0 \in [a, b]$  gerçek sayısında sürekli olabilmesi için gerek  $x_0$  noktasında **dizisel sürekli** olması, yani  $x_n \rightarrow x_0$  koşulunu gerçekleyen **her**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  gerçekleşmesi gerçeğinin, çok değişkenli gerçek değerli fonksiyonlar için de geçerli olduğu anlaşılmıştır.

**Örnek:**  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq \frac{5y-2x}{2}\} (\subseteq \mathbb{R}^3)$  açık bölgesi aracılığıyla

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4x+y-3z}{2x-5y+2z} & ; (x, y, z) \in R \\ 0 & ; (x, y, z) \notin R \end{cases} \quad \text{fonksiyonu iAşın}$$

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$  limiti **tanımsızdır**, çünkü  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  dizisi aracılığıyla  $(\varepsilon_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n) \rightarrow (0, 0, 0)$  ve üstelik  $\varepsilon_n \neq \frac{5\varepsilon_n - 2\varepsilon_n}{2}$  nedeniyle  $(\varepsilon_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n) \in R$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) olduğundan  $f(\varepsilon_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n) = \frac{4\varepsilon_n + \varepsilon_n - 3\varepsilon_n}{2\varepsilon_n - 5\varepsilon_n + 2\varepsilon_n} = \frac{2\varepsilon_n}{-\varepsilon_n} = -2$  nedeniyle  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varepsilon_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n) = -2$  ve benzer biçimde  $(2\varepsilon_n, \varepsilon_n, 2\varepsilon_n) \rightarrow (0, 0, 0)$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2\varepsilon_n, \varepsilon_n, 2\varepsilon_n) = 1$  olduğundan Uyarı1 kullanılır.

---

Çok değişkenli sürekli gerçek değerli fonksiyonlar tanımlanın basit yolları vardır, bunlar aşağıda verilmektedir:

**Örnekler2:**

- 1)  $f = f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında,  $g = g(x)$  fonksiyonu  $[c, d]$  aralığında tanımlı sürekli gerçek değerli ise

$$F(x, y) = f(x).g(y) \text{ ve } G(x, y) = f(x) + g(y)$$

fonksiyonları  $R = [a, b] \times [c, d]$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli ve **süreklidir**. Gerçekten  $R$  bölgesinde  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \in R$  ise hem  $[a, b]$  aralığında  $x_n \rightarrow x_0$  hem  $[c, d]$  aralığında  $y_n \rightarrow y_0$  ve  $f$  ile  $g$  sürekli olduklarından hem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  hem de  $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$  ve böylece  $F(x_n, y_n) = f(x_n).g(y_n) \rightarrow f(x_0).g(y_0) = F(x_0, y_0)$  bulunurak,  $F$  fonksiyonunun Önerme3iv) nedeniyle  $R$  bölgesinin herbir  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında sürekli olduğu anlaşılır.  $F$  fonksiyonunun sürekliliği  $\varepsilon, \delta$  yöntemiyle de gösterilebilir:  $M = |f(x_0)| + |g(x_0)| + 1 \geq 1$  pozitif sayısı aracılığıyla  $< \varepsilon \leq 1$  verildiğinde  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının sırasıyla  $x_0 \in [a, b]$  ve  $y_0 \in [c, d]$  gerçek sayılarında sürekli olmaları nedeniyle

$$\begin{aligned} \exists \delta_{1,\varepsilon} > 0, \quad f((x_0 - \delta_{1,\varepsilon}, x_0 + \delta_{1,\varepsilon})) &\subseteq \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2M}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2M} \right) \quad \text{ve} \\ \exists \delta_{2,\varepsilon} > 0, \quad g((y_0 - \delta_{2,\varepsilon}, y_0 + \delta_{2,\varepsilon})) &\subseteq \left( g(y_0) - \frac{\varepsilon}{2M}, g(y_0) + \frac{\varepsilon}{2M} \right) \quad \text{olur,} \end{aligned}$$

$0 < \delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon} \wedge \delta_{2,\varepsilon}$  seçilirse hem  $\delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon}$  hem de  $\delta_\varepsilon < \delta_{2,\varepsilon}$  olduğundan herbir  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \times (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon)$  için hem  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (x_0 - \delta_{1,\varepsilon}, x_0 + \delta_{1,\varepsilon})$  hem  $y \in (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon) \subseteq (y_0 - \delta_{2,\varepsilon}, y_0 + \delta_{2,\varepsilon})$  ve  $f(x) \in (f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2M}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2M})$  ve  $g(y) \in (g(y_0) - \frac{\varepsilon}{2M}, g(y_0) + \frac{\varepsilon}{2M})$  olur ve  $|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq 1$  ve böylece hem  $|f(x)| < |f(x_0)| + 1 \leq M$  hem de  $M.|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  ve benzer biçimde  $M|g(y) - g(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  bularak, sonuçta **her**  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  için  $|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x).g(y) - f(x_0).g(y_0)| \leq |f(x)|.|g(y) - g(y_0)| + |f(x) - f(x_0)|.|g(y_0)| \leq M.|g(y) - g(y_0)| + |f(x) - f(x_0)|.(|g(y_0)| + 1) < \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - f(x_0)|.M < \varepsilon$  kısacası  $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+, |F(x, y) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon (\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0))$  bulunur, buyسا  $F$  fonksiyonunun herbir  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında olması demektir.  $G$  fonksiyonu okuyucuya bırakılmıştır.

Bu nedenle  $F(x, y) = \arctan \sqrt{x} \cdot \ln(1 + \sqrt[5]{y^3})$  fonksiyonu  $R = [0, \infty) \times [0, \infty)$  bölgesinde sürekli gerçek değerli bir fonksiyondur.

- 2)  $F = F(x, y)$  gerçek değerli fonksiyonu  $R = [a, b] \times [c, d]$  bölgesinde sürekli ve ayrıca  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  fonksiyonu sürekli ise  $f(x) = F(x, \varphi(x)) (\forall x \in [a, b])$  biçiminde tanımlanan tek değişkenli  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında süreklidir.

İki satırlık kanıtlama:  $x_n \rightarrow x_0 \in [a, b]$  ise  $\varphi$  sürekli olduğundan  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$  ve  $F$  sürekli ve  $(x_n, \varphi(x_n)) \rightarrow (x_0, \varphi(x_0))$  olduğundan  $f(x_n) = F(x_n, \varphi(x_n)) \rightarrow F(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0)$  bulunur.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

Ve yedi satırlık kanıtlama: Kısalık amacıyla  $\varphi(x_0) = y_0$  yazılırsa ,  $F$  fonksiyonu  $(x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0)) \in [a, b] \times [c, d] = R$  noktasında sürekli olduğundan  $\exists \delta_{1,\varepsilon} > 0, \forall (x, y) \in K_{\delta_{1,\varepsilon}}(x_0, y_0) \cap R$  için  $|F(x, y) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon$  ve  $\varphi$  fonksiyonu  $x_0 \in [a, b]$  noktasında sürekli olduğundan  $\exists \delta_{2,\varepsilon} > 0, \forall x \in ((x_0 - \delta_{2,\varepsilon}, x_0 + \delta_{2,\varepsilon}) \cap [a, b])$  için  $|\varphi(x) - y_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_{1,\varepsilon}$  ve böylece  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon} \wedge \delta_{2,\varepsilon}$  seçilirse, her  $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap [a, b]$  için hem  $|\varphi(x) - y_0| < \delta_{1,\varepsilon}$  hem de  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon}$  böylece  $(x, \varphi(x)) \in K_{\delta_{1,\varepsilon}}(x_0, y_0)$  nedeniyle  $|f(x) - f(x_0)| = |F(x, \varphi(x)) - F(x_0, \varphi(x_0))| = |F(x, \varphi(x)) - F(x_0, y_0)| < \varepsilon$  bulunur, buyسا  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında sürekli dir demektir.

3)  $F = F(x, y)$  fonksiyonu  $R = [a, b] \times [c, d]$  bölgesinde sürekli,  $(x_0, y_0) \in R$  ise  $\varphi(x) = F(x, y_0) (\forall x \in [a, b])$  ve  $\varphi(y) = F(x_0, y) (\forall y \in [c, d])$  biçimde tanımlanan gerçek değerli  $\varphi$  ve  $\varphi$  fonksiyonları sürekli dir. Bunlar dizisel süreklilik karakterizasyonu ile kolayca yapılır.

4) Bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde tanımlı bir  $F = F(x, y)$  gerçek değerli fonksiyonuna, ancak ve yalnız, **her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık**

$$\exists \delta_\varepsilon > 0, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

çıkarsama koşulunu gerçeklerse  **$R$  bölgesinde düzgün sürekli** dir denilir. Burada  $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  pozitif gerçek sayısı  $R$  bölgesinin noktalarına kesinlikle **bağlı değildir**, ona  $\varepsilon$  sayısına karşılık belirlenen  **$R$  bölgesinde düzgün süreklilik sabiti** denilir. Dikkat edilirse  $f = f(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında,  $g = g(x)$  fonksiyonu ise  $[c, d]$  aralığında sürekli ve gerçek değerli iseler  $F(x, y) = f(x).g(y)$  ve  $G(x, y) = f(x) + g(y)$  fonksiyonları  $R = [a, b] \times [c, d]$  kapalı dikdörtgen bölgesinde **düzgün sürekli dir**. Gerçekten, iyi bilindiği gibi, bir  $[a, b]$  kapalı-sınırlı aralığında gerçek değerli sürekli her fonksiyon düzgün sürekli olduğu, yani her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\exists \delta_\varepsilon > 0, x_1, x_2 \in [a, b]$  ve  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  gerçekleştiğinden, özel olarak iyi tanımlı olan

$$0 \leq \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty$$

non-negatif gerçek sayısı aracılığıyla, (dikkat:  $f$  fonksiyonu kapalı-sınırlı  $[a, b]$  aralığında **sürekli** olduğundan, bilindiği gibi, aslında kesinlikle var olan uygun bir  $x_0 \in [a, b]$  gerçek sayısı sayesinde  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = |f(x_0)|$  gerçekleşir) yukarıda verilen  $f$  ve  $g$  için  $M_0 = \|f\| + \|g\| + 1 (\geq 1)$  sayısı tanımlanırsa, bu fonksiyonların düzgün sürekliliği nedeniyle  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$\begin{aligned} \exists \delta_{1,\varepsilon} > 0, x_1, x_2 \in [a, b] \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta_{1,\varepsilon} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M_0} \\ \exists \delta_{2,\varepsilon} > 0, y_1, y_2 \in [c, d] \text{ ve } |y_1 - y_2| < \delta_{2,\varepsilon} \Rightarrow |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2M_0} \end{aligned}$$

olacak biçimde  $\delta_{1,\varepsilon} \in \mathbb{R}^+, \delta_{2,\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$  vardır, böylelikle  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_{1,\varepsilon} \wedge \delta_{2,\varepsilon}$  seçilirse,  $F$  fonksiyonu

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

düzgün sürekli koşulunu gerçekler, çünkü

$$\begin{aligned} |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| &= |f(x_1).g(y_1) - f(x_2).g(y_2)| \\ &\leq |f(x_1)|.|g(y_1) - g(y_2)| + |f(x_1) - f(x_2)|.|g(y_2)| \\ &\leq \|f\|.|g(y_1) - g(y_2)| + |f(x_1) - f(x_2)|\|g\| \\ &\leq M_0.|f(x_1) - f(x_2)| + M_0.|g(y_1) - g(y_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

gerçekleşir.  $G$ 'nin düzgün sürekliliğini göstermek daha kolaydır, ve öğrenciye bırakılmıştır.

5)  $R$  bölgesinde düzgün sürekli bir  $F = F(x, y)$  fonksiyonu,  $R$  bölgesindeki düzgün süreklilik tanımı ve Önerme3iii) koşulu nedeniyle, apaçıkta ki  $R$  bölgesinin her bir  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli yani  $R$  **bölgesinde sürekli**dir. Oysa bir  $R$  bölgesinde sürekli olan her gerçek değerli fonksiyonun  $R$  bölgesinde düzgün sürekli olması **gerekmez**. Şu karşıt örneği incelemek yeterlidir:  $f(x) = \frac{1}{x} = g(x) (\forall x \in (0, 1))$  olsun,  $R = (0, 1) \times (0, 1)$  açık-sınırlı bölgesi tanımlansın.  $F(x, y) = f(x).g(y) = \frac{1}{xy}$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) fonksiyonu  $R$  bölgesinde gerçek değerli hatta pozitif değerli ve üstelik sürekli dir(dizisel süreklilik koşulunu gerçekleyiniz) oysa  $R$  bölgesinde düzgün sürekli DEĞİLDİR. Örneğin  $\varepsilon_0 = 1 > 0$  alındığında, hiçbir  $\delta \in \mathbb{R}^+$  sayısı  $\varepsilon_0$  sayısına karşılık  $R$  bölgesinde düzgün süreklilik sabiti görevini göremez, kısaca  $\delta > 0$  **ne olsursa olsun**, öyle uygun  $(x_\delta, y_\delta), (x_\delta^*, y_\delta^*) \in R$  noktaları vardır ki  $|x_\delta - x_\delta^*| < \delta$  ve  $|y_\delta - y_\delta^*| < \delta$  fakat  $\varepsilon_0 < |F(x_\delta, y_\delta) - F(x_\delta^*, y_\delta^*)|$  gerçekleşir. Gerçekten, genelligi bozmaksızın  $0 < \delta < 1$  varsayıbiliriz (aksi durumda  $0 < \delta^* < \frac{1}{2} \wedge \delta$  ile çalışılır), sabit bir  $a \in (0, 1)$  alınsın, o halde  $0 < a < 1 < \frac{1}{\delta}$  nedeniyle  $1 < \frac{1}{a\delta}$  gözleyiniz; şimdi  $x_\delta = \frac{\delta}{3}, x_\delta^* = \frac{\delta}{4}, y_\delta = y_\delta^* = a$  alınsın, kolayca  $(x_\delta, y_\delta), (x_\delta^*, y_\delta^*) \in (0, 1) \times (0, 1) = R$  ve  $|x_\delta - x_\delta^*| = |\frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{4}| = \frac{\delta}{12} < \delta$  ve  $|y_\delta - y_\delta^*| = |a - a| = 0 < \delta$  ve fakat  $|F(x_\delta, y_\delta) - (x_\delta^*, y_\delta^*)| = |\frac{1}{x_\delta y_\delta} - \frac{1}{x_\delta^* y_\delta^*}| = \frac{1}{a}|\frac{3}{\delta} - \frac{4}{\delta}| = \frac{1}{a\delta} > 1 = \varepsilon_0$  olmaktadır.  $G(x, y) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^m}$  ve  $H(x, y) = \frac{1}{x^n y^m}$  fonksiyonlarının sabit  $n, m \in \mathbb{N}$  doğal sayıları ne olursa olsun  $R = (0, 1) \times (0, 1)$  açık kare bölgesinde **düzgün sürekli olmayan**, sürekli fonksiyonlar oldukları tümyle benzer biçimde gösterilir.

6)  $f(x, y) = a_0 x^{n_0} y^{m_0}$  ve  $g(x, y) = a_1 x^{n_1} + a_2 y^{n_2}$  polinomları  $n_0, m_0, n_1$  ve  $n_2$  sabit doğal sayıları ne olursa düzlemin **her sınırlı**  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde düzgün sürekli dir. Gerçekten  $R$  bölgesi sınırlı olduğundan uygun  $a < b$  ve  $c < d$  gerçek sayıları aracılığıyla  $R \subseteq [a, b] \times [c, d]$  kapsaması geçerli olur. Dikkat: her  $x \in [a, b]$  için  $M_1 = |a| \vee |b| > 0$  pozitif sayısının  $-M_1 \leq -|b| \leq b \leq x \leq a \leq |a| \leq M_1$  yani  $-M_1 \leq x \leq M_1$  ve sonuçta  $|x| \leq M_1$  gerçeklediği unutmayın. Şimdi  $f$ 'in

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

tanımındaki sabitler aracılığıyla

$$M = (|a_0| + 1)(n_0 + m_0)(M_1 + 1)^{n_0} \cdot (M_2 + 1)^{m_0} > 1$$

pozitif gerçel sayısının, herhangi bir  $(x, y) \in R$  noktasından tümüyle bağımsız olarak tanımlandığını, yalnızca  $R$  bölgesi kapsayan dikdörtgen bölgeyle  $f$ 'in tanımındaki sabitlere bağlı olduğuna dikkat ediniz. Tıpkı Örnek 1.2) sayfa 10'da yapıldığı gibi  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$  ne olursa olsun, aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |a_0||x_1^{n_0}y_1^{m_0} - x_2^{n_0}y_2^{m_0}| \leq M.|x_1 - x_2| + M.|y_1 - y_2|$$

böylece,  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2M}$  sayısının,  $R$  bölgesinin bu  $\varepsilon$  sayısına karşılık belirleme düzgün süreklilik sabiti olduğunu çünkü  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$  ve  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M.|x_1 - x_2| + M.|y_1 - y_2| < 2M\delta_\varepsilon < \varepsilon$  bulunacağı gözlenir.  $g$  fonksiyonu için, yalnızca  $R$  bölgesiyle  $g$ 'nin tanımındaki sabitlere bağlı bir  $M > 0$  sayesinde  $|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| \leq |a_1|.|x_1^{n_1} - x_2^{n_1}| + |a_2|.|y_1^{m_1} - y_2^{m_1}| \leq M.|x_1 - x_2| + M.|y_1 - y_2|$  bulunacağı böylelikle  $g$ 'nin  $R$  bölgesinde düzgün sınırlı olduğunu gösteriniz. Somut birer örnek olarak siz

$$f(x, y) = 2x^2y \text{ ve } g(x, y) = x^3 + 2y^2$$

polinomlarının  $[0, 1] \times [0, 1]$  kapalı-sınırlı bölgesinde düzgün sürekli olduklarını, örneğin  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$  sayısına karşılık birer düzgün süreklilik sabiti belirleyebildiğini **gösteriniz**.

**Uyarı:** Herhangi bir  $R (\subseteq \mathbb{R}^n)$  tıpkı bölgesinde tanımlı, gerçel değerli ve sürekli **her** fonksiyonun **düzgün sürekli** olduğu Topoloji derslerinde kanıtlanır.

### Yinelemeli Limitler

$f = f(x, y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasının uygun bir kare komşuluğunda sürekli ise  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$  ve  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$  limitleri eşit ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$$

olur, çünkü apaçık biçimde  $x \rightarrow x_0$  ise yani  $x$  gerçel sayısı  $x_0$  gerçel sayısına soldan ya da sağdan **yeteri yakınsa**  $(x, y_0) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  olur ve  $f$  fonksiyonu  $(x, y_0) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olduğunda  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,y_0)} f(x, y) = f(x, y_0)$  ve böylelikle  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$  bulunur, son eşitlik yazılırkken Örnek 2.3)'deki  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  biçimde tanımlanan  $\varphi$  fonksiyonunun sürekli oluşu bilgisi kullanılmıştır. Tümüyle benzer biçimde  $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = f(x_0, y_0)$  gösterilir.

---

**Dikkat:** Yukarıdaki yinelemeli (tekrarlı) limitler **eşit değilse** fakat  $f$  fonksiyonu  $K_{\varepsilon_0}^*(x_0, y_0)$  delikli komşuluğunda **sürekli** ise  $f$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olamaz, çünkü sürekli olsayıdı  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) = K_{\varepsilon_0}^*(x_0, y_0) \cup \{(x_0, y_0)\}$  komşuluğunun her noktasında sürekli olur ve yukarıda kanıtlandığı gibi, yinelemeli limitler eşit olurdu. Örneğin  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$  açık bölgesi tanımlanırsa (bunun,  $\mathbb{R}^2$  düzleminde  $y = -x$  doğrusu üzerinde bulunan tüm noktaların atılmasıyla, yani bu doğrunun **düzlemden çıkarılmasıyla** elde edileceğini gözleyin)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & ; (x, y) \in R \\ 0 & ; (x, y) \notin R \end{cases}$$

birimde tanımlanan fonksiyon, her  $\varepsilon > 0$  için  $K_{\varepsilon}^*(0, 0) \cap R$  açık kümesinin her noktasında sürekli dir (neden?) ve  $x \rightarrow 0$  iken yani  $x$  gerçek sayısı 0 gerçek sayısına yeteri yakın fakat henüz 0 değilken  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$  olur, böylelikle  $\lim(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$  bulunur, burada şu önemli gerçeğe dikkat edilmiştir:  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  limiti hesaplanırken, 0 gerçek sayısına yeteri yakın olan  $x$  değişimemekte yani sabit tutulmaktadır, dolayısıyla,  $y \rightarrow 0$  nedeniyle,  $y$  gerçek sayısı  $-|x| < y < |x|$  ve sonuçta  $|y| < |x|$  gerçeklediğinden bu  $(x, y)$  sıralı gerçek sayı ikilisi  $(x, y) \in R$  yani  $y \neq -x$  gerçekler, çünkü aksi durumda  $|y| = |-x| = |x|$  bulunurdu, kısacası  $x$  gerçek sayısı 0'a yeteri yakın fakat sabitken  $y \rightarrow 0$  olduğunda  $(x, y) \in R$  ve  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  olur ve bu tür  $x$ 'ler için  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = 1$  bulunur. Buna karşılık  $\lim(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1$  olur (neden?), böylelikle  $\lim(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) \neq \lim(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$  bulunur. Dikkat edilirse  $f$  fonksiyonu  $(0, 0) \notin R$  noktasında **SÜREKSİZDİR**; çünkü  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  için  $(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) \in R$  ve  $f(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) = \frac{-\varepsilon_n}{3\varepsilon_n} \rightarrow -\frac{1}{3}$  fakat  $f(2\varepsilon_n, \varepsilon_n) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$  geçerlidir, yani uygun bir  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$  dizisi için  $f(x_n, y_n) \rightarrow -\frac{1}{3}$  buna karşılık bir başka  $(x_n^*, y_n^*) \rightarrow (0, 0)$  dizisi için  $f(x_n^*, y_n^*) \rightarrow \frac{1}{3}$  olmaktadır, böylece  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  limiti tanımsızdır.

**Tanım 6:**  $n > 1$  olmak üzere,  $\mathbb{R}^n$  kümesine tanımlanan fonksiyonlara, bu fonksiyonların tanım kümeleri ne olursa olsun, **vektör değerli fonksiyon** denir. [Daha genel olarak herhangi bir vektör uzayına tanımlanan fonksiyonlara **vektör değerli** denir.] Örneğin

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 & (\forall x \in [a, b]), \\ F(x, y) &= (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2 & (\forall (x, y) \in R \subseteq \mathbb{R}^2), \\ H(x, y, z) &= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3 & (\forall (x, y, z) \in R^* \subseteq \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

fonksiyonları birer vektör değerli fonksiyon örneğidir, burada tüm bileşen fonksiyonların gerçek değerli olduğunu söylemeye gerek yoktur. Bunlar, ancak ve yalnız, tüm bileşen fonksiyonlar sürekli ise-ler sürekli olurlar, Örneğin  $u$  ve  $v$  bileşen fonksiyonları sürekli ise  $F$  fonksiyonu sürekli dir, çünkü  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  ise  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarının sürekliliği nedeniyle  $u(x_n, y_n) \rightarrow u(x_0, y_0)$  ve

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

$v(x_n, y_n) \rightarrow v(x_0, y_0)$  ve böylece  $F(x_n, y_n) = (u(x_n, y_n), v(x_n, y_n)) \rightarrow (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) = F(x_0, y_0)$  gerçekleşir. Vektör değerli fonksiyonların analiziyle bir sonraki bölümde ilgileneceğiz.

### Tanım7 (Kısmi Türevler)

Bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli  $f = f(x, y)$  fonksiyonlarına  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre **kısmi türevleri**, ancak ve yalnız, aşağıdaki limitler var(tanımlı) ise

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

birimde tanımlanır.  $x$  değişkeninin değişim niceliği  $\Delta x$  yerine genellikle  $h$  buna karşılık  $y$  değişkeni ise  $\Delta y$  yerine  $k$  ile yazılır. Bu nedenle örneğin

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, k + y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$$

olur. Örneğin  $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$  için

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - (x+h)y + y^2 - (2x^2 - xy + y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - hy}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - y) = 4x - y$$

ve benzer biçimde  $f_y(x, y) = -x + 2y$  bulunur. Buna karşılık  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$  olmak üzere

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x-y)}{x+y} & ; \quad (x, y) \in R \\ 0 & ; \quad (x, y) \notin R \end{cases}$$

fonksiyonu için  $g_x(0, 0) = 1$  olur, çünkü dikkat edilirse

$$g_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

bulunur. çünkü  $(0, 0) \notin R$  nedeniyle  $g(0, 0) = 0$ , buna karşılık  $(h, 0) \in R$  nedeniyle  $g(h, 0) = \frac{h(h-0)}{h+0} = \frac{h^2}{h} = h$  geçerlidir. Dikkat edilirse  $g_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(0, 0+k) - g(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(0, k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$  olur. Ayrıca

$$\varphi(x, y) = x^3y + e^{xy^2} \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

ise  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ne olursa olsun  $\varphi_x(x, y) = 3x^2y + y^2e^{xy^2}$  ve  $\varphi_y(x, y) = x^3 + 2xye^{xy^2}$  gözlemek güç değildir (nasıl?).  $f_x$  ve  $f_y$  fonksiyonlarına **birinci mertebeden kısmi türevler** denir.  $f$  fonksiyonlarının **ikinci mertebeden kısmi türevleri**

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

---

kısaltası, örneğin  $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + k) - f_x(x, y)}{k}$  biçiminde tanımlanır burada apakta ki  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + k) - f_x(x, y)}{k}$  limitinin var(tanımlı) olduğu varsayılmaktadır, aksi halde  $f_{xy}$  ikinci mertebe kısmi türevi  $(x, y)$  noktasında tanımsız olur. Üç değişkenli fonksiyonlar için kısmi türev tanımları benzerdir. Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & ; \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun, herbir  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  noktasındaki kısmi türevleri ( $\mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$  açık bölgesinde) doğrudan hesaplanarak (bkz. aşağıda **Uyarı 0**)

$$\varphi_x(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \varphi_{xx}(x, y, z) = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

ve benzer biçimde  $\varphi_{yy}(x, y, z) = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$  ve  $\varphi_{zz}(x, y, z) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$  bularak

$$\varphi_{xx}(x, y, z) + \varphi_{yy}(x, y, z) + \varphi_{zz}(x, y, z) = 0 \quad (\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0))$$

elde edilir. Oysa,  $\varphi_x(0, 0, 0), \varphi_y(0, 0, 0)$  ve  $\varphi_z(0, 0, 0)$  kısmi türevleri tanımsızdır, çünkü  
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(0 + h, 0, 0) - \varphi(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(h, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} = +\infty$  buna karşılık  
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(0 + h, 0, 0) - \varphi(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(h, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h|h|} = -\infty$  geçerlidir. Böylece,  
ikinci mertebeden kısmi türevlerin tanımlı olduğu noktalarda

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$$

olduğu, yani  $\varphi$  fonksiyonunun ünlü **Laplace denkleminin** bir çözümü olduğu anlaşılır.

**Uyarı:** Bazı yazarlar  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}$  vb. kısmi türevleri için sırasıyla  $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}$  vb. yazarlar, biz bu yazılı **kullanmayacağız**.

**Önerme4:**  $f = f(x, y)$  fonksiyonunun  $(x_0, y_0)$  noktasında kısmi türevlerinin var(tanımlı) olabilmesi için gerek  $g(x) = f(x, y_0)$  ve  $h(y) = f(x_0, y)$  gerçek değerli fonksiyonlarının sırasıyla  $x_0$  ve  $y_0$  noktalarında türetilen olmalıdır. Üstelik bu durumda  $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$  ve  $h'(y) = f_y(x_0, y_0)$  geçerlidir.

**Kanıtlama:**  $\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$  gözleyerek  $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$  limitinin var (tanımlı) olabilmesi için gerek  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$  limitinin var olmalıdır. Benzer

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

şeyler  $\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{h(y_0 + k) - h(y_0)}{k}$  gözleyerek  $f_y(x_0, y_0)$  kısmi türevi için yapılır. Üstelik bu limitler varsa  $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ ,  $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$  bulunur.

### Uyarılar3:

0) Eğer  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  kümesi açıksa, her  $(x, y) \in G$  için  $f(x, y) = g(x, y)$  ise üstelik  $G$  kümesinde  $g$  fonksiyonunun kısmi türevleri varsa, bu durumda

$$\forall (x, y) \in G \text{ i} \tilde{\text{A}} \text{şin } f_x(x, y) = g_x(x, y) \text{ ve } f_y(x, y) = g_y(x, y)$$

eşitlikleri geçerlidir. Gerçekten herhangi  $(x_0, y_0) \in G$  alındığında,  $G$  açık bir küme olduğundan  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $K_{\delta_0}(x, y) \subseteq G$  olur böylece  $h \rightarrow 0$  olduğunda  $-\delta_0 < h < \delta_0$  yani  $|h| < \delta_0$  gerçekleşeceğinden

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = g_x(x_0, y_0)$$

bulunur, çünkü  $(x_0 + h, y_0) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq G$  nedeniyle, varsayılm gereği  $f(x_0 + h, y_0) = g(x_0 + h, y_0)$  ve elbette  $(x_0, y_0) \in G$  nedeniyle zaten  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$  geçerlidir. İkinci eşitlik  $k \rightarrow 0$  iken  $|k| < \delta_0$  olması gerekeceğinden benzer biçimde  $f(x_0, y_0 + k) = g(x_0, y_0 + k)$  gözleyip kolayca bulunur. Bu bilgiler aşağıda özellikle  $\forall (x, y) \in G$  için  $f(x, y) = g(x, y)$  ve  $\forall (x, y) \notin G$  için  $f(x, y) = h(x, y)$  biçimde tanımlanan  $f = f(x, y)$  fonksiyonlarının  $G$  kümesindeki kısmi türevlerinin hesaplanmasıında kullanılacaktır.

1)  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında **sürekli**,  $f_{xy}(x_0, y_0)$  ve  $f_{yx}(x_0, y_0)$  kısmi türevleri **var** fakat  $f_{xy}(x_0, y_0) \neq f_{yx}(x_0, y_0)$  **olabilir**. Gerçekten aşağıda yazılı ve çizili olan kapalı

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}$$

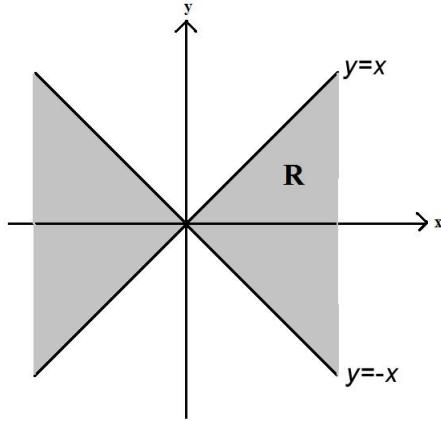
bölgesi tanımlansın. O halde  $\mathbb{R}^2 - R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$  olur. Üstelik

$$i)(x, y) \in R, \quad ii)(-x, y) \in R, \quad iii)(x, -y) \in R, \quad iv)(-x, -y) \in R$$

iddiaları ikişer ikişer eşdeğerdir, örneğin  $(x, y) \in R$  ise  $|y| \leq |x| = |-x|$  yani  $|y| \leq |-x|$  bularak  $(-x, y) \in R$  elde edilir, tersine  $(-x, y) \in R$  ise  $|y| \leq |-x| = |x|$  bularak  $(x, y) \in R$  gözlenir, kısacası  $i$  ve  $ii$  koşulları eşdeğerdir. Oysa  $(1, \frac{1}{2}) \in R$  olduğundan kolayca  $(1, -\frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$  ve  $(-1, -\frac{1}{2}) \in R$  olduğu anlaşılmır, kısacası her iki bileşeni de non-negatif olup  $R$  bölgesine ait olan tüm  $(x, y)$  noktalarını belirlersek tüm  $R$  bölgesini aşağıdaki gibi bulmuş oluruz:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & ; \quad (x, y) \in R \text{ ise} \\ -xy & ; \quad (x, y) \notin R \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan  $f$  fonksiyonu göz önüne alınınsın. Dikkat edilirse, her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için ya  $f(x, y) = xy$  ya da  $f(x, y) = -xy$  olduğundan, sonuçta **her**  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$  ve özellikle



$f(0,0) = 0$  ve ayrıca  $|f(x,y)| = |x| \cdot |y|$  bularak,  $0 < \varepsilon$  verildiğinde  $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$  seçerek, herbir  $(x,y) \in K_{\delta_\varepsilon}(0,0)$  için, hem  $|x| < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$  hem de  $|y| < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$  olacağından  $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = |x| \cdot |y| < \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$  yani  $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon (\forall (x,y) \in K_{\delta_\varepsilon}(0,0))$  bularak  $f$  fonksiyonunun  $(0,0)$  noktasında **sürekli** olduğu anlaşılmır. Üstelik,  $f$  fonksiyonunun

$$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0) \text{ ve } f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$$

gerçeklediğini gözlemek güç değildir, çünkü örneğin

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Buna karşılık, herbir  $y \neq 0$  için  $0 < |y|$  ve

$$f_x(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-hy}{h} = -y$$

bulunur, çünkü  $h \rightarrow 0$  nedeniyle  $h \in (-|y|, |y|)$  ve sonuçta  $-|y| < h < |y|$  yani  $|h| < |y|$  olduğundan  $(h,y) \notin R$  ve böylece  $f(h,y) = -hy$  geçerlidir. Demek ki, tüm bu bulunanlardan  $f_x(0,y) = -y (\forall y \in \mathbb{R})$  elde edilir(neden?) böylece  $f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,0+k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k}{k} = -1$  olur. Okuyucu kolayca  $f_y(x,0) = x (\forall x \in \mathbb{R})$  ve  $f_{yx}(0,0) = 1$  gözleyerek. İstenilen karşıt örnek verilmiş olur.

2)  $f_x(x_0, y_0)$  ve  $f_y(x_0, y_0)$  kısmi türevleri var(tanımlı) olduğu halde  $f = f(x,y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında **süreksiz olabilir**. Gerçekten

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

fonksiyonu  $(0, 0)$  noktasında süreksizdir, çünkü  $f(\varepsilon_n, \varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^2} = \frac{1}{2}$  buna karşılık  $f(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) = \frac{2\varepsilon_n^2}{5\varepsilon_n^2} = \frac{2}{5}$  sonucu her  $\varepsilon_n \downarrow 0^+$  dizisi için geçerli, böylece  $(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  ve  $(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  olmasına karşın  $f(\varepsilon_n, \varepsilon_n)$  ve  $f(\varepsilon_n, 2\varepsilon_n)$  gerçek sayı dizilleri, aynı bir  $\ell$  limitine **yakınsayamamaktadır**. Oysa hem  $f_x(0, 0) = 0$  hem de  $f_y(0, 0) = 0$  geçerlidir, örneğin  $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$  olur.

Ayrıca şuna dikkat edilebilir.  $\forall \delta > 0, \exists (x_\delta, y_\delta) \in K_\delta(0, 0), \frac{1}{5} < |f(x_\delta, y_\delta) - f(0, 0)|$  çünkü  $0 < \sqrt{\frac{2}{5}}\delta < x_\delta < \delta$  ve  $0 < \sqrt{\frac{2}{5}}\delta < y_\delta < \delta$  seçilirse  $(x_\delta, y_\delta) \neq (0, 0)$  ve  $f(x_\delta, y_\delta) = \frac{x_\delta y_\delta}{x_\delta^2 + y_\delta^2} > \frac{x_\delta y_\delta}{2\delta^2} > \frac{1}{5}$  olur.

**Dikkat:** Aşağıda,  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonları, eğer  $(x_0, y_0)$  noktasında **sürekliyseler**,  $f$  fonksiyonunun  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olacağı gerçeği kanıtlanacaktır.

3)  $f, f_x, f_y$  fonksiyonları  $(x_0, y_0)$  noktasında **sürekli** ve  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$  ikinci mertebe kısmi türevleri **heryerde tanımlı olduğu** halde  $f_{xy}(x_0, y_0) \neq f_{yx}(x_0, y_0)$  **olabilir**. Gerçekten

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ ise} \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa  $f, f_x, f_y$  fonksiyonlarının üçü de  $(0, 0)$  noktasında sürekli dir. Gerçekten  $(0, 0) \neq (x, y)$  ise

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| = |xy| \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| = |x||y|$$

ve böylece  $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x||y| < \varepsilon (\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(0, 0))$  bulunur, burada  $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$  alınmıştır. Dikkat edilirse  $(x, y) \neq (0, 0)$  ise  $A_0 = \{(0, 0)\}$  tek noktalı kapalı kümesi için  $(x, y) \notin A_0$  gerçekleşir, böylece  $\exists \delta > 0, K_\delta(x, y) \cap A_0 = \emptyset$  yani  $(0, 0) \notin K_\delta(x, y)$  olur, kısacası  $f$  fonksiyonu  $K_\delta(x, y)$  açık komşuluğunda  $\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  rasyonel polinomuna eşit olduğundan **Uyarılar 3'deki 0)** Uyarısı geregi

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{(x^2 + y^2)2x - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = y \cdot \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

bulunur. Ayrıca  $x$  ve  $y$  gerçek sayıları 0 isterse sıfırdan farklı olsunlar.  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$  ve böylece  $h \neq 0$  için  $\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{f(h, 0)}{h} = 0$  nedeniyle  $f_x(0, 0) = 0$  ve benzer biçiminde  $f_y(0, 0) = 0$  bulunur. Ayrıca  $y \neq 0$  ise  $f_x(0, y) = y \cdot \frac{-y^4}{(y^2)^2} = -y$  ve  $f_{xy}(0, 0) = -1$  bulunur. Dikkat

edilirse  $|x^4 + 4x^2 - y^4| \leq x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \leq 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 = 2(x^2 + y^2)^2$  nedeniyle  $(x, y) \neq (0, 0)$  ise

$$|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| = |f_x(x, y)| = |y| \left| \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq |y| \frac{2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|$$

bulunur, dolayısıyla  $|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| \leq 2|y| < \varepsilon$  ( $\forall (x, y) \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0, 0)$ ) bulup  $f_x$  kısmi türev fonksiyonunun  $(0, 0)$  noktasında **sürekli** olduğu anlaşılır. Yine  $(x, y) \neq (0, 0)$  ise  $f_y(x, y) = x \cdot \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$  bulup  $f_y$  fonksiyonunun da  $(0, 0)$  noktasında **sürekli** olduğu anlaşılır. Siz ister  $(x, y) = (0, 0)$  olsun, ister  $(x, y) \neq (0, 0)$  olsun.  $f_{xy}(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$  ve  $f_{yy}(x, y)$  kısmi türevlerinin **tanımlı** ve üstelik

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(-k)}{k} = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$$

olduğunu, örneğin  $(x, y) \neq (0, 0)$  ise  $f_x(x, y) = y \cdot \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$  ve böylece

$$f_{xy}(x, y) = \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2y^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{x^6 - y^6 + 9x^2y^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

gerçeklendiğini gözleyiniz. İstenilen karşıt örnek bulunmuş olur.

4) Yukarda ilk uyarida tanımlanan aşağıdaki fonksiyon

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & ; (x, y) \in R \\ -xy & ; (x, y) \notin R \end{cases}$$

göz önüne alındığında bu fonksiyon için  $R$  bölgesinin  $(0, 0)$  noktasından farklı hiçbir sınır noktasıında  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türevleri TANIMLI DEĞİLDİR. Sözgelimi  $0 < x_0$  sabit pozitif gerçek sayısı ne olursa olsun.  $f_x(x_0, x_0)$  ve  $f_y(x_0, x_0)$  TANIMSIZDIR! Gerçekten  $h < 0$  iken, aşağıdaki limit

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h, x_0) - f(x_0, x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(x_0 + h)x_0 - x_0^2}{h} = -x_0 - 2x_0^2 \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} = +\infty$$

olmaktadır, çünkü  $h \rightarrow 0^-$  iken  $|h| \rightarrow 0$  nedeniyle  $0 < |h| (= -h) < x_0$  olur, böylece  $0 < x_0 + h < x_0$  gözleyip  $(x_0 + h, x_0) \notin R$  nedeniyle  $f$  fonksiyonunun tanımı gereği  $f(x_0 + h, x_0) = -(x_0 + h)x_0 = -x_0^2 - hx_0$  olmaktadır, yukarıdaki limit bulunur! Dolayısıyla  $f_x$  için AŞAĞIDAKİ YAZIŞ KESİNLİKLE YANLIŞTIR:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y & ; (x, y) \in R \\ -y & ; (x, y) \notin R \end{cases}$$

Benzer biçimde  $f_y(x_0, x_0)$  tanımsızdır. (neden?). Oysa

$$\partial R = \{(x, y) : x = y\} \cup \{(x, y) : x = -y\} (\subseteq R)$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

sınır bölgesini **çıkaracak olursak**, o zaman Uyarı 0)'dan da yararlanarak ve  $R - \partial R = i\tilde{A} \setminus R$  kümesi daima açık olduğundan

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y & ; (x, y) \in R - \partial R \\ -y & ; (x, y) \notin R \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} x & ; (x, y) \in R - \partial R \\ -x & ; (x, y) \notin R \end{cases}$$

gerçekleştigiğini gözlemek güç değildir (nasıl?).

**Teorem1:**  $f_{xy}$  fonksiyonu  $K_\varepsilon(x_0, y_0)$  komşuluğunda sürekli ve  $H(x) = f_y(x, y_0)$  fonksiyonu uygun bir  $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon)$  aralığında tanımlıysa,  $f_{yx}(x_0, y_0)$  var ve üstelik  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  olur.

### Kanıtlama Öncesi Bilgiler:

Bilindiği gibi ünlü Ortalama Değer Teoremi nedeniyle, bir  $F = F(x)$  fonksiyonu bir  $(a, b)$  aralığında eğer türetilebilirse  $a < x_0 < x_1 < b$  gerçekleyen  $x_0, x_1$  gerçek sayıları ne olursa olsun

$$F(x_1) - F(x_0) = (x_1 - x_0).F'(\xi)$$

gerçeklenecek biçimde en az bir  $\xi \in (x_0, x_1)$  vardır, dolayısıyla  $x \in (a, b)$  ve  $a < x < x + h < b$  gerçekleyen  $0 < h$  ya da  $a < x + h < x < b$  gerçekleyen  $h < 0$  ne olursa olsun.  $F(x + h) - F(x) = h.F'(\xi_h)$  gerçekleyip  $x$  ile  $x + h$  arasında yer alan en az bir  $\xi_h$  vardır. Benzer biçimde  $G = G(x, y)$  fonksiyonunun, uygun bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $G_y$  kısmi türev fonksiyonu tanımlıysa  $F(y) = G(x_0, y)$  fonksiyonu için  $G(x_0, y_0 + k) - G(x_0, y_0) = F(y_0 + k) - F(y_0) = kF'(\eta_k) = k.G_y(x_0, \eta_k)$  yani  $G(x_0, y_0 + k) - G(x_0, y_0) = k.G_y(x_0, \eta_k)$  olacak biçimde ve  $0 < k$  ise  $y_0 < \eta_k < y_0 + k < y_0 + \varepsilon_0$  ve  $k < 0$  ise  $y_0 - \varepsilon_0 < y_0 + k < \eta_k < y_0$  gerçekleyen bir  $\eta_k$  gerçek sayısı vardır, burada  $F'(\eta_k) = G_y(x_0, \eta_k)$  yazarken Önerme 4'ün kullanıldığına dikkat ediniz. Benzer şeyler  $G_x$  kısmi türevi varsa (tanımlıysa) geçerlidir.

**Kanıtlama:** Gerçek değerli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda sürekli ise, herseyden önce bu  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  kare komşuluğunda tanımlı olması gereklidir. Dolayısıyla teoremin ifadesindeki  $f = f(x, y)$  için, varsayılm gereği uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f_{xy}$  ve sonuçta  $f_x$  ve  $f$  fonksiyonları tanımlıdır, yani  $(x_1, y_1) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  ne olursa olsun  $f_{xy}(x_1, y_1), f_x(x_1, y_1)$  ve  $f(x_1, y_1)$  gerçek sayıları tanımlıdır. Ayrıca yine varsayılm gereği  $H(x) = f_y(x, y_0)$  fonksiyonu da bir  $I_0 = (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$  aralığında tanımlıdır ve genelligi bozmaksızın  $\varepsilon_0 = \delta_0$  alabiliriz, çünkü aksi durumda yeni bir  $0 < \delta_1 < \delta \wedge \varepsilon_0$  seçip  $K_{\delta_1}(x_0, y_0)$  ve  $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$  komşuluklarında çalışırdık. Şimdi, aşağıdaki

$$g(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \quad (\forall x \in I_0, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

fonksiyonu tanımlansın. Dikkat:  $x \in I_0$  ve  $k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  ise  $|x - x_0| < \varepsilon_0$  ve  $|(y_0 + k) - y_0| = |k| < \varepsilon_0$

---

nedeniyle  $(x, y_0), (x, y_0 + k) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  olduğunu gözleyiniz. Önerme 4 kullanılarak

$$g'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0) \quad (\forall x \in I_0, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

bulunur, kısacası  $g$  fonksiyonu  $I_0$  açık aralığında türetilebilir olduğundan,  $h \neq 0$  ve  $h \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  için  $g(x_0 + h) - g(x_0) = h.g'(\xi_h)$  olacak biçimde  $x_0$  ile  $x_0 + h$  arasında bir  $\xi_h$  gerçek sayısı vardır. (dikkat:  $h = 0$  için  $\xi_0 = x_0$  alarak  $g(x_0 + h) - g(x_0) = h.g'(\xi_h)$  eşitliğinin **her**  $h \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  için geçerli olduğu anlaşılır.) Sonuçta

$$\begin{aligned} h(f_x(\xi_h, y_0 + k) - f_x(\xi_h, y_0)) &= h.g'(\xi_h) = g(x_0 + h) - g(x_0) \\ &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

ve ayrıca kanıtlama öncesi gözlendiği gibi,  $y_0$  ile  $y_0 + k$  arasında yer alan uygun bir  $\eta_k$  sayesinde ve  $\varphi(y) = f_x(\xi_h, y)$  fonksiyonu  $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0)$  aralığında türetilebilir olduğundan

$$f_x(\xi_h, y_0 + k) - f_x(\xi_h, y_0) = k.f_{xy}(\xi_h, \eta_k)$$

bulunacağından, tüm bunlardan şunlar elde edilir:  $k \neq 0$  için

$$\begin{aligned} hk.f_{xy}(\xi_h, \eta_k) &= h(f_x(\xi_h, y_0 + k) - f_x(\xi_h, y_0)) \\ &= (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)) - (f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)), \\ h.f_{xy}(\xi_h, \eta_k) &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \end{aligned}$$

Dikkat edilirse  $h \rightarrow 0$  için  $\xi_h \rightarrow x_0$  ve  $k \rightarrow 0$  için  $\eta_k \rightarrow y_0$  olur(neden?)  $f_{xy}$  fonksiyonu sürekli, dolayısıyla  $\lim_{k \rightarrow 0} f_{xy}(\xi_h, \eta_k) = f_{xy}(\xi_h, y_0)$  ve benzer biçimde  $\lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\xi_h, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$  olduğu ve ayrıca  $H(x) = f_y(x, y_0)$  biçiminde tanımlanan  $H$  fonksiyonu herbir  $x \in I_0$  için tanımlı, özellikle  $f_y(x_0 + h, y_0)$  ve  $f_y(x_0, y_0)$  tanımlı olduğundan,  $h \neq 0$  gerçekleyen her  $h \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  için son bulunan eşitlik ile

$$\begin{aligned} h.f_{xy}(\xi_h, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} (h.f_{xy}(\xi_h, \eta_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \\ &= f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

ve sonuçta

$$f_{xy}(\xi_h, y_0) = \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} \quad (h \neq 0, h \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

bulunur, üstelik sol tarafın  $h \rightarrow 0$  için limiti var (tanımlı) olduğundan sağ tarafın da var olmalıdır, böylece istenen elde edilir:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(\xi_h, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}(x_0, y_0).$$

**Uyarı:** Kolayca öngörlülebileceği ve benzer biçimde kanıtlanacağı gibi eğer  $f_{yx}$  fonksiyonu  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda sürekli ve  $g(y) = f_x(x_0, y)$  fonksiyonu uygun bir  $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0)$  aralığında tanımlıysa  $f_{xy}(x_0, y_0)$  vardır ve  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  geçerlidir.

**Önerme5:** i) Açık bir  $R$  bölgesinde tanımlı gerçel değerli  $f = f(x, y)$  için eğer  $f_{xy}$  fonksiyonu sürekli,  $f_y$  fonksiyonu tanımlıysa,  $R$  bölgesinde  $f_{xy} = f_{yx}$  kısacası  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  ( $\forall(x, y) \in R$ ) olur. ii) Açık bir  $R$  bölgeinde, hem  $f_{xy}$  hem de  $f_{yx}$  sürekliysse  $f_{xy} = f_{yx}$  olur.

**Kanıtlama:** i) Verilen hipotezler altında, her  $(x_0, y_0) \in R$  noktasının  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \subseteq R$  gerçekleştiren bir komşuluğu var ve bu komşulukta  $f_{xy}$  fonksiyonu sürekli ve  $f_y$  fonksiyonu tanımlı ve özellikle  $h(x) = f_y(x, y_0)$  biçiminde tanımlanan  $h$  fonksiyonu  $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$  aralığında tanımlı olacağını, Teorem1 uygulanarak  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  bulunur, bu sonuç herbir  $(x_0, y_0) \in R$  için geçerli olduğundan sonuçta  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  ( $\forall(x, y) \in R$ ) bulunmuş olur.

ii) Bu iddianın i) şıkkından kolayca elde edileceğini gözleyiniz, çünkü  $f_{yx}$  fonksiyonu  $R$  bölgesinde sürekliysse, apaçık biçimde  $f_y$  fonksiyonu  $R$  içinde tanımlı olacaktır.

Şimdi artık, **türetilebilme** kavramı ve ünlü **zincir kuralı** ile ilgilenebiliriz:

**Tanım8:**  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda tanımlı gerçel değerli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonunu, ancak ve yalnız, her  $h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  için, aşağıdaki yazılış gerçeklenecek biçimde  $t_1, t_2$  sabitleri ile  $(0, 0)$  noktasında sürekli olup  $\varphi(0, 0) = \Psi(0, 0) = 0$  koşullarını gerçekleyen gerçel değerli  $\varphi = \varphi(h, k)$  ve  $\Psi = \Psi(h, k)$  fonksiyonları tanımlanabilirse (varsayı,  $(x_0, y_0)$  **noktasında türetilebilir** denir:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = t_1.h + t_2.k + h.\varphi(h, k) + k.\Psi(h, k) \quad (\forall h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)) \quad (*)$$

**Uyarı:** İyi bilindiği gibi, tek gerçel değişkenli ve gerçel değerli bir  $g = g(x)$  fonksiyonu, türetilebildiği her noktada sürekli olmaktadır. Bu gerçek, iki ve daha çok değişkenli gerçel değerli fonksiyonlar için de geçerlidir. Bazı yazarlar, iki (ve daha çok) değişkenli fonksiyonlarda, yukarıdaki Tanım'da verilen koşulu gerçekleyen fonksiyona **tümel türetilebilir** (total diferansiyellenebilir) demektedirler, çünkü  $(x_0, y_0)$  noktasında bu koşulu gerçekleyen  $f$  fonksiyonunun aşağıda gösterileceği gibi, tüm değişkenlerine göre  $(x_0, y_0)$  noktasında kısmi türevlere sahip olmasından daha güçlü bir koşul gerçeklemış olur.

**Önerme 6:** i)  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında türetilebiliyorsa, tanımdaki  $t_1$  ve  $t_2$  sabitleri tek türlü biçimde belirlenir ve  $t_1 = f_x(x_0, y_0), t_2 = f_y(x_0, y_0)$  olur.

ii)  $f = f(x, y)$  fonksiyonu türetilebildiği her noktada sürekliidir.

*iii)* Eğer  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonları uygun bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda tanımlı ve sürekli iseler  $f$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında **türetilebilirdir**.

*iv)* Açık bir  $R = (a, b) \times (c, d)$  bölgesinde sürekli kısmı türevlere sahip bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu,  $R$  bölgesinde türetilebilirdir dolayısıyla süreklidir.

**Kanıtlama:** *i)* Türetilebilme tanımındaki (\*) bağıntısı, özellikle  $k = 0$  ve  $h \neq 0$  gerçekleyen  $h \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  için yapılırsa

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = t_1 + \varphi(h, 0) \quad (\forall h \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0))$$

bulunucağından,  $h \rightarrow 0$  için limit alarak ve sağ yanın,  $\varphi$  fonksiyonunun  $(0, 0)$  noktasında sürekli oluşu ve  $(h, 0) \rightarrow (0, 0)$  gözleyerek  $\varphi(h, 0) \rightarrow \varphi(0, 0) = 0$  gerçekleşmesi nedeniyle,  $h \rightarrow 0$  için limiti var olduğundan, kolayca

$$t_1 = t_1 + 0 = \lim_{h \rightarrow 0} (t_1 + \varphi(h, 0)) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

ve tümüyle benzer biçimde  $t_2 = f_y(x_0, y_0)$  sonuçları bulunur.

*ii)*  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında türetilebilirse, Tanım8'deki koşulları yerine getirip  $(0, 0)$  noktasında sürekli ve  $\varphi(0, 0) = \Psi(0, 0) = 0$  gerçekleyen  $\varphi$  ve  $\Psi$  fonksiyonları tanımlıdır, böylece  $\varepsilon_0 > 0$  sayısına karşılık  $|\varphi(h, k)| = |\varphi(h, k) - \varphi(0, 0)| < \varepsilon_0$  ve  $|\Psi(h, k)| = |\Psi(h, k) - \Psi(0, 0)| < \varepsilon_0$   $(\forall (h, k) \in K_{\delta_0}(0, 0))$  olacak biçimde  $\delta_0 > 0$  vardır, sonuçta (\*) bağıntısı kullanılrsa

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| &= |t_1 h + t_2 k + h\varphi(h, k) + k\Psi(h, k)| \\ &\leq |t_1||h| + |t_2||k| + |h|\varepsilon_0 + |k|\varepsilon_0 = |h|(|t_1| + \varepsilon_0) + |k|(|t_2| + \varepsilon_0) \\ &\leq (|h| + |k|)(|t_1| + |t_2| + \varepsilon_0) \quad (\forall (h, k) \in K_{\delta_0}(0, 0)) \end{aligned}$$

olur, böylelikle  $\varepsilon > 0$  verildiğinde,  $0 < \delta_\varepsilon < \delta_0 \wedge \frac{\varepsilon}{2|t_1| + |t_2| + \varepsilon_0}$  gerçekleyen pozitif  $\delta_\varepsilon$  belirlenirse, herbir  $(h, k) \in K_{\delta_\varepsilon}(0, 0)$  için  $|h| < \delta_\varepsilon$  ve  $|k| < \delta_\varepsilon$  olur, böylelikle  $|h| + |k| < 2\delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{|t_1| + |t_2| + \varepsilon_0}$  ve sonuçta

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| \leq (|h| + |k|)(|t_1| + |t_2| + \varepsilon_0) < \varepsilon$$

bulunur, oysa herbir  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  için  $x = x_0 + h_x$  ve  $y = y_0 + k_y$  olacak biçimde bir  $h_x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$  ve  $k_y \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$  kısacası  $(h_x, k_y) \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \times (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) = K_{\delta_\varepsilon}(0, 0)$  var olduğundan (dikkat:  $(x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0)$  ise örneğin  $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$  yani  $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$  ve  $-\delta_\varepsilon < x - x_0 = h_x < \delta_\varepsilon$  yani hem  $x = x_0 + h_x$  hem de  $h_x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$  gereklendığıni gözleyiniz), biraz önceki sonuç kullanılarak

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x_0 + h_x, y_0 + k_y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_\varepsilon}(x_0, y_0))$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

bulunur, bu sonuç  $f$  fonksiyonunun  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olması demektir.

*iii)*  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonlarının her ikisi de  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olsun. O halde bu kısmi türev fonksiyonları, herseyden önce uygun bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşulunda var(tanımlıdırlar) yani herbir  $(x_1, y_1) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  için  $f_x(x_1, y_1)$  ve  $f_y(x_1, y_1)$  iyi tanımlıdır. O halde  $h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  ne olursa olsun, Teorem 1'in kanıtlanmasıdan önce gözlendiği gibi,  $h \neq 0$  ise  $x_0$  ile  $x_0 + h$  arasında yer alan uygun bir  $\xi_h$  için

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = h \cdot f_x(\xi_h, y_0 + k)$$

gerçekleşir ve  $h = 0$  için  $\xi_h = \xi_0 = x_0$  alınırsa, bu özel durumda da yukarıdaki eşitliğin geçerli, çünkü her iki yanın 0 olduğu gözlenir. O halde  $\varphi = \varphi(h, k)$  gerçek değerli fonksiyonu eğer

$$\varphi(h, k) = f_x(\xi_h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0) \quad (\forall h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

biçiminde tanımlanırsa, kolayca  $f_x(\xi_h, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + \varphi(h, k)$  ve

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0 + k) + h \cdot f(\xi_h, y_0 + k) \\ &= f(x_0, y_0 + k) + h \cdot f_x(x_0, y_0) + h \cdot \varphi(h, k) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde  $k \neq 0$  için  $y_0$  ile  $y_0 + k$  arasında yer alan bir  $\eta_k$  gerçek sayısı (dikkat:  $k = 0$  için  $\eta_0 = y_0$  alınız) aracılığıyla

$$f(x_0, y_0 + k) = \left( f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \right) + f(x_0, y_0) = k \cdot f_y(x_0, \eta_k) + f(x_0, y_0)$$

olur ve bu kez  $\Psi = \Psi(h, k)$  fonksiyonu

$$\Psi(h, k) = f_y(x_0, \eta_k) - f_y(x_0, y_0) \quad (\forall h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

biçiminde tanımlanırsa  $f_y(x_0, \eta_k) = f_y(x_0, y_0) + \Psi(h, k)$  gözleyerek

$$f(x_0, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0) + k \cdot \Psi(h, k)$$

ve böylece

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \stackrel{1}{=} h \cdot f_x(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0) + h \cdot \varphi(h, k) + k \cdot \Psi(h, k)$$

bulunur, üstelik  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  için hem  $h \rightarrow 0$  nedeniyle  $x_0 + h \rightarrow x_0$  ve hem de  $k \rightarrow 0$  nedeniyle  $y_0 + k \rightarrow y_0$  olduğundan,  $\xi_h$  ve  $\eta_k$  gerçek sayılarının tanımları gereği  $\xi_h \rightarrow x_0$  ve  $\eta_k \rightarrow y_0$  olur, üstelik

---

$f_x$  ve  $f_y$  fonksiyonları  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli ve  $(x_0, \eta_k) \rightarrow (x_0, y_0)$  ve  $(\xi_h, y_0 + k) \rightarrow (x_0, y_0)$  nedeniyle  $f_x(\xi_h, y_0 + k) \rightarrow f_x(x_0, y_0)$  ve  $f_y(x_0, \eta_k) \rightarrow f_y(x_0, y_0)$  gözlenmelidir, ayrıca

$$\varphi(0, 0) = f_x(\xi_0, y_0 + 0) - f_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) = 0$$

ve benzer biçimde  $\Psi(0, 0) = 0$  bulunacağından, sonuçta

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varphi(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f_x(\xi_h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)] = 0 = \varphi(0, 0)$$

ve benzer biçimde  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Psi(h, k) = 0 = \Psi(0, 0)$  bularak  $\varphi$  ve  $\Psi$  fonksiyonlarının  $(0, 0)$  noktasında sürekli oldukları anlaşılmır. Bu gözlemler ve yukarıdaki (1) bağıntısı nedeniyle  $f$  fonksiyonunun  $(x_0, y_0)$  noktasında türetilebilir olmasına ilişkin koşulu gerçeklediği, kısacası bu noktada türetilebilir olduğu anlaşılmır.

iv) Bu sık, bir önceki şıktan kolayca (nasıl?) elde edilir.

### Teorem2 (Zincir Kurallı)

$f = f(x, y)$  fonksiyonu  $(x_0, y_0)$  noktasında **türetilebilir** ve  $t$  gerçel değişkeninin fonksiyonları olan  $x = u(t)$  ve  $y = v(t)$  ise  $u(t_0) = x_0$  ve  $v(t_0) = y_0$  gerçekleyip  $t_0$  noktasında **türetilebilir** iseler

$$g(t) = f(u(t), v(t)) \quad (\forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0))$$

birimde tanımlanan fonksiyon  $t_0$  noktasında türetilebilirdir ve aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$g'(t_0) = f_x(x_0, y_0).u'(t_0) + f_y(x_0, y_0).v'(t_0).$$

**Kanıtlama:**  $f$  fonksiyonunun  $(x_0, y_0)$  noktasında türetilebilir olması varsayımlı nedeniyle ve Önerme6'da belirlenen  $t_i$  sabitlerini yazarak

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + h \cdot \varphi(h, k) + k \cdot \Psi(h, k) \quad (\forall h, k \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

geçerlidir. Üstelik  $x = u(t)$  ve  $y = v(t)$  fonksiyonları  $t_0$  gerçel sayısında türetilebilir ve sonuçta sürekli olduklarıdan

$$h(\ell) = u(t_0 + \ell) - u(t_0) \quad , \quad k(\ell) = v(t_0 + \ell) - v(t_0)$$

tanımlayıp, süreklilik nedeniyle  $|\ell| < \delta_0$  için  $|h(\ell)| = |u(t_0 + \ell) - u(t_0)| < \varepsilon_0$  ve benzer biçimde  $|k(\ell)| < \varepsilon_0$  ve ayrıca  $u(t_0 + \ell) = u(t_0) + h(\ell) = x_0 + h(\ell)$  ve  $v(t_0 + \ell) = v(t_0) + k(\ell) = y_0 + k(\ell)$  gözleyip, sonuçta yukarıdaki eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned} g(t_0 + \ell) - g(t_0) &= f(u(t_0 + \ell), v(t_0 + \ell)) - f(u(t_0), v(t_0)) \\ &= f(x_0 + h(\ell), y_0 + k(\ell)) - f(x_0, y_0) \\ &= h(\ell) \left( f_x(x_0, y_0) + \varphi(h(\ell), k(\ell)) \right) + k(\ell) \left( f_y(x_0, y_0) + \Psi(h(\ell), k(\ell)) \right) \end{aligned}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

ve böylelikle

$$\begin{aligned} \frac{g(t_0 + \ell) - g(t_0)}{\ell} &= (f_x(x_0, y_0) + \varphi(h(\ell), k(\ell))). \frac{u(t_0 + \ell) - u(t_0)}{\ell} \\ &\quad + (f_y(x_0, y_0) + \Psi(h(\ell), k(\ell))). \frac{v(t_0 + \ell) - v(t_0)}{\ell} \end{aligned}$$

bulunur. Oysa  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarının  $t_0$  noktasındaki süreklilikleri nedeniyle  $\ell \rightarrow 0$  için  $h(\ell) \rightarrow 0$  ve  $k(\ell) \rightarrow 0$  yani  $(h(\ell), k(\ell)) \rightarrow (0, 0)$  olduğundan ve ayrıca  $\varphi$  ve  $\Psi$  fonksiyonlarının  $(0, 0)$  noktasındaki süreklilikleri nedeniyle  $\lim_{\ell \rightarrow 0} \varphi(h(\ell), k(\ell)) = \varphi(0, 0) = 0$  ve  $\lim_{\ell \rightarrow 0} \Psi(h(\ell), k(\ell)) = \Psi(0, 0) = 0$  gerçekleştiğinden sonuçta aşağıdaki istenen eşitlikler bulunur:

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + \ell) - g(t_0)}{\ell} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow 0} (f_x(x_0, y_0) + \varphi(h(\ell), k(\ell))). \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \ell) - u(t_0)}{\ell} \\ &\quad + \lim_{\ell \rightarrow 0} (f_y(x_0, y_0) + \Psi(h(\ell), k(\ell))). \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \ell) - v(t_0)}{\ell} \\ &= f_x(x_0, y_0).u'(t_0) + f_y(x_0, y_0).v'(t_0) . \end{aligned}$$

**Uyarılar:** Yukardaki teorem, aynı bir  $t$  gerçek değişkeni tarafından belirlenen  $x = u(t)$  ve  $y = v(t)$  için, eğer  $f$  fonksiyonu  $(x, y)$  noktasında türetilebilirse, ayrıca  $u$  ve  $v$  fonksiyonları türetilebilirse  $g(t) = f(u(t), v(t))$  biçiminde tanımlanan  $g$  fonksiyonunun bu  $t$  gerçek sayısında türetilebilir olduğunu ve bu  $t$  için

$$g'(t) = f_x(x, y).u'(t) + f_y(x, y).v'(t) = f_x.x'(t) + f_y.y'(t)$$

zincir kuralının gerçeklendiğini kanıtlanmış olmaktadır. Dikkat edilmesi gereken şudur:  $f$  ve  $g$  aslında **farklı fonksiyonlardır**, herşeyden önce  $f$  fonksiyonu düzlemede bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde,  $g$  ise  $t$  gerçek sayısının alındığı bir  $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$  aralığında tanımlıdır, kısacası **tanım kümeleri farklıdır** ve iyi bilindiği gibi iki fonksiyonun eşit olabilmesi için, herşeyden önce tanım kümelerinin aynı olması gerekli ve sonra bu tanım kümelerindeki her noktada eşit değerler almaları gereklidir; ayrıca  $u$  ve  $v$  türetilebilir, dolayısıyla sürekli iseler, bu fonksiyonlar altında  $u((t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)) = I_0$  ve  $v((t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)) = J_0$  aralıkları belirlenir(dikkat: bunların birer açık aralık olmaları **gerekmez**, örneğin  $u(t) = \sin(t)$  biçiminde tanımlanan türetilebilir  $u$  fonksiyonu altında  $(0, \pi)$  açık aralığının görüntüsü olan  $u((0, \pi)) = (0, 1]$  aralığı bir açık aralık **değildir**) ve  $I_0 \times J_0 \subseteq R$  gerçeklendiği varsayılmaktadır; üstelik  $t_1 \neq t'_1$  gerçekleyen  $t_1, t'_1 \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$  için,  $f$  fonksiyonu,  $x_1 = u(t_1)$  ile  $y_1 = v(t'_1)$  gerçek sayılarının oluşturduğu  $(x_1, y_1) \in R$  noktasında **tanımlı** olmasına karşın, gerek  $g(t_1) = f(x_1, y_1)$  gerekse  $g(t'_1) = f(x_1, y_1)$  gerçeklenmesi **GEREKMEMEKTEDİR**, sözelimi  $v$  fonksiyonu

---

bire-bir ise  $y_1 = v(t'_1) \neq v(t_1)$  ve sonuçta  $(x_1, y_1) \neq (x_1, v(t_1))$  olur ve  $f$  fonksiyonu da bire-birse  $g(t_1) = f(u(t_1), v(t_1)) = f(x_1, v(t_1))$  ile  $f(x_1, y_1)$  gerçek sayıları **farklıdır**. Anımsanacak olursa, Matematikte aynı bir  $X$  kümesinde tanımlanmış  $F, G : X \rightarrow Y$  fonksiyonları aracılığıyla  $(F \Delta G)(x) = (F(x), G(x)) \in Y \times Y (\forall x \in X)$  biçiminde tanımlanan  $F \Delta G : X \rightarrow Y \times Y$  fonksiyonuna,  $F$  ile  $G$  fonksiyonlarının **köşegen fonksiyonu** denilir ve yukarıdaki teoremden tanımlanan tüm fonksiyonlarının, o işaretti fonksiyon bileşkesi olmak üzere

$$g = f \circ (u \Delta v) \text{ yani } g(t) = (f \circ (u \Delta v))(t) = f(u(t), v(t)) \quad (\forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0))$$

gerçeklediği özellikle gözlenmelidir. Başka bir deyimle  $R$  bölgesinin

$$R_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \exists t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0), x = u(t) \text{ ve } y = v(t)\} \subseteq R$$

alt bölgesi göz önüne alınırsa  $R_0 = (u \Delta v)((t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0))$  olur ve  $f$  fonksiyonunun  $R_0$  alt bölgesine kısıtlıñ fonksiyonunda,  $f(R_0)$  görüntü kümesine ait herbir gerçek sayının, uygun bir  $t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$  değişkeni aracılığıyla  $f(u(t), v(t))$  biçimde olduğu anlaşılır, üstelik  $u$  ve  $v$  fonksiyonları  $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$  aralığında ve  $f$  fonksiyonu  $R$  bölgesinde türetilebilir iseler,  $t$  değişkeninin bu fonksiyonunun türetilebilir olduğu ve türev değerinin  $f_x(x(t), y(t)).x'(t) + f_y(x(t), y(t)).y'(t)$  olduğu **anlaşılır**.  $R_0$  kümesi aslında,  $t \mapsto (u(t), v(t))$  eşleştirme aracılığıyla belirlendiği,  $u$  ve  $v$  fonksiyonları türetilebilir dolayısıyla sürekli oldukları için, düzlemede bir EĞRİ'yi gösterir, kısacası  $R_0$  aslında bir **eğridir**. Aşağıdaki iki ünlü düzlem eğrisi örneği verilmektedir. Birincisi

$$x(t) = \cos(2\pi t).(2 \cos(2\pi t) - 1), \quad y(t) = \sin(2\pi t).(2 \cos(2\pi t) - 1) \quad (\forall t \in [0, 1])$$

İkincisi ise ünlü **kardiod eğrisidir**, burada  $a > 0$  bir sabittir

$$x(t) = a \cos(2\pi t).(1 + \cos(2\pi t)), \quad y(t) = a \sin(2\pi t).(1 + \cos(2\pi t)) \quad (\forall t \in [0, 1])$$

Bir başka düzlem eğrisi örneği aşağıda verilmektedir:

İşte  $f$  fonksiyonunun, yukarıda  $R_0$  eğrisini belirleyen  $t$  değişkenine göre türevi  $f'(t) = \frac{df}{dt} = g'(t)$  olarak alınarak(tanımlanarak) Teorem 2 nedeniyle

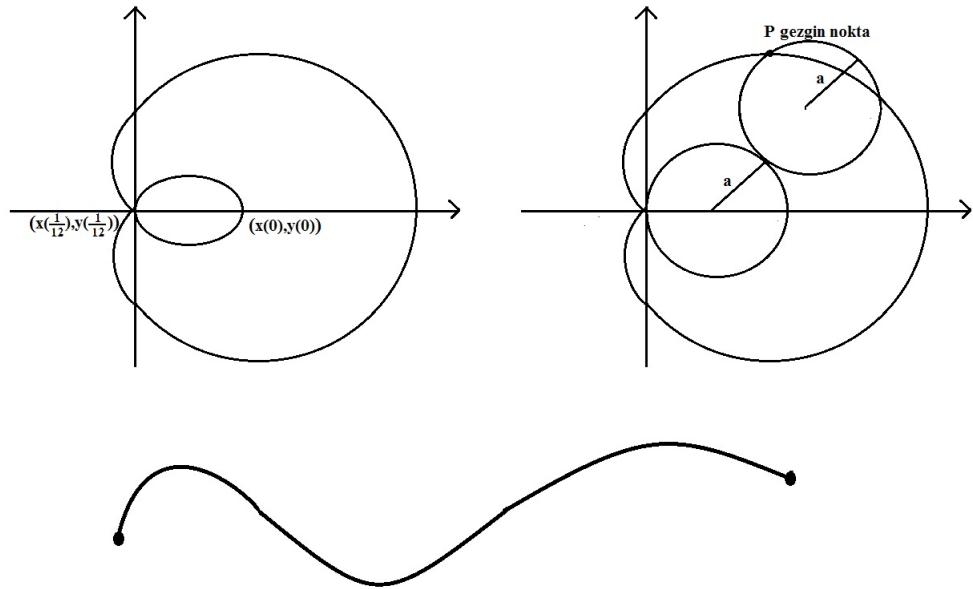
$$f'(t) = f_x(x(t), y(t)).x'(t) + f_y(x(t), y(t)).y'(t) \quad (\forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0))$$

ya da başka bir yazışla

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x(t), y(t))}.x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x(t), y(t))}.y'(t)$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---



ya da kısmi türevlerin, hangi, noktada hesaplanacağını unutmadan daha kısa bir biçimde yazılarak

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t)$$

bağıntısı, böylelikle iyi bilinen ünlü  $df = f'(t)dt$  bilgisi kullanılarak

$$df = f'(t)dt = f_x \cdot x'(t)dt + f_y \cdot y'(t)dt = f_x dx + f_y dy \quad (1)$$

sonucu bulunur. Benzer biçimde, bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^3)$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli bir  $f = f(x, y, z)$  fonksiyonunun bir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  noktasında türetilebilme koşulu, herbir  $h, k, l \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  üçlüsü için

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = ht_1 + kt_2 + lt_3 + h\varphi_1(h, k, l) + k\varphi_2(h, k, l) + l\varphi_3(h, k, l)$$

olacak biçimde  $t_1, t_2, t_3$  sabitleri ile  $\varphi_i(0, 0, 0) = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) koşulunu gerçekleyip  $(0, 0, 0)$  noktasında sürekli olan gerçek değerli  $\varphi_i = \varphi_i(h, k, l)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fonksiyonlarının varlığı biçiminde tanımlanırsa, yukarıdaki Önerme6 ve Teorem2'nin benzer kanıtlamaları ve ardısırı gelen uyarılardaki benzer düşüncelerle,  $t$  değişkeninin  $x = u(t), y = v(t), z = w(t)$  türetilebilir fonksiyonlarından yararlanıp

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (2)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, ilerde göreceğimiz **nabla işlemcisi** yardımıyla kısa ve öz biçimde aşağıdaki gibi yazılar:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

---

Tümüyle benzer biçimde, gerek  $f = f(x, y)$  ve gerekse  $x = \varphi(u, v)$  ile  $y = \Psi(u, v)$  fonksiyonları türetilebiliyorsa  $f = f(\varphi(u, v), \Psi(u, v))$  fonksiyonunun kısmi türevleri için aşağıdaki **zincir kuralı** geçerlidir:

$$f_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \quad , \quad f_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v$$

Bunları görebilmek için, sabit bir  $(u_0, v_0)$  alındığında  $F(u) = f(\varphi(u, v_0), \Psi(u, v_0))$  fonksiyonunu artık yalnızca  $u$  değişkenine bağlı olduğunu gözleyip  $\varphi(u) = \varphi(u, v_0)$  ve  $\Psi(u) = \Psi(u, v_0)$  aracı fonksiyonları aracılığıyla ve Önerme 4 kullanılarak şunlar elde edilir:

$$\begin{aligned} F(u_0) &= f_x(u_0, v_0) \cdot \varphi'(u_0) + f_y(u_0, v_0) \cdot \Psi(u_0) = f_x(u_0, v_0) \cdot \varphi_u(u_0, v_0) + f_y(u_0, v_0) \cdot \Psi_u(u_0, v_0) \\ &= f_x(u_0, v_0) \cdot x_u(u_0, v_0) + f_y(u_0, v_0) \cdot y_u(u_0, v_0) . \end{aligned}$$

Yukardaki sonuçlar,  $f = f(x, y)$  fonksiyonunda  $x$  ve  $y$  bileşenleri bir  $t$  değişkeninin fonksiyonu **olmadıklarında da**, aşağıdaki teoremdede görüleceği gibi, benzer bir sonucu ulaşmamıza yol açar: Demek ki  $f = f(x, y)$  fonksiyonunun, türetilebilir olduğu bir  $P(x, y)$  noktasındaki diferansiyeli  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenleri ne olursa olsun aşağıdakidir (dolayısıyla sayfa(36) daki zincir kuralları da geçerlidir):

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Artık kısmi türevler ve zincir kuralı üstüne örnekler görebiliriz.

### Örnekler 3:

1)  $f(x, y) = x^2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  ise  $f_{yx}(1, 1) = 1$  gösterelim.  $f$  fonksiyonu dikkat edelirse  $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ ) açık kümesinde tanımlıdır. Kısımlı türevler doğrudan alınır.

Gerçekten  $f_y(x, y) = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$  ( $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ ) ve böylelikle  $f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  bularak  $f_{yx}(1, 1) = \frac{4}{4} = 1$  elde edilir. Siz (35) deki **Uyarı'yı** kullanıp  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ ) göstererek  $f_{xy}(1, 1) = 1$  elde ediniz.

1\*)  $\Psi(0, 0, 0) = 0$  ve  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  için  $\Psi(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  biçiminde tanımlanan  $\Psi$  fonksiyonunun

$$\Psi_{xx}(x, y, z) + \Psi_{yy}(x, y, z) + \Psi_{zz}(x, y, z) + 2 \frac{\Psi(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \quad (\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0))$$

bağıntısını gerçeklediğini gösterelim.

Gerçekten yardımcı  $\varphi(0, 0, 0) = 0$  ve  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  için  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  fonksiyonu aracılığıyla  $\Psi(x, y, z) = (x+y+z) \cdot \varphi(x, y, z)$  ( $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ) olduğundan, kolayca

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  için  $G = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  açık bölgesinde çalışıldığı için, doğrudan kısmi türev alıp

$$\Psi_x(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + (x+y+z).\varphi_x(x, y, z), \quad \Psi_{xx}(x, y, z) = 2\varphi_x(x, y, z) + (x+y+z)\varphi_{xx}(x, y, z)$$

ve benzerleri  $\Psi_{yy}$  ve  $\Psi_{zz}$  için yazılıp, üstelik

$$\varphi_{xx}(x, y, z) + \varphi_{yy}(x, y, z) + \varphi_{zz}(x, y, z) = 0 \quad (\forall(x, y, z) \neq (0, 0, 0)),$$

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y, z) &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \varphi_y(x, y, z) &= -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \varphi_z(x, y, z) &= -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

sonuçları daha önceden gösterildiğinden(nerede?), sonuçta

$$\begin{aligned}\Psi_{xx}(x, y, z) + \Psi_{yy}(x, y, z) + \Psi_{zz}(x, y, z) + 2\frac{\Psi(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} \\ = (x + y + z)[\varphi_{xx}(x, y, z) + \varphi_{yy}(x, y, z) + \varphi_{zz}(x, y, z)] - 2\frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + 2\frac{\Psi(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} \\ = -2\frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + 2\frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0 \quad ((x, y, z) \neq (0, 0, 0))\end{aligned}$$

istenilen sonucuna ulaşılır.

Siz, tümüyle benzer yöntemle  $\Psi^*(0, 0, 0) = 0$  ve  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  için  $\Psi^*(x, y, z) = \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  biçiminde tanımlanan fonksiyonun aşağıdakini gerçeklediğini gösteriniz:

$$\Psi_{xx}^*(x, y, z) + \Psi_{yy}^*(x, y, z) + \Psi_{zz}^*(x, y, z) + 4\frac{\Psi^*(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \quad (\forall(x, y, z) \neq (0, 0, 0))$$

2) Bir  $R$  bölgesinde  $u_{xy} = 0$  yani  $u_{xy}(x, y) = 0$  ( $\forall(x, y) \in R$ ) olsun.  $f(x, y) = u(x, y).e^{ax+by}$  biçiminde tanımlanan  $f$  fonksiyonunun hangi  $a$  ve  $b$  sabitleri için  $R$  bölgesinde  $f_{xy} - f_x - f_y + f = 0$  gerçeklediğini belirleyelim. Kısalık amacıyla  $v(x, y) = ax + by$  yazılırsa  $f$  fonksiyonu  $f(x, y) = u(x, y).e^{v(x,y)}$  ( $\forall(x, y) \in R$ ) biçiminde yazılıp

$$f_x(x, y) = u_x(x, y).e^{v(x,y)} + au(x, y).e^{v(x,y)} = e^v(u_x + au)$$

$$f_y = e^v(u_y + bu) \quad \text{ve} \quad f_{xy} = (u_{xy} + bu_x + au_y + abu).e^v$$

ve sonuçta  $f_{xy} - f_x - f_y + f = u_x(b - 1) + u_y(a - 1) + u(1 + ab - a - b)$  bulunacağından, kolayca  $a = 1 = b$  alındığında  $f$  fonksiyonunun istenileni gerçekleyeceği anlaşıılır.

3) Her  $(r, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  için  $f = f(r, t) = t^\alpha \cdot e^{-\frac{r^2}{4t}}$  olsun.  $\alpha$  sabitinin hangi değeri için  $r^2 \cdot f_t = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot f_r)$  gerçeklendiğini belirleyiniz.

Aranan  $\alpha$  sabitinin  $\alpha = -\frac{3}{2}$  olduğunu aşağıdaki biçimde gözleyiniz:

$$\begin{aligned} f_t &= \alpha t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{r^2}{4t}} + \frac{r^2}{4t^2} \cdot t^\alpha \cdot e^{-\frac{r^2}{4t}} = e^{-\frac{r^2}{4t}} (\alpha t^{\alpha-1} + \frac{r^2}{4} \cdot t^{\alpha-2}) \\ f_r &= \frac{-rt^{\alpha-1}}{2} \cdot e^{-\frac{r^2}{4t}} \text{ ve } r^2 f_r = -\frac{t^{\alpha-1}}{2} \cdot r^3 e^{-\frac{r^2}{4t}} \text{ bularak} \\ \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot f_r) &= -\frac{t^{\alpha-1}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^3 \cdot e^{-\frac{r^2}{4t}}) = r^2 t^{\alpha-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} \left( \frac{r^2}{4t} - \frac{3}{2} \right) \text{ ve zaten} \\ r^2 \cdot f_t &= r^2 t^{\alpha-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} \left( \frac{r^2}{4t} + \alpha \right) \end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik için  $\frac{r^2}{4t} - \frac{3}{2} = \frac{r^2}{4t} + \alpha$  böylece  $\alpha = -\frac{3}{2}$  elde edilir.

4) Her  $x \neq 0$  ve  $y \in \mathbb{R}$  için  $f(x, y) = x \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$  biçiminde tanımlanan fonksiyonun  $x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$  gerçeklendiğini gösteriniz.

Gerçekten gereken hesaplamalarla

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f_{xx} &= -\frac{y^2}{x} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{2y^2}{x^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos^3\left(\frac{y}{x}\right)} \\ 2xy \cdot f_{xy} &= \frac{2y^2}{x} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{4y^2}{x^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos^3\left(\frac{y}{x}\right)} \end{aligned}$$

bulunur, siz  $y^2 \cdot f_{yy}$ 'yi hesaplayıp isteneni gerçekleyiniz.

5)  $\forall (x, y) \neq (a, b)$  için  $\varphi(x, y) = \ln((x-a)^2 + (y-b)^2)$  ise, bu fonksiyonun  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$  gerçeklendiğini gösteriniz. Gerçekten

$$\varphi_x = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ ve } \varphi_{xx} = \frac{2\left((y-b)^2 - (x-a)^2\right)}{\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)^2} \quad (\forall (x, y) \neq (a, b))$$

bulup, benzer biçimde  $\varphi_{yy} = \frac{2\left((x-a)^2 - (y-b)^2\right)}{\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)^2} = -\varphi_{xx}$  elde ediniz.

6)  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  açık bölgesi  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x-y)}{x+y} & ; \quad (x, y) \in R \\ 0 & ; \quad (x, y) \notin R \end{cases}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

birimde tanımlansın.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$  limitinin **tanımsız** olduğunu gözleyelim.

Gerçekten her  $(x, y) \in R$  için  $x + y \neq 0$  gözleyip  $R$  açık bölgesinde doğrudan kısmi türev alıp  $f_x(x, y) = 1 - \frac{2y^2}{(x+y)^2}$  bulunur. Oysa  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^2}{(x+y)^2}$  limiti tanımsız olduğundan istenen bulunur, çünkü  $a, b$  pozitif gerçek sayıları farklı olmak üzere  $(\varepsilon_n, a\varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  ve  $(\varepsilon_n, b\varepsilon_n) \rightarrow (0, 0)$  oysa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^2\varepsilon_n^2}{(\varepsilon_n + a\varepsilon_n)^2} = \frac{2a^2}{(a+1)^2} \neq \frac{2b^2}{(b+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b^2\varepsilon_n^2}{(\varepsilon_n + b\varepsilon_n)^2}$  geçerlidir.

7)  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  açık bölgesi  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \neq z\}$  olmak üzere  $f(x, y, z) = \left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$  ( $\forall (x, y, z) \in R$ ) ve  $f(x, y, z) = 0$  ( $\forall (x, y, z) \notin R$ ) biçiminde tanımlanan  $f$  fonksiyonunun  $R$  bölgesinde  $xf_x + yf_y + zf_z = 0$  gerçeklediğini gösterelim.

Gerçekten  $R$  açık bölgesinde doğrudan kısmi türev alıp

$$f_x = n \left( \frac{x-y+z}{x+y-z} \right)^{n-1} \cdot \frac{2(y-z)}{(x+y-z)^2}, \quad f_y = n \left( \frac{x-y+z}{x+y-z} \right)^{n-1} \cdot \frac{-2x}{(x+y-z)^2}$$

ve  $f_z = n \left( \frac{x-y+z}{x+y-z} \right)^{n-1} \cdot \frac{2x}{(x+y-z)^2}$  bularak, kolayca şu elde edilir:

$$xf_x + yf_y + zf_z = n \left( \frac{x-y+z}{x+y-z} \right)^{n-1} \cdot \frac{2xy - 2xz - 2xy + 2xz}{(x+y-z)^2} = 0.$$

8)  $\varphi(x, y) = f(x+ay) + g(x-ay)$  ve  $f$  ile  $g$  ikinci mertebeden türetiliblir ve  $a$  sabitse  $\varphi_{yy} = a^2\varphi_{xx}$  gerçekleştigini gösteriniz.

Gerçekten, çözümü kolaylaştırması amacıyla  $u = u(x, y) = x + ay$  ve  $v = v(x, y) = x - ay$  yazılara  $\varphi(x, y) = f(u(x, y)) + g(v(x, y))$  olur. Dikkat:  $f$  fonksiyonu yalnızca  $u$  bağımlı değişkenine  $g$  fonksiyonu ise  $v$  bağımlı değişkenine bağlı olduklarından, zincir kuralıyla  $f_x = f'(u).u_x$  ve  $f_y = f'(u).u_y$  bulunur, çünkü daha genel olarak  $f = f(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  ise zincir kuralıyla  $f_x = f_u.u_x + f_v.v_x$  ve  $f_y = f_u.u_y + f_v.v_y$  olurdu, dolayısıyla  $f$  fonksiyonu  $v (= v(x, y))$  değişkenine bağlı değil, yalnızca  $u (= u(x, y))$  değişkenine bağlı olduğunda  $f_v = 0$  ve  $f_u = f'(u)$  olacağından, bu son eşitlikler nedeniyle  $f_x = f'(u).u_x$  ve  $f_y = f'(u).u_y$  ve bu bilgileri kullanıp  $\varphi(x, y) = f(u(x, y)) + g(v(x, y))$  gözleyip  $\varphi_x = f_x + g_x = f'(u).u_x + g'(u).u_x = f'(u) + g'(u)$  ve  $\varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_x = \frac{\partial}{\partial x} (f'(u(x, y)) + g'(v(x, y))) = \frac{\partial}{\partial x} f'(u) + \frac{\partial}{\partial x} g'(u) = f''(u).u_x + g''(u).u_x = f''(u) + g''(u)$  ve  $\varphi_y = f'(u).u_y + g'(u).u_y = a(f'(u) + g'(u))$  ve  $\varphi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \varphi_y = a \left( \frac{\partial}{\partial y} f'(u) + \frac{\partial}{\partial y} g'(u) \right) = a(f''(u).u_y + g''(u).u_y) = a^2(f''(u) + g''(u)) = a^2.\varphi_{xx}$  sonucu bulunur.

9)  $f = f(x, y)$  fonksiyonu, türetiliblir  $g$  fonksiyonu aracılığıyla  $f = g(x, y)$  biçiminde tanımlanırsa  $x.f_x = yf_y$  gerçekler, gösteriniz.

---

Gerçekten  $u = u(x, y) = x \cdot y$  aracı fonksiyonu tanımlanırsa  $f = g(u(x, y))$  ve böylece  $f_x = g'(u) \cdot u_x = y \cdot g'(u)$  ve  $f_y = g'(u) \cdot u_y = x \cdot g'(u)$  gözlemek yeterlidir.

10)  $f = f(x, y, z)$  fonksiyonu, türetilebilir  $g$  fonksiyonu aracılığıyla  $f = g(xz, yz)$  biçiminde tanımlanırsa  $xf_x + yf_y = zf_z$  olur, gösteriniz. Gerçekten  $u(x, z) = x \cdot z$  ve  $v(y, z) = y \cdot z$  aracılığıyla  $f = g(u(x, z), v(y, z))$  ve sonuçta zincir kuralıyla  $f_x = g_u u_x + g_v v_x = z \cdot g_u$  ve  $f_y = z \cdot g_v$  olur, çünkü apaçık biçimde  $u_y = 0 = v_x$  geçerlidir.  $f_z = g_u u_z + g_v v_z = xg_u + yg_u$  olduğundan  $xf_x + yf_y = xzg_u + yzg_u = z(xg_u + yg_u) = z \cdot f_z$  istenen sonucu bulunur.

11)  $f = f(x, y) = g(x^2 \cdot y)$  ise  $xf_x = 2yf_y$  geçeklenir, gösterin.

Gerçekten, son iki örneğin çözüm yöntemini kullanmak yeterlidir.

12)  $f = f(x, y) = x^3 - xy - y^3$  ve  $x = x(\rho, \phi) = \rho \cos \phi, y = y(\rho, \phi) = \rho \sin \phi$  ise  $f_\rho$  ve  $f_\phi$  kısmi türevlerini kutupsal koordinatlar  $\rho$  ve  $\phi$  cinsinden bulunur.

Gerçekten  $f = f(\rho, \phi) = \rho^3 \cos^3 \phi - \rho^2 \sin \phi \cos \phi + \rho^3 \sin^3 \phi$  olduğundan, kolayca  $f_\rho = 3\rho^2 \cos^3 \phi - \rho \sin 2\phi + 3\rho^2 \sin^3 \phi$  bulunur. Bu sonucu zincir kuralı kullanarak da bulabilirdik. Dikkat edilirse  $f = f(x(\rho, \phi), y(\rho, \phi))$  nedeniyle  $f_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho = (3x^2 - y) \cos \phi + (3y^2 - x) \sin x = (3\rho^2 \cos^2 \phi - \rho \sin \phi) \cos \phi + (3\rho \sin^2 \phi - \rho \cos \phi) \sin \phi = 3\rho^2 \cos^3 \phi + 3\rho^2 \sin^3 \phi - \rho \sin 2\phi$  aynı sonucu bulunur. Siz  $f_\phi$  kısmi türevini her iki yoldan hesaplayınız. Ayrıca 15) örneğine bakınız.

13)  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + xf_x + yf_y = 0$  gerçekleşsin. Eğer  $x = e^r$  ve  $y = e^t$  böylelikle  $f = f(r, t)$  ise  $f_{rr} + f_{tt} = 0$  olur.

Gerçekten  $f = f(x(r, t), y(r, t))$  ve ayrıca  $y_r = 0 = x_t$  gözleyerek zincir kuralı ile  $f_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cdot x_r = e^r \cdot f_x$  ve sonuçta  $f_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}(e^r \cdot f_x) = e^r \cdot f_x + e^r \cdot (\frac{\partial}{\partial r} f_x) = e^r \cdot f_x + e^r \cdot f_x + e^r (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r) = e^r \cdot f_x + e^r \cdot f_{xx} e^r = x f_x + x^2 f_{xx}$  ve benzer biçimde  $f_{tt} = y f_y + y^2 f_{yy}$  gözlemek yeterlidir.

14)  $a$  sabiti aracılığıyla  $\varphi = \varphi(x, y)$  fonksiyonunun  $x = x(u, v) = u \cos a - v \sin a$  ve  $y = y(u, v) = u \sin a + v \cos a$  olması durumunda  $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \varphi_u^2 + \varphi_v^2$  gerçeklediğini gösteriniz.

Gerçekten  $\varphi = \varphi(x(u, v), y(u, v))$  nedeniyle  $\varphi_u = \varphi_x x_u + \varphi_y y_u = \varphi_x \cos a + \varphi_y \sin a$  ve  $\varphi_u^2 = \varphi_x^2 \cos^2 a + \varphi_y^2 \sin^2 a + \varphi_x \varphi_y \cos a \sin a$  ve  $\varphi_v^2 = \varphi_x^2 \sin^2 a + \varphi_y^2 \cos^2 a - \varphi_x \varphi_y \cos a \sin a$  gözleyip istenen bulunur.

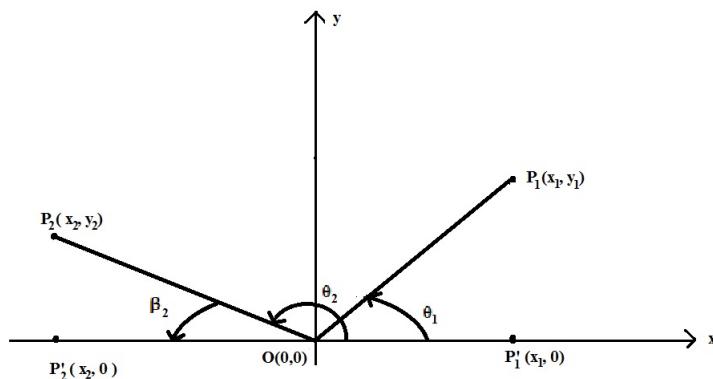
15) Kutupsal koordinatları **tanimlayıp**,  $\varphi = \varphi(x, y)$  fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevleri

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

sürekliyse  $\varphi_x^2 + \varphi_y^2$  ve  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy}$  ifadelerini kutupsal koordinatlar cinsinden yazınız.

Her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için tek türlü belirli  $\rho \geq 0$  ve  $\phi \in [0, 2\pi]$  gerçel sayıları aracılığıyla  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$  gerçekleşir. Gerçekten  $x = 0 = y$  ise  $\rho = 0 = \phi$  almak yeterlidir; eğer  $x = 0$  ve  $y > 0$  ise  $\rho = y$  ve  $\phi = \frac{\pi}{2}$  alınarak  $\rho \cos \phi = y \cos \frac{\pi}{2} = y \cdot 0 = 0 = x$  ve  $\rho \sin \phi = y \sin \frac{\pi}{2} = y$  bulunur; eğer  $x = 0$  ve  $y < 0$  ise bu kez  $\rho = |y|$  ve  $\phi = \frac{3\pi}{2}$  alınarak  $\rho \cos \phi = |y| \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = |y| \cdot 0 = x$  ve  $\rho \sin \phi = |y| \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = |y| \cdot \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -|y| \sin \frac{\pi}{2} = -|y| = y$  bulunur; eğer  $x \neq 0$  ve  $y \geq 0$  ise bu kez  $0 < x^2 \leq x^2 + y^2$  ve  $0 < \sqrt{x^2 + y^2}$  gözleyerek  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  ve  $\phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right)$  alınırsa,  $0 < x$  olduğunda  $0 < x = |\rho| \cos \phi \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$  ve  $0 < \frac{x}{\rho} \leq 1$  nedeniyle arccosinus fonksiyonunun temel özellikleyle (dikkat: bu fonksiyon, iyi bilindiği gibi bire-bir ve örten  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  fonksiyonunun tersidir)  $0 < \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right) = \phi \leq \frac{\pi}{2}$  ve böylece  $\cos \phi = \frac{x}{\rho}$  ve  $0 < \sin \phi = |\sin \phi| = \sqrt{|\sin^2 \phi|} = \sqrt{\sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho} = \frac{|y|}{\rho} = \frac{y}{\rho}$  yani  $y = \rho \sin \phi$  ve apaçık biçimde  $x = \rho \cos \phi$  bulunur.  $x < 0$  ise  $0 < \frac{|x|}{\rho} = \frac{-x}{\rho} \leq 1$  yani  $-1 \leq \frac{x}{\rho} < 0$  ve  $\frac{\pi}{2} < \phi = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right) \leq \pi$  nedeniyle yine  $0 \leq \sin \phi = |\sin \phi| = \sqrt{\sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{|y|}{\rho} = \frac{y}{\rho}$  böylece  $y = \rho \sin \phi$  ve  $\cos \phi = \frac{x}{\rho}$  nedeniyle  $x = \rho \cos \phi$  olur. Buna karşılık  $x \neq 0$  ve  $y < 0$  ise  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  ve  $\phi = -\arccos\left(\frac{x}{\rho}\right)$  alınıp  $-\pi \leq \phi = -\arccos\left(\frac{x}{\rho}\right) \leq 0$  gözlenerek  $\sin \phi \leq 0$  ve  $\sin \phi = -|\sin \phi| = -\sqrt{1 - \cos^2 \phi} = -\frac{|y|}{\rho} = \frac{y}{\rho}$  ve sonuçta  $y = \rho \sin \phi$  ve  $x = \rho \cos \phi$  bulunur. Açılarla çalışmaya alışkin öğrenciler için şunları anımsatalım: Düzlemede, aşağıdaki gibi  $P_1(x_1, y_1)$  ve  $P_2(x_2, y_2)$  noktaları için



---

(dikkat:  $x_2 < 0$  gözleyiniz)  $P'_1(x_1, 0)$  ve  $P'_2(x_2, 0)$  sırasıyla  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarının  $0x$  eksenini üzerindeki dik izdüşüm noktaları olmak üzere,  $0x$  eksenile  $\overline{OP_1}$  doğrusu arasındaki açı  $\theta_1$  ve  $0x$  eksenile  $\overline{OP_2}$  doğrusu arasındaki açı  $\theta_2$  ve  $\theta_2 + \beta_2 = 180^\circ$  olmak üzere, oluşan  $OP_1P'_1$  ve  $OP_2P'_2$  dik üçgenlerinde çalışarak

$$\cos \theta_1 = \frac{\overline{OP'_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ yani } x_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \cos \theta_1,$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\overline{OP'_2}}{\overline{OP_2}} = \frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \text{ yani } x_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \cos \theta_2$$

bulunur, çünkü  $\theta_2 + \beta_2 = 180^\circ$  yani  $\theta_2 = 180^\circ - \beta_2$  nedeniyle  $\cos \theta_2 = \cos(180^\circ - \beta_2) = \cos 180^\circ \cdot \cos \beta_2 = -\cos \beta_2$  ve böylece  $x_2 = (-\cos \beta_2)\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \cos \theta_2$  bulunur. Oysa  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$  gerçekleyen **her**  $\theta$  açısı için, bu açıya birim çemberde gören yayın uzunluğu  $a \in \mathbb{R}$  **gerçek sayısı** olmak üzere  $\cos \theta = \cos a$  geçerli olduğundan, yukarıdaki  $P_1$  ve  $P_2$  düzlem noktaları için sonuçta,  $x = \rho \cos \phi$  ve  $y = \rho \sin \phi$  gerçekleyen  $\rho$  ve  $\phi$  **gerçek sayıları** belirlenmiş olur. Siz,  $0x$  ekseninin altında kalan bir  $P_3(x_3, y_3)$  noktası için bu işlemleri yapınız. Yeri gelmişken, çok sıkılıkla yapılan şu **YANLIŞI** düzeltelim:  $\pi$  bir pozitif irrasyonel sayıdır, **AÇI DEĞİLDİR** ve

$$\begin{aligned}\pi &= \min\{x \in \mathbb{R}^+ : \sin x = 0\}, \\ \pi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}, \\ \pi &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \\ \pi &= \frac{\ell_r}{2r}\end{aligned}$$

gibi temel özellikleri vardır, sonuncu eşitlikte, 4000 yıldır bilinen şu ünlü gerçek yazılmıştır: Yarıçapı  $r > 0$  olan her çember, merkezi ne olursa olsun,  $\ell_r$  ile bu çemberin **uzunluğu** olup, apaçık biçimde yarıçapı bağlı olan pozitif sayıyı yazmak üzere  $\ell_r$  'nin çapa (yani  $2r$  sayısına) oranı daima  $\pi$  sabitidir ve bu gerçek **her**  $r > 0$  için doğrudur, kısacası **daima**  $\ell_r = 2\pi r$  geçerlidir. Çok önceleri  $\ell_r$  sayısının  $2r$ 'nin bir rasyonel katı olduğu düşünülmüştü, çünkü o dönemde henüz irrasyonel sayı kavramı bilinmemiştir! Ünlü Yunan'lı antik dönem Matematik ve Fizik'cisi büyük usta Arkhimedes(Arşimet) yaklaşık olarak M.Ö. 250'lerde ünlü

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

eşitsizliğini kanıtlamıştır. Usta Geometrici Appollonius yaklaşık 40 yıl sonra daha iyi bir eşitsizlik bularak  $\pi \cong 3,1415$  elde edecektir. Günümüzde, bilgisayarlar yardımıyla bu ünlü irrasyonel sayının ondalık açılımının, virgülden sonra gelen **milyarlarca basamağı** yanlışsız biçimde hesaplanabilmektedir,

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

aşağıdaki açılımda virgülüden sonra 24 basamak yazılıdır, bkz. kitabın sonundaki OKUMA PARÇASI !!

$$\pi = 3,141592653589793238462643\dots$$

$\pi$  üstelik irrasyonel olmaktan çok daha güçlü bir özelliğe sahiptir:  $\sqrt{2}$  irrasyonel sayısı, rasyonel kat sayılı  $p(x) = x^2 - 2$  polinomunun bir köküdür yani  $p(\sqrt{2}) = 0$  olmaktadır. Bilindiği gibi rasyonel katsayılı polinomların kökleri olabilen tüm gerçek ya da kompleks sayılarla **cebirsel sayı** olmayanlara **aşkin sayı** denilir.  $\pi$  sayısı, cebirsel bir sayı değil bir aşkin (transendant) sayıdır. Peki neden bazıları ısrarla ona açı derler? Aslında her pozitif (ve daha genel olarak **her** gerçek) sayının bir açı karşılığı vardır, tipki her öğrencinin bir numarası olduğu gibi, oysa öğrenci bir insandır, sayı **değildir**; pozitif gerçek sayılar ise açı karşılığına **eşit değildir**.  $0 \leq x < 2\pi$  gerçekleyen her pozitif gerçek sayı, birim çember (= merkezi  $(0, 0)$  ve yarıçapı 1 tam sayısı olan çember) üzerinde,  $(1, 0)$  noktasından başlatıp saatin işleyişinin TERS YÖNÜNDE gidilerek, uzunluğu  $x$  olan yayı tek türlü belirler, işte bu yayı gören  $\theta_x$  merkez açısına  $x$  gerçek sayısının açısal karşılığı,  $x$  sayısına ise  $\theta_x$  açısının **radyan değeri** denir. Bu  $x$  gerçek sayısının sinüs ve cosinüsü, bilindiği gibi açısal karşılığı aracılığıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sin x = \sin \theta_x \quad \text{ve} \quad \cos x = \cos \theta_x .$$

$\pi$  sayısı  $180^\circ$  derecenin radyan değeridir, çünkü birim çemberin uzunluğu  $2\pi$ , yarım çemberin uzunluğu, yani birim çember üzerinde, saatin işleyişinin ters yönünde  $(1, 0)$  noktasını  $(-1, 0)$  noktasına bağlayan yayın uzunluğu ise  $\pi$  olup, işte bu yarım yayı gören merkez açı  $180^\circ$  derecedir ve insanlar ona  $180^\circ$  lik açı demek yerine  $\pi$  açısı demeyi alışkanlık edinmiştir.

Artık bu örneği çözüebiliriz:  $x = \rho \cos \phi = x(\rho, \phi)$  ve  $y = y(\rho, \phi) = \rho \sin \phi$  olup  $\varphi = \varphi(x, y) = \varphi(x(\rho, \phi), y(\rho, \phi))$  nedeniyle  $\varphi_\rho = \varphi_x \cdot x_\rho + \varphi_y \cdot y_\rho = \varphi_x \cos \phi + \varphi_y \sin \phi$  ve  $\varphi_\phi = \varphi_x \cdot x_\phi + \varphi_y \cdot y_\phi = -\rho \varphi_x \sin \phi + \rho \varphi_y \cos \phi$  ve sonuçta  $\frac{1}{\rho} \varphi_\phi = -\varphi_x \sin \phi + \varphi_y \cos \phi$  bulunur, kare alıp toplarsak  $\varphi_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \varphi_\phi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$  olur. Ayrıca  $\varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$  gerçeklendiğini görebiliriz. Bunun için,  $\rho$  ve  $\phi$  gerçek sayılarının bağımsız değişkenler olduğunu unutmadan

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho\rho} &= \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\varphi_x \cos \phi + \varphi_y \sin \phi) = \cos \phi \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial \rho} + \sin \phi \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial \rho} \\ &= \cos \phi (\varphi_{xx} \cdot x_\rho + \varphi_{xy} \cdot y_\rho) + \sin \phi (\varphi_{yx} \cdot x_\rho + \varphi_{yy} \cdot y_\rho) \\ &= \varphi_{xx} \cos^2 \phi + \varphi_{xy} \cos \phi \sin \phi + \varphi_{yx} \sin \phi \cos \phi + \varphi_{yy} \sin^2 \phi \\ &= \varphi_{xx} \cos^2 \phi + 2\varphi_{xy} \cos \phi \sin \phi + \varphi_{yy} \sin^2 \phi \end{aligned}$$

bulunur, çünkü  $\varphi$  fonksiyonunun ikinci mertebden kısmi türevleri sürekli olduğundan Önerme5ii) kullanılarak  $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$  gerçekleştigiğini gözlenmiştir. Benzer biçimde  $\varphi_\phi = \rho(\varphi_y \cos \phi - \varphi_x \sin \phi)$  bilgisi

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_{\phi\phi} &= \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (\varphi_y \cos \phi - \varphi_x \sin \phi) \\
&= \rho \cdot \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial \phi} \cos \phi - \varphi_y \sin \phi - \frac{\partial \varphi_x}{\partial \phi} \sin \phi - \varphi_x \cos \phi \right) \\
&= \rho \cdot \left( \cos \phi (\varphi_{yx} \cdot x_\phi + \varphi_{yy} \cdot y_\phi) - \varphi_y \sin \phi - \sin \phi (\varphi_{xx} \cdot x_\phi + \varphi_{xy} \cdot y_\phi) - \varphi_x \cos \phi \right) \\
&= \rho^2 \left( \varphi_{xx} \sin^2 \phi + \varphi_{yy} \cos^2 \phi - 2\varphi_{xy} \cos \phi \sin \phi \right) - \rho \left( \varphi_x \cos \phi + \varphi_y \sin \phi \right)
\end{aligned}$$

bulunur, son eşitlige geçerken  $x_\phi = -\rho \sin \phi$  ve  $y_\phi = -\rho \cos \phi$  bilgileri kullanılmıştır. Demek ki  $\varphi_\rho = \varphi_x \cos \phi + \varphi_y \sin \phi$  ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\varphi_{\rho\rho} &= \varphi_{xx} \cos^2 \phi + 2\varphi_{xy} \cos \phi \sin \phi + \varphi_{yy} \sin^2 \phi \text{ ve} \\
\frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} &= (\varphi_{xx} \cos^2 \phi - 2\varphi_{xy} \cos \phi \sin \phi + \varphi_{yy} \sin^2 \phi) - \frac{\varphi_\rho}{\rho}
\end{aligned}$$

bulunarak

$$\begin{aligned}
\varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} &= \varphi_{xx} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \varphi_{yy} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\
&= \varphi_{xx} + \varphi_{yy}
\end{aligned}$$

istenilen sonucuna ulaşılır. Bu sonucun  $(x, y) \neq (0, 0)$  gerçekleyen düzlem noktaları için geçerli olduğunu gözleyiniz. Demek ki  $\mathbb{R}^2$  uzayında **Laplace denklemi**, kutupsal koordinatlarda yazıldığında

$$\varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} = 0$$

biçimini almaktadır.

16) Yukardaki sonucun aşağıdaki biçimde de bulunacağına dikkat ediniz. Her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $x = \rho \cos \phi$  ve  $y = \rho \sin \phi$  olduğu ve  $\rho$  ve  $\phi$  bağımlı değişkenleri  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenlerinin türetilebilir fonksiyonları olduklarından(neden?), yukardaki denklemleri önce  $x$  değişkenine göre türevleri

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cos \phi) = \rho_x \cos \phi - \rho \sin \phi \cdot \phi_x \\
0 &= \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho \sin \phi) = \rho_x \sin \phi - \rho \cos \phi \cdot \phi_x
\end{aligned}$$

ve bu denklem sisteminin katsayılar determinantı olan  $D$  için

$$D = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

bularak, sonuçta  $(x, y) \neq (0, 0)$  için  $0 < x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho^2$  nedeniyle kesinlikle  $D = \rho > 0$  gözleyip, yukardaki kısmi türevler için

$$\rho_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\rho \sin \phi \\ 0 & \rho \cos \phi \end{vmatrix}}{D} = \frac{\rho \cos \phi}{\rho} = \cos \phi, \quad \phi_x = \frac{\begin{vmatrix} \cos \phi & 1 \\ \sin \phi & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\sin \phi}{\rho}$$

ve benzer biçimde  $y$  değişkenine göre türevler alarak  $\rho_y = \sin \phi$  ve  $\phi_y = \frac{\cos \phi}{\rho}$  elde edilir. O halde  $\varphi = \varphi(\rho(x, y), \phi(x, y))$  nedeniyle

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \varphi_\rho \cdot \rho_x + \varphi_\phi \cdot \phi_x = \cos \phi \cdot \varphi_\rho - \frac{\sin \phi}{\rho} \cdot \varphi_\phi \quad \text{ve} \\ \varphi_y &= \varphi_\rho \cdot \rho_y + \varphi_\phi \cdot \phi_y = \sin \phi \cdot \varphi_\rho - \frac{\cos \phi}{\rho} \cdot \varphi_\phi \end{aligned}$$

ve bir kez daha kısmi türev alarak

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \cos \phi \cdot \varphi_\rho - \frac{\sin \phi}{\rho} \cdot \varphi_\phi \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos \phi \cdot \varphi_\rho) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin \phi}{\rho} \cdot \varphi_\phi \right) \\ &= -\sin \phi \cdot \phi_x \varphi_\rho + \cos \phi (\varphi_{\rho\rho} \cdot \rho_x + \varphi_{\rho\phi} \cdot \phi_x) - \frac{\varphi_\phi}{\rho^2} (\rho \cos \phi \cdot \phi_x - \rho_x \sin \phi) - \frac{\sin \phi}{\rho} (\varphi_{\phi\rho} \cdot \rho_x + \varphi_{\phi\phi} \phi_x) \end{aligned}$$

bulunur ve  $\phi_x, \rho_x$  değerleri yerleştirilip

$$\varphi_{xx} = \cos^2 \phi \cdot \varphi_{\rho\rho} + \frac{\sin 2\phi}{\rho^2} \varphi_\phi - \frac{\sin 2\phi}{\rho} \varphi_{\rho\phi} + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} \varphi_\rho + \frac{\sin^2 \phi}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi}$$

ve benzer şeyler  $\varphi_y$  ve  $\varphi_{yy}$  için yapılarak

$$\varphi_{yy} = \sin^2 \phi \cdot \varphi_{\rho\rho} - \frac{\sin 2\phi}{\rho^2} \varphi_\phi + \frac{\sin 2\phi}{\rho} \varphi_{\rho\phi} + \frac{\cos^2 \phi}{\rho} \varphi_\rho + \frac{\cos^2 \phi}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi}$$

ve böylece toplam alarak yine, herbir  $(x, y) \neq (0, 0)$  noktasında aşağıdaki bulunur:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi}.$$

17) Birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli  $F = F(x, y)$  ve  $G = G(x, y)$  fonksiyonları verilsin.  $df = Fdx + Gdy$  yani  $df|_{(x,y)} = F(x, y)dx + G(x, y)dy$  koşulunu gerçekleyen, ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonunun **varlığı** için gerek  $F_y = G_x$  yani  $F_y(x, y) = G_x(x, y)$  koşulunun gerçekleşmesidir. Dikkat: ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonunun birinci mertebeden  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonları da sürekli olur, çünkü  $f_x$  fonksiyonunun kısmi türevleri  $f_{xx}$  ve  $f_{xy}$  olup, varsayılm gereği bunlar sürekli olduğundan Önerme6ii) nedeniyle  $f_x$  türetilebilirdir, dolayısıyla Önerme6 ii) nedeniyle  $f_x$  fonksiyonu **sürekli** olur, benzer şeyler  $f_y$

---

ince geçerlidir, çünkü  $f_{yy}$  ve  $f_{yx}(=f_{xy})$  fonksiyonları sürekli dir. Bu gözlemlerin ardından kanıtlamayı verebiliriz. Eğer bu nitelikte bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu varsa  $f_x dx + f_y dy = df = F dx + G dy$  yani  $(f_x - F)dx + (f_y - G)dy = 0$  nedeniyle, birinci türevleri sürekli  $f_x - F$  ve  $f_y - G$  fonksiyonları için zorunlu olarak  $f_x - F = 0 = f_y - G$  yani  $f_x = F$  ve  $f_y = G$  ve dolayısıyla  $F_y = f_{xy} = f_{yx} = G_x$  bulunur. Tersine  $F$  ve  $G$  fonksiyonları  $F_y = G_x$  koşulunu gerçeklediğinde, eğer istenilen niteliklerde bir  $f$  fonksiyonu var olsaydı  $df = F dx + G dy$  olur ve  $F = f_x, G = f_y$  bulunur, böylece  $f_x(x, y) = F(x, y)$  eşitliğinden,  $y$  değişkenini sabit tutup  $x$  değişkenine göre türlev(integral) olarak  $f \stackrel{*}{=} \int F(x, y)dx + h(y)$  ve sonuçta  $G = f_y = \frac{\partial}{\partial y}[\int F(x, y)dx] + h'(y)$  yani  $h'(y) = G - \frac{\partial}{\partial y}[\int F(x, y)dx]$  ve  $h(y) = \int G(x, y)dy - \int F(x, y)dx + c$  ve böylece (\*) eşitliğini kullanıp

$$f = \int G(x, y)dy + c \quad (1)$$

bulup, aranan  $f$  fonksiyonunun belirlediği anlaşılır. Matematikte ancak ve yalnız  $F_y = G_x$  koşulu gerçekleştiğinde  $F dx + G dy$  ifadesine **tam diferansiyel** denir; bu durumda, yukarıda da gözlendiği gibi (1) bağıntısıyla belirlenen  $f = f(x, y)$  için  $df = F dx + G dy$  olmaktadır.

18)  $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$  türetilebilir fonksiyon çifti için  $F_y(x, y) = 3x^2 - 4y = G_x(x, y)$  koşulu yerine gelmektedir ve

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int G(x, y)dy + c = \int (x^3 - 4xy + 6y^2)dy + c \\ &= x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + c \end{aligned}$$

fonksiyonunun  $df = f_x dx + f_y dy = F(x, y)dx + G(x, y)dy$  gerçekleştiği görülür. Benzer biçimde

$$(2xy^2 + 3y \cos 3x)dx + (2x^2y + \sin 3x)dy$$

ifadesinin, katsayırlara sırasıyla  $F = F(x, y)$  ve  $G = G(x, y)$  diyerek ve  $F_y = G_x = 4xy + 3 \cos 3x$  gözleyerek  $f(x, y) = \int G(x, y)dy + c = x^2y^2 + y \sin 3x + c$  türetilebilir fonksiyonunun diferansiyeli olduğu görülür. Bunu karşın

$$(6xy - y^2)dx + (2xe^y - x^2)dy$$

ifadesinin tam diferansiyel olabilmeye ilişkin  $\frac{\partial}{\partial y}(6xy - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^y - x^2)$  koşulunu **gerçeklemediğine** dikkat edilmelidir.

19) Yukarda yapılanlara benzer biçimde, bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli  $F = F(x, y, z), G = G(x, y, z)$  ve  $H = H(x, y, z)$  fonksiyonları verildiğinde  $F dx + G dy + H dz = df$  koşulunu gerçekleyen, ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli bir  $f$  fonksiyonun varlığı

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

fürin gerek yeter koşuldur  $i) G_x = F_y, ii) F_z = H_x, iii) G_z = H_y$  olup bu koşullar yerine geldiğinde, aranan  $f$  fonksiyonu, **Pfaff Yöntemi** ile, herhangi bir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  sabit noktası aracılığıyla

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^x F(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y G(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z H(x_0, y_0, t) dt + c$$

olarak belirlenir, bkz. Bölüm3. Örneğin

$$(z^3 - 3y)dx + (12y^2 - 3x)dy + 3xz^2dz \quad i), ii) \text{ koşullarını gerçekler}$$

ve  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$  alıp  $f(x, y, z) = \int_0^x F(t, y, z) dt + \int_0^y G(0, t, z) dt + \int_0^z H(0, 0, t) dt + c = \int_0^x (z^3 - 3y) dt + \int_0^y 12t^2 dt + c = xz^3 - 3xy + 4y^3 + c$  bulunur.

20) Açık bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde, ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli  $f = f(x, y)$  fonksiyonu için üstelik  $f_y \neq 0$  yani  $f_y(x, y) \neq 0$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) koşulu yerine geliyorsa,  $R_0 = \{(x, y) \in R : f(x, y) = 0\} \subseteq R$  alt bölgesinde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \text{ ve } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{f_y^3} [f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2]$$

olur. Gerçekten her  $(x, y) \in R_0$  noktası için  $f(x, y) = 0$  olduğundan  $R_0$  bölgesinde  $0 = df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$  olur, oysa aşağıda ÖFT1 ve ÖFT2 teoremlerinde de görüleceği gibi,  $\pi_1(x, y) = x$ 'in uygun bir komşuluğunda, tek türlü belirlenebilen  $y = y(x)$  türetilen bilen fonksiyonu tanımlı olacağından

$$0 = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)y'(x)dx = (f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x))dx$$

ve böylece  $f_x(x, y) + f_y(x, y).y'(x)dx = 0$  ve  $f_y(x, y) \neq 0$  nedeniyle istenen

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \text{ yani } \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

ve bu sonuç kullanılarak aşağıdakiler bulunur:  $f_x = f_x(x, y(x))$  için

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = f_{xx} + f_{xy}.y'(x) = f_{xx} + f_{xy} \left( -\frac{f_x}{f_y} \right) = f_{xx} - f_{xy} \left( \frac{f_x}{f_y} \right)$$

ve benzer şeyle  $f_y = f_y(x, y(x))$  için yapılarak

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = f_{yx} + f_{yy}.y'(x) = f_{yx} - f_{yy} \left( \frac{f_x}{f_y} \right)$$

ve böylece  $R$  bölgesinde  $f_y \neq 0$  olduğu unutulmadan aşağıdakiler bulunur:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{f_x}{f_y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_x}{f_y} \right) = -\frac{1}{f_y^2} \left[ f_y \frac{\partial f_x}{\partial x} - f_x \frac{\partial f_y}{\partial x} \right] \\ &= -\frac{1}{f_y^2} \left[ f_y \left( f_{xx} - \frac{f_x \cdot f_{xy}}{f_y} \right) - f_x \left( f_{yx} - \frac{f_x \cdot f_{yy}}{f_y} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{f_y^2} \left[ f_y f_{xx} - f_x f_{xy} - f_x f_{yx} - \frac{f_x^2 \cdot f_{yy}}{f_y} \right] \\ &= -\frac{1}{f_y^3} [f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 \cdot f_{yy}].\end{aligned}$$

21)  $f = f(x, y, z)$  türetilibilir,  $f_z \neq 0$  ve üstelik  $z = z(x, y)$  türetilibilirse,  $f(x, y, z(x, y)) = 0$  gerçekleşen  $(x, y) \in R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  noktalarının bölgesinde aşağıdakiler geçerlidir, gösteriniz:

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} \text{ ve } z_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

Gerçekten, sözü edilen bölgede  $0 = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = f_x dx + f_y dy + f_z(z_x dx + z_y dy) = (f_x + f_z z_x)dx + (f_y + f_z z_y)dy$  ve böylelikle  $f_x + f_z \cdot z_x = 0 = f_y + f_z \cdot z_y$  ve üstelik  $f_z \neq 0$  olduğundan istenilen eşitlıkların bulunacağına dikkat ediniz, ayrıca çok daha zayıf hipotezlerle benzer sonuç için bkz Örtük Fonksiyon Teoremi 2.

22)  $z = z(x, y)$  türetilibilir ve üstelik her  $(x, y) \in R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  için  $z^3 - xz - y = 0$  ise  $z_{xy} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$  gerçekleşen, çünkü  $f = f(x, y, z) = z^3 - xz - y$  üç değişkenli polinomu, tüm polinomlar gibi türetilibilir ve üstelik her  $(x, y) \in R$  için  $f(x, y, z) = 0$  olduğundan, bir önceki örnekteki bilgi kullanılrsa

$$\begin{aligned}z_x(x, y) &= -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} = \frac{z}{3z^2 - x} \text{ yani } z_x = \frac{z}{3z^2 - x} \text{ ve böylece} \\ z_{xy} &= \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{3z^2 - x} \right) = \frac{z_y(3z^2 - x) - z \frac{\partial}{\partial y}(3z^2 - x)}{(3z^2 - x)^2} = \frac{z_y(3z^2 - x) - 6z^2 \cdot z_y}{(3z^2 - x)^2} \\ \text{ve zaten } z_y &= -\frac{f_y}{f_z} = \frac{1}{3z^2 - x} \text{ olduğundan sonuçta istenen bulunur:}\end{aligned}$$

$$z_{xy} = \frac{z_y[(3z^2 - x) - 6z^2]}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}.$$

Burada elbette  $R$  bölgesinde  $3z^2 \neq x$  gerçekleştiği varsayılmaktadır.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

23) Türetilebilir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu verilsin, **her**  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p \cdot f(x, y)$  gerçeklenecek biçimde  $p$  sabiti varsa,  $f$  fonksiyonunun

$$x f_x + y f_y = p f$$

**Euler bağıntısını** gerçeklediğini gösteriniz. Gerçekten  $u(x, y) = \lambda x$  ve  $v(x, y) = \lambda y$  fonksiyonları tanımlanırsa  $\lambda^p \cdot f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f(u(x, y), v(x, y)) = f(u, v)$  elde edilir ve  $\lambda$  değişkenine göre  $f(u, v) = \lambda^p f$  eşitliğinin her iki yanını türeterek

$$p\lambda^{p-1} \cdot f = f_u u_\lambda + f_v v_\lambda = x \cdot f_u + y \cdot f_v \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

bulunur, özel olarak  $\lambda = 1$  alındığında  $u = x$  ve  $v = y$  ve dolayısıyla  $f_u = f_x$  ve  $f_v = f_y$  nedeniyle istenen bağıntı elde edilir, yukarıda her iki yan  $\lambda$  parametresine göre türetilirken  $f(x, y)$ 'nin  $\lambda$  parametresine **bağlı olmadığı** gözlenmiştir.

24) Tek değişkenli  $f$  fonksiyonu türetilebilirse, her  $x \neq 0, y \in \mathbb{R}$  için

$$\varphi(x, y) = x^4 y^2 f\left(\frac{y}{x}\right), \Psi(x, y) = x^2 f\left(\frac{y^2}{x^2}\right), \phi(0, 0) = 0 = \Psi(0, 0)$$

biçiminde tanımlanan  $\varphi$  ve  $\Psi$  fonksiyonlarının  $x\varphi_x + y\varphi_y = 6\varphi$  ve  $x\Psi_x + y\Psi_y = 2\Psi$  gerçeklediğini gösteriniz. Gerçekten  $\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^6 x^4 y^2 f\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \lambda^6 x^4 y^2 f\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^6 \cdot \varphi(x, y)$  eşitliği her  $\lambda \neq 0$  içinapaçaktır,  $\lambda = 0$  için eşitliğin geçerli olması  $\varphi(0, 0) = 0 = 0^6 \cdot \varphi(0, 0)$  gözlemden elde edilir. O halde 23) örneğinde anlatılanlar nedeniyle,  $\varphi$  fonksiyonu  $p = 6$  sabiti için Euler bağıntısını gerçekler. Bu örnekteki  $f = f(t)$  fonksiyonu olarak, her  $t$  değişkeninde türetilen gerçel değerli bir fonksiyon almak yeterlidir. Eğer  $\text{Tan}(f) = A \not\supseteq \mathbb{R}$  ise, elbette  $\varphi$  fonksiyonu  $\frac{y}{x} \in A$  gerçekleyen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktalarında tanımlanmalıdır.

25) Her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $f_x(x, y) = e^x \cdot \sin y$  ve  $f_y(x, y) = -e^x \cdot \cos y$  koşullarını gerçekleyen bir  $f$  fonksiyonu kesinlikle **var olmaz**, eğer var olsaydı, kısmi türev fonksiyonları  $\mathbb{R}^2$  açık kümelerinde sürekli olduklarından  $\cos y e^x = f_{xy} = f_{yx} = -e^x \cdot \cos y$  böylece  $2e^x \cdot \cos y = 0$  ( $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) ve daima  $2e^x > 0$  nedeniyle, **her**  $y \in \mathbb{R}$  için  $\cos y = 0$  sonucu bulunurdu, oysa her  $y \notin \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$  gerçel sayısı için  $\cos y \neq 0$  bilinmektedir.

26) Eğer  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda, bir  $c$  sabiti sayesinde  $f(x, y) = c$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) gerçekleniyorsa, aynı komşulukta

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0 \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

---

gerçekleşir, çünkü herhangi bir  $(x_1, y_1) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  noktası alındığında, sayfa 3'de gözlendiği gibi  $\exists \delta_1 > 0, K_{\delta_1}(x_1, y_1) \subseteq K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  böylece kolayca

$$f_x(x_1, y_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, y_1) - f(x_1, y_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

bulunur, çünkü  $h \rightarrow 0$  nedeniyle elbette  $|h| < \delta_1$  olur, böylece  $(x_1 + h, y_1) \in K_{\delta_1}(x_1, y_1) \subseteq K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  ve  $(x_1, y_1) \in K_{\delta_1}(x_1, y_1) \subseteq K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  nedeniyle hipotez gereği  $f(x_1 + h, y_1) = c = f(x_1, y_1)$  geçerlidir. Ayrıca  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f_y = 0$  bulunur. Bu örnek çok kolay biçimde şöyle çözülür:  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  açık komşuluğunda  $f = c (= \text{sabit})$  ise bu **açık kümede** doğrudan kısmi türev alınarak  $f_x = 0 = f_y$  bulunur, bitti!

27) Eğer bir  $R \subset \mathbb{R}^2$  bölgesindeki kısmi türevleri tanımlı olan bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu için

$$\text{hem } f(x, y) = 0 \ (\forall (x, y) \in R), \text{ hem de } f_y(x, y) \neq 0 \ (\forall (x, y) \in R)$$

gerçekleşiyorsa 26) örneği nedeniyle şu gerçek bulunur:

$$\text{îç } R = \emptyset.$$

**Uyarı:** Her  $(x, y) \in R (\subseteq \mathbb{R}^2)$  için  $R$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli bir  $f$  fonksiyonu aracılıyla  $z = f(x, y)$  tanımlayarak  $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$  eşleştirmesi gerçek değerli bir fonksiyon belirler.

Benzer biçimde, her  $(x, y, z) \in R^* (\subseteq \mathbb{R}^3)$  için,  $R^*$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli bir  $g$  fonksiyonu aracılığıyla  $w = g(x, y, z)$  yazarak  $(x, y, z) \mapsto w$  eşleştirmesi bir fonksiyondur. Oysa  $f(x, y) = 0$  ve  $g(x, y, z) = 0$  ifadeleri bir **fonksiyon değildir**, bunlara **denklem** ya da **fonksiyonel bağıntı** denilir, daha genel olarak  $F(\varphi, \Psi) = 0$  ifadelerine de aynı adlandırmalar verilir. Aslında  $f(x, y) = 0$  gerçekleyen tüm  $(x, y) \in R$  noktalarının kümesine  **$f$  fonksiyonunun sıfır kümesi** denilir ve  $Sif(f) = \{(x, y) \in R : f(x, y) = 0\}$  yazılır, bu kümeler genellikle bir eğri ya da yüzeydirler. Örneğin  $a > 0$  ise  $f(x, y) = x^2 + y^2 - a$  iki değişkenli bir polinom, bir fonksiyondur, oysa düzlemede  $f(x, y) = 0$  gerçekleyen noktalar kümesi, dikkat edilirse

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\} = (0, 0) \text{ merkez ve } \sqrt{a} \text{ yarıçaplı Çember}$$

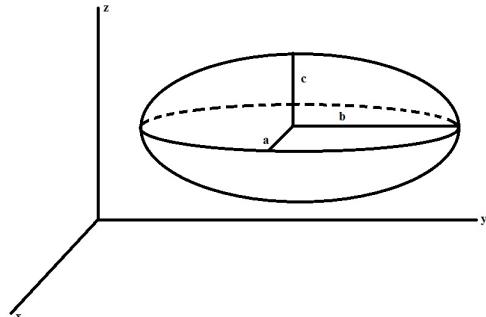
yani kapalı bir eğridir. Benzer biçimde  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$  ve  $h(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}$  üç değişkenli birer polinomdur (burada  $a, b, c$  sabitleri pozitifdir), buna karşılık  $g(x, y, z) = 0$  ve  $h(x, y, z) = 0$  gerçekleyen  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  noktalar kümesi,  $\mathbb{R}^3$  uzayında birer **konik yüzeydir** birincisine **tek yapraklı eliptik hiperboloid** denilir. Benzer yüzeyler ek sayfada gösterilmektedir.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

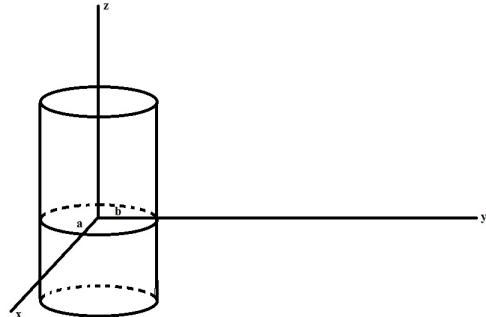
**Merkezi  $(x_0, y_0, z_0)$  ve Yarı -Eksenleri  $(a, b, c)$  Olan Elipsoidin Denklemi**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$



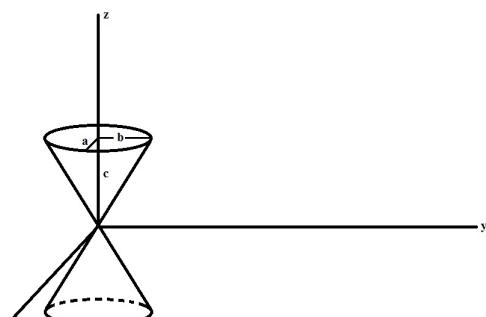
**$z$ - eksenli Eliptik Silindir**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



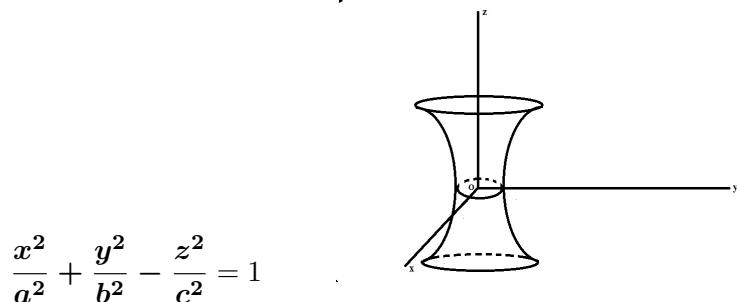
**Eliptik Koni**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

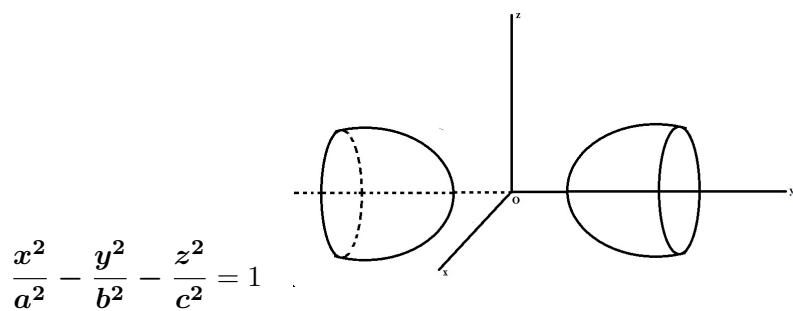


---

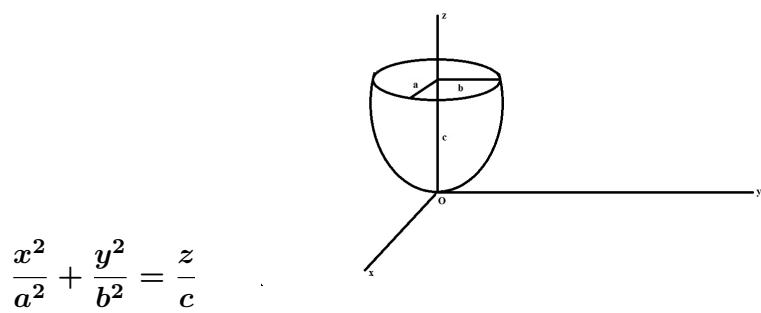
### Tek Yapraklı Hiperboloid



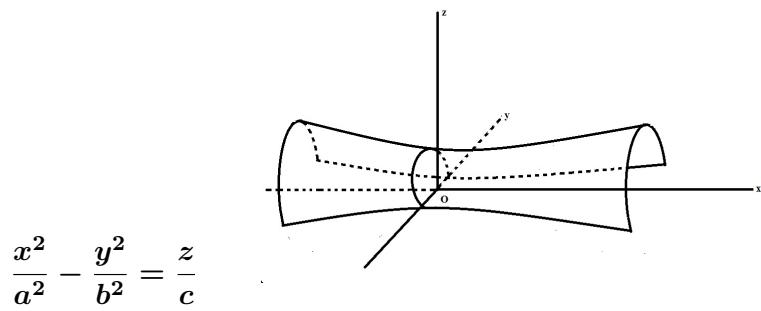
### İki Yapraklı Hiperboloid



### Eliptik Paraboloid



### Hiperbolik Paraboloid



## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

Bir  $f(x, y) = 0$  denkleminde değişkenlerden birisinin, öteki değişkenin örtük bir fonksiyonu olabilmesine elveren yeter koşullar vardır. Analizin en ünlü sonuçlarından birisi olan **Örtük Fonksiyon Teoremi (Kapalı Fonksiyon Teoremi)** diyenler de vardır böyle bir yeter koşulu belirler. Bu teorem, bir başka ünlü ve kullanışlı sonuç olan **Banach Sabit Nokta Teoremi**'nden kolayca elde edilir. Gerekli hazırlıkları yapalım. Bilindiği gibi bir  $X$  kümesinde tanımlı ve  $x, y, z \in X$  ne olursa olsun  $d(x, y) = d(y, x)$  ve  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  koşullarını ve ayrıca  $d(x, y) = 0$  için gerek  $x = y$  koşulunu gerçekleyen bir  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu,  $X$  üzerinde tanımlanmış bir **metrik** denilir. Bu koşullar kullanılırsa,  $x, y \in X$  ne olursa olsun, daima  $0 \leq d(x, y)$  gerçekleştiği

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

ve sonuçta  $0 \leq d(x, y)$  gözlenerek, bir metriğin **asla** negatif değer almadığı anlaşılır.  $d(x, y)$  negatif olmayan gerçel sayısına  $x$  ve  $y$  elemanları(noktaları) arasındaki **uzaklık** denir.  $X$  üzerinde tanımlı her metrik,  $X$  üzerinde bir topoloji ve topolojik uzay belirler ve bu uzayda,  $x \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  ne olursa olsun.

$$S_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}, \quad S_d[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

kümeleri sırasıyla birer açık ve kapalı kümedir. Örneğin  $\mathbb{R}^n$  kümesinde

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2},$$

$$d^*((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

birer metrik örneğidir.  $C[a, b]$  kümesinde ise

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, \quad d^*(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

birer metrik örneğidir. Buna benzer metrikler,  $X$  tıkız(kompakt) bir metrik uzay olmak üzere  $C(X)$  kümesi üzerinde tanımlanır. Bu bilgiler ve aşağıdaki ünlü teorem Topoloji derslerinde gösterilir: Bir metrik uzaya, ancak ve yalnız, bu uzayda tanımlı her **Cauchy dizisi** yakınsıyor ise **tam metrik uzay** denilir, unutulmasın!  $C[a, b]$  ve  $\mathbb{R}^n$  metrik uzayları bu niteliktedir. Aslında şu bilgiyi vermekle yetinelim:  $X$  herhangi bir topolojik uzay ve  $Y$  bir tam metrik uzay ise, tüm **sürekli**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonların uzayı  $C(X, Y)$  bir tam metrik uzaydır.  $C(X, \mathbb{R}^1)$  tam metrik uzayı kısaca  $C(X)$  ile yazılır.

**Banach Sabit Nokta Teoremi:**  $(X, d)$  bir tam metrik uzay ve  $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$  fonksiyonu, uygun bir  $0 \leq c < 1$  sabitli **daralma fonksiyonu** ise, kısacası her  $x_1, x_2 \in X$  için  $d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$  oluyorsa,  $f$  fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır, yani

$$x_0 = f(x_0)$$

---

gerçekleyen tek bir tane  $x_0 \in X$  vardır.

Şimdi bu ünlü teoremi **kullanalım**. Önce aşağıdakini kanıtlayalım:

**Örtük Fonksiyon Teoremi 1:**  $f = f(x, y)$  fonksiyonu  $R = [a, b] \times \mathbb{R}$  bölgesinde tanımlı, gerçek değerli ve sürekli ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonu  $R$  bölgesinde tanımlıysa, üstelik uygun  $m, M$  pozitif sabitleri aracılığıyla  $0 < m \leq f_y \leq M$  ya da  $-M \leq f_y \leq -m < 0$  oluyorsa,  $[a, b]$  aralığında tanımlı olup  $f(x, g(x)) = 0 (\forall x \in [a, b])$  koşulunu gerçekleyen ve tek türlü belirlenebilen sürekli bir  $g$  fonksiyonu vardır.

**Kanıtlama:**  $C[a, b]$  bilindiği gibi bir tam metrik uzaydır. Şimdi  $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  fonksiyonu, her  $\varphi \in C[a, b]$  için  $F(\varphi) \in C[a, b]$  elemanı (fonksiyonu)

$$(F(\varphi))(x) = \varphi(x) - \frac{f(x, \varphi(x))}{M} \quad (\forall x \in [a, b])$$

birimde tanımlansın, burada  $0 < m \leq f_y(x, y) \leq M \ (\forall (x, y) \in R)$  hipotezi geçerli varsayılmaktadır. Dikkat edilirse,  $f$  sürekli olduğundan  $f(x, \varphi(x))$  fonksiyonunun  $x$  değişkeninin sürekli gerçek değerli fonksiyonu olduğu Örnek 2.2'de gösterilmiştir, üstelik  $\varphi = \varphi(x)$  süreklidir bu nedenle  $F(\varphi)$  fonksiyonu,  $x$  değişkeninin sürekli gerçek değerli fonksiyonudur, yani  $F(\varphi) \in C[a, b]$  olur, işte  $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  fonksiyonu, herbir  $\varphi \in C[a, b]$  elemanına bu  $F(\varphi) \in C[a, b]$  elemanını eşleştirmektedir, üstelik ünlü supremum normu aracıyla

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\| \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

gösterebiliriz. Gerçekten, artık, her  $x \in [a, b]$  için

$$f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x)) = (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \cdot f_y(x, \xi_x)$$

olacak biçimde  $\varphi_1(x)$  ile  $\varphi_2(x)$  arasında yer alan bir  $\xi_x$  gerçek sayısının var olduğunu öğrendiğimiz için (nerede öğrenmiştık?) sonuçta bu  $x \in [a, b]$  için

$$\begin{aligned} (F(\varphi_1))(x) - (F(\varphi_2))(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_2(x) - \frac{f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x))}{M} \\ &= (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) \left(1 - \frac{f_y(x, \xi_x)}{M}\right) \text{ ve} \\ |F(\varphi_1)(x) - F(\varphi_2)(x)| &= |(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \cdot \left|1 - \frac{f_y(x, \xi_x)}{M}\right| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| \cdot \left(1 - \frac{m}{M}\right) \end{aligned}$$

bulunur, burada örneğin  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$  ise  $\varphi_1(x) < \xi_x < \varphi_2(x)$  ve  $(x, \xi_x) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  ve  $m \leq f_y(x, \xi_x) \leq M$  ve  $\frac{m}{M} \leq \frac{f_y(x, \xi_x)}{M} \leq 1$  ve sonuçta  $0 \leq 1 - \frac{f_y(x, \xi_x)}{M} \leq 1 - \frac{m}{M}$  gerçekleştiğine dikkat edilmiştir ve  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$  ise  $\xi_x = \varphi_1(x) (= \varphi_2(x))$  alınır, benzer şeyler  $\varphi_2(x) < \varphi_1(x)$  olduğunda

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

elde edilir; böylelikle  $0 \leq c = 1 - \frac{m}{M} < 1$  sabiti aracılığıyla

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\| = \sup_{x \in [a,b]} |F(\varphi_1)(x) - F(\varphi_2)(x)| \leq c \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

bulunur, oysa  $C[a,b]$  tam metrik uzayında metrik

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$$

olduğundan, sonuçta  $F : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$  fonksiyonunun  $c$  sabitli bir daralma fonksiyonu olduğunu söyleyen ve **her**  $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$  için geçerli olan

$$d(F(\varphi_1), F(\varphi_2)) = \|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\| \leq c \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\| = c \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)$$

eşitsizlikleri elde edilir ve Banach SNT ile, tek türlü belirli bir  $\varphi_0 \in C[a,b]$  elemanı(fonksiyonu) için  $\varphi_0 = F(\varphi_0)$  olur, böylece

$$\varphi_0(x) = F(\varphi_0)(x) = \varphi_0(x) - \frac{f(x, \varphi_0(x))}{M} \quad (\forall x \in [a,b])$$

bularak  $f(x, \varphi_0(x)) = 0$  ( $\forall x \in [a,b]$ ) elde edilir. Eğer  $f_y$  kısmi türevi  $R$  bölgesinde  $-M \leq f_x(x, y) \leq -m < 0$  gerçekliyorsa, bu kez  $F$  fonksiyonu

$$F(\varphi)(x) = \varphi(x) + \frac{f(x, \varphi(x))}{M} \quad (\forall \varphi \in C[a,b], \forall x \in [a,b])$$

biçiminde tanımlanarak yine  $d(F(\varphi_1), F(\varphi_2)) \leq c \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)$  sonucu bulunur ve Banach Teoremi uygulanarak aynı sonuca ulaşılır. Kısacası  $f$  hipotezdeki koşulları gerçekliyorsa

$$f(x, g(x)) = 0 \quad (\forall x \in [a,b])$$

olacak biçimde, **tek bir tane**  $g \in C[a,b]$  elemanın (sürekli fonksiyonunun) var olduğu kanıtlanmış olur. Bitti!

**Dikkat:** Eğer  $f$  fonksiyonu  $R$  bölgesinde üstelik **türetilebilirse**, yukarıda belirlenen tek değişkenli  $g$  fonksiyonu da **türetilebilirdir** ve şu geçerlidir:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad (\forall x \in [a,b])$$

Gerçekten keyfi bir  $x_0 \in [a,b]$  alındığında, onu yeteri yakın  $x = x_0 + h_x \in [a,b]$  alıp  $y = g(x)$  ve  $y_0 = g(x_0)$  için, zaten  $f(x, g(x)) = 0$  ( $\forall x \in [a,b]$ ) nedeniyle  $f(x, y) = 0 = f(x_0, y_0)$  gözlenir ve  $f$  türetilebilir olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0).h_x + f_y(x_0, y_0).k_y + h_x \cdot \varphi(h_x, k_y) + k_y \Psi(h_x, k_y) \\ &= \left( f_x(x_0, y_0) + \varphi(h_x, k_y) \right).h_x + \left( f_y(x_0, y_0) + \Psi(h_x, k_y) \right).k_y \end{aligned}$$

---

bulunur, burada  $k_y = y - y_0 = g(x) - g(x_0)$  yazılmıştır. Böylece  $y = g(x)$  değişkeninin değişim niceliği için

$$g(x) - g(x_0) = k_y = \left( -\frac{f_x(x_0, y_0) + \varphi(h_x, k_y)}{f_y(x_0, y_0) + \Psi(h_x, k_y)} \right) h_x ,$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{h_x} = -\frac{f_x(x_0, y_0) + \varphi(h_x, k_y)}{f_y(x_0, y_0) + \Psi(h_x, k_y)}$$

bulunur, dikkat:  $h_x \rightarrow 0$  ise  $x \rightarrow x_0$  olduğundan,  $g$  fonksiyonunun sürekliliği nedeniyle  $g(x) \rightarrow g(x_0)$  yani  $k_y = g(x) - g(x_0) \rightarrow 0$  ve  $(h_x, k_y) \rightarrow (0, 0)$  benzer biçimde  $\Psi(h_x, k_y) \rightarrow 0$  ve ayrıca  $f_y(x_0, y_0) + \Psi(h_x, k_y) \rightarrow f_y(x_0, y_0) \neq 0$  gözleyip,  $h_x \rightarrow 0$  için limit alarak  $g'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{f_x(x_0, g(x_0))}{f_y(x_0, g(x_0))}$  bulunur. Ayrıca şunlara dikkat edilmelidir:

$f$  fonksiyonu hipotezdeki koşulları gerçekliyorsa, onun aracılığıyla tanımlanan  $f(x, y) = 0$  denkleminin, tek türlü belirli bir sürekli  $g$  fonksiyonu için  $f(x, g(x)) = 0 (\forall x \in [a, b])$  sonucunu verdiğiini böylesce  $y$ 'nin  $x$  değişkeninin **örtük** (yani  $x$  değişkenine bağlılığı **apaçık biçimde ifade edilmemiş**) bir fonksiyonu olduğunu öğrendik. İşte bu durumda  $f(x, y) = 0$  denkleminin  $y = g(x)$  gibi bir **çözümü** vardır denilir. Unutulmasın:  $g$  sürekli fonksiyonu kesinlikle vardır ama  $x$  cinsinden açık ifadesi bilinmeyebilir. Kavramayı kolaylaştırmak için örnekler vermek yerinde olur:

**Örnek:**  $1 < a < \pi$  ve  $f(x, y) = x^3y + x \cos^2 y (\forall (x, y) \in R = [a, \pi] \times \mathbb{R})$  olsun.  $R$  bölgesinde (ve aslında  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  açık bölgesinde) türetilebilir ve dikkat edilirse ÖFT1 teoremindeki yeter koşulları gerçekler, çünkü

$$0 < m = a^2 - a \leq f_y(x, y) \leq \pi^3 + \pi = M (\forall (x, y) \in R)$$

gözlemek çok kolaydır, çünkü her  $(x, y) \in R = [a, \pi] \times \mathbb{R}$  için  $1 < a \leq x < x^2 < x^3$  ve  $p(x) = x^2 - x$  polinomu  $[a, \pi]$  aralığında **artan** olduğundan, herbir  $(x, y) \in R$  için

$$f_y(x, y) = x^3 - 2x \cos y \sin y = x^3 - x \sin 2y \geq x^3 - x > x^2 - x \geq a^2 - a$$

ve benzer biçimde  $f_y(x, y) = x^3 - x \sin 2y \leq x^3 + x \leq \pi^3 + \pi$  böylelikle, gerçekten uygun pozitif sabitler  $m$  ve  $M$  aracılığıyla  $0 < m \leq f_y(x, y) \leq M (\forall (x, y) \in R)$  olduğundan ÖFT1 nedeniyle sürekli (üstelik türetilebilir ve  $g'(x) - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = -\frac{3x^2g(x) + \cos^2 g(x)}{x^3 - x \sin 2g(x)}$  gerçekleyen) en önemlisi aşağıdaki gerçekleşecek

$$0 = f(x, g(x)) = x(x^2g(x) + \cos^2 g(x)) \quad (\forall x \in [a, \pi])$$

birimde belirlenen bir  $g = g(x)$  fonksiyonu  $0 = f(x, g(x)) \Rightarrow x^2g(x) + \cos^2 g(x) = 0 (\forall x \in [a, \pi])$  olur, bu  $g = g(x)$  fonksiyonu  $f(x, y) = 0$  denkleminin çözümüdür. Buna karşılık  $F(x, y) =$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

$x^3y + xy - 1 = y(x^3 + x) - 1$  fonksiyonu için  $h(x) = \frac{1}{x^3 + x}$  ( $\forall x \in [a, \pi]$ ) rasyonel polinomu, kolayca  $F(x, h(x)) = 0$  ( $\forall x \in [a, \pi]$ ) gerçekler; bu  $h(x)$  fonksiyonunu belirlerken ÖFT1 teoremini kullanmaya gerek olmadığı gibi  $h = h(x)$  fonksiyonunun,  $x$  cinsinden ifadesi örtük olmadan apaçık biçimde verilmiştir(belirlenebilmiştir).

### Örtük Fonksiyon Teoremi 2:

$f : K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $f_y : K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları sürekli, üstelik aşağıdaki koşullar

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ ve } f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

geçerliyse, uygun bir  $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$  için, tek türlü biçimde belirlenebilen öyle bir sürekli  $h : [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \rightarrow [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$  fonksiyonu vardır ki hem  $h(x_0) = y_0$  hem de  $f(x, h(x)) = 0$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ ) koşulları geçerlidir.

**Not:** Bu  $y = h(x)$  örtük fonksiyonunun,  $x_0$  noktasının uygun bir komşuluğunda tanımlı olduğuna özellikle dikkat edilmelidir.

**İspat:**  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  bilinmektedir. Aşağıdaki kanıtlama  $0 < f_y(x_0, y_0)$  durumunda verilmektedir,  $f_y(x_0, y_0) < 0$  durumunda kanıtlama buradan çıkarsanır. Varsayıma gereği  $f_y$  kısmi türev fonksiyonu  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunun her noktasında, özellikle  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olduğundan  $m_0 = \frac{1}{2}f_y(x_0, y_0) > 0$  pozitif sayısı ve uygun bir  $0 < \delta_1 < \varepsilon_0$  sayesinde

$$\forall (x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0], \frac{f_y(x_0, y_0)}{2} = f_y(x_0, y_0) - m_0 < f_y(x, y) < f_y(x_0, y_0) + m_0 = \frac{3f_y(x_0, y_0)}{2}$$

ve sonuçta **her**  $(x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0]$  için, üstelik  $f_y(x_0, y_0) > 0$  nedeniyle  $\frac{1}{2} < \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} < \frac{3}{2}$  böylece  $-\frac{1}{2} < 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} < \frac{1}{2}$  gözleyerek

$$\left| 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} \right| < \frac{1}{2} \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0])$$

bulunur. Şimdi bu gözlemin ardından  $K_{\delta_1}[x_0, y_0]$  kapalı komşuluğunda  $0 < \delta_1 < \varepsilon_0$  unutmadan

$$F(x, y) = y - y_0 - \frac{f(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0])$$

birimindeki  $F$  fonksiyonunu tanımlarsak kolayca

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0]) \text{ ve } F_y(x_0, y_0) = 0$$

---

ve ayrıca her  $(x, y) \in K_{\delta_1}[x_0, y_0]$  için  $|F_y(x, y)| < \frac{1}{2}$  bulunur. O halde  $I_1 = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ ,  $J_1 = [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$  kapalı aralıklarını tanımlarsak  $K_{\delta_1}[x_0, y_0] = I_1 \times J_1$  olur, ayrıca  $x \in I_1$  ve  $y_1, y_2 \in J_1$  ne olursa olsun,  $y_1$  ile  $y_2$  arasındaki herhangi  $\xi$  için  $\xi \in J_1$  olacağından  $(x, \xi) \in I_1 \times J_1 = K_{\delta_1}[x_0, y_0]$  böylece  $|F_y(x, \xi)| < \frac{1}{2}$  gözleyip aşağıdaki bulunur:

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| = |y_1 - y_2| \cdot |F_y(x, \xi)| < \frac{|y_1 - y_2|}{2} \quad (1)$$

Şimdi de  $g(x) = F(x, y_0)$  ( $\forall x \in I_1$ ) biçiminde  $I_1$  aralığında tanımlanan  $g$  fonksiyonunun sürekli olduğunu (neden?) ve  $g(x_0) = F(x_0, y_0) = y_0 - y_0 - \frac{f(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{f(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = 0$  gerçeklendiğini ve  $g$  fonksiyonu  $x_0 (\in I)$  noktasında sürekli olduğundan

$$\exists \delta_0 \in (0, \delta_1), |F(x, y_0)| = |g(x)| = |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\delta_1}{2} (\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0])$$

kısacası  $g([x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]) \subseteq [-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}]$  yani  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subseteq I_1 \cap g^{-1}([-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}]) = A_0$  gözleyiniz. Aşağıda yer alan Önerme 7 nedeniyle bir **tam metrik uzay** olan  $X = \{h \in C(A_0, J_1) : h(x_0) = y_0\}$  göz önüne alınır. Dikkat edilirse her  $x \in A_0$  ve her  $h \in X$  için  $h(x) \in h(A_0) \subseteq J_1 = [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1]$  nedeniyle  $h(x), y_0 \in J_1$  ve  $x \in A_0 = g^{-1}([-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}])$  nedeniyle  $|g(x)| \leq \frac{\delta_1}{2}$  böyledikle

$$\begin{aligned} |F(x, h(x))| &= |(F(x, h(x)) - F(x, y_0)) + g(x)| \leq |F(x, h(x)) - F(x, y_0)| + |g(x)| \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{|h(x) - y_0|}{2} + \frac{\delta_1}{2} \leq \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1 \end{aligned}$$

bulunur, burada (\*) yazılırken (1) bağıntısı kullanılmıştır. çünkü  $y_0, h(x) \in J_1$  gerçeklemektedir. Şimdi kanıtlanmanın son aşamasında bir daralma fonksiyonu tanımlayalım:  $X$  tam metrik uzayında aşağıdaki biçimde  $\varphi : X \rightarrow X$  fonksiyonunu

$$\forall h \in X, \forall x \in A_0 \text{ için } \varphi(h)(x) = y_0 + F(x, h(x))$$

tanımlarsak  $\varphi(h)$  fonksiyonu  $A_0$  kümesinde tanımlı ve sürekli (neden?) üstelik  $F(x_0, y_0) = g(x_0) = 0$  bilindiğinden  $\varphi(h)(x_0) = y_0 + F(x_0, y_0) = y_0$  olur, ayrıca her  $x \in A_0$  için  $|\varphi(h) - y_0| = |F(x, h(x))| \leq \delta_1$  yani  $h(x) \in [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1] = J_1$  ( $\forall x \in A_0$ ) nedeniyle  $\varphi(h) \in X$  ( $\forall h \in X$ ) bulunur. Ayrıca  $h_1, h_2 \in X$  ve  $x \in A_0$  ne olursa olsun  $h_1(x) \in J_1$  ve  $h_2(x) \in J_1$  olduğundan, yukarıdaki (1) bağıntısını kullanıp

$$|\varphi(h_1)(x) - \varphi(h_2)(x)| = |F(x, h_1(x)) - F(x, h_2(x))| \leq \frac{|h_1(x) - h_2(x)|}{2}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

bulunarak supremum alınırsa

$$\|\varphi(h_1) - \varphi(h_2)\| = \sup_{x \in A_0} |\varphi(h_1)(x) - \varphi(h_2)(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in A_0} |h_1(x) - h_2(x)| = \frac{\|h_1 - h_2\|}{2}$$

yani  $c_0 = \frac{1}{2}$  daralma sabiti aracılığıyla, herbir  $h_1, h_2 \in X$  için  $\varphi : X \rightarrow X$  fonksiyonu  $\|\varphi(h_1) - \varphi(h_2)\| \leq c_0 \cdot \|h_1 - h_2\|$  gerçekleştiği için bir daralma fonksiyonu olmaktadır. Aşağıdaki Önerme 7 nedeniyle  $X$  bir tam metrik uzay olduğundan, Banach Sabit Nokta Teoremi nedeniyle  $\varphi(h_0) = h_0$  gerçekleşen tek bir tane  $h_0 \in X$  **vardır**, böylelikle hem  $h_0(x_0) = y_0$  olur, hem de **her**  $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subseteq A_0$  için (dikkat:  $0 < \delta_0 < \delta_1$  seçildiği için aynı zamanda  $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subseteq [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] = I_1$  olmaktadır)  $h_0(x) \in J_1$  ve  $(x, h_0(x)) \in I_1 \times J_1 = K_{\delta_1}[x_0, y_0]$  ve  $F$  fonksiyonunun tanımı gereği  $F(x, h_0(x)) = h_0(x) - y_0 - \frac{f(x, h_0(x))}{f_y(x_0, y_0)}$  ve böylece

$$h_0(x) = \varphi(h_0)(x) = y_0 + F(x, h_0(x)) = h_0(x) - \frac{f(x, h_0(x))}{f_y(x_0, y_0)}$$

gözleyip  $f(x, h_0(x)) = 0$  ( $\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ ) bulunur. Aranan  $h$  olarak işte bu  $h_0$  fonksiyonu alınır. Eğer  $f_y(x_0, y_0) < 0$  ise  $-f$  fonksiyonuna az önceki sonuç uygulanır. Kanıtlama bitmiştir!

**Uyarı:** Yukardaki kanıtlamada, kısalık amacıyla  $I_0 = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$  yazılırsa  $I_0 \subseteq I_1 \cap g^{-1}\left(\left[-\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right]\right) = A_0$  ve ayrıca  $h \in X \subseteq C(A_0, J_1)$  nedeniyle  $h(A_0) \subseteq J_1$  gerçekleştiğini unutmadan, herbir  $x \in I_0$  için

$$(x, h(x)) \in I_0 \times h(I_0) \subseteq I_1 \times h(A_0) \subseteq I_1 \times J_1 = K_{\delta_1}[x_0, y_0]$$

ve böylece  $\delta_1 < \varepsilon_0$  nedeniyle  $(x, h(x)) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  bulunur.  $x_1 \neq x_2$  ve  $x_1, x_2 \in I_0$  için elbette  $(x_1, h(x_1)) \neq (x_2, h(x_2))$  nedeniyle sonuçta  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda, **sayılamaz sonsuz tane**  $(x, h(x))$  noktası için  $f(x, h(x)) = 0$  gerçekleştiği, böylelikle sözü edilen komşulukta  $f(x, y) = 0$  gerçekleşen sayılamaz sonsuz tane  $(x, y)$  noktasının var olduğu anlaşılır. Dikkat edilirse

$$\text{Sif}(f) = \{(x, y) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) : f(x, y) = 0\} \subseteq K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$$

**sıfır kümesi**  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda **kapalıdır** ve sayılamaz sonsuz noktalıdır. Böylelikle bu komşulukta ÖFT2 hipotezleri yerine geliyorsa, aşağıdaki

$$f(x, y) = 0$$

denkleminin, üstelik

$$h(x_0) = y_0, \quad f(x, h(x)) = 0 \quad (\forall x \in I_0)$$

---

koşullarını gerçekleyen  $y = h(x)$  gibi **örtük** bir sürekli çözümünün var olduğu anlaşıılır.

Şimdi ÖFT2'nin kanıtlanmasıında kullandığımız önermeyi görelim.

**Önerme7:**  $X$  herhangi bir topolojik uzay ( $(Y, d)$ ) ise üzerinde tanımlı  $d$  metriği **sınırlı** olan herhangi bir tam metrik uzay ise  $C(X, Y)$  bir **tam metrik uzaydır**. Üstelik  $x_0 \in X$  ve  $y_0 \in Y$  sabit noktaları ne olursa olsun  $\{f \in C(X, Y) : f(x_0) = y_0\}$  bir tam metrik uzaydır.

**İspat:**  $X$  herhangi bir topolojik uzay,  $(Y, d)$  ise  $\exists M_0 > 0, \forall y_1, y_2 \in Y, 0 \leq d(y_1, y_2) \leq M_0$  koşulunu gerçekleyen yani **sınırlı** olan  $d$  metriğiyle donatılan bir tam metrik uzay olsun. Tüm **sürekli**  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonlarının kümesi olan  $C(X, Y)$  üzerinde aşağıdaki ünlü supremum metriği tanımlıdır:

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \quad (\forall f, g \in C(X, Y))$$

Burada dikkat edilmesi gereken temel gözlem, **her**  $x \in X$  için  $f(x), g(x) \in Y$  olduğundan,  $d$  metriğinin niteliği gereği  $d(f(x), g(x)) \leq M_0$  gerçeklendiğinden, yukarıdaki sağ yandaki supremumumun **var** ve üstelik  $d^*(f, g) = \sup_{x \in X} (d(f(x), g(x))) \leq M_0$  olduğunu gösterelim. Şimdi  $(C(X, Y), d^*)$  metrik uzayının bir tam metrik uzay olduğunu gösterebiliriz. Bu metrik uzayda  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi bir Cauchy dizisi ise yani **Koş:**  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, d^*(f_n, f_m) < \varepsilon (\forall n, m \geq n_{\varepsilon})$  koşulu geçerliyse, var olan bir  $f \in C(X, Y)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*(f_n, f) = 0$  gerçekleştigini göstermeliyiz. Öncelikle **herbir**  $x \in X$  için  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi  $(Y, d)$  metrik uzayında bir Cauchy dizisi olur, çünkü her  $n, m \geq n_{\varepsilon}$  için  $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \sup_{x \in X} d(f_n(x), f_m(x)) = d^*(f_n, f_m) \leq \varepsilon$  gerçelidir ve  $(Y, d)$  bir tam metrik uzay olduğundan, zorunlu olarak herbir  $x \in X$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = y_x \in Y$  limiti tek türlü olarak belirlidir, bu yolla her  $x \in X$  için  $f(x) = y_x (= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$  biçiminde tanımlanan  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gözleyebiliriz. Öncelikle **her**  $x \in X$  için  $\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, d^*(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n, m \geq N_{\varepsilon})$  bilgisile  $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d^*(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2} (\forall n, m \geq N_{\varepsilon})$  olur, üstelik  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$  olduğundan, herbir  $n \geq N_{\varepsilon}$  için  $d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  böylece  $d^*(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  olur, ayrıca herhangi  $x_0 \in X$  alındığından her  $x \in X$  için aşağıdaki eşitsizlikler herhangi bir sabit  $n_0 > N_{\varepsilon}$  için yazılabilceğinden sonuçta

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &\leq 2 \sup_{x \in X} d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) \end{aligned}$$

böylece  $d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0))$  bulunur, bu eşitsizlikten  $f$  fonksiyonunun nasıl  $x_0 \in X$  noktasında sürekli olduğu sonucunun çıkartıldığı Topoloji Dersleri'nde gösterilir, böylece hem  $f \in C(X, Y)$  hem de  $d^*(f_n, f) < \varepsilon (\forall n \geq N_{\varepsilon})$  elde ederek  $f_n \rightarrow f$  yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^*(f_n, f) = 0$  bulunur.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

Demek ki  $(C(X, Y), d^*)$  metrik uzayında **her** Cauchy dizisi yakınsamaktadır, buysa istenendir. İkinci iddiayı göstermiyoruz (Ödevdir).

**Uyarı:** ÖFT2 teoremi şunu kanıtlamıştır: Açık bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde tanımlı ve sürekli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu için, uygun bir  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında eğer  $f(x_0, y_0) = 0$  oluyor, üstelik bu noktanın bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$  kısmi türev fonksiyonu sürekli olup  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  gerçekleşeniyorsa, bu durumda uygun bir  $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$  için  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f(x, y) = 0$  denklemine karşılık

$$\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \text{ i} \tilde{\text{A}} \text{şin } f(x, g(x)) = 0$$

koşulunu gerçekleyen tam bir tane  $g : [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \rightarrow [y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0]$  **sürekli** fonksiyonu vardır, üstelik  $g(x_0) = y_0$  gerçekleşir. Kısacası  $f(x_0, y_0) = 0$  ve  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  ise  $K_\varepsilon(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f(x, y) = 0$  denklemi sağı  $\frac{1}{2}$ layan sayı  $\frac{1}{2}$ lamaz sonsuz tane  $(x, y)$  noktası  $\frac{1}{2}$ nda  $y = g(x)$  gibi örtük bir çözümü **vardır**. Üstelik  $f$  fonksiyonu eğer  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda türetilipse  $g$  örtük çözüm de türetilibildir ve

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \quad (\forall x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0])$$

gerçekleştiği ÖFT1'in ardından gelen **Dikkat**'de yapıldığı gibi kanıtlanır. ÖFT2 Teoreminin bir benzeri yüksek boyutlar için aynen geçerlidir:

### Örtük Fonksiyon Teoremi 3:

$f = f(x, y, z)$  fonksiyonu açık bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde tanımlı ve bir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  için  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$  ise üstelik uygun bir  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0, z_0)$  küp komşuluğunda  $f$  türetilip,  $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$  kısmi türev fonksiyonu sürekli ve  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  ise uygun bir  $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$  için  $K_{\delta_0}(x_0, y_0, z_0)$  komşuluğunda  $f(x, y, z) = 0$  denklemi,  $K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$  komşuluğunda kendisi ve kısmi türevleri tanımlı olup

$$f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)) \text{ ve } g(x_0, y_0) = z_0$$

gerçekleyen biricik  $z = g(x, y)$  çözümü VARDIR ve üstelik aşağıdakiler geçerlidir:

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}, \quad g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

**Ispat:**  $g$  örtük çözümün varlığı ÖFT2'deki gibi kanıtlanır. Şimdi  $g$  fonksiyonunun kısmi türevlerini belirleyelim:  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  noktasındaki herhangi bir  $(x, y)$  noktası için, yeterince küçük  $h_x, h_y, h_z$  niçelikleri sayesinde  $x = x_0 + h_x, y = y_0 + h_y, z = z_0 + h_z$  olur ve  $z = g(x, y), z_0 = g(x_0, y_0)$  ve  $f(x, y, z) = f(x, y, g(x, y)) = 0 = f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  kısacası

$$0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

ve üstelik  $f$  fonksiyonunun türetilebilme koşulunu kullanıp

$$\begin{aligned}
0 &= f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0).h_x + f_y(x_0, y_0, z_0).h_y + f_z(x_0, y_0, z_0).h_z \\
&\quad + h_x.\varphi_1(h_x, h_y, h_z) + h_y.\varphi_2(h_x, h_y, h_z) + h_z.\varphi_3(h_x, h_y, h_z) \\
&= \left( f_x(x_0, y_0, z_0) + \varphi_1(h_x, h_y, h_z) \right) h_x + \left( f_y(x_0, y_0, z_0) + \varphi_2(h_x, h_y, h_z) \right) h_y \\
&\quad + \left( f_z(x_0, y_0, z_0) + \varphi_3(h_x, h_y, h_z) \right) h_z
\end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  fonksiyonları vardır. Sonuçta  $z = g(x, y)$  değişkeni için üstelik  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  unutmadan

$$\begin{aligned}
h_z &= z - z_0 = g(x, y) - g(x_0, y_0) = \left( -\frac{f_x(x_0, y_0, z_0) + \varphi_1(h_x, h_y, h_z)}{f_z(x_0, y_0, z_0) + \varphi_3(h_x, h_y, h_z)} \right) h_x \\
&= \left( -\frac{f_y(x_0, y_0, z_0) + \varphi_2(h_x, h_y, h_z)}{f_z(x_0, y_0, z_0) + \varphi_3(h_x, h_y, h_z)} \right) h_y
\end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse  $(h_x, h_y) \rightarrow (0, 0)$  için  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  ve  $g$  fonksiyonunun sürekliliği nedeniyle  $g(x, y) \rightarrow g(x_0, y_0)$  yani  $h_z \rightarrow 0$  böylece  $(h_x, h_y, h_z) \rightarrow (0, 0, 0)$  ve  $\varphi_i$  fonksiyonlarının niteliği gereği  $\varphi_i(h_x, h_y, h_z) \rightarrow \varphi_i(0, 0, 0) = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gözleyip,  $h_y = 0$  seçilmesi durumunda  $y = y_0 + h_y = y_0$  olacağından yukarıda bulunanlardan

$$\frac{g(x_0 + h_x, y_0) - g(x_0, y_0)}{h_x} = -\frac{f_x(x_0, y_0, z_0) + \varphi_1(h_x, h_y, h_z)}{f_z(x_0, y_0, z_0) + \varphi_3(h_x, h_y, h_z)}$$

ve  $h_x \rightarrow 0$  iken(zaten  $h_y = 0$  olduğundan)  $(h_x, h_y) \rightarrow (0, 0)$  ve sonuçta yukarıda gözlendiği gibi  $\varphi_i(h_x, h_y, h_z) \rightarrow 0$  olduğundan

$$\begin{aligned}
g_x(x_0, y_0) &= \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h_x, y_0) - g(x_0, y_0)}{h_x} = -\frac{f_x(x_0, y_0, z_0)}{f_z(x_0, y_0, z_0)} \\
&= -\frac{f_x(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}
\end{aligned}$$

istenilen sonucu bulunur.  $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$  kısmi türev fonksiyonu sürekli gerçek değerli ve  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  olduğundan, uygun bir  $0 < \delta_1 \leq \delta_0$  için  $f_z(x, y, z) \neq 0 (\forall (x, y, z) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0, z_0))$  bulunacağından (nasıl?) bu kanıtlama yöntemiyle, her  $(x, y) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0)$  için

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x))}{f_z(x, y, g(x))}, \quad g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x))}{f_z(x, y, g(x))}$$

bulunur, aranan komşuluk olarak  $K_{\delta_1}(x_0, y_0, z_0)$  alınır. bitti!

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

**Tanım9(Jakobyen):** Birinci mertebeden kısmi türevleri, bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde tanımlı olan  $f = f(x, y)$  ve  $g = g(x, y)$  fonksiyonları için  $R$  bölgesinde tanımlanan

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = f_x g_y - f_y g_x = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

fonksiyonuna, kısacası herbir  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)$$

değerini alan fonksiyona,  $f$  ve  $g$  çiftinin **Jakobyeni** denir. Analiz, Mekanik ve Termodinamik gibi alanların bu önemli kavramını Alman Matematikçi **Karl Gustav Jacop Jacobi** 1830'larda tanımlamıştır. Dikkat edilirse

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, x)} = f_y g_x - f_x g_y = -(f_x g_y - f_y g_x) = -\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

ve benzer biçimde  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(g, f)}{\partial(x, y)}$  gerçekleşir. Benzer biçimde bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde kısmi türevleri tanımlı  $f = f(x, y, z)$ ,  $g = g(x, y, z)$  ve  $h = h(x, y, z)$  fonksiyonları için aşağıdaki tanım geçerlidir:

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = f_x \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} - f_y \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, z)} + f_z \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}$$

ya da paydalardaki değişkenlerin sırasını bozmadan ve  $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, z)} = -\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)}$  gözleyerek bu son tanım şöyle de verilebilir:

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = f_x \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} + f_y \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)} + f_z \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)}$$

Örneğin  $f(x, y, z) = x + 3y^2 - z$ ,  $g(x, y, z) = 2xy^2z$ ,  $h(x, y, z) = 2z^2 - xy$  ise

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{(1, -1, 0)} &= f_x(1, -1, 0) \left. \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} \right|_{(1, -1, 0)} + f_y(1, -1, 0) \left. \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)} \right|_{(1, -1, 0)} \\ &\quad + f_z(1, -1, 0) \left. \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} \right|_{(1, -1, 0)} = 10 \end{aligned}$$

gözleyiniz. Ayrıca  $u = u(x, y)$  ve  $v = v(x, y)$  türetilen fonksiyonları, sırasıyla apaçık biçimde tanımlanmadan  $u^2 - v = 3x + y$  ve  $u - 2v^2 = x - 2y$  gerçekliyorlarsa,  $u_x$  ve  $v_y$  kısmi türevlerini  $u$

ve  $v$  cinsinden

$$u_x = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \\ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ \end{vmatrix}} = \frac{1 - 12v}{1 - 8uv} \quad \text{ve}$$

$$v_y = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = \frac{4u + 1}{8uv - 1}$$

biçiminde belirleriz, burada  $8uv \neq 1$  varsayıımı altında,  $f$  ve  $g$  türetilebilir fonksiyonları  $f(x, y, u, v) = u^2 - v - 3x - y$  ve  $g(x, y, u, v) = u - 2v^2 - x - y$  biçiminde tanımlanmış olup, verilen bağıntılarla  $f(x, y, u, v) = 0$  ve  $g(x, y, u, v) = 0$  gözleyerek aşağıdaki önerme kullanılmıştır:

**Önerme9:**  $u = u(x, y)$  ve  $v = v(x, y)$  ile  $f = f(x, y, u, v)$  ve  $g = g(x, y, u, v)$  fonksiyonları türetilebilir ve  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \neq 0$  ve  $f(x, y, u, v) = 0, g(x, y, u, v) = 0$  ise  $u_x, v_x, u_y$  ve  $v_y$  kısmi türevleri  $R$  bölgesinde jakobyenler aracılığıyla belirlenir, sözgelimi şu geçerlidir:

$$u_x = -\frac{1}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}.$$

**Kanıtlama:**  $R$  bölgesinde  $0 = f(x, y, u, v)$  ve  $0 = g(x, y, u, v)$  olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= df = f_x dx + f_y dy + f_u du + f_v dv \\ &= f_x dx + f_y dy + f_u(u_x dx + u_y dy) + f_v(v_x dx + v_y dy) \\ &= (f_x + f_u u_x + f_v v_x)dx + (f_y + f_u u_y + f_v v_y)dy \end{aligned}$$

nedeniyle  $f_x + f_u u_x + f_v v_x = 0$  ve  $f_y + f_u u_y + f_v v_y = 0$  ve benzer şeyler  $g$  fonksiyonu için yapılarak, sonuçta

$$\begin{array}{ll} f_u u_x + f_v v_x = -f_x & f_u u_y + f_v v_y = -f_y \\ g_u u_x + g_v v_x = -g_x & g_u u_y + g_v v_y = -g_y \end{array}$$

denklem sistemleri bulunur, üstelik katsayılar determinantı olan

$$J = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

jakobyeni,  $R$  bölgesinde **sıfır olmadığından** ünlü Cramer Teoremi kullanılarak, örneğin  $u_x$  için

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -f_x & f_v \\ -g_x & g_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}$$

ve benzer biçimde  $v_y = -\frac{1}{J} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, y)}$  bulunur. Siz  $u_y$  ve  $v_x$  kısmi türevlerini jakobyenler aracılığı ile belirleyiniz. Demek ki  $f$  ve  $g$ 'nin örtük fonksiyonlara göre jakobyeni bir  $R$  bölgesinde sıfırdan farklı ise, örtük fonksiyonların kısmi türevleri belirlenebilmektedir.

Sirada iki önemli teorem vardır:

### Ters Fonksiyon Teoremi 1:

Bir  $R = [a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  bölgesinde  $f = f(x, y, u, v)$  ve  $g = g(x, y, u, v)$  fonksiyonları türetilebilir olsun.  $R$  bölgesinde  $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$  ve  $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} \neq 0$  koi $\frac{1}{2}$  ulları $\frac{1}{2}$  ni $\frac{1}{2}$  sağlayan herbir  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0) \in R$  noktası için  $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$  noktasının uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda tanımlı ve kısmi türevleri tanımlı olan

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \Psi(x, y) \quad (\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

ters çözümüleri VARDIR.

**Kanıtlama:** Sözü edilen  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  noktası için varsayılm gereği

$$0 \neq \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} = f_u(x_0, y_0, u_0, v_0)g_v(x_0, y_0, u_0, v_0) - f_v(x_0, y_0, u_0, v_0)g_u(x_0, y_0, u_0, v_0)$$

olduğundan

$$\text{ya } f_u(x_0, y_0, u_0, v_0)g_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0 \text{ ya da } 0 \neq f_v(x_0, y_0, u_0, v_0)g_u(x_0, y_0, u_0, v_0)$$

gerçekleşir. İlk koşulun gerçekleştiğini varsayıalım. Bu durumda

$$g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 \text{ ve } g_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0$$

ve aynı zamanda  $f(x_0, y_0, x_0, u_0) = 0$  ve  $f_u(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0$  bulunur. Dolayısıyla ÖFT3 benzeri teoremlle ilk bağıntılardan, uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0, u_0)$  komşuluğu tanımlı olup

$$v = G(x, y, u), \quad v_0 = G(x_0, y_0, u_0), \quad g(x, y, u, G(x, y, u)) = 0 \quad (\forall(x, y, z) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0, u_0))$$

ve ayrıca

$$G_u(x, y, u) = -\frac{g_u(x, y, u, G(x, y, u))}{g_v(x, y, u, G(x, y, u))} \quad (\forall(x, y, z) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0, z_0))$$

koşul ve özelliklerini gerçekleyen, kısmi türevlere sahip  $v = G(x, y, u)$  örtük çözümü vardır. Onun aracılığıyla

$$F(x, y, u) = f(x, y, u, G(x, y, u)) \quad (\forall(x, y, z) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0, u_0))$$

büçiminde tanımlanan  $F$  fonksiyonu için zincir kuralı gereği  $F_u = f_u + f_v G_u$  olduğundan,  $v_0 = G(x_0, y_0, u_0)$  unutmadan kolayca

$$\begin{aligned} \text{hem } F_u(x_0, y_0, u_0) &= f_u(x_0, y_0, u_0, G(x_0, y_0, u_0)) + f_v(x_0, y_0, u_0, G(x_0, y_0, u_0)).G_u(x_0, y_0, u_0) \\ &= f_u \Big|_{P_0} + f_v \left( -\frac{g_u}{g_v} \right) \Big|_{P_0} = \frac{1}{g_v(x_0, y_0, u_0, G(x_0, y_0, u_0))} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{hem de } F(x_0, y_0, u_0) = f(x_0, y_0, u_0, G(x_0, y_0, u_0)) = f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$$

gerçekleştığından ÖFT3 kullanılarak  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda tanımlı uygun bir  $u = \varphi(x, y)$  örtük çözümü sayesinde

$$u_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad (\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

bulunur,  $(x, y, u) = (x, y, \varphi(x, y)) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0, u_0)$  unutmadan  $v = G(x, y, u) = G(x, y, \varphi(x, y))$  bulunur,  $\Psi(x, y) = G(x, y, \varphi(x, y)) \quad (\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$  tanımlayarak istenenler elde edilmiş olur.

**Ters Fonksiyon Teoremi 2:**  $\emptyset \neq R \subseteq \mathbb{R}^n$  bölgesi açık ve herbir  $1 \leq i \leq n$  indisine için  $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonları  $R$  bölgesinde tanımlı, gerçek değerli ve türetilebilir olsun. Eğer herbir  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$  noktasında  $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \Big|_P \neq 0$  ise,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  vektör değerli fonksiyonu,  $R$  bölgesinin her noktasının uygun bir komşuluğunda bire-birdir ve bu komşulukta  $x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1 \leq i \leq n)$  ters dönüşümleri tanımlıdır ve kısmi türevleri vardır.

**Kanıtlama:** Bkz. C. Buck, Advanced Calculus, McGrawHill, sayfa 276-277.

**Dikkat:** Yukardaki teoremlerde, ters çözümler **yerel çözümelerdir**, kısacası  $R$  bölgesinin her noktasının uygun bir komşuluğunda tanımlıdır, fakat bu işlemler  $R$  bölgesinin her noktasında yapılabildiği için, jakobyen  $R$  bölgesinde sıfırdan farklı ise,  **$R$  bölgesinde ters çözümeler vardır** denilir. TFT2 teoreminden, kolayca şu elde edilir:

**Önerme10:** Bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde türetilebilir  $u = u(x, y)$  fonksiyonu için  $u_x(x_0, y_0) \neq 0$  ise  $(x_0, y_0) \in R$  noktasının uygun bir komşuluğunda  $x = x(u, y)$  ters çözümü vardır. Bu ters çözümün kısmi türevleri tanımlıdır.

**Kanıtlama:**  $R$  bölgesinde  $v = v(x, y)$  fonksiyonu  $v(x, y) = y$  büçiminde tanılanırsa,  $R$  bölgesinde apaçık biçimde  $v_x = 0$  ve  $v_y = 1$  olur, özel olarak  $v_x(x_0, y_0) = 0$  ve  $v_y(x_0, y_0) = 1$  gerçekleştiğinden,

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

kolayca  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} = u_x(x_0, y_0) \cdot v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0) \cdot v_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) \neq 0$  bulunup, TFT2 teoremi ile,  $(x_0, y_0)$  noktasının uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $x = x(u, v) = x(u, y)$  ters çözümünün kısmi türevleri tanımlıdır.

### Örnekler4:

1)  $u, v$  değişkenlerinin bir  $R$  aralığı  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  karesinde, türetilebilir  $x = f(u, v)$  ve  $y = g(u, v)$  fonksiyonları  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  gerçeklerse, gösteriniz:

$$v_x = -\frac{y_u}{J}, \quad v_y = \frac{x_u}{J}, \quad u_x = \frac{y_v}{J}, \quad u_y = -\frac{x_v}{J}$$

Gerçekten TFT2 teoremi nedeniyle,  $u = u(x, y)$  ve  $v = v(x, y)$  ters çözümleminin, her noktanın uygun bir komşuluğunda geçerli olduğunu gözleyerek,  $x = f(u(x, y), v(x, y))$  ve  $y = g(u(x, y), v(x, y))$  eşitliklerinde  $x$  değişkenine göre türev alarak

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = f_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial x} = g_x = g_u u_x + g_v v_x$$

yani  $\begin{cases} f_u u_x + f_v v_x = 1 \\ g_u u_x + g_v v_x = 0 \end{cases}$  denklem sisteminden, Cramer Teoremiyle

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} f_u & 1 \\ g_u & 0 \end{vmatrix}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = \frac{-g_u}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} = \frac{-y_u}{J}, \quad u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_v \\ 0 & g_v \end{vmatrix}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} = \frac{g_v}{J} = \frac{y_v}{J}$$

bulunur. Buna karşılık, yukarıdaki eşitlikleri  $y$  değişkenine göre türetip  $0 = f_y = f_u u_y + f_v v_y, 1 = g_y = g_u u_y + g_v v_y$  denklem sisteminin çözümlerinden  $u_y = \frac{-x_v}{J}$  ve  $v_y = \frac{x_u}{J}$  bulunur.

2)  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  ise  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$  gösteriniz. Gerçekten bu çarpım

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u u_x + x_v v_x & x_u u_y + x_v v_y \\ x_u u_x + x_v v_x & y_u u_y + y_v v_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

gerçekler, örneğin 1) örneğinin çözümünde  $1 = f_u u_x + f_v v_x = x_u u_x + x_v v_x$  ve  $0 = g_u u_x + g_v v_x = y_u u_y + y_v v_x$  gerçekleştiği gözlenmiştir. Ayrıca 1) çözümünde belirlenen kısmi türevleri kullanarak da

$$\begin{aligned} x_u u_x + x_v v_x &= x_u \cdot \frac{y_v}{J} + x_v \cdot \frac{-y_u}{J} = \frac{1}{J}(x_u y_v - x_v y_u) = \frac{1}{J} \cdot J = 1, \\ y_u u_y + y_v v_x &= y_u \cdot \frac{y_v}{J} + y_v \cdot \frac{-y_u}{J} = \frac{1}{J}(y_u y_v - y_v y_u) = \frac{1}{J} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

bularak aynı sonuca ulaşabiliriz.

3) Bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde  $u = f(x, y)$  ve  $v = g(x, y)$  fonksiyonları türetilebilirse  $u_x x_u + v_x x_v = 1$  gerçeklendiğini gösteriniz.

Bunun bir önceki örnekte çözüldüğüne dikkat ediniz.

4)  $f(x, y, r, s) = 0$  ve  $g(x, y, r, s) = 0$  ise  $y_r r_x + y_s s_x = 0$  gösteriniz. Gerçekten, burada  $r = r(x, y)$  ve  $s = s(x, y)$  türetilebilir olup  $J_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(r, s)}$  ve  $J_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$  jakobyenlerinin sıfırdan farklı oluşları varsayımlı altında, Önerme 9 kullanılrsa

$$y_s = -\frac{\frac{(f, g)}{\partial(s, x)}}{\frac{(f, g)}{\partial(y, x)}} = \frac{\frac{(f, g)}{\partial(x, s)}}{\frac{(f, g)}{\partial(y, x)}}, \quad s_x = -\frac{\frac{(f, g)}{\partial(x, r)}}{\frac{(f, g)}{\partial(s, r)}} = \frac{\frac{(f, g)}{\partial(r, x)}}{\frac{(f, g)}{\partial(s, r)}}$$

ve böylece aşağıdaki bulunur:

$$y_s s_x = \frac{\frac{(f, g)}{\partial(s, x)}}{\frac{(f, g)}{\partial(y, x)}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(f, g)}{\partial(r, x)} \\ \frac{(f, g)}{\partial(r, s)} \end{pmatrix} = \left( -\frac{\frac{(f, g)}{\partial(r, x)}}{\frac{(f, g)}{\partial(y, x)}} \right) \begin{pmatrix} \frac{(f, g)}{\partial(x, s)} \\ \frac{(f, g)}{\partial(r, s)} \end{pmatrix} = y_r (-r_x) = -y_r r_x$$

5)  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde  $u = u(x, y)$  ve  $v = v(x, y)$  türetilebilirse ve tek değişkenli ve türetilebilir  $f$  fonksiyonu aracılığıyla  $v = f(u(x, y)) = (f \circ u)(x, y)$  ise  $R$  bölgesinde  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$  olur, kısacası herbir  $(x_0, y_0) \in R$  için  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$  gerçekleşir. Gerçekten, açık biçimde  $v_x = f'(u).u_x$  ve  $v_y = f'(u).u_y$  olduğundan, aşağıdaki bulunur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0)} &= u_x(x_0, y_0).v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0)v_x(x_0, y_0) \\ &= f'(u).[u_x(x_0, y_0).u_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0)u_x(x_0, y_0)] = f'(u).0 = 0 \end{aligned}$$

6) Her  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  ve herbir  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ise ve bunlar türetilebilirse

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{(-1)}{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

olur. Gerçekten  $n = 2$  için kanıtlama vermek yeterlidir, genel durum benzer biçimde kanıtlanır.

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \quad \text{ve} \quad f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \quad \text{ise}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

$$\begin{aligned} 0 = df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 \right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) dx_2 \end{aligned}$$

ve benzer şeyler  $f_2$  fonksiyonu için yapılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

denklem sisteminden

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\partial(f_1, f_2)} \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\partial(f_1, f_2)} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

ve benzer biçimde  $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\partial(f_1, f_2)} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)}$  bulunur. Siz  $f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$  ve  $f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$  verildiğinde sözgelimi

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\partial(f_1, f_2)} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, x_3)}$$

bulunuz. Bu örnekteki sonuçların Önerme 9'dakileri genelleştirdiğini gözleyiniz.

7)  $x = f(u, v, w)$ ,  $y = g(u, v, w)$ ,  $z = h(u, v, w)$  türetilebilir fonksiyonları verilsin  $u_x, v_x, w_x, u_y, v_y, w_y, \dots$  kısmi türevlerini Jakobyenler aracılığıyla belirleyelim. Burada, sözgelimi bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde  $J = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$  varsayılmaktadır. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial x} = f_x = f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x = x_u u_x + x_v v_x + x_w w_x \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial x} = g_x = g_u u_x + g_v v_x + g_w w_x = y_u u_x + y_v v_x + y_w w_x \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial x} = h_x = h_u u_x + h_v v_x + h_w w_x = z_u u_x + z_v v_x + z_w w_x \end{aligned}$$

ve böylece katsayılar determinantı olan  $J \neq 0$  olduğundan Cramer Teoremi ile sözgelimi

$$u_x = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & x_v & x_w \\ 0 & y_v & y_w \\ 0 & z_v & z_w \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}}{J}, \quad v_x = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, w)}}{J}$$

bulunur. Siz  $u_y = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)}$  ve  $v_y = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, w)}$  bulup ötekileri hesaplayınız.

8) Bir önceki örnekteki jakobyenin  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$  gerçekliğini gösterin.

Gerçekten bu jakobyenlerin çarpımı aşağıdakidir:

$$\begin{vmatrix} x_u u_x + x_v v_x + x_w w_x & x_u u_y + x_v v_y + x_w w_y & x_u u_z + x_v v_z + x_w w_z \\ y_u u_x + y_v v_x + y_w w_x & y_u u_y + y_v v_y + y_w w_y & y_u u_z + y_v v_z + y_w w_z \\ z_u u_x + z_v v_x + z_w w_x & z_u u_y + z_v v_y + z_w w_y & z_u u_z + z_v v_z + z_w w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

sözgelimi birinci sütun bir öncekiörnekte hesaplanmıştır, öteki sütunlar da tümüyle benzer biçimde hesaplanabilir. Ayrıca, bir öncekiörnekte belirlenen kısmi türev değerleri kullanılarak da bu determinanı hesaplayabiliriz, sözgelimi  $u_y = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)}$ ,  $v_y = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, w)}$  ve  $w_y = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$  olarak belirlendiğinden, ikinci sütunda ilk iki ifade

$$\begin{aligned} x_u u_y + x_v v_y + x_w w_y &= \frac{1}{J} \left( -x_u \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)} + x_v \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, w)} - x_w \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right) \\ &= \frac{1}{J} \left( -x_u(x_v z_w - x_w z_v) + x_v(x_u z_w - x_w z_u) - x_w(x_u z_v - x_v z_u) \right) \\ &= \frac{1}{J} \cdot 0 = 0 \quad \text{buna karşılık} \\ y_u u_y + y_v v_y + y_w w_y &= \frac{1}{J} \left( -y_u \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)} + y_v \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, w)} + y_w \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right) = 1 \end{aligned}$$

olur, çünkü köşeli parantezin içi, dikkat edilirse  $J$ 'dir, çünkü

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = (\text{ikinci satır'a göre açarak}) \\ &= -y_u \begin{vmatrix} x_v & x_w \\ z_v & z_w \end{vmatrix} + y_v \begin{vmatrix} x_u & x_w \\ z_u & z_w \end{vmatrix} - y_w \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ &= -y_u \frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)} + y_v \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, w)} - y_w \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu ve öncekiörnekte şuna dikkat edilmiştir:  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$  olduğundan (bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde) TFT2 teoremi kullanılarak ters  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  ve  $w = w(x, y, z)$  türetilabilir fonksiyonları ve dolayısıyla onların kısmi türev fonksiyonları vardır (iyi tanımlıdır).

9) Türetilen  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde  $f(x, y, z) = 0$  ve  $g(x, y, z) = 0$  ise, paydalardaki Jakobyenler sıfır olmadıkça aşağıdakiler geçerlidir:

$$\frac{\frac{dx}{\partial(f, g)}}{\frac{dy}{\partial(y, z)}} = \frac{\frac{dy}{\partial(f, g)}}{\frac{dz}{\partial(z, x)}} = \frac{\frac{dz}{\partial(f, g)}}{\frac{dx}{\partial(x, y)}}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

Gerçekten, öncelikle amacımız  $R$  bölgesinde  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}dx + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}dy = 0$  gerçekleştigiğini göstermektir, böylelikle  $R$  bölgesinde  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}dy = -\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}dx = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}dx$  ve jakobyenler sıfır olmadığından onlarla bölüm yaparak şu istenen sonuç bulunacaktır:

$$\frac{1}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}}dy = \frac{1}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}}dx$$

Demek ki herbir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  için  $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} .dx + \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} .dy = 0$  göstermek istiyoruz. Tüm jakopyenler bu noktada hesaplanmak üzere, eğer  $g_z(x_0, y_0, z_0) = 0$  gerçekleşiyorsa, kolayca

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}dx + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}dy = (-g_x f_z dx - g_y f_z dy) = 0$$

bulunur, çünkü  $R$  bölgesinde  $g(x, y, z) = 0$  ve sonuçta  $0 = dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz$  olduğundan, özel olarak

$$0 = dg \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = [g_x dx + g_y dy + g_z dz] \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = [g_x dx + g_y dy] \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

geçerlidir. Yok eğer  $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  gerçekleşiyorsa, bu kez ÖFT3 teoremi ile, bu noktanın uygun bir komşuluğunda hem  $z = h(x, y)$  örtük çözümü var yani  $g(x, y, h(x, y)) = 0$  üstelik  $z_x = -\frac{g_x}{g_z}, z_y = -\frac{g_y}{g_z}$  olur, böylelikle  $f_x + f_z z_x = f_x - \frac{f_z g_x}{g_z} = \frac{1}{g_z} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}$  ve  $f_y + f_z z_y = \frac{1}{g_z} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}$  bulup, zaten  $0 = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = f_x dx + f_y dy + f_z(z_x dx + z_y dy) = (f_x + f_z z_x)dx + (f_y + f_z z_y)dy$  nedeniyle

$$0 = (f_x + f_z z_x)dx + (f_y + f_z z_y)dy = \frac{1}{g_z} \left[ \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}dx + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}dy \right]$$

sonuçta bu komşulukta geçerli olan bu eşitlikten, ve  $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  olduğunu unutmadan özel olarak  $(x_0, y_0, z_0)$  noktası için

$$0 = \frac{1}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \left[ \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} dx + \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} dy \right] \text{ nedeniyle}$$

$$0 = \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} dx + \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} dy$$

istenilen sonucuna ulaşılır. Bu örnekteki öteki eşitlikleri siz gösteriniz.

10)  $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$  ve ayrıca bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde  $F$  fonksiyonu için  $F(x, y, z) = 0$  ise ve tüm bunlar türetilebilirse, gösteriniz:

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}dx + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}dy + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dz = 0.$$

Gerçekten, çalışılan bir noktada tüm bu jakobyenler sıfırsa zaten eşitlik apaçıkta. Eğer jakobyenlerden en az birisi, sözgelimi  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  çalışılan noktada sıfırdan farklı ise, bu noktada (aşağıda görüleceği gibi)

$$F_x = -\frac{F_z}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \cdot \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}, \quad F_y = -\frac{F_z}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

gerçekleşir, çünkü  $R$  bölgesinde  $F(x, y, z) = 0$  nedeniyle, bu noktada

$$\begin{aligned} (*)0 &= dF \Big|_{(x,y,z)} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= F_x(x_u du + x_v dv) + F_y(y_u du + y_v dv) + F_z(z_u du + z_v dv) \\ &= (F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u)du + (F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v)dv \end{aligned}$$

ve  $F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0 = F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v$  ve sonuçta katsayılar determinantı  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  olan aşağıdaki

$$\begin{aligned} x_u F_x + y_u F_y &= -F_z z_u \\ x_v F_x + y_v F_y &= -F_z z_v \end{aligned}$$

denklem sistemini çözerek

$$F_x = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -F_z z_u & y_u \\ -F_z z_v & y_v \end{vmatrix} = -\frac{F_z}{J} \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix} = -\frac{F_z}{J} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} \text{ ve } F_y = -\frac{F_z}{J} \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

ve tüm bu değerler (\*) denkleminde yerleştirilerek

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{F_z}{J} \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} dx - \frac{F_z}{J} \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} dy + F_z dz \\ &= \frac{F_z}{J} \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dx + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dy + J dz \right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen çıkar(nasıl?).

### Ödevler

- 1)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, v = \arctan(\frac{y}{x})$  ( $\forall (x, y) \in R = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ ) dönüşümü altında  $z = z(x, y)$  fonksiyonu için,  $(x + y)z_x - (x - y)z_y = z_u - z_v$  olur. gösteriniz.

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

(Yol gös: Önce  $R$  bölgesinde  $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 > 0$  gözleyip  $x = x(u, v)$  ve  $y = y(u, v)$  ters çözümlerinin varlığını çıkarsayıp  $z = z(x(u, v), y(u, v))$  gözleyiniz.)

2)  $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - \{(0, 0)\}$  açık bölgesinde ikinci mertebe kısmi türevleri tanımlı  $z = z(x, y)$  için  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$  dönüşümü altında ilk sorudaki yol göstermeden yararlanarak gösterin:

$$\frac{z_{xx}(x, y) - z_{yy}(x, y)}{x^2 + y^2} = 4(z_{uu} + z_{vv})$$

3)  $R = (0, \infty) \times (0, \infty)$  açık bölgesinde, ikinci mertebe kısmi türevleri tanımlı olan  $z = z(x, y)$  için  $u = \ln(x + y), v = \ln \frac{y}{x}$  dönüşümü altında  $2z_{uv} - (e^{-v} + e^v)z_v + (e^{-v} - e^v)z_{vv} = z_{xx} - z_{yy}$  gösterin.

4)  $R = (\mathbb{R} - 0) \times \mathbb{R}$  açık bölgesinde  $z_{xx} + z_{yy} = 0$  Laplace denklemi  $u = x^2 + y^2, v = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$  dönüşümü altında aşağıdakine dönüsür gösteriniz:  $z_u + uz_{uu} + \frac{1}{4u}z_{vv} = 0$

5)  $xy(z_{xx}) + z_{yy} - (x^2 + y^2)z_{xy} + yz_x + xz_y = 0$  denkleminin  $x = \frac{\sqrt{u+v} + \sqrt{u-v}}{\sqrt{2}}$  ve  $y = \frac{\sqrt{u+v} - \sqrt{u-v}}{\sqrt{2}}$  dönüşümleri altında  $(v^2 - u^2)z_{uv} + vz_u = 0$  biçimine geldiğini gösteriniz. (Yol gös:  $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), v = xy$  gözleyiniz)

6)  $x^2z_{xx} + y^2z_{yy} - (x^2 + y^2)z_{xy} = 0$  denklemi  $u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  dönüşümyle  $u(uv - 4)z_{uv} + 2z_v = 0$  heline gelir gösteriniz.

**İki Değişkenli Fonksiyonlarda Ortalama Değer Teoremi:**  $f = f(x, y)$  fonksiyonu bir  $R = (a, b) \times (c, d)$  açık bölgesinde tanımlı ve kısmi türevlere sahipse, her  $(x, y) \in R$  ve yeterince küçük  $h$  ve  $k$  gerçek sayıları için, bunlara bağlı sabit bir  $0 < \theta < 1$  için aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + hf_x(x + h\theta, y + k\theta) + kf_y(x + h\theta, y + k\theta).$$

**Kanıtlama:** Amacımız, herhangi sabit bir  $(x_0, y_0) \in R$  alındığında  $x_0 \in (a, b)$  ve  $y_0 \in (c, d)$  nedeniyle  $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \subseteq (a, b)$  ve  $(y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0) \subseteq (c, d)$  gerçekleşenecek biçimde  $\delta_0 > 0$  var olduğundan (neden?),  $|h| < \delta_0$  ve  $|k| < \delta_0$  olmak üzere, var olan bir  $0 < \theta < 1$  aracılığıyla

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + k\theta) + kf_y(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta).$$

gerçeklendiğini göstermektir, böylelikle teorem kanıtlanmış olacaktır. Dikkat: Her  $t \in [0, 1]$  için  $|ht| \leq |h| < \delta_0$  ve  $|kt| \leq |k| < \delta_0$  böylece  $x_0 + ht \in (a, b), y_0 + kt \in (c, d)$  yani  $(x_0 + ht, y_0 + kt) \in R$  gözleyerek  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) (\forall t \in [0, 1])$  biçiminde tanımlanan tek değişkenli  $g$  fonksiyonunun Teorem2 nedeniyle türetilebilir olduğu (oradaki  $u(t)$  ve  $v(t)$  yerine sırasıyla  $x_0 + ht$  ve  $y_0 + kt$  alınız) anlaşılır. Üstelik

$$g'(t) = h.f_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + k.f_y(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (\forall t \in (0, 1))$$

---

geçerlidir (neden?). O halde ünlü Ortalama Değer Teoremiyle  $g(1) - g(0) = g'(\xi_0)$  olacak biçimde bir  $0 < \xi_0 < 1$  vardır ve yaygın kullanıma uyarak bu gerçek sayıyı  $\theta$  işaretü ile yazarak sonuçta, istenilen aşağıdaki gibi bulunur.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = h.f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k.f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

**Uyarı:** Açık bir  $R$  bölgesinde  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonları tanımlı değilse,  $f$  fonksiyonu  $R$  bölgesinde sürekli olsa bile, teoremde sözcü edilen  $\theta$  sabiti **belirlenemeyebilir**, aşağıdaki örneğe bakınız:

**Örnek:**  $g(x) = \sqrt{|x|}$  fonksiyonu tüm  $\mathbb{R}$  kümesinde tanımlı, sürekli böylelikle  $f(x, y) = g(x).g(y) = \sqrt{|x||y|}$  fonksiyonu tüm  $\mathbb{R}^2$  kümesinde özellikle  $R = (-2, 2) \times (-2, 2)$  açık bölgesinde sürekli ve  $x \neq 0$  için  $\operatorname{sgnx} = \frac{x}{|x|}$  ve  $\operatorname{sgn}0 = 0$  biçiminde tanımlanan ünlü işaret fonksiyonu aracılığıyla ve  $x \neq 0$  için  $\frac{d}{dx} \sqrt{|x|} = \frac{\operatorname{sgnx}}{2\sqrt{|x|}}$  bölgesini kullanarak

$$x \neq 0 \text{ için } f_x(x, y) = \sqrt{|y|} \cdot \frac{d\sqrt{|x|}}{dx} = \sqrt{|y|} \cdot \frac{\operatorname{sgnx}}{2\sqrt{|x|}}$$

ve benzer biçimde  $y \neq 0$  için  $f_y(x, y) = \sqrt{|x|} \cdot \frac{\operatorname{sgny}}{2\sqrt{|y|}}$ , buna karşılık her  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$  olduğundan kolayca  $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0 = f_y(0, 0)$  ve tüm bunlardan

$$f_x(x_0, x_0) + f_y(x_0, x_0) = \operatorname{sgnx}_0 \quad (\forall x_0 \in \mathbb{R})$$

elde edilir, örneğin  $x_0 \neq 0$  ise  $f_x(x_0, x_0) + f_y(x_0, x_0) = 2 \left( \sqrt{x_0} \cdot \frac{\operatorname{sgnx}_0}{2\sqrt{x_0}} \right)$  gözlemek yeterlidir.

Şimdi  $x_0 = y_0 = -1$  ve  $h = \frac{\varepsilon}{2} = k$  alınırsa  $x_0 + h = \frac{3}{2} = y_0 + k$  ve  $f(x_0 + h, y_0 + k) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ , buna karşılık  $f(x_0, y_0) = f(-1, -1) = 1$  ve  $\theta \in (0, 1)$  ne olursa olsun  $hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = \frac{5}{2} \left( f_x\left(x_0 + \frac{5\theta}{2}, x_0 + \frac{5\theta}{2}\right) + f_y\left(x_0 + \frac{5\theta}{2}, x_0 + \frac{5\theta}{2}\right) \right) = \frac{5}{2} \cdot \operatorname{sgn}\left(x_0 + \frac{5\theta}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{5\theta}{2} - 1\right)$  ve böylece

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \neq f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + h, y_0 + k) + kf_y(x_0 + h, y_0 + k).$$

bulunur, çünkü sol yan  $\frac{3}{2}$  sağ yan ise  $1 + \frac{5}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{5\theta}{2} - 1\right)$  olup,  $\theta \in (0, 1)$  ne olursa olsun.  $\operatorname{sgn}\left(\frac{5\theta}{2} - 1\right)$  ya 0 ya 1 ya da  $-1$  böylece  $1 + \frac{5}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{5\theta}{2} - 1\right) \neq \frac{3}{2}$  geçerli olmaktadır, burada  $(x_0 + h, y_0 + k) \in R$ ,  $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \in R$  gözlenmelidir. Aslında  $2 < h = k < 3$  alınırsa, her  $\theta \in (0, 1)$  için  $x_0 + \theta h = \theta h - 1$  gerçek sayısı  $-2 < x_0 + \theta h < 2$  ve  $-2 < y_0 + \theta k < 2$  eşitsizlikleri geçerli olur. Dikkat edilirse, bu örnekte  $f_x$  ve  $f_y$  kısmi türev fonksiyonları tüm  $R$  bölgesinde **tanımlı değildir**, çünkü

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

$f_x(0, y)$  ve  $f_y(x, 0)$  kısmi türevleri tanımsızdır, bu nedenle kısmi türevlerin tanımlı olması koşulundan **vazgeçilemez**.

**Örnek:** Her  $x, y > 1$  için, onlara bağlı bir  $0 < \theta < 1$  aracılığıyla

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y-2}{(x+y)(1-\theta)+2\theta}$$

gerçekleştigiini, bir önceki teorem yardımıyla görmek güç değildir, çünkü  $R = (0, \infty) \times (0, \infty)$  açık bölgesinde  $f(x, y) = \ln(\frac{x+y}{2})$  türetilebilir fonksiyonunun kısmi türevleri  $f_x(x, y) = \frac{1}{x+y} = f_y(x, y)$  sürekli ve  $h = 1 - x, k = 1 - y$  alarak  $(x+h, y+k) = (1, 1)$  ve sonuçta

$$\begin{aligned} 0 &= \ln \frac{2}{2} = \ln \frac{(x+h)+(y+k)}{2} = f(x+h, y+k) \\ &= f(x, y) + (1-x).f_x(x+\theta h, y+\theta k) + (1-y).f_y(x+\theta h, y+\theta k) \\ &= \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1-x}{x+y+\theta(h+k)} + \frac{1-y}{x+y+\theta(h+k)} \\ &= \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)} = \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{x+y-2}{(x+y)(1-\theta)+2\theta} \end{aligned}$$

**Ödev:**  $\sin(x+y) = ((x+y)-\pi).\cos((1-\theta)(x+y)+\theta\pi)$  gerçekleyen  $\theta \in (0, 1)$  gerçek sayıları bir önceki teorem nedeniyle vardır, gösteriniz.

### İki Değişkenli Fonksiyonlarda Taylor Teoremi:

$f = f(x, y)$  fonksiyonu açık bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde  $n$ 'inci mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip ve  $n+1$ 'inci mertebeden kısmi türevleri tanımlıysa, her  $(x_0, y_0) \in R$  için

$$f(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(hD_x + kD_y)^i}{i!} f(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} + R_n$$

açılımı geçerlidir, burada, var olan uygun bir  $\theta \in (0, 1)$  aracılığıyla

$$R_n = \frac{(hD_x + kD_y)^{n+1}}{(n+1)!} f(x, y) \Big|_{(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}$$

geçerli olup, toplama katılan işlemciler aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} (hD_x + kD_y)^n &= h^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} \\ &\quad + \binom{n}{2} h^{n-2} k^2 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + \binom{n}{n-1} h k^{n-1} \frac{\partial^n}{\partial x \partial y^{n-1}} + \binom{n}{n} k^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} \end{aligned}$$

**Kanıtlama:** Tek değişkenli ve  $n+1$ 'inci mertebeye kadar türetilebilir  $g = g(t)$  fonksiyonu için iyi bilindiği gibi

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (t-0)^k + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}$$

---

açılımı geçerlidir, bkz Analiz III Ders Notları. Şimdi  $(x_0, y_0) \in R$  alınsın.  $R$  bölgesi açık olduğundan  $K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \subseteq R$  olacak biçimde bir komşuluk vardır, sonuçta  $|h| < \varepsilon_0$  ve  $|k| < \varepsilon_0$  olmak üzere  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$  ( $\forall t \in [0, 1]$ ) fonksiyonunun  $n+1$ 'inci mertebe kadar türevleri vardır çünkü Zincir Kuralı Teoremi nedeniyle

$$\begin{aligned} g'(t) &= h.f_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + k.f_y(x_0 + ht, y_0 + kt), \\ g^{(1)}(0) &= h.f_x(x_0, y_0) + k.f_y(x_0, y_0) = \left( \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(x, y) \right)_{(x_0, y_0)}, \\ g''(t) &= \frac{dg'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[h.f_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + k.f_y(x_0 + ht, y_0 + kt)] \\ &= h^2.f_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + hk.f_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + kh.f_{yx}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ &\quad + k^2.f_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ &= h^2.f_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk.f_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2.f_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt), \\ g^{(2)}(0) &= h^2.f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk.f_{xy}(x_0, y_0) + k^2.f_{yy}(x_0, y_0) \\ &= \left( \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) \right)_{(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned} g^{(n)}(0) &= \left( \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \right)_{(x_0, y_0)}, \\ g^{(n+1)}(\theta) &= \left( \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x, y) \right)_{(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)} \text{ gözlenerek} \\ f(x_0 + h, y_0 + k) &= g(1) = \sum_{i=0}^n \frac{g^{(i)}(0)}{i!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \\ &= \left( \sum_{i=0}^n \frac{(hD_x + kD_y)^i}{i!} f(x, y) \right)_{(x_0, y_0)} + R_n \end{aligned}$$

açılımı elde edilir. O halde herhangi bir  $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  noktası alındığında  $x = x_0 + h$  ve  $y = y_0 + k$  olacak biçimde  $h = x - x_0$  ve  $k = y - y_0$  tek türlü biçimde belirli olup  $|h| < \varepsilon_0$  ve  $|k| < \varepsilon_0$  geçerli ve

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0 + h, y_0 + k) = \left[ \sum_{i=0}^n \frac{(hD_x + kD_y)^i}{i!} f(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} + R_n, \\ R_n &= \frac{1}{(n+1)!} [hD_x + kD_y]^{n+1} f(x, y) \Big|_{(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)} \end{aligned}$$

## BÖLÜM 1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSIYONLAR

---

açılımı bulunur, yukarıdaki kanıtlamada  $\frac{\partial}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial}{\partial y}$  kısmi türev işlemcileri yerine sırasıyla  $D_x$  ve  $D_y$  yazılmıştır. Bitti!

### Üç Değişkenli Fonksiyonlarda Taylor Açılımı:

Gerekli hipotezler altında

$$f(x, y, z) = \left( \sum_{i=0}^n \frac{(h.D_x + kD_y + jD_z)^i}{i!} f(x, y, z) \right)_{(x_0, y_0, z_0)} + R_n$$

açılımının geçerli olduğunu gösterip  $R_n$  kalan terimini yazınız.

### Örnekler5

1)  $R_3$  kalan terimli açılımını

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0)] \\ &\quad + \frac{1}{3!}[(x - x_0)^3 f_{xxx}(x_0, y_0) + 3(x - x_0)^2(y - y_0)f_{xxy}(x_0, y_0) + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 f_{xyy}(x_0, y_0) \\ &\quad + (y - y_0)^3 f_{yyy}(x_0, y_0)] + R_3 \end{aligned}$$

buna karşın  $R_2$  kalan terimli açılımın

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0)] + R_2 \end{aligned}$$

olduğuna dikkat ediniz.

2)  $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$  polinomunun  $(1, -2)$  noktasındaki Taylor açılımı bu fonksiyonun tüm dördüncü mertebe kısmi türevleri sıfır ve böylelikle  $R_3 = \frac{1}{4!} \left( (x-x_0)D_x + (y-y_0)D_y \right)^4 f(x, y) \Big|_{(x_0+θh, y_0+θh)} = 0$  olduğundan, kolayca

$$f(x, y) = -10 - 4(x - 1) + 4(y + 2) - 2(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 2) + (x - 1)^2(y + 2)$$

olarak bulunur, burada  $x_0 = 1, y_0 = -2$  alınmıştır. Sağ yandaki polinom hesaplanırsa (kareler açılıp, kısaltmalar yapılınrsa)  $x^2y + 3y - 2$  bulunur.

3)  $f(x, y) = x^2y + 2y^2 + 1$  fonksiyonunun  $(1, 1)$  noktasındaki Taylor açılımı

$$f(x, y) = 4 + 2(x - 1) + 5(y - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + 2(y - 1)^2 + (x - 1)^2(y - 1)$$

---

olarak kolayca bulunur.

4)  $g(x, y) = \sin xy$  fonksiyonunun  $(1, \frac{\pi}{2})$  noktasındaki  $R_2$  terimli açılımı  $g(x, y) = 1 - \frac{\pi^2}{8}(x - 1)^2 - \frac{\pi}{2}(x - 1)(y - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2 + R_2$  olarak bulunur.  $R_2$  kalan terimini belirleyiniz!

5)  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$  rasyonel polinomunun  $(1, -1)$  noktasındaki Taylor açılımında  $R_2$  terimi aşağıdır:

$$R_2 = -\frac{1}{(1 + \theta(x - 1))^6} \left( 10(1 - \theta(y + 1))^2 + 12(1 - \theta(y + 1))(1 - \theta(x - 1)) + 3(1 + \theta(x - 1))^2 \right)$$

### VARKEN

Henüz yaşarken efendi, bu umut  
Karanlık günlerin aydınlığa-doneceği  
Sakın tavşama sakın yüksünme  
İnsanın yarası sağken iyilesir  
Sağken omuz silkersin bunca engele  
Ergene ereğine sağken ulaşırsın  
Toprağın bitiminde bir su var seni iletecek  
Yaz tüketdi miydi güz sofraları  
Dağların ardı ova  
Bulanığın sonu duru  
Küfürün altı meneviş  
Etin nohudun zerdalinin tadı  
Erkinlik barışıklık  
Özlemler kavuşmalar  
Ayışığı ishakkuşu Aynalıçarşı  
Sen yaşarken  
İbibikler sen yaşarken tüner üvezin dalına  
Mavilik sen yaşarken o tavanda gezinir  
Sen yaşarken pembeleşir ortancalar  
İşte aşıkın hürüğün tutsaklığın  
Koca beyazlık günbaşı serinliği  
Sen henüz yaşarken ölmenden önce  
Son nefesinde keşke şöyle yapsaydım deme  
Aklını başına toplamak elindeydi  
Yüreğini pekleştirmek zaten elinde  
Söyle  
Diriye soyluya düzenliye özenip  
Kötü viran bozuğa gücenemez miydin  
Güzelle çirkini yalanla gerçeği tartacak terazi  
Yaşarkan elindeydi  
İnsan yaşarken varır bir ölmezlige

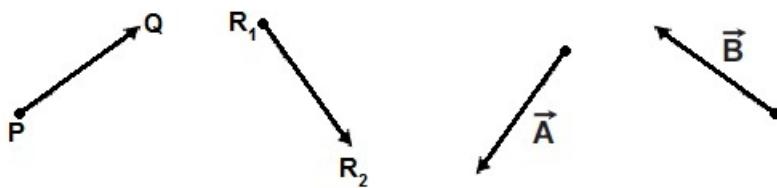
**Metin Eloğlu, 1957**

## Bölüm 2

# Vektör Analizi

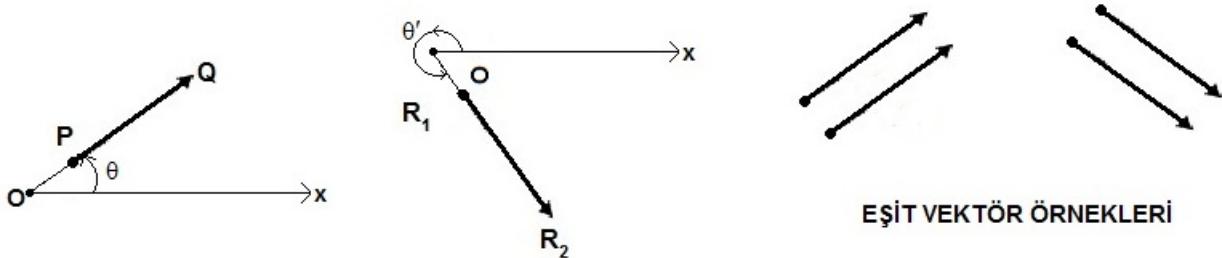
Bu bölümde vektörler ve vektör analizi ile ilgileneneceğiz.

**Tanım 1:** Fizikte hız, kuvvet, ivme ve öteleme gibi kavramları adına **vektör** denilen, baş ve uç noktaları belirli, yönlü oklarla göstermek gelenek olmuştur. Matematikte ise vektör, adına **vektör uzayı** denilen cebirsel uzayın **elemanlarına** denir, sözgelimi kompleks sayı matrisleri, gerçek katsayılı polinomlar, gerçek ya da kompleks değerli fonksiyonlar, **matematikte** birer vektörörneğidir. Sıralı gerçek sayı  $n$ 'lileri  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , yine  $\mathbb{R}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Matematikte ise bir sıralı  $n$ 'li genellikle ok kullanmadan  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  işaretü ile yazılır ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ne olursa olsun  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$  olarak tanımlanır. Bu bölümde bundan böyle vektörler **fiziksel yorumla** ele alınıp anlatılacaktır. Aşağıdakiler birer vektörörneğidir:



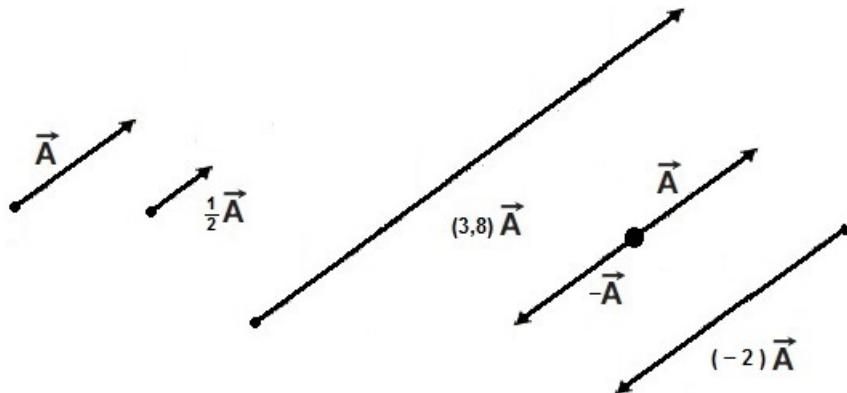
Bir  $\overrightarrow{PQ}$  düzlem vektörünün **yönü**,  $Ox$  ekseni ile  $\overrightarrow{PQ}$  doğru parçası arasında, pozitif yönde (=saatin işleyişinin tersi yönünde) hesaplanmış açı olarak tanımlanır; **uzunluğu** (ya da **büyüklüğü**, ya da **normu**) ise  $\overrightarrow{PQ}$  doğru parçasının uzunluğudur.

Yönü ve uzunluğu eşit olan vektörlere, fiziksel vektör yorumunda, **eşit vektörler** denir. Buna karşın kütle, uzunluk, sıcaklık gibi fiziksel niceliklere ise **skaler** denir, bunların daima birer gerçek



EŞİT VEKTOR ÖRNEKLERİ

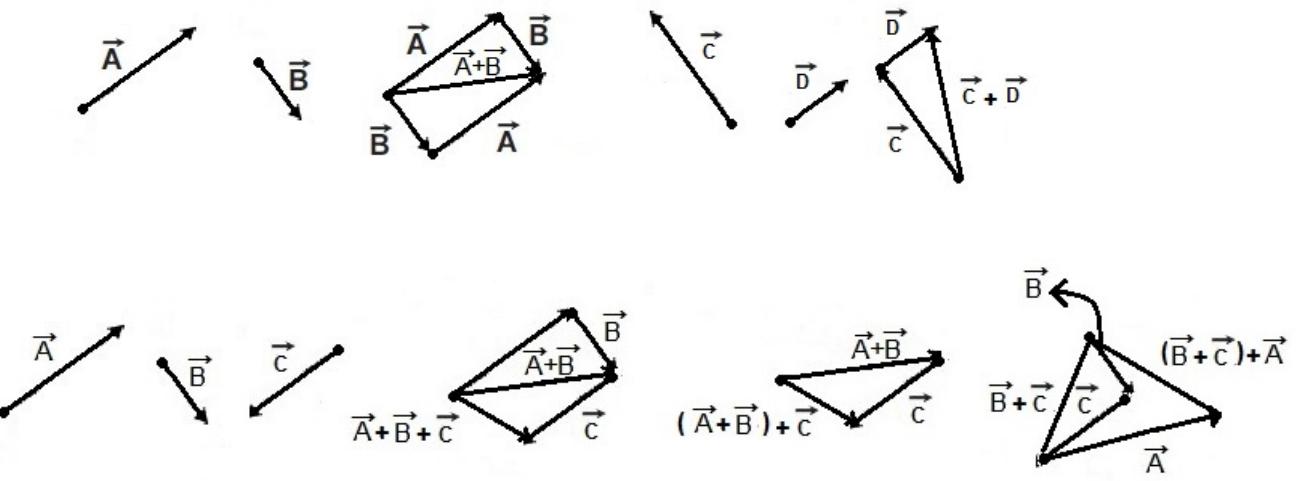
sayı olduğuna dikkat ediniz. Bir  $\vec{A}$  vektörünün uzunluğu  $|\vec{A}|$  ile yazılır.  $0 < \alpha$  ise,  $\alpha\vec{A}$  vektörü ( $\alpha$  skaleri genellikle sola yazılır), uzunluğu  $\alpha$ . $|\vec{A}|$  ve yönü  $\vec{A}$  vektörünün yönü olan vektörlere denir. Adına **skaler çarpım** denilen bu işlem  $0 < \alpha < 1$  ya da  $1 < \alpha$  olduğunda,  $\vec{A}$  vektörünün uzunluğunu değiştirir, yönünü değiştirmez.  $-\vec{A}$  vektörü ise  $\vec{A}$  ile aynı uzunlukta fakat yönde (yani  $Ox$  eksenile arasındaki açı  $\theta + 180^\circ$  olan) vektörü gösterir.  $0.\vec{A} = \vec{0}$  vektörü birazdan tanımlanacaktır. Dikkat edilirse her  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $(-\alpha).\vec{A} = \alpha.(-\vec{A})$  gerçekleşir, böylelikle **her**  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $\alpha.\vec{A}$  tanımlanmış olur. Tanımdan  $|-\vec{A}| = |\vec{A}|$  bulunur.



$\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin  $\vec{A} + \vec{B}$  ile yazılan toplam vektörü,  $\vec{A}$  vektörünün üç noktasından çizilen  $\vec{B}$  vektörünün üç noktasında biten, başlangıç noktası  $\vec{A}$  vektörünün başlangıç noktası olan vektöre denir. Başlangıç noktaları csakşık alındığında **koşutkenar kuralı** kullanılarak, kenarları  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri olan koşutkenarın köşegen vektörü  $\vec{A} + \vec{B}$  toplam vektördür. Aşağıda örnekler verilmiştir:

Toplama işlemi, katılmalı (assosyatif) bir işlemidir, kısacası  $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$  ile  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$  vektörü eşittirler. Bu vektörler  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$  ile yazılır.

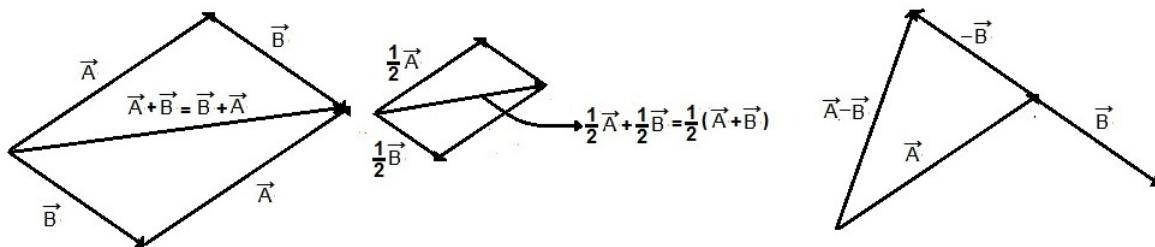
Örneğin aşağıdaki üç vektör için bunu gözleyiniz:



$\vec{A} + (-\vec{B})$  toplam vektörü kısaca  $\vec{A} - \vec{B}$  işaret ile yazılır. Uzunluğu sıfır gerçel sayısı olan, fakat yönü tanımsız bırakılan vektöre **sıfır vektör** denilir ve bu vektör  $\vec{0}$  ile yazılır.  $\vec{A} \neq \vec{0}$  ise  $0 < \alpha_A = |\vec{A}|$  olur ve  $\frac{1}{\alpha_A} \cdot \vec{A}$  vektörü  $\left| \frac{1}{\alpha_A} \cdot \vec{A} \right| = \frac{1}{\alpha_A} \cdot |\vec{A}| = \frac{1}{\alpha_A} \cdot \alpha_A = 1$  gerçekler, çünkü  $0 < \beta$  ise  $\beta \cdot \vec{A}$  vektörünün uzunluğunun  $\beta \cdot |\vec{A}|$  olarak tanımladığını, kısacası  $|\beta \cdot \vec{A}| = \beta \cdot |\vec{A}|$  gerçeklendiğini unutmayın. Vektör Analizinde, uzunluğu 1 gerçel sayısına eşit, yönü  $\vec{A}$  vektörünün yönü olan  $\frac{1}{\alpha_A} \cdot \vec{A}$  vektörü kısaca  $b(\vec{A})$  ile yazılır ve ona  $\vec{A}$  vektörünün yönündeki **birim vektör** denir. Ayrıca

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad \beta(b(\vec{A})) = (\beta\alpha) \cdot b(\vec{A}), \quad (\alpha + \beta) \vec{A} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{A}, \quad \alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha \vec{A} + \alpha \vec{B}$$

ve son olarak  $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$  eşitlikleri geçerlidir. Aşağıdakileri gözleyiniz:



Dikkat edilirse, her  $\vec{A}$  vektörü için  $0 \cdot \vec{A} = \vec{0}$  geçerlidir, çünkü  $\vec{B} + \vec{B} = \vec{B}$  ise zorunlu olarak  $\vec{B} = \vec{0}$  bulunacağından (dikkat:  $\vec{B} \neq \vec{0}$  olsaydı,  $\vec{B}$  vektörüne,  $\vec{B}$  vektörünün üç noktasından başlayan  $\vec{B}$  vektörü eklendiğinde elde edilen vektörü çizip, bu yeni vektörün uzunluğunun  $\alpha_B = |\vec{B}|$

gerçel sayılarından farklı olduğunu gözleyiniz ) sonuçta  $0 \cdot \vec{A} = (0 + 0) \cdot \vec{A} = 0 \cdot \vec{A} + 0 \cdot \vec{A}$  nedeniyle, son gözlemin gereği olarak  $0 \cdot \vec{A} = \vec{0}$  elde edilir.

İki vektör arasında iki farklı türde çapma işlemi tanımlanır:

**Skaler çarpım** ve **vektörel çarpım** ve bunlar, bu iki vektör arasında, pozitif yönde yani saatin işleyişinin ters yönünde hesaplanan açı  $\theta$  ile yazılmak üzere sırasıyla

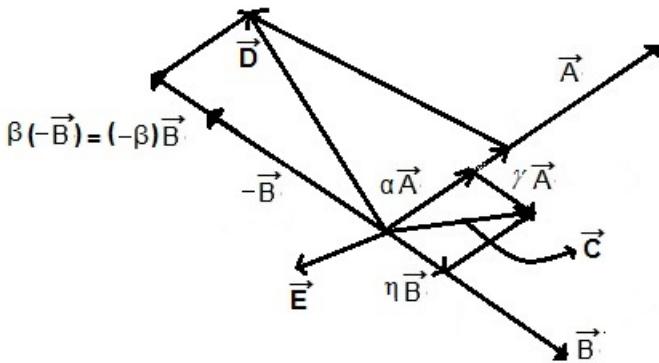
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{cases} |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) & ; \text{ vektörler doğrudaş değilse} \\ \vec{0} & ; \text{ vektörler doğrudaş ise} \end{cases}$$

birimde tanımlanır, burada  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  vektörü, başlangıç noktaları çakışık alınan (dikkat: yön ve uzunluklarını değiştirmeden, herhangi iki vektörün başlangıç noktalarının çakışık alınabileceğini gözleyin)  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin oluşturduğu düzleme, ortak başlangıç noktasından üç parmak kuralıyla çıkan birim dikme vektörünü ( $= \vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin belirlediği düzlemin **birim normal vektörü**) göstermektedir, kısacası  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  vektörü hem  $\vec{A}$  hem de  $\vec{B}$  vektörüne dik olup uzunluğu  $|\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})| = 1$  gerçek sayısıdır. Eğer  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri doğrudaş iseler yani aynı doğru üzerinde bulunuyorlarsa, kısacası aralarındaki açı  $0^\circ$  ya da  $180^\circ$  ise (yani aynı yönde ya da ters yönde, fakat aynı doğru üzerinde iseler ), zaten  $\sin \theta = 0$  olacağinden  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$  geçerlidir. İki vektörün skaler çarpımının **daima bir skaler** yani bir gerçek sayı, buna karşın vektörel çarpımlarının **daima bir vektör** olduğunu gözleyiniz; ayrıca doğrudaş olmayan vektörlerin belirlediği düzleme dik olan bir vektörün anlamlı ve tanımlı olabilmesi için üçüncü bir boyutun gerek olduğunu, kısacası vektörel çarpımın  $\mathbb{R}^3$  uzayında **anlamlı** olduğunu gözleyiniz.

$\vec{A} \neq \vec{0}$  ise,  $\alpha \neq 0$  skaleri ne olursa olsun,  $\alpha \cdot \vec{A}$  vektörünün  $\vec{A}$  ile daima doğrudaş olduğuna, çünkü  $\alpha < 0$  ise ters yönlü fakat aynı doğru üzerinde bulunduklarına dikkat ediniz. Örneğin, yukarıda tanımlanan  $\vec{A} \times \vec{B}$  vektörel çarpımındaki  $\theta$  açısı eğer  $180^\circ$  den büyük fakat  $360^\circ$  den küçük bir geniş açı ise  $\alpha = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta < 0$  gerçekleştiğini gözleyiniz.  $\mathbb{R}^3$  uzayında, doğrudaş olmayan iki vektör, daima bu iki vektörü bulunduran tek bir düzlem belirler ve doğrudaş olmayan  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin belirlediği düzlemede yer alan **her** vektör tek türlü belirli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  skalerleri aracılığıyla  $\alpha \cdot \vec{A} + \beta \cdot \vec{B}$  biçimindedir; örneğin  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{A} + 0 \cdot \vec{B}$ ,  $-\vec{B} = 0 \cdot \vec{A} + (-1) \cdot \vec{B}$  ve aşağıdaki  $\vec{C}$  ve  $\vec{D}$  vektörleri için  $\vec{C} = \alpha \cdot \vec{A} + \eta \cdot \vec{B}$  ve  $\vec{D} = \gamma \cdot \vec{A} + (-\beta) \cdot \vec{B}$  gerçekleyen  $\alpha, \alpha^*, \gamma \in (0, 1)$  ve  $1 < \beta$  gerçek sayılarının var ( tanımlı ) olduğunu dikkat ediniz:

Siz  $\vec{E}$  vektörü için  $\vec{E} = \gamma_1 \cdot \vec{A} + \gamma_2 \cdot \vec{B}$  olacak biçimde tek türlü belirli  $\gamma_1, \gamma_2$  skalerlerini tanımlayınız.  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $0x, 0y$  ve  $0z$  koordinat eksenleri üzerinde yer alan birim vektörler sırasıyla

$$\vec{i}, \quad , \quad \vec{j}, \quad , \quad \vec{k}$$



İşaretleriyle yazılır, o halde bunlar ikişer ikişer birbirine diktir, sözgelimi  $\vec{i}$  ve  $\vec{j}$  vektörlerinin belirllediği düzlemede, bu iki vektör arasındaki açı  $90^\circ$  olmaktadır.  $\mathbb{R}^3$  uzayında, sıfır uzunluğunda, yönü tanımsız bırakılan vektör  $\vec{0}$  ile yazılır. Bundan farklı her vektörün yönünü belirleyen, o vektörün sırasıyla  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ve  $\vec{k}$  birim vektörleriyle belirlediği düzlemlerde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ve  $\vec{k}$  vektörleriyle yaptığı açılardır.

Dikkat edilirse doğrudaş olmayan ve  $\vec{A} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{B} \neq \vec{0}$  gerçekleyen  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri **lineer bağımsızdır**, yani bunlar için  $\alpha.\vec{A} + \beta.\vec{B} = \vec{0}$  için gerek  $\alpha = 0 = \beta$  gerçekleşmesidir, çünkü  $\alpha.\vec{A} + \beta.\vec{B} = \vec{0}$  olduğunda eğer  $\alpha \neq 0$  olsaydı  $(-\alpha)\vec{A} = (-\alpha)\vec{A} + \vec{0} = (-\alpha)\vec{A} + \alpha.\vec{A} + \beta.\vec{B} = ((-\alpha) + \alpha)\vec{A} + \beta.\vec{B} = \beta.\vec{B}$  nedeniyle  $\vec{A} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\vec{B}$  olur, üstelik  $\vec{A} \neq \vec{0}$  olduğunu unutmadan,  $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$  sıfırdan farklı bir skaler ve böylece  $\vec{A} = \gamma.\vec{B}$  bularak  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin doğrudaş oldukları sonucuna (çelişkisine) ulaşılırdı.

Demek ki önce  $\alpha = 0$  ve sonra zorunlu olarak  $\beta.\vec{B} = \vec{0}$  bulup  $\beta = 0$  sonucuna ulaşılır, son çıkarsama için aşağıdaki 8) özelliğini kanıtlanmasına bkz.

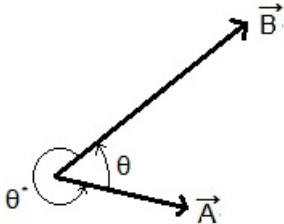
### Skaler ve Vektörel Çarpım İşlemlerinin Temel Özellikleri

1) Daima  $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$  ve  $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) = (-\vec{B}) \times \vec{A}$  geçerlidir. Gerçekten, vektörlerden en az birisi  $\vec{0}$  ise iddialar apaçıkta, çünkü  $|\vec{0}| = 0$  olduğu bilinmektedir. Her ikisi de sıfır vektörden farklıysa,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  arasındaki (ve daima saatin işleyişinin ters yönünde hesaplanan) açı  $\theta$  olmak üzere  $\vec{B}$  ile  $\vec{A}$  vektörleri arasındaki açı  $\theta^* = 360^\circ - \theta$  gerçekler çünkü  $\theta + \theta^* = 360^\circ$  geçerlidir, böylece

$$\vec{B}.\vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \theta^* = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos \theta = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta = \vec{A}.\vec{B}$$

bulunur, çünkü  $\cos \theta^* = \cos (360^\circ - \theta) = \cos (-\theta) = \cos \theta$  olur. Buna karşılık  $\sin \theta^* = \sin (360^\circ - \theta) = -\sin \theta$  nedeniyle

$$\vec{B} \times \vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \sin \theta^* \cdot \vec{n}(\vec{B} \times \vec{A}) = -|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{A} \times \vec{B})$$



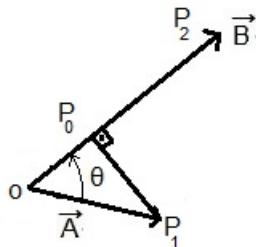
bulunur, çünkü  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin belirlediği düzlemin birim normal vektörü  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  ile,  $\vec{B}$  ve  $\vec{A}$  vektörlerinin belirlediği düzlemin birim normal vektörü  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  daima **esittir** (neden?). Dikkat edilirse,  $-\vec{B}$  vektörü ile  $\vec{A}$  vektörü arasında, her zaman olduğu gibi saatin işleyişinin ters yönünde hesaplanan açı  $\theta^{**}$  ile yazılırsa  $\theta^{**} + \theta = 180^\circ$  ve böylece  $\sin \theta^{**} = \sin(180^\circ - \theta) = -(\cos 180^\circ) \sin \theta = +\sin \theta$  nedeniyle, üstelik **daima**  $|- \vec{B}| = |\vec{B}|$  olduğundan

$$(-\vec{B}) \times \vec{A} = |- \vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \sin \theta^{**} \cdot \vec{n}((- \vec{B}) \times \vec{A}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B}$$

bulunur, neden  $\vec{n}((- \vec{B}) \times \vec{A}) = \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  geçerli olduğunu açıklayınız.

**2)** Daima  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{izd}(\vec{A}, \vec{B}) \cdot |\vec{B}|$  geçerlidir.

Burada,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinden en az birisi  $\vec{0}$  ise  $\text{izd}(\vec{A}, \vec{B}) = 0$  ve her ikisi de sıfır vektörründen farklısa  $\text{izd}(\vec{A}, \vec{B}) = \overline{OP_0} \cdot \text{sgn}(\cos \theta)$  biçiminde tanımlanan gerçel sayıya  $\vec{A}$  vektörünün  $\vec{B}$  vektörüne **izdüşümü** denir. Bu gerçel sayı,  $\vec{A}$  vektörünün üç noktasından  $\vec{B}$  vektörünün üzerinde



bulunduğu doğuya indirilen dikmenin ayak uzunluğu olan  $\overline{OP_0}$  sayısı ile,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  arasındaki pozitif yönde hesaplanmış  $\theta$  açısının cosinus değerinin işaret sayısının çarpımıdır ve  $\triangle OP_1P_0$  dik üçgeninde kolayca  $\theta$  dar bir açı ve  $\text{sgn}(\cos \theta) = 1$  ve  $\cos \theta = \frac{\overline{OP_0}}{\overline{OP_1}}$  böylece  $\text{izd}(\vec{A}, \vec{B}) \cdot |\vec{B}| = \overline{OP_0} \cdot |\vec{B}| = \overline{OP_1} \cdot \cos \theta \cdot |\vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{B}$  bulunur.

**3)** Daima  $|\vec{A}| = +\sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$  geçerlidir.

Gerçekten  $\vec{A} = \vec{0}$  ise her iki yan da sıfırdır;  $\vec{A} \neq \vec{0}$  ise  $\vec{A}$  vektörünün kendisiyle oluşturduğu açı  $0^\circ$  ve böylece  $\cos 0^\circ = 1$  olduğundan,  $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{A}|^2$  ve  $|\vec{A}|$  gerçek sayısı negatif olmadığından  $|\vec{A}| = +\sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$  istenen sonucuna ulaşılır.

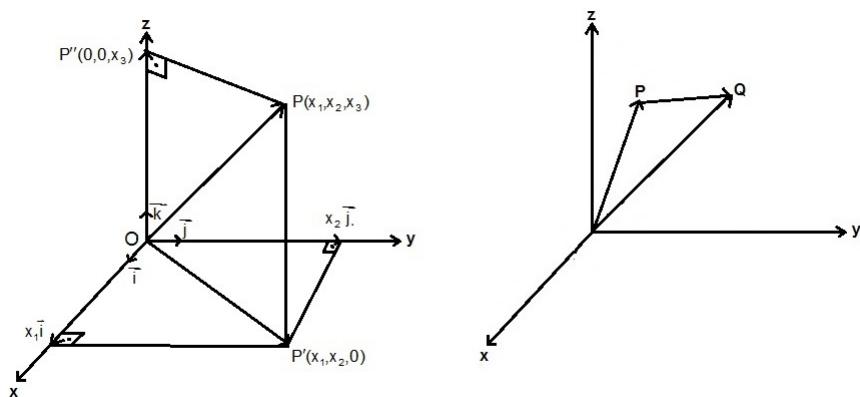
4)  $\vec{A} \neq \vec{0}$  ise  $|b(\vec{A})| = 1$  geçerlidir. Ayrıca  $\text{izd}(\vec{A}, -\vec{B}) = -\text{izd}(\vec{A}, \vec{B})$  geçerlidir.

Bunu biliyorduk, fakat bir önceki özellik kullanılırsa kolayca gözlenir çünkü  $b(\vec{A}) = \frac{1}{|\vec{A}|} \cdot \vec{A}$  ve böylece  $(\alpha \cdot \vec{A}) \cdot (\beta \cdot \vec{B}) = \alpha \beta \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$  gerceği kullanılıp  $|b(\vec{A})| = \sqrt{b(\vec{A}) \cdot b(\vec{A})} = \sqrt{\frac{1}{|\vec{A}|^2} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{A})} = \frac{1}{|\vec{A}|} \cdot \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \frac{1}{|\vec{A}|} = 1$  olur. İkinci iddia kolaydır ve ödevdir.

5)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  için gerek ya vektörlerden birisinin  $\vec{0}$  vektörü olması ya da vektörlerin arasındaki açının ya  $90^\circ$  derece ya da  $270^\circ$  derece olmasıdır. Gerçekten  $0 = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$  için gerek çarpıma katılan gerçek sayılarından en az birisinin sıfır olmasıdır, bu iddiayı kanıtlar.

6)  $\mathbb{R}^2$  uzayında her vektör, tek türlü belirli bir sıralı gerçek sayı ikilisi ile,  $\mathbb{R}^3$  uzayında ise tek türlü belirli bir sıralı gerçek sayı üçlüsü ile belirlenir.

Gerçekten  $\mathbb{R}^3$  için kanıtlama verelim. Herhangi bir  $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  noktasının **yer vektörü**,  $O(0, 0, 0)$  orijin noktasını başlangıç noktası,  $P$  noktasını uç nokta kabul eden  $\vec{OP}$  vektörüne denir ve şekilde de görüleceği gibi,  $P$  noktasının  $xy$  ekvator düzlemindeki dikizdüşüm noktası  $P'(x_1, x_2, 0)$ , buna karşın  $Oz$  ekseni üzerindeki dikme noktası  $P''(0, 0, x_3)$  olmak üzere  $\vec{OP}'$ ,  $\vec{OP}$  ve  $\vec{OP}''$  vektörleri düzlemdaş olup  $\vec{OP} = \vec{OP}' + \vec{OP}''$  geçerlidir.



$\vec{OP}' = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{OP}'' = x_3 \cdot \vec{k}$  ve sonuçta  $\vec{OP} = \vec{OP}' + \vec{OP}'' = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} + x_3 \cdot \vec{k}$  bulunur. Bu sonuctan yararlanıp, başlangıç noktası  $P(x_1, x_2, x_3)$  ve uç noktası  $Q(y_1, y_2, y_3)$  olan  $\vec{PQ}$  vektörü için  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$  çünkü  $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$  geçerli olduğu için sonucta  $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

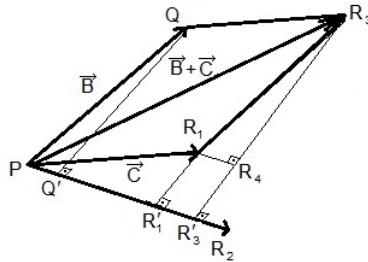
böylece

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \left( y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k} \right) - \left( x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} \right) \\ &= (y_1 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - x_2) \cdot \vec{j} + (y_3 - x_3) \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

sonucu bulunur.  $\overrightarrow{PQ}$  vektörünü  $\xi_1 = y_1 - x_1, \xi_2 = y_2 - x_2, \xi_3 = y_3 - x_3$  gerçek sayılarının belirlediği  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  sıralı üçlüsü temsil eder.

Sonuçta  $\mathbb{R}^3$  uzayında her  $\vec{A}$  vektörü  $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$  olarak yazılır.

7) Daima  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$  ve  $(\vec{A}_1 + \vec{B}_1) \cdot (\vec{A}_2 + \vec{B}_2) = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{A}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$  eşitlikleri geçerlidir. Birinci eşitliği  $\vec{A}, \vec{B}$  ve  $\vec{C}$  vektörleri düzlemdəş olduklarıda gösterelim. Önce, aynı düzlemede yer alan bu üç vektör için  $\text{izd}(\vec{B} + \vec{C}, \vec{A}) = \text{izd}(\vec{B}, \vec{A}) + \text{izd}(\vec{C}, \vec{A})$  gösterelim. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi  $\vec{B} = \overrightarrow{PQ}, \vec{C} = \overrightarrow{PR_1}$  ve  $\vec{A} = \overrightarrow{PR_2}$  olmak üzere basit



düzlem geometri bilgisiyle  $PQQ'$  ile  $R_3R_1R_4$  üçgenlerinin eşit üçgenler,  $\vec{B} + \vec{C} = \overrightarrow{PR_3}$  olduğunu, eşit  $\angle PQQ'$  ve  $\angle R_1R_3R_4$  açıları karşısındaki  $\overrightarrow{PQ}$  ve  $\overrightarrow{R_1R_4} = \overrightarrow{R'_1R'_3}$  kenarlarının eşit olur, böylece aşağıdaki istenen sonuç bulunur:

$$\begin{aligned}\text{izd}(\vec{B} + \vec{C}, \vec{A}) &= \text{izd}(\overrightarrow{PR_3}, \overrightarrow{PR_2}) = \overrightarrow{PR'_3} = \overrightarrow{PR'_1} + \overrightarrow{R'_1R'_3} = \overrightarrow{PR_1} + \overrightarrow{PQ'} \\ &= \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{PR'_1} = \text{izd}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR_2}) + \text{izd}(\overrightarrow{PR_1}, \overrightarrow{PR_2}) = \text{izd}(\vec{B}, \vec{A}) + \text{izd}(\vec{C}, \vec{A}).\end{aligned}$$

O halde birinci bağıntı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \text{izd}(\vec{B} + \vec{C}, \vec{A}) \cdot |\vec{A}| = [\text{izd}(\vec{B}, \vec{A}) + \text{izd}(\vec{C}, \vec{A})] \cdot |\vec{A}| \\ &= \text{izd}(\vec{B}, \vec{A}) \cdot |\vec{A}| + \text{izd}(\vec{C}, \vec{A}) \cdot |\vec{A}| \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}.\end{aligned}$$

Bu eşitliklerde, yukarıdaki 2) özelliğinin kullanıldığına dikkat ediniz. Birinci eşitliği,  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\vec{A}, \vec{B}$  ve  $\vec{C}$  vektörleri düzlemdəş olmadığında göstermek gereklidir, bunu yapmıyoruz. Birinci bağıntı

kullanılarak aşağıdaki bulunur (nasıl?):

$$\begin{aligned} (\vec{A}_1 + \vec{B}_1) \cdot (\vec{A}_2 + \vec{B}_2) &= \vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 + \vec{B}_2) + \vec{B}_1 \cdot (\vec{A}_2 + \vec{B}_2) \\ &= \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 + \vec{A}_2 \cdot \vec{B}_1 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2. \end{aligned}$$

8)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$  için gerek ya vektörlerin doğrudaş olması ya da en az birisinin  $\vec{0}$  vektörü olmalıdır.

Yeterlik apaçaktır. Oysa  $\vec{A} \neq \vec{0}$  ve  $\vec{B} \neq \vec{0}$  iken  $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  vektörünün  $\vec{0}$  olabilmesi için  $\sin \theta = 0$  gerçekleşmesi zorunludur ( dikkat:  $\alpha \cdot \vec{C} = \vec{0}$  için ya  $\alpha = 0$  ya da  $\vec{C} = \vec{0}$  olmalıdır, çünkü hem  $\alpha \neq 0$  hem de  $\alpha \cdot \vec{C} = \vec{0}$  olduğunda  $\vec{0} = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{0} = \frac{1}{\alpha} (\alpha \cdot \vec{C}) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \vec{C} = \vec{C}$  bulunur ), kısacası ya  $\theta$  açısı  $0^\circ$  ya da  $180^\circ$  olmalıdır, buysa  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin ya aynı yönde ya da ters yönde, fakat aynı doğru üzerinde bulunması kısacası doğrudaş olmaları demektir. Özel olarak, **daima**, her  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörü için

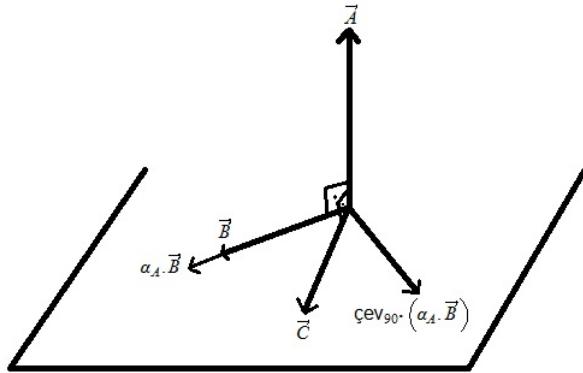
$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0} \quad , \quad \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

gerçekleştığı anlaşılır, çünkü  $\vec{A}$  ve  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  vektörleri diktir. Matematikte  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerine, ancak ve yalnız  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  koşulunu gerçekliyorlarsa ( bunlardan birisi  $\vec{0}$  vektörü olsa bile ) **dik vektörler** denir ve  $\vec{A} \perp \vec{B}$  yazılır. Bu tanım nedeniyle  $\vec{0}$  vektörü tüm vektörlere diktir!

9) Daima  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$  ve  $(\vec{A}_1 + \vec{B}_1) \times (\vec{A}_2 + \vec{B}_2) = (\vec{A}_1 \times \vec{B}_1) + (\vec{A}_2 \times \vec{B}_2) + (\vec{B}_1 \times \vec{A}_2) + (\vec{B}_1 \times \vec{B}_2)$  olur.

İkinci bağıntı birinciden kolayca elde edileceği için, birincisini göstermek yeterlidir. Önce, kolaylık sağlayacağı için şu işaretü tanımlayalım: Herhangi bir  $\vec{A}$  düzlem vektörünü, uzunluğunu değiştirmeden, yer aldığı düzlemede saatin işleyiş yönünde  $90^\circ$  derece döndürerek elde edilen vektörü  $\text{çev}_{90^\circ} \vec{A}$  ile yazarsak, daima  $\vec{A} \cdot \text{çev}_{90^\circ} \vec{A} = 0$  ve  $\text{çev}_{90^\circ} (\vec{A} + \vec{B}) = \text{çev}_{90^\circ} \vec{A} + \text{çev}_{90^\circ} \vec{B}$  gerçekleri kolayca gözlenir ( nasıl? ). Ayrıca eğer  $\vec{A} \perp \vec{B}$  ve  $|\vec{B}| = 1$  ise, kısaltık amacıyla  $\alpha_A = |\vec{A}|$  yazıldığında  $\alpha_A \cdot \vec{B}$  ile  $\text{çev}_{90^\circ} \vec{A}$  vektörlerinin uzunlıklarının eşit olduğunu, dolayısıyla  $\vec{B}$  vektörü **eger**  $\vec{A}$  vektörünün  $90^\circ$  döndürülmesiyle elde edilen doğru üzerinde yer alıyorsa  $\alpha_A \cdot \vec{B} = \text{çev}_{90^\circ} \vec{A}$  gerçekleştigini gözleyiniz. Artık birinci bağıntıyı iki aşamada kanıtlayabiliriz. Önce birinci bağıntıyı, hem  $\vec{A} \perp \vec{B}$  hem de  $\vec{A} \perp \vec{C}$  olduğu özel durumda kanıtlayabilirsek, genel durumda bir kanıtlama vermek kolay olacaktır. Şimdi eğer  $\vec{A} \perp \vec{B}$  ve  $\vec{A} \perp \vec{C}$  ise,  $\vec{A}$  vektörü  $\vec{B}$  ve  $\vec{C}$  vektörlerinin belirlediği düzlemedeki **her vektöre** dik olur, çünkü  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  skalerleri ne olursa olsun  $\vec{A} \cdot (\alpha \vec{B} + \beta \vec{C}) = (\alpha \vec{B} + \beta \vec{C}) \cdot \vec{A} = \alpha \cdot (\vec{B} \cdot \vec{A}) + \beta \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) = 0$  geçerlidir, sonuçta bu özel durumda şekil aşağıdaki gibi olur:

Üstelik  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  birim normal vektörü,  $\vec{B}$  ve  $\vec{C}$  vektörlerinin belirlediği düzlemede yer alır ve yukarıda gözlendiği gibi  $|\alpha_A \cdot \vec{B}| \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  vektörü ile  $\text{çev}_{90^\circ} (\alpha_A \cdot \vec{B})$  vektörü ve benzer biçimde



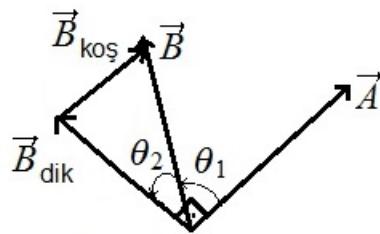
$|\alpha_A \cdot \vec{C}| \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{C})$  ile  $\text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot \vec{C})$  vektörleri birbirlerine eşit olduklarından, sonuçta

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin 90^\circ \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = |\alpha_A \cdot \vec{B}| \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = \text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot \vec{B})$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot (\vec{B} + \vec{C})) = \text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot \vec{B} + \alpha_A \cdot \vec{C}) \\ &= \text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot \vec{B}) + \text{qev}_{90^\circ}(\alpha_A \cdot \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

bulunur.



Şimdi, bu özel koşul yerine gelmediğinde, yukarıda bulunanlardan yararlanıp genel durumu kanıtlayalım.  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin oluşturduğu düzlemede  $\vec{B}$  vektörü, tek türlü belirli  $\vec{B}_{\text{dik}}$  ve  $\vec{B}_{\text{kos}}$  vektörleri aracılığıyla  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{dik}} + \vec{B}_{\text{kos}}$  biçiminde yazılır, burada  $\vec{B}_{\text{dik}} \perp \vec{A}$  olup,  $\vec{B}_{\text{kos}}$  vektörü  $\vec{A}$  vektörüne koşut ( paralel ) ve ayrıca  $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$  ve  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}}$  geçerlidir, çünkü yan dik kenarları  $\vec{B}_{\text{dik}}$  ve  $\vec{B}_{\text{kos}}$  vektörleri üzerinde kurulu dik üçgende, kolayca  $\cos \theta_2 = \frac{1}{|\vec{B}|}$ ,  $|\vec{B}_{\text{dik}}| = \sin \theta_1$  ve böylece

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta_1 \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}_{\text{dik}}| \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}_{\text{dik}}| \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}}) \\ &= \vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}} \end{aligned}$$

---

olur, çünkü  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})$  ve  $\vec{n}(\vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}})$  birim normal vektörleri eşittir ( neden? ), böylece bir önceki şekilde  $\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C}_{\text{dik}}$  elde edilip, üstelik hem  $\vec{A} \perp \vec{B}_{\text{dik}}$  ve hem de  $\vec{A} \perp \vec{C}_{\text{dik}}$  nedeniyle, biraz önce kanıtlanan özel durumdan yararlanarak istenen aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}}) + (\vec{A} \times \vec{C}_{\text{dik}}) = \vec{A} \times (\vec{B}_{\text{dik}} + \vec{C}_{\text{dik}}) \\ &= \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})_{\text{dik}} = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) \end{aligned}$$

çünkü **daima**  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}_{\text{dik}}$  geçerli olduğundan son eşitlik yazılmış olup  $(\vec{B} + \vec{C})_{\text{dik}} = \vec{B}_{\text{dik}} + \vec{C}_{\text{dik}}$  eşitliği kolayca gözlenir.

**10)**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ,  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 = \vec{i} \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$  geçerli olup benzerleri  $\vec{j}$  ve  $\vec{k}$  için geçerlidir.

Örneğin  $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$  ve  $\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0$ ,  $\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 90^\circ \cdot \vec{n}(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{n}(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k}$  gözleyiniz, çünkü  $\vec{i}$  ve  $\vec{j}$  nin oluşturduğu düzleme dik olan birim dik vektör  $\vec{k}$  vektöründen başkası değildir.

**11)** Daima

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 , \\ \vec{A} \times \vec{B} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \vec{k} \end{aligned}$$

Gerçekten, birincisi için 7) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\ &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot b_1 \vec{i} + (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot b_2 \vec{j} + (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot b_3 \vec{k} \\ &= (a_1 b_1) \vec{i} \cdot \vec{i} + (a_2 b_2) \vec{j} \cdot \vec{j} + (a_3 b_3) \vec{k} \cdot \vec{k} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

bulunur, çünkü 10) özelliği nedeniyle sözgelimi  $(a_2 \vec{j}) \cdot (b_1 \vec{i}) = (a_2 b_1) \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$  olur. Benzer biçimde 9) ve 10) özellikleri kullanılarak ve sözgelimi  $a_1 \vec{i} \times b_1 \vec{i} = a_1 b_1 (\vec{i} \times \vec{i}) = \vec{0}$ ,  $a_1 \vec{i} \times$

$$b_2 \vec{j} = a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) = a_1 b_2 \vec{k} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\ &= (a_1 b_1) (\vec{i} \times \vec{j}) + (a_1 b_3) (\vec{i} \times \vec{k}) + (a_2 b_1) (\vec{j} \times \vec{i}) \\ &\quad + (a_2 b_3) (\vec{j} \times \vec{i}) + (a_3 b_2) (\vec{k} \times \vec{i}) + (a_3 b_2) (\vec{k} \times \vec{j}) \\ &= a_1 b_2 \vec{k} - a_1 b_3 \vec{j} - a_2 b_1 \vec{k} + a_2 b_3 \vec{i} + a_3 b_1 \vec{j} - a_3 b_2 \vec{i} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned} \quad \text{bulunur.}$$

Bu son vektör, sembolik yazıyla aşağıdaki gibi yazılır. ( gerçekte, bir satırı vektörlerden, öteki satırları sayılarından oluşan bir determinantın anlamı yoktur! )

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dikkat edilirse bu sembolik yazılış aracılığıyla

$$\begin{aligned} -(\vec{A} \times \vec{B}) &= (b_2 a_3 - b_3 a_2) \vec{i} + (b_3 a_1 - b_1 a_3) \vec{j} + (b_1 a_2 - b_2 a_1) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{B} \times \vec{A} \end{aligned}$$

ve böylece daha önce gözlenen  $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$  eşitliği elde edilir.

**12)**  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \neq (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$ . olabilir;  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$  olabilir, kısacası gerek skaler çarpım, gerekse vektörel çarpım işlemleri katılmalı ( assosyatif ) **değildir!**

Gerçekten  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  ve  $\vec{C}$  vektörleri sıfır vektörden farklı ve gerek  $\vec{A}$  ile  $\vec{C}$  ve gerekse  $\vec{B}$  ile  $\vec{A} \times \vec{C}$  vektörleri doğrudan değilse ( sözelimi aynı düzlemede bulunsalar ve  $\vec{B}$  vektörü  $\vec{A}$  vektörünün  $30^\circ$  derece döndürülmesi ve  $\vec{C}$  vektörü de  $\vec{B}$  vektörünün  $30^\circ$  derece döndürülmesiyle elde edilse ve  $\vec{A} \neq \vec{0}$  olsa, tüm istenenlerin yerine geleceğini gözleyiniz ) bu durumda 13) özelliğinde gösterilecek olan özdeşlik kullanılarak  $\vec{0} \neq \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{C}) = (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{A} - (\vec{B} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$  yani  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \neq (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$  gözlenir. Öte yandan vektörel çarpım işleminin katılmalı bir işlem olmadığı  $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \neq \vec{0} = (\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j}$  gözlenerek de anlaşılır.

13) Daima  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$  özdeşliği geçerlidir. Buradan aşağıdaki eşitliği

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{A}$$

elde ediniz.

Gerçekten 11) özelliği kullanılırsa, kolayca

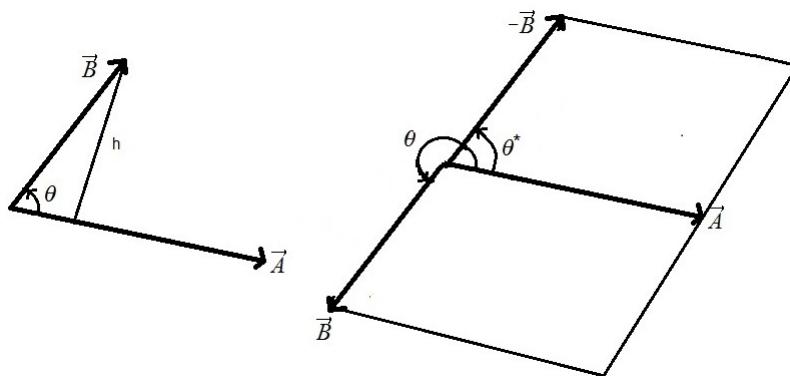
$$\begin{aligned} \vec{B} \times \vec{C} &= (b_2c_3 - b_3c_2) \vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3) \vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1) \vec{k} , \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)] \vec{i} + [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)] \vec{j} \\ &\quad + [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)] \vec{k} \\ &= [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \vec{i} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \vec{i}] \\ &\quad + [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 \vec{j} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \vec{j}] \\ &\quad + [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 \vec{k} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \vec{k}] \end{aligned}$$

ve dikkat edilirse bu vektör aşağıdakidir:

$$\begin{aligned} &= [(\vec{A} \cdot \vec{C}) b_1 \vec{i} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) c_1 \vec{i}] + [(\vec{A} \cdot \vec{C}) b_2 \vec{j} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) c_2 \vec{j}] + [(\vec{A} \cdot \vec{C}) b_3 \vec{k} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) c_3 \vec{k}] \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

İkincisi bu sonuç ve 1) özelliğinden çıkar.

14)  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  gerçek sayısı daima,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerini kenar kabul eden koşutkenarın alanıdır,  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  gerçek sayısının mutlak değeri ise bu üç vektörü kenar kabul eden koşutuzlunun hacmidir.



Gerçekten  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere, eğer  $\theta \leq 180^\circ$  ise şekilde de görüldüğü gibi,  $\vec{B}$  vektörünün uç noktasından  $\vec{A}$  vektörüne indirilen dikmenin uzunluğu  $h$  olmak üzere,  $\sin \theta = \frac{h}{|\vec{B}|} = |\sin \theta|$  nedeniyle,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerini kenar kabul eden koşutkenarın alanı  $= |\vec{A}| \cdot h = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot |\sin \theta| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}(\vec{A} \times \vec{B})| = |\vec{A} \times \vec{B}|$  bulunur. Eğer  $180^\circ < \theta$  ise  $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (-\vec{B})$  ve sonuca  $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \times (-\vec{B})|$  gözleyip  $\vec{A}$  ile  $-\vec{B}$  vektörleri arasındaki açının, kesinlikle  $< 180^\circ$  olmasından yararlanarak bir kanıtlama verilir (nasıl?), elbette  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin kenar kabul eden koşutkenar ile  $\vec{A}$  ve  $-\vec{B}$  vektörlerini kenar kabul edenin alanları eşittir! İlkinci iddianın kanıtlanması okuyucuya bırakılmıştır. Bu örnekte kanıtlanan gerçeklerden şu sonuçlar çıkarsanır: Eğer  $0 < |\vec{A} \times \vec{B}|$  ise  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri doğrudır;  $0 < |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$  ise bu üç vektör düzlemdən deyildir.

$$15) \text{ Daima } \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ geçerlidir.}$$

$\vec{B} \times \vec{C} = (b_2c_3 - b_3c_2) \vec{i} + (b_3c_1 - b_1c_3) \vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1) \vec{k}$  ve  $\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$  olduğundan 11) özelliğindeki ilk bağıntı kullanılırsa aşağıdakiler bulunur.

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \cdot a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

### Örnekler 1:

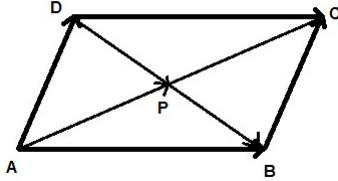
1)  $\mathbb{R}^3$  uzayında her  $\vec{A}$  vektörü için  $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  olur.

Gerçekten 11) özelliğiyile  $\vec{A} \cdot \vec{A} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$  olduğundan 3) özelliği kullanılarak istenen bulunur. Buradan şu kolay fakat önemli sonuç çıkar:

$$|\vec{A}| = 0 \text{ için gyk } a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ yani } \vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

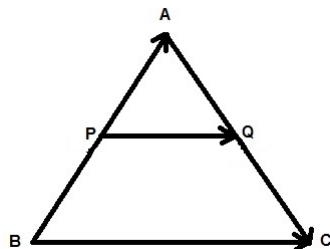
2) Bir koşutkenarda köşegenler, birbirlerini ortadan ikiye ayırarak keserler.

Gerçekten köşe noktaları  $A, B, C$  ve  $D$  olan koşutkenarda, vektörel toplam işleminin temel özelikleriyle  $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$  yani  $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD}$  ve  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  ve yönleri ve uzunlukları



aynı olan  $\overrightarrow{AD}$  ve  $\overrightarrow{BC}$  vektörleri **eşit** olduğundan  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  bulunur. Oysa uygun  $\alpha \in (0, 1)$  ve  $\beta \in (0, 1)$  sabitleri aracılığıyla  $\overrightarrow{DP} = \alpha \cdot \overrightarrow{DB}$  ve  $\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$  yani  $\overrightarrow{DP} = \alpha (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ ,  $\overrightarrow{AP} = \beta (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$  bulunur. Sonuçta  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP}$  yani  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{DP} = \beta (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \alpha (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = (\beta - \alpha) \cdot \overrightarrow{AB} + (\beta + \alpha) \cdot \overrightarrow{AD}$  ve böylece  $(\beta - \alpha) \cdot \overrightarrow{AB} + (\beta + \alpha - 1) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$  bulunarak ve  $\overrightarrow{AB}$  ile  $\overrightarrow{AD}$  doğrudaş olmadıklarından, daha önce gözlendiği gibi, kesinlikle **lineer bağımsız** oldukları için, en son vektörel eşitlikten zorunlu olarak  $\beta - \alpha = 0 = \beta + \alpha - 1$  yani  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  yani  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$  ve  $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB}$  bulunur, bu sonuç  $\overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AP}| = \left| \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$  ve  $\overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{DB}}{2}$  yani isteneni verir.

3) Herhangi bir üçgende, iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru üçüncü kenara koşuttur, uzunluğu ise üçüncü kenarın uzunluğunun yarısıdır.



Yanal kenarların orta noktaları sırasıyla  $P$  ve  $Q$  ile yazılsın. Kolayca  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$  ve  $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$  ve  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$  ve  $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$  ve  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$  böylece  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$  bulunur, bir sonraki önekten anlaşılacağı gibi  $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{BC}$  ve  $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$  bulunur.

4) İki vektör arasındaki yönsüz açıyı tanımlayıp, ancak ve yalnız, uygun bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  skaleri için  $\vec{A} = \alpha \cdot \vec{B}$  olduğunda  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin koşut olduklarını gösteriniz.

Gerçekten, herhangi  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki yönsüz açı, bunlar sıfır vektörden farklıysa

$$\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \arccos \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} \right) = \arccos(b(\vec{A}) \cdot b(\vec{B})) \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanır, bunun bir gerçek sayı olduğunu ve sözü edilen açının **radyan değeri** olduğunu gözleyiniz. Eğer  $\vec{A} = \vec{0}$  ya da  $\vec{B} = \vec{0}$  ise, bu sayı 0 olarak tanımlanır; özel olarak **her**  $\vec{A}$  vektörü için  $\sphericalangle(\vec{0}, \vec{A}) = \sphericalangle(\vec{A}, \vec{0}) = 0$  geçerlidir. Yukarda tanımlanan açının  $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \arccos(b(\vec{A}) \cdot b(\vec{B})) = \arccos(b(\vec{B}) \cdot b(\vec{A})) = \sphericalangle(\vec{B}, \vec{A})$  gerçeklediği, böylelikle bu açının, pozitif yönde hesaplanmış bir açı OLMADIĞINA dikkat ediniz. Şimdi, dikkat edilirse  $\vec{B} \neq \vec{0}$  vektörü ve  $\alpha > 0$  skaleri ne olursa olsun

$$b(\alpha \cdot \vec{B}) = \frac{\alpha \vec{B}}{|\alpha \vec{B}|} = \frac{\alpha \cdot \vec{B}}{\alpha \cdot |\vec{B}|} = \frac{1}{\alpha \cdot |\vec{B}|} (\alpha \cdot \vec{B}) = \frac{\alpha}{\alpha \cdot |\vec{B}|} \cdot \vec{B} = \frac{1}{|\vec{B}|} \cdot \vec{B} = b(\vec{B})$$

ve üstelik,  $b(\vec{B})$  uzunluğu 1 olan bir vektör ve böylece  $b(\vec{B}) \cdot b(\vec{B}) = |b(\vec{B})|^2 = 1$  olduğundan,  $\vec{A} = \alpha \cdot \vec{B}$  gerçekleşlendiğinde

$\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \sphericalangle(\alpha \vec{B}, \vec{B}) = \arccos(b(\alpha \vec{B}) \cdot b(\vec{B})) = \arccos(b(\vec{B}) \cdot b(\vec{B})) = \arccos 1 = 0$  bulunarak  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin aynı yönde, yani koşut oldukları anlaşılır. Dikkat edilirse  $\vec{A} \neq \vec{0}$  ise, her  $\alpha < 0$  için

$$\sphericalangle(\vec{A}, \alpha \vec{A}) = \arccos \left( \frac{\alpha (\vec{A} \cdot \vec{A})}{|\alpha| \cdot |\vec{A}|^2} \right) = \arccos \left( \frac{\alpha |\vec{A}|^2}{|\alpha| \cdot |\vec{A}|^2} \right) = \arccos(-1) = \pi$$

ve  $\alpha = 0$  için  $\sphericalangle(\vec{A}, \alpha \vec{A}) = 0$  olur. Demek ki  $\vec{A} = \alpha \cdot \vec{B}$  olduğunda, bu vektörler arasındaki açının radyan değeri ya 0 ya da  $\pi$ , yani bu vektörler arasındaki açı ya  $0^\circ$  ya da  $180^\circ$  olmaktadır; bu sonuç, bu vektörlerin üzerinde bulunduğu doğruların birbirine koşut olduğunu söylemektedir.

Tersine bu koşul gerçekleşlendiğinde yani ya  $b(\vec{A}) \cdot b(\vec{B}) = \cos 0 = 1$  ya da  $b(\vec{A}) \cdot b(\vec{B}) = \cos \pi = -1$  olduğunda,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörlerinin lineer bağımsız **olamayacağını**, böylelikle uygun bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  aracılığıyla  $\vec{A} = \alpha \cdot \vec{B}$  gerçekleştiğini gösteriniz.  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  sıfırdan farklı vektörleri koşut iseler  $\vec{A} // \vec{B}$  yazılır. Fiziksel yorumda bu (bu iki vektörün başlangıç noktaları çakışık alınarak) vektörlerin **doğrudaş olmaları** anlamına gelir.

5)  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri doğrudaş degillerse,  $\alpha_A = |\vec{A}|$  ve  $\alpha_B = |\vec{B}|$  olmak üzere, bu ikisi arasındaki açıortay vektörünün aşağıdaki olduğunu gösteriniz:

$$\vec{C} = \frac{\alpha_B}{\alpha_A + \alpha_B} \cdot \vec{A} + \frac{\alpha_A}{\alpha_A + \alpha_B} \cdot \vec{B}.$$

Gerçekten, bunun için  $\sphericalangle(\vec{A}, \vec{C}) = \sphericalangle(\vec{C}, \vec{B})$  gösterilmelidir. Dikkat edilirse

$$\alpha_C = |\vec{C}| = \frac{\sqrt{2}\alpha_A\alpha_B\sqrt{1 + \cos\theta}}{\alpha_A + \alpha_B}$$

gerçekleşir, burada  $\angle(\vec{A}, \vec{B}) = \theta$  (radyan) yazılmıştır. Gerçekten  $\vec{C}$  vektörü  $\vec{C} = \frac{1}{\alpha_A + \alpha_B} (\alpha_A \vec{B} + \alpha_B \vec{A})$  olduğundan, kolayca, skaler çarpımın dağılma özelliğiyle

$$\begin{aligned}\vec{C} \cdot \vec{C} &= \frac{1}{(\alpha_A + \alpha_B)^2} (\alpha_A \vec{B} + \alpha_B \vec{A}) \cdot (\alpha_A \vec{B} + \alpha_B \vec{A}) = \frac{\alpha_A^2 \vec{B} \cdot \vec{B} + 2\alpha_A \alpha_B \vec{A} \cdot \vec{B} + \alpha_B^2 \vec{A} \cdot \vec{A}}{(\alpha_A + \alpha_B)^2} \\ &= \frac{\alpha_A^2 \alpha_B^2 + 2\alpha_A \alpha_B (\alpha_A \alpha_B \cos \theta) + \alpha_B^2 \alpha_A^2}{(\alpha_A + \alpha_B)^2} = \frac{2\alpha_A^2 \alpha_B^2 (1 + \cos \theta)}{(\alpha_A + \alpha_B)^2}\end{aligned}$$

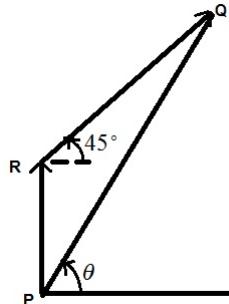
ve böylece  $|\vec{C}| = +\sqrt{\vec{C} \cdot \vec{C}}$  bilgisile istenen bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{C} &= \frac{1}{\alpha_A + \alpha_B} \vec{A} \cdot (\alpha_B \vec{A} + \alpha_A \vec{B}) = \frac{\alpha_B \vec{A} \cdot \vec{A} + \alpha_A \vec{A} \cdot \vec{B}}{\alpha_A + \alpha_B} = \frac{\alpha_A^2 \alpha_B (1 + \cos \theta)}{\alpha_A + \alpha_B}, \\ \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{\alpha_A \alpha_C} &= \frac{1}{\alpha_A \alpha_C} \vec{A} \cdot \vec{C} = \frac{\alpha_A + \alpha_B}{\sqrt{2} \alpha_A^2 \alpha_B \sqrt{1 + \cos \theta}} \cdot \frac{\alpha_A^2 \alpha_B (1 + \cos \theta)}{\alpha_A + \alpha_B} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}\end{aligned}$$

ve tümüyle benzer biçimde  $\vec{B} \cdot \vec{C} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$  bulunarak, istenen  $\angle(\vec{A}, \vec{C}) = \arccos \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \angle(\vec{C}, \vec{B})$  sonucu bulunur.

**6)** Arabalı bir yolcu  $3km$  kuzeye, sonra  $5km$  kuzeydoğuya giderse ulaştığı noktanın konumu nedir?

Şekilde  $\overline{PR} = 3$  ve  $\overline{RQ} = 5$  ve  $\angle PRQ = 135^\circ$  alınmıştır, çünkü yolcu  $R$  noktasından  $45^\circ$  derecelik bir açıyla  $5km$  daha gitmektedir.



Üstelik  $\cos 135^\circ = \cos \left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  olduğundan  $PRQ$  üçgeninde, ünlü cosinüs teoremiyle

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 - 2 \cdot \overline{PR} \cdot \overline{RQ} \cdot \cos(\angle PRQ) = 34 + \frac{30}{\sqrt{2}} \cong 55,2132$$

ve sonuçta  $\overline{PQ} \cong 7,43$  kullanarak, sinüs teoremiyle

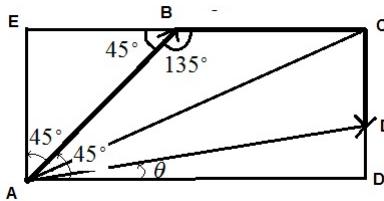
$$\frac{\sin(\angle RPQ)}{\overline{RQ}} = \frac{\sin(\angle PRQ)}{\overline{PQ}} \cong \frac{\sin 135^\circ}{7,43}$$

sonuçta derece cinsinden

$$\angle RPQ = \arcsin\left(\frac{\overline{RQ}}{7,43} \cdot \sin 135^\circ\right) \cong \arcsin\left(\frac{5}{(7,43)\sqrt{2}}\right) = 28.41^\circ$$

bulunur. Böylece yolcunun, derece cinsinden  $\theta = 90^\circ - 28.41^\circ = 61.59^\circ$  derecelik bir açıyla,  $P$  noktasının 7430 metre uzağında olduğu anlaşılır, çünkü  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$  geçerlidir.

7) Arabalı bir yolcu önce kuzeydoğu yönünde  $25\text{ km}$ , sonra doğu yönünde  $15\text{ km}$  ve sonra güney yönünde  $10\text{ km}$  giderse ulaştığı noktanın konumu nedir?



Hipotezler nedeniyle  $\overline{AB} = 25$ ,  $\overline{BC} = 15$  ve  $\overline{CD} = 10$  ve  $EAB$  ikizkenar dik üçgen olduğundan  $\overline{EA} = \overline{EB} = \frac{25}{\sqrt{2}} = \overline{CD'} = \overline{CD} - \overline{CD}$  ve  $\overline{AD'} = \overline{EB} + \overline{BC}$  yani  $\overline{DD'} = \frac{25}{\sqrt{2}} - 10$ ,  $\overline{AD'} = \frac{25}{\sqrt{2}} + 15$  ve sonuçta  $ADD'$  dik üçgeninde

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DD'}^2} \cong 33,5674$$

bulunur. Şimdi derece cinsinden  $\theta$  açısını bulalım.  $BAC$  üçgeninde sinüs teoremiyle,  $\angle BAC$  açısı, derece cinsinden

$$\frac{\sin(\angle BAC)}{15} = \frac{\sin 135^\circ}{37,15} = \frac{1}{\sqrt{2}.(37,15)} \text{ ve } \angle BAC = \arcsin\left(\frac{15}{\sqrt{2}.(37,15)}\right) = 16.58^\circ$$

bulunur, çünkü cosinus teoremiyle  $\overline{AC} \cong 37,15$  bulunur, çünkü

$$\overline{AC}^2 = 25^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 25 \cdot \cos 135^\circ = 850 + \sqrt{2} \cdot 25 \cdot 15 \cong 1380,33.$$

O halde  $ACD$  üçgeninde sinüs teoremiyle

$$\frac{\sin(\angle CAD)}{10} = \frac{\sin(\angle ACD)}{33,56} = \frac{\sin 61.58^\circ}{33,56}$$

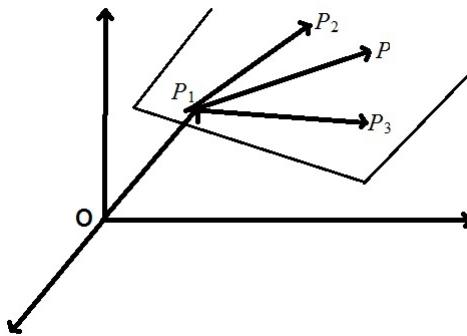
ve böylece  $\angle CAD = \arcsin\left(\frac{10 \cdot (0.879482495)}{33,56}\right) \cong 15.19^\circ$  bulunur, çünkü  $ABC$  üçgeninde  $\angle BAC = 16.58^\circ$  nedeniyle  $\angle BCA = 180^\circ - (135^\circ + 16.58^\circ) = 28.42^\circ$  ve böylece  $\angle ACD = 90^\circ - 28.42^\circ = 61.58^\circ$  olmaktadır. Sonuçta, derece cinsinden aranan  $\theta$  açısı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\theta = 45^\circ - (\angle BAC + \angle CAD) = 45^\circ - (16.58^\circ + 15.19^\circ) = 13.23^\circ.$$

Böylelikle, yolcunun  $13.23^\circ$  derecelik açıyla başlangıç noktasından 3356 metre öteye ulaştığı anlaşılır.

**Ödev:** Kamyonetli bir satıcı önce kuzeydoğu yönünde  $15\text{ km}$ , sonra kuzey yönünde  $10\text{ km}$  sonra doğu yönünde  $23\text{ km}$  giderse, ulaştığı konumu nedir?

8)  $\mathbb{R}^3$  uzayında, doğrudaş olmayan üç noktanın belirlediği düzlemi yazınız.



Doğrudaş olmayan  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  ve  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  noktaları verilsin. Bilindiği gibi,  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen doğru ile  $P_3$  noktası, tek türlü belirli bir **düzlem** belirler, bunun söygelimi  $P_2$  ve  $P_3$  noktalarından geçen doğru ile  $P_1$  noktasının belirlediği düzlemin aynısı olduğunu gözleyiniz. Bu düzlem üzerindeki herhangi bir  $P(x, y, z)$  noktası alındığında  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{P_1P}$  ve  $\overrightarrow{P_1P_3}$  vektörleri sözü edilen düzlem üzerinde bulundukları, kısacası bu vektörler düzlemdaş olduklarından, bu vektörler üzerine kurulan koşutüzlünün hacmi sıfır olur, kısacası yukarıdaki 14) özelliği kullanılarak

$$0 = \overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1)$$

yani bu son yazılıştaki katsayıları sırasıyla  $a_1$ ,  $a_2$  ve  $a_3$  denilirse

$$0 = a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1)$$

bulunur, işte bu, aranan düzlemin denklemidir, örneğin  $\mathbb{R}^3$  uzayında

$$P_1(3, 1, -2), \quad P_2(-1, 2, 4), \quad P_3(2, -1, 1)$$

noktalarından geçen düzlem

$$0 = \begin{vmatrix} x - 3 & y - 1 & z + 2 \\ -4 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15x + 6y + 9z - 33 \quad \text{yani} \quad 5x + 2y + 3z = 11 \text{ olur.}$$

**Ödevler 1 :**

1)  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  ve  $\vec{D}$  vektörleri ne olursa olsun şunlar geçerlidir, gösteriniz.

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}), \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot [(\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A})] &= (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))^2. \end{aligned}$$

(yol gös:  $\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B}$  yazıp 15) ve 13) özelliklerini kullanınız.)

2) Daima, aşağıdakiler geçerlidir gösteriniz:

$$\begin{aligned} (\vec{A} + \vec{B}) \cdot ((\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})) &= 2\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}), \\ (\vec{A}_1 \cdot (\vec{B}_1 \times \vec{C}_1)) \cdot (\vec{A}_2 \cdot (\vec{B}_2 \times \vec{C}_2)) &= \begin{vmatrix} \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 & \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 & \vec{A}_1 \cdot \vec{C}_2 \\ \vec{B}_1 \cdot \vec{A}_2 & \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 & \vec{B}_1 \cdot \vec{C}_2 \\ \vec{C}_1 \cdot \vec{A}_2 & \vec{C}_1 \cdot \vec{B}_2 & \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Tanım 2 (Vektör Değerli Fonksiyonlar):**

$F(x) = (f(x), g(x), h(x)) \in \mathbb{R}^3$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) fonksiyonu, vektörel yazılışla

$$\vec{F}(x) = f(x) \cdot \vec{i} + g(x) \cdot \vec{j} + h(x) \cdot \vec{k}$$

yazılır, çünkü herhangi bir  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  vektörü (sıralı gerçek sayı üçlüsü için)  $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$  yazılışının geçerli olduğunu daha önce gözlemiştik, kısacası  $F$  fonksiyonu her  $x \in [a, b]$  gerçek sayısına  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayında bir vektör eşleştirmektedir. Aşağıdakiler vektör değerli fonksiyon örnekleridir:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) &= A_1(x) \vec{i} + A_2(x) \vec{j} + A_3(x) \vec{k} \quad (\forall x \in [a, b]). \\ \vec{A}(x, y, z) &= A_1(x, y, z) \vec{i} + A_2(x, y, z) \vec{j} + A_3(x, y, z) \vec{k} \quad (\forall (x, y, z) \in R \subseteq \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Birincisinin türevi, ikincisinin kısmi türevleri, sağ yandaki türev ya da kısmi türevler varsa, aşağı-

daki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x+h) - \vec{A}(x)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_1(x+h) - A_1(x)}{h} \right) \vec{i} + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_2(x+h) - A_2(x)}{h} \right) \vec{j} + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_3(x+h) - A_3(x)}{h} \right) \vec{k} \\ &= A'_1(x) \vec{i} + A'_2(x) \vec{j} + A'_3(x) \vec{k}, \\ \frac{\partial \vec{A}(x,y,z)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(x+h,y,z) - \vec{A}(x,y,z)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_1(x+h,y,z) + A_1(x,y,z)}{h} \right) \vec{i} + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_2(x+h,y,z) + A_2(x,y,z)}{h} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_3(x+h,y,z) + A_3(x,y,z)}{h} \right) \vec{k} \\ &= \frac{\partial A_1(x,y,z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_2(x,y,z)}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial A_3(x,y,z)}{\partial x} \vec{k}.\end{aligned}$$

Benzer biçimde  $\frac{\partial \vec{A}(x,y,z)}{\partial y}$  ve  $\frac{\partial \vec{A}(x,y,z)}{\partial z}$  kısmi türevleri tanımlanır, diferansiyel fonksiyonu ise

$$d\vec{A} = dA_1 \vec{i} + dA_2 \vec{j} + dA_3 \vec{k}$$

$$\begin{aligned}&= \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} dx + \frac{\partial A_1}{\partial y} dy + \frac{\partial A_1}{\partial z} dz \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} dx + \frac{\partial A_2}{\partial y} dy + \frac{\partial A_2}{\partial z} dz \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_3}{\partial x} dx + \frac{\partial A_3}{\partial y} dy + \frac{\partial A_3}{\partial z} dz \right) \vec{k} \\ &= \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial x} \vec{k} \right) dx + \left( \frac{\partial A_1}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial y} \vec{k} \right) dy + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \vec{k} \right) dz \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz\end{aligned}$$

birimde tanımlanır. Öte yandan  $t \in [a, b]$  ya da  $t \in [a, \infty)$  olmak üzere  $\vec{A}(t) = A_1(t) \vec{i} + A_2(t) \vec{j} + A_3(t) \vec{k}$  vektörel fonksiyonuna, tüm  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  ve  $A_3(t)$  fonksiyonları  $t$  değişkeninin sürekli fonksiyonları ise,  $\mathbb{R}^3$  uzayında tanımlanmış bir **uzay eğrisi** denilir. Örneğin

$$\vec{A}(t) = (t^3 + t) \vec{i} + 2e^{-t} \vec{j} + 3 \sin t \vec{k}$$

böyle bir uzay eğrisidir. Uzay eğrilerini  $\vec{A}(t)$  ile değil  $\vec{r}(t)$  ile yazmak gelenek olmuştur.

**Tanım3: Del ya da nabla işlemcisi**

$$\nabla = D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

birimde tanımlanır.  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  skaler değerli fonksiyonu ile  $\vec{A}(x, y, z)$  vektör değerli fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\nabla \varphi &= \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}, \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\ \nabla \times \vec{A} &= \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

birimde tanımlanır. Nabla işlemcisi bir vektör olduğundan, son iki tanımın, iki vektörün skaler ve vektörel çarpımlarına ilişkin sonuçlarla uyumlu olduğunu gözleyiniz. Yukardaki işlemler, çoğunlukla

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi, \quad \nabla \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A}, \quad \nabla \times \vec{A} = \text{curl } \vec{A}$$

birimde yazılır; burada div işlemcisi, bir vektör değerli fonksiyona uygulandığında, vektör değerli değil, skaler (gerçek) değerli, yani farklı nitelikte bir fonksiyon verdiğiinden, diverjans ( $= \text{räksay}$ ) adını buradan almaktadır. curl  $\vec{A}$  vektörüne,  $\vec{A}$  vektör değerli fonksiyonun **büklüm**'ü de denilir.  $\nabla \varphi (= \text{grad } \varphi)$  ve,  $\nabla \times \vec{A} (= \text{curl } \vec{A})$  daima bir vektör, div  $\vec{A} (= \nabla \cdot \vec{A})$  ise, daima gerçek değerli bir fonksiyondur.

### Nabla İşlemcisinin Temel Özellikleri

- 1)  $\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2, \quad \nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}.$
- 2)  $\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \times \vec{B}).$
- 3)  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi (\nabla \cdot \vec{A}).$
- 4)  $\nabla \times \varphi \vec{A} = (\nabla \varphi \times \vec{A}) + \varphi (\nabla \times \vec{A}).$
- 5)  $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}).$
- 6) Daima  $\nabla \times \nabla \varphi = \vec{0}$  ve  $\nabla \cdot (\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2) = 0,$
- 7)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \text{div}(\text{curl } \vec{A}) = 0.$
- 8)  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \text{curl}(\text{curl } \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$
- 9)  $d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r}.$  (Ayrıca Ödevler 2, 14) sorusuna bkz.)

---

Gerçekten

$$\begin{aligned}
 \nabla(\varphi_1 + \varphi_2) &= \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} \vec{k} \\
 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \vec{k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \vec{k} \\
 &= \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \vec{k} \right) + \left( \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \vec{k} \right) \\
 &= \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2.
 \end{aligned}$$

$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$  ve 2) özelliği skaler ve vektörel çarpımın temel özellikleri nedeniyle doğrudur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{A}) &= \frac{\partial(\varphi A_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi A_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi A_3)}{\partial z} \\
 &= \varphi_x \cdot A_1 + \varphi \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x} + \varphi_y \cdot A_2 + \varphi \cdot \frac{\partial A_2}{\partial y} + \varphi_z \cdot A_3 + \varphi \cdot \frac{\partial A_3}{\partial z} \\
 &= (\varphi_x A_1 + \varphi_y A_2 + \varphi_z A_3) + \varphi \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\
 &= (\varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}) \cdot (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) + \varphi \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) \\
 &= (\nabla \varphi) \cdot \vec{A} + \varphi \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) \quad , \\
 \nabla \times \varphi \cdot \vec{A} &= \left( \frac{\partial(\varphi A_3)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi A_2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(\varphi A_1)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi A_3)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial(\varphi A_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi A_1)}{\partial y} \right) \vec{k} \\
 &= (\varphi_y A_3 - \varphi_z A_2) \vec{i} + \varphi \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + (\varphi_z A_1 - \varphi_x A_3) \vec{j} \\
 &\quad + \varphi \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + (\varphi_x A_2 - \varphi_y A_1) \vec{k} + \varphi \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k} \\
 &= (\varphi_y A_3 - \varphi_z A_2) \vec{i} + (\varphi_z A_1 - \varphi_x A_3) \vec{j} + (\varphi_x A_2 - \varphi_y A_1) \vec{k} + \varphi \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\
 &= (\nabla \varphi \times \vec{A}) + \varphi \cdot (\nabla \times \vec{A})
 \end{aligned}$$

bulunur, çünkü kolayca

$$\begin{aligned}
 \nabla \varphi \times \vec{A} &= (\varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}) \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}) \\
 &= (\varphi_y A_3 - \varphi_z A_2) \vec{i} + (\varphi_z A_1 - \varphi_x A_3) \vec{j} + (\varphi_x A_2 - \varphi_y A_1) \vec{k}
 \end{aligned}$$

eşitliği, vektörel çarpımın 11) özelliğinden elde edilir. Ayrıca  $\vec{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z) \vec{i} + A_2(x, y, z) \vec{j} + A_3(x, y, z) \vec{k}$  ve benzer yazılış  $\vec{B}(x, y, z)$  için geçerli ve böylece değişkenleri yazmadan

$$\vec{A}(x, y, z) \times \vec{B}(x, y, z) = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{k}$$

olduğundan sonuçta,

$$\begin{aligned}
 \nabla (\vec{A} \times \vec{B}) &= \frac{\partial (A_2 B_3 - A_3 B_2)}{\partial x} + \frac{\partial (A_3 B_1 - A_1 B_3)}{\partial y} + \frac{\partial (A_1 B_2 - A_2 B_1)}{\partial z} \\
 &= B_1 \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + B_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + B_3 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
 &\quad - \left[ A_1 \left( \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) + A_2 \left( \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right) + A_3 \left( \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \right] \\
 &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, tüm ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  için

$$\begin{aligned}
 \operatorname{curl}(\operatorname{grad} \varphi) &= \nabla \times \nabla \varphi = \nabla \times \left( \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k} \right) \\
 &= (\varphi_{zy} - \varphi_{yz}) \vec{i} + (\varphi_{xz} - \varphi_{zx}) \vec{j} + (\varphi_{yx} - \varphi_{xy}) \vec{k} \\
 &= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

ve böylece aşağıdaki, 15) özelliği kullanılarak bulunur:

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2) = (\nabla \varphi_2) \cdot (\nabla \times \nabla \varphi_1) = 0$$

Ayrıca  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$  vektörel fonksiyonunun tüm ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli ise, sözgeğimi  $\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x}$  olduğundan

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial x} = 0
 \end{aligned}$$

yani  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{A}) = 0$  bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \operatorname{curl}(\operatorname{curl} \vec{A}) = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{A_3}{\partial y} - \frac{A_2}{\partial z} & \frac{A_1}{\partial z} - \frac{A_3}{\partial x} & \frac{A_2}{\partial x} - \frac{A_1}{\partial y} \end{array} \right| \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A_2}{\partial x} - \frac{A_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A_1}{\partial z} - \frac{A_3}{\partial x} \right) \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A_3}{\partial y} - \frac{A_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_2}{\partial x} - \frac{A_1}{\partial y} \right) \right] \vec{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_1}{\partial z} - \frac{A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A_3}{\partial y} - \frac{A_2}{\partial z} \right) \right] \vec{k} \\ &= \left[ - \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} \right] \\ &\quad + \left[ - \left( \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} \right) \vec{j} \right] \\ &\quad + \left[ - \left( \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right) \vec{k} + \left( \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial z} \right) \vec{k} \right] \\ &= -\nabla^2 \vec{A} + \nabla \cdot (\operatorname{div} \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A})\end{aligned}$$

bulunur, çünkü sözgelimi

$$\frac{\partial(\operatorname{div} \vec{A})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial z}$$

geçerlidir. Oysa bu son özdeşlik çok daha basit bir yoldan, ünlü

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

özdeşliğini kullanıp, nabla işlemcisinin vektör olması nedeniyle aşağıdaki gibi bulunur:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Son olarak  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  yer vektörü için  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$  ve böylece

$$\nabla \varphi \cdot d\vec{r} = (\varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}) (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = d\varphi$$

yani aşağıdaki ünlü ve yararlı bağlantı bulunur:

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r}$$

**Örnek:**  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  olmak üzere,  $r = r(x, y, z)$  fonksiyonunun  $(0, 0, 0)$  noktasından farklı noktalarda, tüm mertebeden kısmi türevlerinin tanımlı ve sürekli olduğuna dikkat edip,

$f(r)$  türetilebilir gerçek değerli fonksiyonu için gösteriniz:

$$\text{grad } f(r) = \nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r}$$

Gerçekten

$$r_x = \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla f(r) &= \frac{\partial f(r)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \vec{k} = f'(r) r_x \vec{i} + f'(r) r_y \vec{j} + f'(r) r_z \vec{k} \\ &= f'(r) (r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) = \frac{f'(r)}{r} \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

**Örnek:** i)  $\nabla^2 f'(r)$  nedir? ii)  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$  fonksiyonu Laplace denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

i) Gerçekten, bir önceki soruda kanıtlanan şekilde yararlanılsrsa

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(r) &= \nabla \cdot (\nabla f(r)) = \nabla \left( \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r} \right) \stackrel{3)}{=} \nabla \left( \frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \vec{r} + \frac{f'(r)}{r} \cdot (\nabla \cdot \vec{r}), \\ \nabla \left( \frac{f'(r)}{r} \right) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \vec{r} = \frac{f''(r) \cdot r - f'(r)}{r^3} \cdot \vec{r} \quad \text{ve} \\ \nabla \cdot \vec{r} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \end{aligned}$$

ve böylece  $\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2 = r^2$  nedeniyle şu bulunur:

$$\nabla^2 f(r) = \left( \frac{f''(r) r - f'(r)}{r^3} \right) \cdot \vec{r} + \frac{3f'(r)}{r} = \frac{f''(r) r - f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$$

ii)  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  fonksiyonunun Laplace denkleminin bir çözümü olduğu Bölüm 1'de gözlenmiştir (nerede?). Fakat bu kolay bir yoldan, i) şıkkında kanıtlanan

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

sonucu kullanılarak aşağıdaki gibi gözlenir:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r} \left( -\frac{1}{r^2} \right) = 0.$$

**Örnek:**  $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$  ve  $\nabla \times (f(r) \cdot \vec{r}) = \vec{0}$  gerçekleşenir.

Gerçekten

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} = \vec{0}\end{aligned}$$

ve böylece 3) özelliğini kullanıp aşağıdaki istenen bulunur:

$$\nabla \times (f(r) \cdot \vec{r}) = (\nabla f(r) \times \vec{r}) + f(r) \cdot (\nabla \times \vec{r}) = \nabla f(r) \times \vec{r} = \left( \frac{f'(r)}{r} \cdot \vec{r} \right) \times \vec{r} = \frac{f'(r)}{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}$$

**Örnek:**  $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$  sabit vektörünün  $\vec{c} = \frac{1}{2} \operatorname{curl}(\vec{c} \times \vec{r})$  gerçeklediğini gösterelim.

Gerçekten  $\vec{c}$  nin bileşenleri sabit olduğundan

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(\vec{c} \times \vec{r}) &= \nabla \times \left[ (c_2 z - c_3 y) \vec{i} + (c_3 x - c_1 z) \vec{j} + (c_1 y - c_2 x) \vec{k} \right] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} (c_1 y - c_2 x) - \frac{\partial}{\partial z} (c_3 x - c_1 z) \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} (c_2 z - c_3 y) - \frac{\partial}{\partial x} (c_1 y - c_2 x) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} (c_3 x - c_1 z) - \frac{\partial}{\partial y} (c_2 z - c_3 y) \right) \vec{k} \\ &= 2c_1 \vec{i} + 2c_2 \vec{j} + 2c_3 \vec{k} = 2(c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) = 2\vec{c} \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

**Örnek:**  $a, b, c$  sabitleri ne olmalıdır ki aşağıdaki  $\vec{F}$  için  $\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{0}$  olsun:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y + az) \vec{i} + (bx - 3y - z) \vec{j} + (4x + cy + 2z) \vec{k}.$$

Dikkat edilirse  $a = 4$ ,  $b = 2$  ve  $c = -1$  olması gerekiği anlaşılır, çünkü kolaylıkla  $\operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (c+1) \vec{i} + (a-4) \vec{j} + (b-2) \vec{k}$  bulunur. Peki hangi  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  türetilebilir fonksiyonu için  $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}$  gerçekleşir? Kısacası hangi  $\varphi$  için

$$\varphi_x = x + 2y + 4z, \quad \varphi_y = 2x - 3y - z, \quad \varphi_z = 4x - y + 2z$$

gerçekleşir? Bunun, Bölüm 1 , Örnek 3.19) 'da söz edilen Pfaff yöntemiyle

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

polinomu olduğu görülür, çünkü  $\vec{F}(x, y, z)$  vektör değerli fonksiyonunun bileşke fonksiyonlarını kılalı amacıyla  $F_1, F_2, F_3$  ile yazarsak,  $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$  gözleyerek, aranan  $\varphi$

fonksiyonu

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^x F_1(t, y, z) dt + \int_0^y F_2(0, t, z) dt + \int_0^z F_3(0, 0, t) dt \\ &= \int_0^x (t + 2y + 4z) dt - \int_0^y (3t + z) dt + 2 \int_0^t t dt \\ &= \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3y^2}{2} - zy + z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz\end{aligned}$$

olarak belirlenir.

**Ödevler2:**

- 1)  $\frac{1}{3r} \cdot (\nabla r^3) = \vec{r}$  ve  $\nabla \left( 3r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{\sqrt[3]{r}} \right) = \left( 6 - \frac{2}{\sqrt[3]{r^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{r^4}} \right) \cdot \vec{r}$  gösterin.
- 2)  $\nabla (r^2 \cdot e^{-r}) = \text{grad} \left( \frac{r^2}{e^r} \right) = \frac{2-r}{e^r} \cdot \vec{r}$  gösterin.
- 3)  $\vec{c}$  sabit vektörü için  $\text{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}$  gösterin.
- 4)  $\text{div} \left( 2x^2 z \vec{i} - xy^2 z \vec{j} + 3yz^2 \vec{k} \right) = 4xz - 2xyz + 6yz$  ve  $\nabla^2 (3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^3 y + 2x - 3y - 5) = 24xy + 6z - 2z^3 - 6y^2 z$  gösterin.
- 5)  $\nabla^2 (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 (\nabla^2 \varphi_2) + 2\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 + \varphi_i (\nabla^2 \varphi_1)$  gösterin.
- 6)  $\varphi = 3x^2 y$  ve  $\psi = xz^2 - 2y$  ise  $\text{grad}(\nabla \varphi \cdot \nabla \psi) = (6y^2 z - 12x) \vec{i} + 6xz^2 \vec{j} + 12xyz \vec{k}$  gösteriniz.
- 7)  $\nabla \cdot (r^3 \vec{r}) = 6r^3$  ve  $\nabla \cdot (r \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right)) = \frac{3}{r^4}$  gösterin.
- 8)  $\text{grad} \left( \text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \right) = -\frac{2}{r^3} \cdot \vec{r}$  ve  $\nabla^2 \left( \nabla \left( \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \right) = \frac{2}{r^4}$  gösterin.
- 9)  $\nabla \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) = \frac{\varphi_2 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_2}{\varphi_2^2}$  gösterin.
- 10)  $\text{curl}(\varphi \nabla \varphi) = \vec{0}$  ve  $\nabla \times \frac{1}{r^2} \vec{r} = \vec{0}$  gösterin.
- 11)  $\text{div} \vec{F} = 0$  gerçekleyen  $\vec{F}$  vektör değerli fonksiyonuna **sarmalımsı fonksiyon** denir.  $\vec{F} = 3y^4 z^2 \vec{i} + 4x^3 z^2 \vec{j} - 3x^2 y^2 \vec{k}$  ayrıca  $\varphi(x, y, z) = xyz^2$  olmak üzere

$$\vec{G} = \varphi \cdot \left[ (2x^2 + 8xy^2 z) \vec{i} + (3x^3 y - 3xy) \vec{j} - (4y^2 z^2 + 2x^3 z) \vec{k} \right]$$

vektör değerli fonksiyonlarının sarmalımsı olduğunu kanıtlayınız.

- 12)  $\text{curl} \left[ (axy - z^3) \vec{i} + (a - 2)x^2 \vec{j} + (1 - a)xz^2 \vec{k} \right] = \vec{0}$  olabilmesi için  $a$  tam sayısı ne olmalıdır?
- 13)  $\nabla^2 (\ln r) = \frac{1}{r^2}$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$  gösterin.
- 14) Nabla işlemcisinin

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}),$$

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \times \text{curl } \vec{A}) + (\vec{A} \times \text{curl } \vec{B})$$

gerçeklediğini kanıtlayınız, burada sözgelimi  $(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A}$  vektörü şudur:

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} = B_1 \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

$$= \left( B_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots + \left( B_1 \frac{\partial \vec{A}_3}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \vec{A}_3}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \vec{A}_3}{\partial z} \right) \vec{k}$$

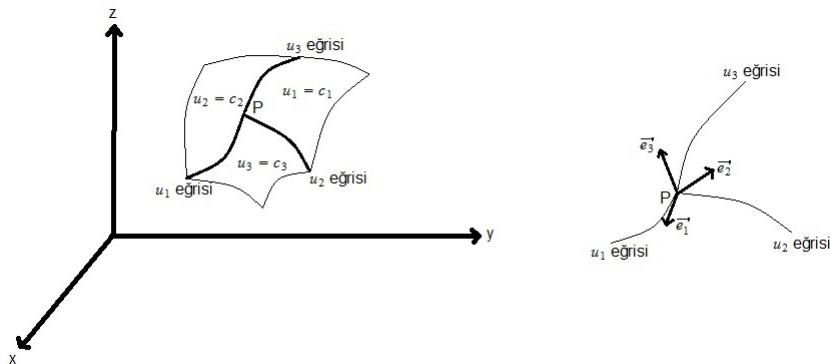
**Tanım 4 (Eğrisel koordinatlar):**  $f, g, h$  sürekli fonksiyonlarının ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olsun. Onlar yardımıyla

$$x = f(u_1, u_2, u_3), \quad y = g(u_1, u_2, u_3), \quad z = h(u_1, u_2, u_3)$$

dönüşüm denklemleri tanımlanırsa,  $xyz$  koordinat sistemindeki her  $P$  noktası  $u_1, u_2, u_3$  koordinat sistemindeki bir noktaya dönüştürülür.  $P$  noktasının  $xyz$  koordinat sistemindeki yer vektörü

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = f(u_1, u_2, u_3) \vec{i} + g(u_1, u_2, u_3) \vec{j} + h(u_1, u_2, u_3) \vec{k}$$

yani  $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$  olur.  $u_2$  ve  $u_3$  sabit tutulup  $u_1$  değiştirilirse, yalnızcasına  $u_1$  değişkenine bağlı bir uzay eğrisi elde edilir. Benzer biçimde  $u_2$  değişkenine ve  $u_3$  değişkenine bağlı uzay eğrileri çizilir.  $P$  noktasının  $P(u_1, u_2, u_3)$  olarak yazılışına, onun  $u_1, u_2, u_3$  **eğrisel koordinatları cinsinden yazılışı** denir. Yer vektörünün, eğrisel koordinatlar aracılığıyla diferansiyeli



$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 \vec{e}_1 du_1 + h_2 \vec{e}_2 du_2 + h_3 \vec{e}_3 du_3$$

olur, çünkü sıfırdan farklı her  $\vec{A}$  vektörü için  $b(\vec{A}) = \frac{1}{|\vec{A}|} \cdot \vec{A}$  birim vektörü aracılığıyla  $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot b(\vec{A})$  yazılışı geçerli olduğundan, her  $i = 1, 2, 3$  indis için aşağıdaki yazılış geçerlidir:

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \text{ ve } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \cdot b\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right) = h_i \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Burada  $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$  uzunluk değerleri olan negatif olmayan gerçek sayılarına **ölçek çarpanları** denir, bunların  $h_i = h_i(u_1, u_2, u_3)$  biçiminde türetilenin gerçek değerli fonksiyonlar olduğunu dikkat ediniz. Şu **özellikler** geçerlidir.

**1)**  $i, k = 1, 2, 3$  ne olursa olsun  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \nabla u_k = \delta_{i,k}$  geçerlidir.

Burada  $\delta_{i,k}$  tam sayısı,  $i = k$  için  $\delta_{i,k} = 1$  ve  $i \neq k$  için  $\delta_{i,k} = 0$  biçiminde tanımlanır ve **Kronecker delta** adını alır. Gerçekten ünlü  $d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r}$  bağıntısını kullanırsak, örneğin  $du_1$  için

$$\begin{aligned} du_1 &= \nabla u_1 \cdot d\vec{r} = \nabla u_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \right) \\ &= \nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \end{aligned}$$

ve böylece  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = 1$ ,  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = 0$ ,  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = 0$ , başka bir yazılışla  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \delta_{1,1}$ ,  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = \delta_{1,2}$ ,  $\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = \delta_{1,3}$  elde edilir. Ötekiler tümüyle benzer biçimde bulunur.

**2)**  $\left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \right] \cdot [\nabla u_1 \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3)] = 1$  geçerlidir.

Gerçekten Ödevler 1, 2) sorusundaki ikinci eşitliği kullanırsak aşağıdakiler bulunur:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \right] \cdot [\nabla u_1 \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3)] &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \nabla u_1 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \nabla u_2 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \nabla u_3 \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \nabla u_1 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \nabla u_2 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \nabla u_3 \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \nabla u_1 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \nabla u_2 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \nabla u_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

**3)**  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = h_1 h_2 h_3 (\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right)$  geçerlidir.

Gerçekten  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  ve  $x = f(u_1, u_2, u_3)$ ,  $y = g(u_1, u_2, u_3)$ ,  $z = h(u_1, u_2, u_3)$  fonksiyonları türetilenin olduğundan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \vec{k} = x_{u_1} \vec{i} + y_{u_1} \vec{j} + z_{u_1} \vec{k} \quad .$$

ve benzerleriyle, aşağıdakiler vektörel çarpımın 15) özelliği ile bulunur:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} &= \begin{vmatrix} x_{u_1} & x_{u_2} & x_{u_3} \\ y_{u_1} & y_{u_2} & y_{u_3} \\ z_{u_1} & z_{u_2} & z_{u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{u_1} & y_{u_1} & z_{u_1} \\ x_{u_2} & y_{u_2} & z_{u_2} \\ x_{u_3} & y_{u_3} & z_{u_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \\ &= (h_1 \vec{e}_1) \cdot (h_2 \vec{e}_2 \times h_3 \vec{e}_3) = h_1 h_2 h_3 (\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)).\end{aligned}$$

4) Dik eğrisel koordinat sisteminde aşağıdaki geçerlidir:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = h_1 h_2 h_3 .$$

Gerçekten bir eğrisel koordinat sistemine, ancak ve yalnız, bu koordinat sisteminden her noktada  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  ve  $\vec{e}_3$  birim vektörleri ikişer ikişer birbirine dik oluyorlarsa, **dik eğrisel koordinat sistemi** denilir, bu durumda

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = |\vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_3| \sin 90^\circ \cdot \vec{n}(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{n}(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

ve benzer biçimde  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$  ve böylece  $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$  bulunacağından, sonuçta bir önceki örnekte bulunan sonuç kullanılırsa istenen bulunur:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = h_1 h_2 h_3 (\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)) = h_1 h_2 h_3$$

Bundan böyle, kısalık amacıyla , dik eğrisel koordinat sistemi'ni *DEK Sistemi* olarak yazacağız.

5) *DEK Sisteminde nabla işlemcisi* aşağıdakidir:

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \vec{e}_i = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial u_3} \vec{e}_3$$

Gerçekten  $\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$  skaler fonksiyonu ne olursa olsun  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$  vektörünün, *DEK Sisteminde*, birim dik vektörler cinsinden

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = f_1(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_1 + f_2(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_2 + f_3(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_3$$

yazılışından yararlanarak ve  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) olduğunu unutmadan

$$f_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_i} \varphi_{u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

bulmak güç değildir, çünkü  $d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^3 h_i du_i \cdot \vec{e}_i$ , böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varphi_{u_i} du_i &= d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \left( \sum_{i=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 h_i du_i \vec{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \cdot h_k du_k \cdot (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \cdot h_k \cdot du_k \cdot \delta_{i,k} = \sum_{i=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \left( \sum_{k=1}^3 h_k \cdot du_k \cdot \delta_{i,k} \right) \end{aligned}$$

kısaltası

$$\sum_{k=1}^3 \varphi_{u_i} du_i = \sum_{k=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \cdot h_i \cdot du_i \text{ bulunur.}$$

Buradan, istenen  $f_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_i(u_1, u_2, u_3)} \cdot \varphi_{u_i}(u_1, u_2, u_3)$  sonucu bulunur, yukarıda son eşitlige geçerken, herbir  $i = 1, 2, 3$  indisi için

$$\sum_{k=1}^3 h_k \cdot \delta_{i,k} \cdot du_k = h_i \cdot du_i$$

gözlenmiştir, çünkü  $k$  indisi 1, 2, 3 değerlerini alırken,  $i$  indisinden farklı olduğunda,  $i \neq k$  için  $\delta_{i,k} = 0$  buna karşılık,  $k = i$  olduğunda  $\delta_{i,k} = \delta_{i,i} = 1$  geçerli olmaktadır. O halde  $f_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_i} \cdot \varphi_{u_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bulunduğundan

$$\nabla \varphi = \sum_{k=1}^3 f_i(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_i = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_i} \varphi_{u_i} \vec{e}_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \varphi_{u_i}$$

yani

$$\nabla \varphi = \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \right) (\varphi)$$

ve sonuçta istenen, *DEK* sisteminde nabla işlemcisinin

$$\nabla \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}$$

yazılışı bulunur. Bu sonuç aşağıdakileri kanıtlarken kullanılacaktır.

6)

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = h_1 \nabla u_1, \\ \vec{e}_2 &= h_3 h_1 (\nabla u_3 \times \nabla u_1) = h_2 \nabla u_2, \\ \vec{e}_3 &= h_1 h_2 (\nabla u_1 \times \nabla u_2) = h_3 \nabla u_3, \end{aligned}$$

---

Gerçekten nabla işlemcisinin son bulunan yazılışından yararlanılırsa

$$\nabla u_1 = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \right) u_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_i} = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1} \vec{e}_1$$

ve sonuçta  $\vec{e}_1 = h_1 \nabla u_1$  bulunur, yukarıda apak biçimde  $\frac{\partial u_1}{\partial u_2} = 0 = \frac{\partial u_1}{\partial u_3}$  kullanılmıştır. Benzer biçimde, herbir  $i = 1, 2, 3$  indis için  $\vec{e}_i = h_i \nabla u_i$  bulunarak

$$h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = h_2 h_3 \left( \frac{\vec{e}_2}{h_2} \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} \right) = h_2 h_3 \cdot \frac{1}{h_2 h_3} (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

ve benzerleri elde edilir.

7) Herhangi bir türetilebilir  $\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$  için

$$\nabla(\varphi \vec{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} (\varphi \cdot h_2 h_3), \quad \nabla \times \varphi \vec{e}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 \vec{e}_2 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_3} - h_3 \vec{e}_3 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_2} \right]$$

ve benzerleri geçerlidir.

Gerçekten, bir önceki sonuç kullanılırsa,  $\nabla u_2$  ve  $\nabla u_3$  birer vektör olduğundan, üstelik  $\nabla(\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2) = 0$  bilindiğinden, nabla işlemcisinin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi \vec{e}_1) &= \nabla[(\varphi h_2 h_3)(\nabla u_2 \times \nabla u_3)] = \nabla(\varphi h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + \varphi h_2 h_3 [\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3)] \\ &= \nabla(\varphi h_2 h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla(\varphi h_2 h_3) \cdot \left( \frac{\vec{e}_2}{h_2} \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} \right) \\ &= \nabla(\varphi h_2 h_3) \cdot \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_1} \frac{\partial(\varphi h_2 h_3)}{\partial u_i} \right) \cdot \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\varphi h_2 h_3)}{\partial u_i} \cdot \frac{1}{h_i h_2 h_3} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_1) \\ &= \frac{\partial(\varphi h_2 h_3)}{\partial u_1} \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial(\varphi h_2 h_3)}{\partial u_1}, \\ \nabla \times \varphi \vec{e}_1 &= \nabla \times (\varphi h_1) \nabla u_1 = [\nabla(\varphi h_1) \times \nabla u_1] + (\varphi h_1) (\nabla \times \nabla u_1) \end{aligned}$$

ve zaten  $\nabla \times \nabla u_1 = \vec{0}$  olduğundan (neden?)

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \varphi \vec{e}_1 &= \nabla(\varphi h_1) \times \nabla u_1 = \nabla(\varphi h_1) \times \frac{\vec{e}_1}{h_1} \\
 &= \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_i} \frac{\vec{e}_i}{h_i} \right) \times \frac{\vec{e}_1}{h_1} \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_i} \cdot \frac{\vec{e}_i \times \vec{e}_1}{h_1} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_2} (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + \frac{1}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_3} (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \\
 &= \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_3} - \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_2} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 \vec{e}_2 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_3} - h_3 \vec{e}_3 \frac{\partial(\varphi h_1)}{\partial u_2} \right] \quad \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

8) DEK sisteminde herhangi bir

$$\vec{A} = A_1(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_1 + A_2(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_2 + A_3(u_1, u_2, u_3) \vec{e}_3$$

vektör fonksiyonu için 7) özellikleri nedeniyle aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
 \nabla \vec{A} &= \nabla(A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3) = \nabla(A_1 \vec{e}_1) + \nabla(A_2 \vec{e}_2) + \nabla(A_3 \vec{e}_3) \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(A_1 h_1 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right]
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{A} &= \nabla(A_1 \times \vec{e}_1) + \nabla(A_2 \times \vec{e}_2) + \nabla(A_3 \times \vec{e}_3) \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 \vec{e}_2 \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - h_3 \vec{e}_3 \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} + h_3 \vec{e}_3 \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - h_1 \vec{e}_1 \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} + h_1 \vec{e}_1 \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - h_2 \vec{e}_2 \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_1 \vec{e}_1 \left( \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right) + h_2 \vec{e}_2 \left( \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right) + h_3 \vec{e}_3 \left( \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

9) DEK sisteminde Laplace işlemcisi için

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \cdot \left( \frac{\varphi_{u_1} h_2 h_3}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \cdot \left( \frac{\varphi_{u_2} h_1 h_3}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \cdot \left( \frac{\varphi_{u_3} h_1 h_2}{h_3} \right) \right]$$

---

geçerlidir, çünkü  $\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3)$  türetilebilir fonksiyonu için,  $DEK$  sisteminde aşağıdaki geçerli olup

$$\nabla \varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \varphi u_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi u_i}{h_i} \vec{e}_i = \text{grad } \varphi$$

vektörüne  $\vec{A}$  denilirse, apaçık biçimde  $A_i = \frac{\varphi u_i}{h_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) olmak üzere  $\nabla^2 \varphi = \nabla(\text{grad } \varphi) = \nabla \vec{A}$  yukarıdaki 8) özelliğinde elde edilen ilk bağıntıdan yararlanarak ve sözgelimi

$$\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\varphi u_1 h_2 h_3}{h_1} \right)$$

olduğundan istenilen bağıntı kolayca elde edilir.

### Dik Eğrisel Koordinat Sistem Örnekleri

#### 1) Silindirik Koordinatlar $(\rho, \phi, z)$

Tıpkı Bölüm 1'de düzlemede kutupsal koordinatlar için yapıldığı gibi her  $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$  noktasının  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$  biçiminde yazılmasına elveren, her türlü belirli  $0 \leq \rho$  ve  $\phi \in [0, 2\pi)$  **gerçek sayılarının** var olduğu anımsanırsa,  $\mathbb{R}^3$  uzayında her  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  noktası için

$$x = \rho \cos \phi \quad , \quad y = \rho \sin \phi \quad , \quad z = z$$

gerçekleştigiğini gözleyiniz. Bu tek türlü belirlenen

$$0 \leq \rho \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

gerçek sayı üçlüsüne,  $P(x, y, z)$  noktasının **silindirik koordinatları** denir.  $P(x, y, z)$  noktası, tabanı  $xy$  ekvator düzleminde  $(0, 0, 0)$  merkez ve  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$  yarıçaplı daire olan dairesel silindirin üzerindedir, üçüncü bileşeni  $z$  sayesinde bu silindirin hangi katında olduğu belirlenir.  $x$  ve  $y$  büyündükçe,  $xy$  düzlemindeki dairenin yarıçapı büyümektedir, kısacası her nokta, tek türlü belirli bir dairesel silindirin üzerinde bulunmaktadır, örneğin  $(1, -1, \frac{2}{3})$  ve  $(1, 1, -5)$  noktaları aynı silindirin üzerinde, buna karşılık  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  başka bir silindirin üzerindedir. Herhangi bir  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  noktasının yer vektörü

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} + z \vec{k} \\ &= f(\rho, \phi, z) \vec{i} + g(\rho, \phi, z) \vec{j} + h(\rho, \phi, z) \vec{k} \end{aligned}$$

ve  $\rho, \phi, z$  silindirik koordinatlarıyla ilişkilenen birim vektörler

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_\rho = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}}{\sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_\phi = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{-\rho \sin \phi \vec{i} + \rho \cos \phi \vec{j}}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi}} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\vec{k}}{1} = \vec{k}\end{aligned}$$

olup bu kolayca gözleneceği gibi bir dik eğrisel koordinat sistemidir, çünkü

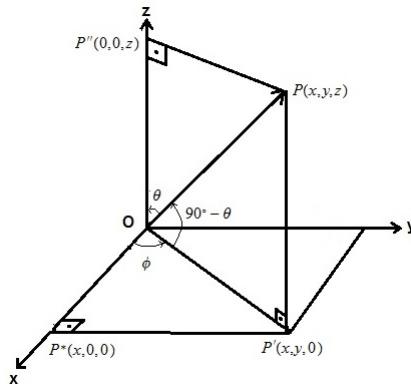
$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) \cdot (-\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}) = -\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) \cdot \vec{k} = 0 \text{ ve } \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0\end{aligned}$$

olmaktadır. Silindirik koordinatlarda ölçek çarpanları  $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$  aşağıdadır:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = \rho \text{ ve } h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1.$$

## 2) Küresel Koordinatlar $(r, \theta, \phi)$

Her  $P(x, y, z)$  noktası, yarıçapı  $|\overrightarrow{OP}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  olan bir küre üzerinde alır.



Yine açılarla çalışıp sonra onların radyan değerlerini göz önüne alırsak, örneğin  $\overrightarrow{OP}$  ve  $\overrightarrow{OP''}$  vektörlerinin belirlediği düzlemede  $P''OP$  dik üçgeninde, eğik kenar (hipotenüs)  $\overrightarrow{OP}$  ve onun uzunluğu  $\overrightarrow{OP} = r$  olduğundan  $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OP''}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{z}{r}$  yani  $z = r \cos \theta$  ve ekvator düzleminde  $OP^*P'$  dik üçgeninde  $\cos \phi = \frac{\overrightarrow{OP^*}}{\overrightarrow{OP'}} = \frac{x}{\overrightarrow{OP'}} = \frac{x}{r \sin \theta}$  olur, çünkü  $P''OP$  dik üçgeninde  $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta) = \frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{\overrightarrow{OP'}}{r}$

---

nedeniyle  $\overline{OP'} = r \sin \theta$  geçerlidir. Ayrıca yine  $OP^*P'$  dik üçgeninde  $\sin \phi = \frac{\overline{P^*P'}}{\overline{OP'}} = \frac{y}{r \sin \theta}$  nedeniyle  $y = r \sin \theta \sin \phi$  ve tüm bunlardan, bu  $P(x, y, z)$  noktası için, açıların **radyan değerleri** yazılarak

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad , \quad z = r \cos \theta$$

yazılışları geçerli olacak biçimde, tek türlü belirli  $r, \theta, \phi$  **gerçek sayı üçlüsü** vardır, bunlar  $P(x, y, z)$  noktasının **küresel koordinatları** olup şu geçerlidir

$$0 \leq r \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

O halde  $P(x, y, z)$  noktasının yer vektörü ve dolayısıyla Küresel Koordinat sisteminin birim vektörleri aşağıdadır:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{r} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k} = r \sin \theta \cos \phi \overrightarrow{i} + r \sin \theta \sin \phi \overrightarrow{j} + r \cos \theta \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{e_1} &= \overrightarrow{e_r} = \frac{1}{|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r}|} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r} = \frac{\sin \theta \cos \phi \overrightarrow{i} + \sin \theta \sin \phi \overrightarrow{j} + \cos \theta \overrightarrow{k}}{\sqrt{\sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta}} \\ &= \sin \theta \cos \phi \overrightarrow{i} + \sin \theta \sin \phi \overrightarrow{j} + \cos \theta \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} &= \overrightarrow{e_\theta} = \frac{1}{|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta}|} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} = \frac{r \cos \theta \cos \phi \overrightarrow{i} + r \cos \theta \sin \phi \overrightarrow{j} - r \sin \theta \overrightarrow{k}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \cos \theta \cos \phi \overrightarrow{i} + \cos \theta \sin \phi \overrightarrow{j} - \sin \theta \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} &= \overrightarrow{e_\phi} = \frac{1}{|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \phi}|} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \phi} = \frac{-r \sin \theta \sin \phi \overrightarrow{i} + r \sin \theta \cos \phi \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{k}}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}} \\ &= -\sin \phi \overrightarrow{i} - \cos \phi \overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Bu bir dik eğrisel koordinat sistemidir, çünkü aşağıdakiler geçerlidir.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} &= \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \cos \theta \sin \theta \\ &= \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = 0 \quad , \\ \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} &= -\sin \theta \cos \phi \sin \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \phi = 0 \quad , \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} &= -\cos \theta \cos \phi \sin \phi + \cos \theta \sin \phi \cos \phi = 0 \end{aligned}$$

Ölçek çarpanları ise  $h_1 = \left| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r} \right| = 1$ ,  $h_2 = \left| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} \right| = r$ ,  $h_3 = \left| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta$  olur.

### 3) Parabolik Silindirik Koordinatlar $(u, v, z)$

Önce şu temel gerçeğe dikkat edelim: Düzleme herhangi bir  $(x, y)$  noktası için  $x = \frac{u^2 - v^2}{2}$  ve  $y = uv$  yazılışları gerçeklenecek biçimde tek türlü belirli  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in [0, \infty)$  gerçek sayıları **vardır**.

Gerçekten eğer  $y = 0$  ve  $x \geq 0$  ise  $v = 0$ ,  $u = \sqrt{2x}$  alınırsa, kolayca  $uv = 0 = y$  ve  $\frac{u^2-v^2}{2} = \frac{u^2}{2} = \frac{2x}{2} = x$  bulunur; yok eğer  $y = 0$  ve  $x < 0$  ise bu kez  $u = 0$ ,  $v = \sqrt{2|x|}$  alınırsa  $uv = 0 = y$  ve  $\frac{u^2-v^2}{2} = -\frac{v^2}{2} = -|x| = x$  bulunur. Eğer  $y \neq 0$  ise  $x \in \mathbb{R}$  **ne olursa olsun**,  $y = uv (\neq 0)$  ve  $2x = u^2 - v^2$  ve  $2xv^2 = u^2v^2 - v^4 = y^2 - v^4$  böylece  $v^4 + 2xv^2 - y^2 = 0$  nedeniyle  $(v^2)_{1,2} = \frac{1}{2}(-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}) = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}$  ve  $0 < v^2$  nedeniyle zorunlu olarak

$$v^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ve } 0 < v, y \neq 0 \text{ olduğundan } v = +\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} (> 0)$$

bulunur, çünkü  $y \neq 0$  ve  $0 < y^2 = |y|^2$  nedeniyle  $-x \leq |x| = \sqrt{|x|^2} < \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$  yani  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} + x$  ve böylece  $-x - \sqrt{x^2 + y^2} < 0$  olmaktadır. Demek ki,  $y \neq 0$  ise

$$u = \frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} \text{ ve } v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

alınırsa kolayca  $y = u \left( \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right) = uv$  ve ayrıca  $\frac{u^2-v^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2-x}} - (\sqrt{x^2+y^2} - x) \right] = \frac{y^2 - (\sqrt{x^2+y^2}-x)^2}{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)} = \frac{y^2 - (x^2+y^2-2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2)}{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2}-x)}{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)} = x$  bulunur. Demek ki, **her**  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  için, gerçekten

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv, \quad z = z \text{ ve } u \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, \infty)$$

koşullarını gerçekleyen  $(u, v, z)$  gerçek sayı üçlüsü vardır, bunlara  $P(x, y, z)$  noktasının **parabolik silindirik koordinatları** denilir. Her  $P(x, y, z)$  noktası, ortak eksene sahip iki parabolik yüzeyin kesimi üzerinde yer alır. Yer vektörü ve birim vektörler

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left( \frac{u^2 - v^2}{2} \right) \cdot \vec{i} + uv \vec{j} + z \vec{k} \quad , \\ \vec{e}_1 &= \vec{e}_u = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{u \vec{i} + v \vec{j} + 0 \vec{k}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{i} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \vec{j} \quad , \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_v = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{-v \vec{i} + u \vec{j} + 0 \vec{k}}{\sqrt{v^2 + u^2}} = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}} \vec{i} + \frac{u}{\sqrt{v^2 + u^2}} \vec{j} \quad , \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z = \vec{k} \end{aligned}$$

ve kolayca  $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3$  ve  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\frac{uv}{\sqrt{v^2+u^2}} + \frac{vu}{\sqrt{v^2+u^2}} = 0$  bulunur. Ayrıca ölçek çarpanları  $h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$  ve  $h_3 = 1$  olarak bulunur.

#### 4) Paraboloid Koordinatlar $(u, v, \phi)$

---

Her  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  noktasına karşılık  $x = uv \cos \phi$ ,  $y = uv \sin \phi$ ,  $z = \frac{u^2 - v^2}{2}$  ve  $u, v \in [0, \infty)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  koşullarını gerçekleyen  $(u, v, \phi)$  gerçek sayı üçlüsü vardır. Gerçekten  $P'(x, y, 0)$  noktasının, tıpkı Küresel Koordinat Sisteminde ile yaptığı açının radyan değerine  $\phi$  deyip, istenilen niteliklerde  $u$  ve  $v$  gerçek sayılarını

$$\sqrt{x^2 + y^2} = uv \quad , \quad 2z = u^2 - v^2$$

denklemlerinden çözerek belirleyiniz. Bu belirlenen  $(u, v, \phi)$  üçlüsüne  $P(x, y, z)$  noktasının **Paraboloid Koordinatları** denir. Bu eğrisel koordinat sisteminin bir DEK sistemi olduğunu gözleyip, ölçekli çarpanları yazınız.

**Uyarı:** Daha pek çok, dik eğrisel koordinat sistemi vardır.

**Örnek:**  $\nabla^2 \varphi$  ifadesini yukarıdaki koordinat sistemlerinde yazınız. Herhangi bir dik eğrisel koordinat sisteminde

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3 \varphi_{u_1}}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3 \varphi_{u_2}}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2 \varphi_{u_3}}{h_3} \right) \right]$$

olduğunu yukarıda 9) özelliğinde gözlemeştik. O halde, silindirik koordinatlarda  $u_1 = \rho$ ,  $u_2 = \phi$ ,  $u_3 = z$  ve  $h_1 = h_3 = 1$  ve  $h_2 = \rho$  olduğundan silindirik koordinatlarda Laplace işlemcisi aşağıdakidir:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho \varphi_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho} \varphi_\phi\right)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho \varphi_z)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \varphi_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} + \varphi_{zz} = \varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_\rho + \frac{1}{\rho^2} \varphi_{\phi\phi} + \varphi_{zz}. \end{aligned}$$

Buna karşın, Küresel koordinatlarda  $u_1 = r$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = \phi$  ve  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \theta$  olduğundan

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \varphi_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \varphi_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \varphi_\phi \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varphi_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \varphi_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \varphi_{\phi\phi} \\ &= \varphi_{rr} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \varphi_{\phi\phi} + \frac{2}{r} \varphi_r + \frac{\cot \theta}{r^2} \varphi_\theta \end{aligned}$$

bulunur. Laplace işlemcisini Parabolik Silindirik Koordinatlarda ve Paraboloid Koordinatlarda siz yazınız.

**Örnek:**  $\varphi(x, y, z) = c$  yüzeyinde  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasındaki dikme vektörünün  $\nabla \varphi|_{P_0}$  olduğunu gösteriniz,  $c$  sabittir.

Gerçekten yüzeye ait  $P(x, y, z)$  noktasının yer vektörü  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  ise  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$  diferansiyel vektörü, yüzeye  $P$  noktasından çizilen teğet düzlemde yer alır, oysa  $0 =$

$dc = d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$  olduğundan  $\nabla\varphi = \varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k}$  vektörü, bu teget düzleme yer alan  $d\vec{r}$  vektörüne diktir demektir, dolayısıyla  $\nabla\varphi$  vektörü, sözü edilen teget düzleme de dik olur, sonučta  $\nabla\varphi|_{P_0}$  vektörü de yüzeyin  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından yüzeye çıkan dikme vektörü ve

$$\vec{n}_0 = \frac{\nabla\varphi|_{P_0}}{|\nabla\varphi|_{P_0}} = \frac{\varphi_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + \varphi_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + \varphi_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k}}{\sqrt{(\varphi_x(x_0, y_0, z_0))^2 + (\varphi_y(x_0, y_0, z_0))^2 + (\varphi_z(x_0, y_0, z_0))^2}}$$

vektörü ise, yüzeye  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından çıkan birim dikme vektöridür. Örneğin,  $\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$  yüzeyine  $P_0(3, -1, 2)$  noktasından çıkan birim dikme vektörü aşağıda yazılmalıdır.

$$\vec{n}_0 = \frac{\left[ 4x \vec{i} + 4z \vec{j} + (4y - 10z) \vec{k} \right] \Big|_{P_0}}{\left| 4x \vec{i} + 4z \vec{j} + (4y - 10z) \vec{k} \right| \Big|_{P_0}} = \frac{12 \vec{i} + 8 \vec{j} - 24 \vec{k}}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 24^2}} = \frac{1}{7} (3 \vec{i} + 2 \vec{j} - 6 \vec{k})$$

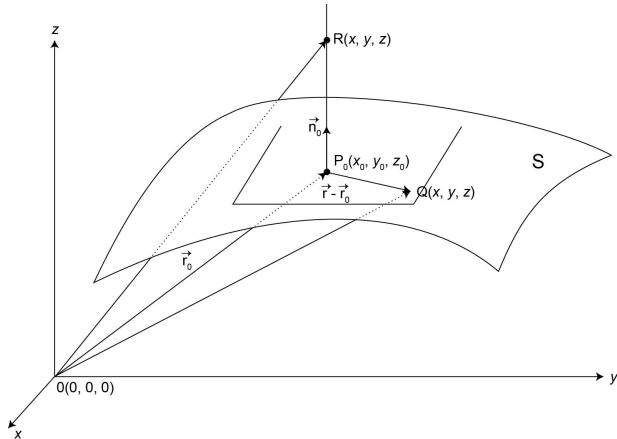


## Bölüm III: Kısmi Türev Uygulamaları

Bu bölümde kısmi türev bilgisiyle Geometri ve Analiz'in bazı problemlerini çözmeyi öğreneceğiz.

### Kısmi Türevin Geometrik Uygulamaları

Bilindiği gibi, kısmi türevleri sürekli bir  $F = F(x, y, z)$  için  $F(x, y, z) = 0$  denklemi  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $S$  ile yazılıan bir yüzey gösterir, yani  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$  ( $\subseteq \mathbb{R}^3$ ) bir yüzeydir, bu tür yüzey örneklerini Bölüm I, sayfa 44 ve 45'de görmüştük. Apaçıkta ki bir  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  noktası, ancak ve yalnız,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  gerçeklerse bu yüzeyin bir noktası olabilir. Ayrıca  $P_0$  noktasının  $F(x, y, z) = 0$  ve  $G(x, y, z) = 0$  yüzeylerinin kesişim eğrisi  $C$  üzerinde yer alabilmesi için hem  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  hem de  $G(x_0, y_0, z_0) = 0$  gerçekleşmesi gerek ve yeter koşullardır. Şimdi  $P_0$  noktasından  $S$  yüzeyine çizilen **teğet düzleme** ile **normal doğrusunun** denklemlerini belirlemeye çalışalım.



Şekilde görüldüğü gibi,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından  $S$  yüzeyine çizilen teğet düzlem üzerinde bulunan herhangi bir  $Q(x, y, z)$  noktasının yer vektörü  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ise  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{P_0Q}$  vektörü söyül edilen teğet düzleminde bulunacağından ve üstelik  $P_0$  noktasından  $S$  yüzeyine çizilen normal vektörünün  $\nabla F|_{P_0}$  ve birim normal vektörünün ise  $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\nabla F|_{P_0}} \cdot \nabla F|_{P_0}$  olduğu bilindiğinden  $\nabla F|_{P_0} = F_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$  vektörü, bu teğet düzlemdeki her vektöre, özellikle  $\vec{r} - \vec{r}_0$  vektörüne dik olacağından sonuçta

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla F|_{P_0} \\ &= ((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}) \cdot (F_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}) \end{aligned}$$

yani;

$$F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

bulunur, bu  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından  $S$  yüzeyine çizililen **teğet düzleminin denklemidir**. Buna karşılık,  $P_0$  noktasından  $S$  yüzeyine çizilen normal doğrusunun denklemini elde etmek için, bu kez bu doğrunun üzerinde yer alan  $R(x, y, z)$  noktasının yer vektörü ile çalışıp  $\overrightarrow{P_0R} = \vec{r} - \vec{r}_0$  vektörü ile  $\vec{n}_0$  ve dolayısıyla  $\nabla F|_{P_0}$  vektörünün doğrudaş ve böylece vektörel çarpımlarının  $\vec{0}$  vektörü olacağını gözleyip

$$\vec{0} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\nabla F|_{P_0}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

ve bu vektörün sıfır vektörü olabilmesi için tüm bileşenlerinin 0 gerçek sayısı olması gerektiğinden

$$\left. \begin{array}{l} F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) - F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0, \\ F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) - F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0, \\ F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) - F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) = 0 \end{array} \right\} \quad (*)$$

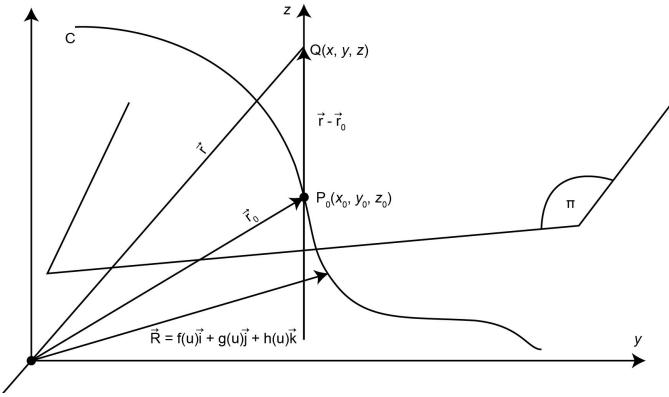
ve böylece aşağıdakiler elde edilir:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Tüm bunları  $t(\in \mathbb{R})$  gerçek sayısına eşitliyerek,  $P_0$  noktasından  $S$  yüzeyine çıkan **normal doğrusunun parametrik yazılışı** olan

$$x = x_0 + t \cdot F_x(x_0, y_0, z_0), y = y_0 + t \cdot F_y(x_0, y_0, z_0), z = z_0 + t \cdot F_z(x_0, y_0, z_0) \quad (t \in \mathbb{R})$$

denklemleri elde edilir. Dikkat:  $\nabla F|_{P_0}$  vektörünün normu pozitif olduğundan (neden?) yukarıdaki (\*) bağıntıları nedeniyle  $F_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0, z_0)$  ve  $F_z(x_0, y_0, z_0)$  gerçek sayılarının herbiri **sıfırdan farklıdır** (neden?). Şimdi de  $\mathbb{R}^3$  uzayında parametrik yazılışı  $x = f(u)$ ,  $y = g(u)$ ,  $z = h(u)$  ve vektörel yazılışı  $f(u)\vec{i} + g(u)\vec{j} + h(u)\vec{k}$  ( $\forall u \in [a, b]$ ) olan bir  $C$  uzay eğrisinde yer alan  $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_0(f(u_0), g(u_0), h(u_0))$  noktasında eğriye çizilen **teğet doğrusunu** bulmak için, bu doğrunun



üzerindeki herhangi  $Q(x, y, z)$  noktası ile çalışıp  $P_0$  noktasından  $C$  eğrisine çizilen teğet vektörü  $\left. \frac{d\vec{R}}{du} \right|_{P_0} = f'(u_0)\vec{i} + g'(u_0)\vec{j} + h'(u_0)\vec{k}$  olduğu ve  $\overrightarrow{P_0Q} = \vec{r} - \vec{r}_0$  ile bu teğet vektörü doğrudan olunduklarından

$$\vec{0} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (f'(u_0)\vec{i} + g'(u_0)\vec{j} + h'(u_0)\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f'(u_0) & g'(u_0) & h'(u_0) \end{vmatrix}$$

ve tipki yukarıda yapıldığı, bu son vektörün tüm bileşenlerini sıfıra eşitleyerek

$$\frac{x - x_0}{f'(u_0)} = \frac{y - y_0}{g'(u_0)} = \frac{z - z_0}{h'(u_0)} = t (\in \mathbb{R})$$

ve sonuçta aranan **teğet doğrusunun parametrik denklemleri** olan

$$x = x_0 + t \cdot f'(u_0), y = y_0 + t \cdot g'(u_0), z = z_0 + t \cdot h'(u_0) (\forall t \in \mathbb{R})$$

elde edilir. Eğer  $C$  eğrisi  $F(x, y, z) = 0$  ve  $G(x, y, z) = 0$  yüzeylerinin kesişim eğrisi ise, bu parametrik denklemler bu kez

$$x = x_0 + t \cdot \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{P_0}, y = y_0 + t \cdot \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_{P_0}, z = z_0 + t \cdot \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} (\forall t \in \mathbb{R})$$

olur, çünkü  $P_0$  noktasındaki teğet vektör,  $P_0$  noktasından her iki yüzeye çizilen  $\nabla F|_{P_0}$  ve  $\nabla G|_{P_0}$  normal vektörlerinin her ikisine birden dik olduğundan, sonuçta  $\vec{n}(\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0})$  vektörüyle ve sonuçta  $\vec{n}(\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}) = \frac{\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}}{|\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}|}$  olduğu için  $\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}$  vektörüyle doğrudastır, dolayısıyla  $\overrightarrow{P_0Q} = \vec{r} - \vec{r}_0$  ile  $\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}$  vektörleri doğrudan olurlar, üstelik

$$\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0} = [(F_y G_z - F_z G_y)\vec{i} + (F_z G_x - F_x G_z)\vec{j} + (F_x G_y - F_y G_x)\vec{k}]_{P_0}$$

$$= \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \vec{k}$$

olduğundan, tüm bunlar kullanılarak

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\nabla F|_{P_0} \times \nabla G|_{P_0}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} & \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} & \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \end{vmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \cdot (y - y_0) - \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} \cdot (z - z_0) \right] \vec{i} + \left[ \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \cdot (z - z_0) - \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \cdot (x - x_0) \right] \vec{j} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} \cdot (x - x_0) - \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \cdot (y - y_0) \right] \vec{k} \end{aligned}$$

ve bu son vektörün tüm bileşenlerinin sıfır olması gerektiğinden;

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0}} = t (\in \mathbb{R})$$

bularak yukarıdaki parametrik yazılış elde edilir. Buna karşılık  $P_0$  noktasından  $C$  eğrisine çizilen **normal düzleminin denklemini** bulmak için, bu düzlemin herhangi bir  $Q^*(x, y, z)$  noktasının yer vektörü aracılığıyla  $\overrightarrow{P_0 Q^*} = \vec{r}^* - \vec{r}_0$  ve  $\frac{d\vec{R}}{du}|_{P_0}$  vektörleri dik olacağından  $0 = (\vec{r}^* - \vec{r}_0) \cdot \frac{d\vec{R}}{du}|_{P_0}$  nedeniyle, kolayca

$$f'(u_0) \cdot (x - x_0) + g'(u_0) \cdot (y - y_0) + h'(u_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ve eğer  $C$  eğrisi, iki yüzeyin kesişim eğrisi ise, aranan normal düzlemin denklemi aşağıdaki biçimde bulunur (neden?):

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

### Örnekler 1:

1)  $P_0(1, 2, -1)$  noktasının  $F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$  yüzeyi üzerinde bulunduğu gösterip bu noktadan bu yüzeye çizilen teget düzlemeyle normal doğrusunun denklemelerini yazınız.

**Cözüm:**  $F(1, 2, -1) = 0$  gözleyerek,  $P_0$  noktasının gerçekten sözü edilen yüzey üzerinde olduğu anlaşılır. Üstelik

$$F_x(1, 2, -1) = 2xyz - 2z^2|_{P_0} = -6, \quad F_y(1, 2, -1) = x^2z + 6y|_{P_0} = 11, \quad F_z(1, 2, -1) = 14$$

ve  $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1$  olduğundan, istenilen teğet düzleminin denklemi  
 $0 = F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = (-6)(x - 1)$   
 $+ 11(y - 2) + 14(z + 1)$  yani

$$6x - 11y - 14z + 2 = 0$$

olarak bulunur. Buna karşılık  $P_0$  noktasından yüzeye çıkan **normal doğrusunun parametrik yazılışı**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot F_x(x_0, y_0, z_0) = 1 - 6t, & y &= y_0 + t \cdot F_y(x_0, y_0, z_0) = 2 + 11t, \\ z &= z_0 + t \cdot F_z(x_0, y_0, z_0) = -1 + 14t & (\forall t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2) Yukarıdaki soruda belirlenen normal doğrusu ile  $x + 3y - 2z = 10$  düzleminin kesişim noktasını belirleyiniz.

**Cözüm:** Bir  $P(x, y, z)$  noktası, hem  $x + 3y - 2z - 10 = 0$  düzleminde hem de parametrik yazılışı, yukarıdaki çözümde belirlenen, normal doğrusunun üzerinde yer alıysa,  $x = 1 - 6t, y = 2 + 11t, z = -1 + 14t$  ve sonuçta  $1 - 6t + 3(2 + 11t) - 2(-1 + 14t) - 10 = 0$  ve  $t = -1$  bularak  $x = 7, y = -9, z = -15$  elde edilir, kısacası aranılan biricik kesişim noktası  $P(7, -9, -15)$  olarak belirlenir.

3)  $x^2 - 2yz + y^3 - 4 = 0$  yüzeyi ile  $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$  yüzeyinin  $C$  kesişim eğrisinin  $P_0(1, -1, 2)$  noktasındaki normal düzlemini yazınız.

**Cözüm:** Yüzeyleri sırasıyla  $F(x, y, z) = 0$  ve  $G(x, y, z) = 0$  ve onların kesişim eğrisini  $C$  ile yazarsak, öncelikle  $F(1, -1, 2) = 0 = G(1, -1, 2)$  nedeniyle  $P_0$  noktasının  $C$  eğrisi üzerinde yer aldığı görülür.  $C$  eğrisine  $P_0$  noktasında çizilen normal düzlemin,  $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 2$  unutmadan  $0 = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_{P_0} \cdot (x - 1) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_{P_0} \cdot (y + 1) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_{P_0} \cdot (z - 2) = 12(x - 1) + 12(y + 1) - 6(z - 2) = 12x - 12y - 6z + 12 = 12(2x + 2y - z + 2)$  yani  $2x + 2y - z = -2$  olarak bulunacağını gözleyiniz.

4)  $q_0$  irrasyonel sayısı  $q_0 = 2\sqrt{2} - 1$  olmak üzere  $P_0(q_0, -2, 2)$  noktasının  $F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$  yüzeyinde bulunduğu gösterip,  $P_0$  noktasından bu yüzeye çizilen normal doğrusunun bir önceki soruda belirlenen normal düzlemini hangi noktada kestiğini belirleyiniz. **Cözüm:**  $q_0^2 = 9 - 4\sqrt{2}$  nedeniyle  $F(q_0, -2, 2) = -4q_0^2 - 8q_0 + 28 = -4(9 - 4\sqrt{2}) - 8(2\sqrt{2} - 1) + 28 = 0$  bularak  $P_0$  noktasının sözü edilen yüzeyin bir noktası olduğu anlaşılr.  $P_0$  noktasından  $F(x, y, z) = 0$  yüzeyine çizilen normal doğrusunun parametrik denklemi, iyi bilindiği gibi

$$x = q_0 + t \cdot F_x(q_0, -2, 2) = 2\sqrt{2} - 1 - 16\sqrt{2}t,$$

$$y = -2 + t \cdot F_y(q_0, -2, 2) = -2 + 2t(3 - 4\sqrt{2}),$$

$$z = 2 + t \cdot F_z(q_0, -2, 2) = 2 - 2t(4\sqrt{2} + 1)$$

olduğundan bu doğrunun bir önceki soruda belirlenen  $2x+2y-z = -2$  normal düzlemini kestiği biricik noktayı bulmak için

$$-2 = 2(2\sqrt{2} - 1 - 16\sqrt{2}t) + 2(-2 + 2t(3 - 4\sqrt{2})) - 2 + 2t(4\sqrt{2} + 1)$$

ve sonuçta  $t = \frac{3-2\sqrt{2}}{7-20\sqrt{2}}$  bulunup, aranan noktanın bileşenleri

$$x = 2\sqrt{2} - 1 - 16\sqrt{2}t = \frac{14\sqrt{2} + 23}{20\sqrt{2} - 7}, \quad y = -2 + \frac{2(3 - 4\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{7 - 20\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 36}{7 - 20\sqrt{2}},$$

$$z = 2 - \frac{2(3 - 2\sqrt{2})(4\sqrt{2} + 36)}{7 - 20\sqrt{2}} = \frac{60\sqrt{2} - 40}{20\sqrt{2} - 7}$$

böylece aranan biricik kesişim noktası tüm bileşenleri irrasyonel sayılar olan ve gerçekten  $2x + 2y - z + 2 = 0$  düzleminde yer alan şu noktadır:

$$P_1 \left( \frac{14\sqrt{2} + 23}{20\sqrt{2} - 7}, \frac{4\sqrt{2} + 36}{7 - 20\sqrt{2}}, \frac{56\sqrt{2} - 10}{20\sqrt{2} - 7} \right)$$

Bu noktanın gerçekten,  $2x+2y-z+2 = 0$  düzleminin bir noktası olduğunu gözlemelisiniz.

**Ödev:**  $P_0(\frac{1}{2}, 0, 8)$  noktasının  $x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$  yüzeyi üzerinde olduğunu gösterip, bu noktadan bu yüzeye çizilen normal doğrusunun  $2x + 2y - z + 2 = 0$  düzlemini kestiği noktayı belirleyiniz.

5a) Küresel koordinatlarda bir  $F(r, \theta, \phi) = 0$  yüzeyinin bir  $P_0(r_0, \theta_0, \phi_0)$  noktasındaki teget düzlemini yazınız.

**Cözüm:** Bilindiği gibi, küresel koordinatlarda  $\mathbb{R}^3$  uzayının herhangi bir  $P(x, y, z)$  noktasının bileşenleri

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

ve sonuçta onun yer vektörü ve ayrıca bu noktadaki yeni birim dik vektörler

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k},$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

ve ölçek çarpanları  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$  olduğundan, sonuçta herhangi bir türetilebilir  $F = F(r, \theta, \phi)$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned} gradF &= \nabla F = \sum_{k=1}^3 \frac{F_{u_k}}{h_k} \cdot \vec{e}_k = F_r \vec{e}_1 + \frac{F_\theta}{r} \cdot \vec{e}_2 + \frac{F_\phi}{r \sin \theta} \cdot \vec{e}_3 \\ &= (F_r \sin \theta \cos \phi + \frac{F_\theta}{r} \cos \theta \cos \phi - \frac{F_\phi}{r \sin \theta} \sin \phi) \vec{i} \\ &\quad + (F_r \sin \theta \sin \phi + \frac{F_\theta}{r} \cos \theta \sin \phi + \frac{F_\phi}{r \sin \theta} \cos \phi) \vec{j} + (F_r \cos \theta - \frac{F_\theta}{r} \sin \theta) \vec{k} \end{aligned}$$

ve sonuçta bir  $P_0(r_o, \theta_0, \phi_0)$  noktası için

$$\begin{aligned} \nabla F|_{P_0} &= (F_r(r_0, \theta_0, \phi_0) \sin \theta_0 \cos \phi_0 + \frac{F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0} \cos \theta_0 \cos \phi_0 - \frac{F_\phi(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0 \sin \theta_0} \sin \phi_0) \vec{i} \\ &\quad + (F_r(r_0, \theta_0, \phi_0) \sin \theta_0 \sin \phi_0 + \frac{F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0} \cos \theta_0 \sin \phi_0 + \frac{F_\phi(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0 \sin \theta_0} \cos \phi_0) \vec{j} \\ &\quad + (F_r(r_0, \theta_0, \phi_0) \cos \theta_0 - \frac{F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0} \sin \theta_0) \vec{k} \end{aligned}$$

bulunur, bu vektörün katsayılarını kısalık amacıyla  $a_0, b_0$  ve  $c_0$  ile yazarsak, sonuçta  $\nabla F|_{P_0} = a_0 \vec{i} + b_0 \vec{j} + c_0 \vec{k}$  olur. Ayrıca  $P_0(r_0, \theta_0, \phi_0)$  noktasının küresel koordinatlardaki yer vektörü  $\vec{r}_0$  ile yazılmak üzere;

$\vec{r} - \vec{r}_0 = (r \sin \theta \cos \phi - r_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0) \vec{i} + (r \sin \theta \sin \phi - r_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0) \vec{j} + (r \cos \theta - r_0 \cos \theta_0) \vec{k}$  olduğundan,  $F(r, \theta, \phi) = 0$  yüzeyine ait bir  $P_0(r_0, \theta_0, \phi_0)$  noktasının küresel koordinatlardaki teğet düzlemini aşağıdakidir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{r} - \vec{r}_0)(\nabla F|_{P_0}) = a_0(r \sin \theta \cos \phi - r_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0) \\ &\quad + b_0(r \sin \theta \sin \phi - r_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0) + c_0(r \cos \theta - r_0 \cos \theta_0). \end{aligned}$$

5b) Küresel koordinatlarda  $r = 4 \cos \theta$  yüzeyinin  $P_0(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  noktasındaki teğet düzlemini yazınız.

**Cözüm:**  $F(r, \theta, \phi) = r - 4 \cos \theta = 0$  ve  $r_0 = 2\sqrt{2}, \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = \frac{3\pi}{4}$  olduğu ve ayrıca  $F_r(r, \theta, \phi) = 1, F_\theta(r, \theta, \phi) = 4 \sin \theta$  ve  $F_\phi(r, \theta, \phi) = 0$  geçerli olduğundan, kolayca  $F_r(r_0, \theta_0, \phi_0) = 1, F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0) = 4 \sin \theta_0 = 4 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = r_0$  yanı  $\frac{F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0} = 1$  ve  $F_\phi(r_0, \theta_0, \phi_0) = 0$  ve ayrıca sözgelimi  $r_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0 = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$  ve  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$  nedeniyle, bir önceki çözümün  $a_0$  katsayısı

$$a_0 = F_r(r_0, \theta_0, \phi_0) \sin \theta_0 \cos \phi_0 + \frac{F_\theta(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0} \cos \theta_0 \cos \phi_0 - \frac{F_\phi(r_0, \theta_0, \phi_0)}{r_0 \sin \theta_0} \sin \phi_0$$

$$= 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} - 0 = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = -1$$

ve benzer biçimde  $b_0 = 1$  ve  $c_0 = 0$  bulunacağından, bir önceki alıştırmanın sonunda belirlenen

$$0 = a_0(r \sin \theta \cos \phi - r_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0) + b_0(r \sin \theta \sin \phi - r_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0) + c_0(r \cos \theta - r_0 \cos \theta_0)$$

teğet düzlem denklemi, tüm bu değerler yerleştirilerek aşağıdakidir:

$$r \sin \theta (\sin \phi - \cos \phi) = 2\sqrt{2}.$$

6) Bir önceki soruyu dik koordinat sisteminde yazıp çözerek, sonucu küresel koordinat sisteminde yazınız.

**Çözüm:**  $F(r, \theta, \phi) = r - 4 \cos \theta = 0$  kısacası  $r = 4 \cos \theta$  yani  $r^2 = 4r \cos \theta$  yüzeyinin, alıslagelenen  $(x, y, z)$  koordinat sisteminde  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 4r \cos \theta = 4z$  yani  $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4$  kısacası  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 = 0$  biçiminde yazdığını, bunun ise,  $(0, 0, 2)$  merkezli 2 yarıçaplı bir küre olduğunu dikkat ediniz. Öte yandan  $P_0(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  noktası ise  $(x, y, z)$  koordinat sisteminde

$$x = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad y = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad z = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2$$

nedeniyle  $P_0(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$  noktasından başkası değildir. Bu noktanın, gerçekten  $(0, 0, 2)$  merkezli 2 yarıçaplı kürenin bir noktası olduğunu gözleyiniz. O halde bir önceki sorunun, alıslagelenen dik koordinat sistemindeki söyleşisi şudur:  $P_0(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$  noktasından  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$  küresine çizilen teğet düzlemini yazınız.  $F_z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) = 2z - 4|_{P_0} = 4 - 4 = 0$  nedeniyle, aranan teğet düzlem kolayca

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (x + \sqrt{2}) + F_y(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (y - \sqrt{2}) + F_z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (z - 2) \\ &= F_x(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (x + \sqrt{2}) + F_y(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (y - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2}(y - x) - 8 = 2\sqrt{2}(y - x - 2\sqrt{2}) \quad \text{yani} \end{aligned}$$

$$y - x = 2\sqrt{2}$$

olarak bulunur. Bu düzlemin küresel koordinatlardaki yazılışının ise

$$2\sqrt{2} = r \sin \theta \sin \phi - r \sin \theta \cos \phi = r \sin \theta (\sin \phi - \cos \phi)$$

olduguuna dikkat edip, bu çözümün bir önceki örnekte bulunduğunu gözleyiniz.

7)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $C$  eğrisi  $x = t - \cos t$ ,  $y = 3 + \sin 2t$ ,  $z = 1 + \cos 3t$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) biçiminde tanımlansın. Bu eğriye  $t_0 = \frac{\pi}{2}$  noktasında çizilen normal düzlemi ile teğet doğrusunu belirleyiniz.

**Cözüm:**  $C$  eğrisi,  $x = f(t) = t - \cos t$ ,  $y = g(t) = 3 + \sin 2t$ ,  $z = h(t) = 1 + \cos 3t$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) olduğundan, aranılan teğet doğrusunun parametrik yazılışı

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t \cdot (f'(t_0)) = \frac{\pi}{2} + (1 + \sin(t_0)) \cdot t = \frac{\pi}{2} + 2t \\y &= y_0 + t \cdot (g'(t_0)) = 3 + (2 \cos(2t_0)) \cdot t = 3 - 2t \\z &= z_0 + t \cdot (h'(t_0)) = 1 + (-3 \sin(3t_0)) \cdot t = 1 + 3t\end{aligned}$$

olur, çünkü apak biçimde  $x_0 = f(t_0) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ,  $y_0 = g(t_0) = 3 + \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$  ve  $z_0 = h(t_0) = 1 + \cos \frac{3\pi}{2} = 1$  geçerlidir. Buna karşılık  $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0)) = P_0\left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$  noktasından  $C$  eğrisine çizilen normal düzleminin denklemiyse aşağıda yazılmalıdır:

$$0 = f'(t_0) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + g'(t_0) \cdot (y - 3) + h'(t_0) \cdot (z - 1) \text{ yani} \\2x - 2y + 3z = \pi - 3$$

8)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $3x^2y + y^z + 2 = 0$  ve  $2xz - x^2y - 3 = 0$  yüzeylerinin kesişim eğrisi  $C$  olsun. Bu eğriye  $P_0(1, -1, 1)$  noktasından çizilen normal düzlemi ile teğet doğrusunun denklemelerini yazınız.

**Cözüm:** Öncelikle  $P_0$  noktasının, her iki yüzeyin ve böylelikle onların kesişim eğrisi olan  $C$  eğrisinin üzerinde yer aldığı gözleyiniz. Bu yüzeylere sırasıyla  $F(x, y, z) = 0$  ve  $G(x, y, z) = 0$  denilirse, aranılan normal düzlemin denklemi

$$0 = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \cdot (x-1) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} \cdot (y+1) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{P_0} \cdot (z-1) = 3(x-1) + 16(y+1) + 2(z-1)$$

yani  $3x + 16y + 2z = -11$  olarak bulunur. Buna karşın  $P_0$  noktasından  $C$  eğrisine çizilen teğet doğrusunun parametrik yazılışı aşağıdadır:

$$x = 1 + t \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} = 3t + 1, \quad y = -1 + t \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{P_0} = 16t - 1, \quad z = 2t + 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

9)  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z = 0$  paraboloidinin  $P_0(2, -4, 5)$  noktasındaki teğet düzlemi ile normal doğrusunun denklemelerini yazınız.

**Cözüm:** Öncelikle  $F(2, -4, 5) = 2^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 0$  gözleyiniz. Aranan teğet düzlem  $0 = F_x(2, -4, 5) \cdot (x-2) + F_y(2, -4, 5) \cdot (y+4) + F_z(2, -4, 5) \cdot (z-5) = 4(x-2y-z-5)$  nedeniyle  $x - 2y - z = 5$  olarak bulunur. Normal doğrusunun parametrik denklemeleri ise  $x = 2 + t \cdot F_x(2, -4, 5) = 2 + 4 \cdot t$ ,  $y = -4 + t \cdot F_y(2, -4, 5) = -4 - 8t$ ,  $z = 5 - t \cdot F_z(2, -4, 5) = 5 - 4t$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) ya da  $t$  yerine  $\frac{t}{4}$  yazarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x = 2 + t, \quad y = -4 - 2t, \quad z = 5 - t \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

10) Türetilebilir  $f$  fonksiyonu sayesinde tanımlanan  $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$  yüzeyinin bir  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasındaki teğet düzlemeyle normal doğrusunu yazınız.

**Cözüm:** Öncelikle  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasının sözü edilen yüzey üzerinde olması nedeniyle  $0 = F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0$  kısacası  $z_0 = f(x_0, y_0)$  bulunur. Ayrıca  $F_x = f_x$ ,  $F_y = f_y$ ,  $F_z = -1$  ve söz gelimi  $F_x(x_0, y_0, z_0) = F_x|_{P_0} = f_x(x_0, y_0)$  olduğundan,  $P_0$  noktasındaki teğet düzlem

$$0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) \text{ yani}$$

$$z = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

olarak,  $P_0$  noktasındaki normal doğrusunun parametrik yazılışı ise,  $t \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$x = x_0 + t \cdot f_x(x_0, y_0)$$

$$y = y_0 + t \cdot f_y(x_0, y_0)$$

$$z = z_0 - t$$

olarak belirlenir. Örneğin, bir önceki soruda paraboloidin  $F(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - z = 0$  olarak yazılabildiğini gözleyip, bu örnekte bulunan çözümden yararlanarak, söz gelimi  $P_0(2, -4, 5)$  noktasındaki **teğet düzlem** (burada  $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$  olduğundan)

$$z = f_x(2, -4) \cdot (x - 2) + f_y(2, -4) \cdot (y + 4) + f(x_0, y_0) = (x - 2) - 2(y + 4) + 5 \text{ yani } x - 2y - z = 5 \text{ olarak bulunur.}$$

11) Bir  $F(x, y, z) = 0$  yüzeyinin  $P(x, y, z)$  noktasındaki normal vektörü ile  $O_z$  ekseni arasındaki açı  $\gamma$  eğer bir dar açı ise  $\sec \gamma = \frac{1}{|F_z|} \cdot \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  geçerli olduğunu gösteriniz.

**Cözüm:** İki de sıfır vektörden farklı  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  vektörleri arasındaki açının radyan değeri  $\gamma$  ise  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \gamma$  ve sonuçta  $\cos \gamma = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$  gerçekleştiğinden,  $P$  noktasındaki normal vektör  $\nabla F|_P = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  ile  $O_z$  ekseninin birim vektörü  $\vec{k}$  arasındaki açı  $\gamma$  açısından  $\cos \gamma = \frac{|\nabla F|_P \cdot \vec{k}}{|\nabla F|_P \cdot 1} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$  olur. Oysa  $\gamma$  bir dar açının radyan değeri ve sonuçta  $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$  gerçekleştiğinden  $0 < \cos \gamma \leq 1$  ve böylece  $\cos \gamma = |\cos \gamma| = \frac{|F_z|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$  olduğundan, kolayca  $\sec \gamma = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}$  bulunur.

12) Silindirik koordinatlarda, kısmi türevleri sürekli bir  $F$  fonksiyonu sayesinde tanımlanan bir  $F(\rho, \phi, z) = 0$  yüzeyine, bu yüzeyin bir  $P_0 = (\rho_0, \phi_0, z_0)$  noktasından çizilen teğet düzlem ile normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

**Cözüm:** Silindirik koordinatlarda  $\operatorname{grad} F = \nabla F = F_\rho \vec{e}_1 + \frac{F_\phi}{\rho} \vec{e}_2 + F_z \vec{e}_3$  ve yer vektörü ile yeni birim dik vektörler

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \cdot \vec{i} + \rho \sin \phi \cdot \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}|} = \cos \phi \cdot \vec{i} + \sin \phi \cdot \vec{j}, \quad \vec{e}_2 = \sin \phi \cdot \vec{i} + \cos \phi \cdot \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}$$

ve sonuçta

$\nabla F = (F_\rho \cdot \cos \phi + \frac{F_\phi}{\rho} \cdot \sin \phi) \cdot \vec{i} + (F_\rho \cdot \sin \phi + \frac{F_\phi}{\rho} \cdot \cos \phi) \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$  olduğundan  $F(\rho, \phi, z) = 0$  yüzeyine, bir  $P_0 = (\rho_0, \phi_0, z_0)$  noktasından çizilen **teğet düzlem**

$$\vec{0} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla F|_{P_0} = (\rho \cdot \cos \phi - \rho_0 \cdot \cos \phi_0) \cdot \left( F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) \cdot \cos \phi_0 - \frac{F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} \cdot \sin \phi_0 \right) + \\ (\rho \cdot \sin \phi - \rho_0 \cdot \sin \phi_0) \cdot \left( F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) \cdot \sin \phi_0 - \frac{F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} \cdot \cos \phi_0 \right) + (z - z_0) \cdot F_z(\rho_0, \phi_0, z_0)$$

buna karşılık  $P_0$  noktasından yüzeye çizilen **normal doğrusu**  $\vec{0} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\nabla F|_{P_0})$  bilgisinden yararlanıp, bu vektörün tüm bileşenlerini sıfıra eşitleyerek, parametrik yazısı aşağıdaki yazılan doğrudur:

$$x = \rho_0 \cdot \cos \phi_0 + t \cdot (F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) \cdot \cos \phi_0 - \frac{F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} \cdot \sin \phi_0),$$

$$y = \rho_0 \cdot \sin \phi_0 + t \cdot (F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) \cdot \sin \phi_0 - \frac{F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} \cdot \cos \phi_0),$$

$$z = z_0 + t \cdot F_z(\rho_0, \phi_0, z_0) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

13) Silindirik koordinatlarda  $\pi z = \rho \phi$  yüzeyine  $P_0(2, \frac{\pi}{2}, 1)$  noktasından çizilen teğet düzlemini yazınız.

**Cözüm :** Verilen yüzey  $F(\rho, \phi, z) = \pi z - \rho \phi$  ve böylelikle  $F_\rho(\rho, \phi, z) = -\phi$ ,  $F_\phi(\rho, \phi, z) = -\rho$  ve  $F_z(\rho, \phi, z) = \pi$  ayrıca  $P_0$  noktasının silindirik koordinat bileşenleri  $\rho_0 = 2$ ,  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $z_0 = 1$  ve dolayısıyla  $F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) = -\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0) = -\rho = -2$ ,  $F_z(\rho_0, \phi_0, z_0) = \pi$  ve  $\frac{F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} = -1$  olduğundan, üstelik  $\cos \phi_0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  nedeniyle aranılan teğet düzlem

$$0 = \rho \cdot \cos \phi_0 \cdot \left( \frac{-F_\phi(\rho_0, \phi_0, z_0)}{\rho_0} \cdot \sin \phi_0 \right) + (\rho \cdot \sin \phi - \rho_0) \cdot (F_\rho(\rho_0, \phi_0, z_0) \cdot \sin \phi_0) + (z - 1) \cdot F_z(\rho_0, \phi_0, z_0)$$

$$= \rho \cdot \cos \phi - \frac{\pi}{2}(\rho \cdot \sin \phi - 2) + \pi \cdot (z - 1) = \rho(\cos \phi - \frac{\pi}{2} \cdot \sin \phi) + \pi z \text{ yani}$$

$$2\rho \cos \phi - \pi \rho \sin \phi + 2\pi z = 0$$

olarak bulunur; bunun alışlagelen dik koordinat sisteminde  $2x - \pi y + 2\pi z = 0$  biçiminde yazıldığını gözleyiniz.

14) Bir önceki soruyu dik koordinat sisteminde yazıp, çözünüz.

**Cözüm :** Gerek kutupsal gerek silindirik koordinatlarda  $\rho$  ile radyan değerli  $\phi$  için

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\forall (x, y) \neq (0, 0))$$

olduğu ve verilen yüzey, alışlagelen koordinat sisteminde

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \pi z = 0$$

olduğundan ve verilen  $P_0$  noktasının alışlagelen koordinat sistemindeki bileşenleri için  $x_0 = \rho_0 \cdot \cos \phi_0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $y_0 = \rho_0 \cdot \sin \phi_0 = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$ ,  $z_0 = 1$  gözlenerek, önceki soru,  $F(x, y, z) = 0$  yüzeyine  $P_0(0, 2, 1)$  noktasından çizilen teğet düzlemini sormaktadır. Öncelikle  $F(0, 2, 1) = \sqrt{0^2 + 2^2} \cdot \arccos 0 - \pi = 2 \arccos 0 - \pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = 0$  gözleyerek  $P_0$  noktasının  $F(x, y, z) = 0$  yüzeyi üzerinde olduğu anlaşılır. Ayrıca kısmi türev alarak

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ F_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ ve } F_z = -\pi \end{aligned}$$

bularak, aranan teğet düzlem, önceki sorudaki gibi  $\vec{0} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla F|_{P_0} = F_x(0, 2, 1) \cdot (x - 0) + F_y(0, 2, 1) \cdot (y - 2) + F_z(0, 2, 1) \cdot (z - 1) = -x + \frac{\pi \cdot y}{2} - \pi z$  yani  $2x - \pi y + 2\pi z = 0$  olarak bulunur.

**Ödev:** Yukardaki 13) sorusunda verilen yüzeye  $P_0(2, \frac{\pi}{2}, 1)$  noktasından çıkan normal doğrusunun denklemi, hem silindirik koordinatlarda hem de alışlagelen dik koordinat sisteminde yazınız.

## Ekstremum Problemleri

Bu bölümde şimdi de iki ve üç değişkenli gerçek değerli fonksiyonlar için ekstremum problemleri ile ilgilenelim.

**Tanım 1:** Bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde tanımlı gerçek değerli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonuna, ancak ve yalnız bir  $(x_0, y_0) \in R$  noktası için

**Koş 1:**  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \cap R$ ) koşulunu gerçekliyorsa  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında **yerel minimumu** vardır ve ancak ve yalnız,

**Koş 2:**  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0) \cap R$ ) koşulunu gerçekliyorsa  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında **yerel maksimumu** vardır ve ancak ve yalnız,

**Koş 3:**  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) koşulunu gerçekliyorsa  $(x_0, y_0) \in R$  noktasında **bölgesel minimumu** vardır denilir.  $R$  bölgesindeki maksimum tanımı benzer biçimde yapılır. Üç değişkenli gerçek değerli fonksiyonlar için benzer tanımları siz veriniz. Bir  $(x_0, y_0) \in R$  noktasına, ancak ve yalnız,  $f$  fonksiyonunun yerel minimumu ya da yerel maksimumu oluyorsa, ona  $f$  fonksiyonunun bir **ekstremum noktasıdır** denilir.

**Dikkat:** Eğer  $(x_0, y_0) \in R$  noktası için **Koş 1** koşulu gerçekleşiyorsa,  $g(x) = f(x, y_0)$  ( $\forall x \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$ ) biçiminde tanımlanan gerçek değerli  $g$  fonksiyonu için,  $\forall x \in$

$(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)$  için  $(x, y_0) \in K_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$  olduğundan  $g(x_0) = f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) = g(x)$  gözleyerek,  $x_0$  noktasının  $g$  fonksiyonunun bir yerel minimumu olduğu anlaşılır. Benzer biçimde **Koş 2** gerçekleşiyorsa,  $h(y) = f(x_0, y)$  ( $\forall y \in (y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0)$ ) biçiminde tanımlanan gerçek değerli  $h$  fonksiyonunun  $y_0$  noktasında bir yerel maksimumu,  $g(x) = f(x, y_0)$  biçiminde tanımlanan  $g$  fonksiyonunun da  $x_0$  noktasında yerel maksimumu vardır.

**Önerme 1:** Bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde tanımlı, türetilebilir bir  $f = f(x, y)$  gerçek değerli fonksiyonu alınsın. Bir  $(x_0, y_0) \in \text{ iç } R$  noktasının (aşağıdaki **uyarıyı** okuyunuz), bu fonksiyonun ekstremum noktası olabilmesi için **gerek koşullar**  $f_x(x_0, y_0) = 0$  ve  $f_y(x_0, y_0) = 0$  gerçekleşmesidir. Bu koşullar yeter koşul DEĞİLDİR.

**Uyarı ve Kanıtlama:** Öncelikle, bu önermedeki koşulların yeter koşul olmadıkları, kısacası  $f_x(\xi_0, \eta_0) = 0$  ve  $f_y(\xi_0, \eta_0)$  gerçekleyen bir  $(\xi_0, \eta_0) \in R$  noktasının,  $(\xi_0, \eta_0) \in \text{ iç } R$  gerçekleşse bile,  $f$  fonksiyonu için bir ekstremum noktası **olmayabileceğini** gösteren bir karşıt örnek verelim. En kolay karşıt örneklerden birisi şudur:

$$f(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y + xy^2$$

polinomu  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$  kapalı-sınırlı bölgesinde, her noktada her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir. Kolayca  $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$  gözlenir. Üstelik  $(0, 0) \in (-1, 1) \times (-1, 1) = \text{ iç } R$  geçerlidir, oysa hiçbir  $\varepsilon > 0$  için **Koş:**  $f(0, 0) \leq f(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_\varepsilon(0, 0)$ ) koşulu **gerçekleşmez**, çünkü  $(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in K_\varepsilon(0, 0)$  noktası için, kolayca  $f(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{1}{2^5} \cdot (\varepsilon^5 + 12\varepsilon^3) < 0 = f(0, 0)$  olmaktadır. Benzer biçimde hiçbir  $\varepsilon > 0$  için **Koş\*:**  $f(x, y) \leq f(0, 0)$  ( $\forall (x, y) \in K_\varepsilon(0, 0)$ ) koşulu da gerçekleşmez, çünkü  $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \in K_\varepsilon(0, 0)$  ve  $f(0, 0) = 0 \leq \frac{\varepsilon^5 + 12\varepsilon^3}{2^5} = f(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$  olmaktadır, kısacası  $(0, 0) \in \text{ iç } R$  noktası,  $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$  gerçeklemesine karşın  $f$  fonksiyonu için ne bir yerel minimum ne de bir yerel maksimum olabilmektedir. **Dikkat:** Aslında, yukarıdaki örnekte  $\text{ iç } R$  açık bölgesinde  $f$  fonksiyonunun hiçbir extremum noktası **yoktur**, çünkü dikkat edilirse  $f_x(x, y) = y(3x^2y + 4x + y)$  ve  $f_y(x, y) = 2x(x^2y + x + y)$  olduğundan, eğer herhangi bir  $P(x, y) \in \text{ iç } R - \{(0, 0)\}$  noktası için  $f_x(P) = 0$  ve  $f_y(P) = 0$  **gerçekleşseydi**,  $P$  noktası için hem  $x \neq 0$  hem  $y \neq 0$  olduğundan önce  $3x^2y + 4x + y = 0$  ve  $x^2y + x + y = 0$  ve böylece  $0 = 2x^2y + 3x = x(2xy + 3)$  sonuçta zorunlu olarak  $y = -\frac{3}{2x}$  ve zaten  $3x^2y + 4x + y = 0$  olduğunu unutmadan sonuçta  $0 < x^2 + 3 = 0$  çelişkisi bulunurdu (nasıl?). Öte yandan  $0 \neq x_0 \in (-1, 1)$  ve  $0 \neq y_0 \in (-1, 1)$  ne olursa olsun  $P_1(x_0, 0) \in (-1, 1) \times (-1, 1) = \text{ iç } R$  ve  $P_2(0, y_0) \in \text{ iç } R$  noktaları da  $f$  için bir extremum **olamazlar**, sözgelimi  $f_y(P_1) = 2x_0 \neq 0$  geçerlidir. **Dikkat:** Bu önermede  $R$  bölgesi kapalı-sınırlı ve  $(x_0, y_0) \in \partial R(\subseteq R)$  ise, ilerde gözleneceği gibi bu durumda bu önermenin DOĞRU OLMASI GEREKMEZ!

Bunu örnekleyen karşıt örnekler aşağıda Örnekler'de verilmektedir. Oysa bu önermede  $(x_0, y_0) \in \text{ iç } R$  gerçekleştiği için  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq R$  böylece, kısalık amacıyla  $I_0 = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  ve  $J_0 = (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$  yazılırsa, hem  $I_0 \times \{y_0\} \subseteq I_0 \times J_0 =$

$K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq R = Tan(f)$  ve hem de  $\{x_0\} \times J_0 \subseteq I_0 \times J_0 = K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq R = Tan(f)$  gerçekleştiğinden aşağıdaki biçimde

$$g(x) = f(x, y_0) \quad (\forall x \in I_0), \quad h(y) = f(x_0, y) \quad (\forall y \in J_0)$$

tanımlanan  $g$  ve  $h$  gerçel değerli fonksiyonları için, eğer  $(x_0, y_0) \in R$  noktası,  $f$  için bir ekstremum noktası, söz gelimi bir yerel minimum noktası ise  $g(x_0) = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$  böylece  $g(x_0) \leq f(x_0, y_0) \quad (\forall x \in I_0)$  yani  $g(x_0) \leq g(x) \quad (\forall x \in I_0)$  olacağından, tanımlandıkları aralıklarda türetilebilir  $g$  ve  $h$  fonksiyonları için Analiz I bilgisiyile

$$0 = g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) \text{ ve } 0 = h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

istenen sonuçları elde edilir. Bu koşulların yeter koşul olmasının gerekliliği yukarıda gözlenmiştir.

Sırada aşağıdaki kullanışlı **Yeterlik Teoremi** vardır:

Aşağıdaki ünlü ve kullanışlı **Yeterlik Teoremi**, iki değişkenli bir fonksiyonun bir ekstremum noktasının, bir yerel minimum mu yoksa bir yerel maksimum mu olduğunu belirlemekte kullanılır. Yukarıdaki önermede,  $f$  fonksiyonu için  $(x_0, y_0) \in \text{İç}R$  gerçekleyen  $(x_0, y_0) \in R$  noktası, eğer bir ekstremum **ise** zorunlu olarak hem  $f_x(x_0, y_0) = 0$  hem de  $f_y(x_0, y_0) = 0$  gerçekleşmesi gerektiği gösterilmiş olmaktadır, bu unutulmamalıdır!

**Yeterlik Teoremi:** Bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  bölgesinde, ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan gerçel değerli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu alın. **Koş** koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0) \in \text{İç}R$  noktası,  $f$  için bir ekstremum noktası olsun.  $\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$  yazılınsın. Eğer

$$\text{ya } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 < \Delta \quad \text{ya da} \quad f_{yy}(x_0, y_0) < 0 < \Delta$$

koşulları gerçekleşiyorsa  $P_0(x_0, y_0)$  noktası  $f$  için bir yerel maksimumdur, buna karşılık eğer

$$\text{ya } 0 < f_{xx}(x_0, y_0) \text{ ve } 0 < \Delta \quad \text{ya da} \quad 0 < f_{yy}(x_0, y_0) \text{ ve } 0 < \Delta$$

koşulları gerçekleşiyorsa  $P_0(x_0, y_0)$  noktası  $f$  için bir yerel minimumdur.

**Kanıtlama:**  $f$  fonksiyonunun  $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$  ya da  $f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$  koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0) \in \text{İç}R$  noktasının  $K_{\delta_0}(x_0, y_0) \subseteq R$  gerçekleyen komşuluğunda, Taylor açılımıyla uygun bir  $0 < \varepsilon_0 < 1$  aracılığıyla

$$R_1 = \frac{1}{2!} \left[ h^2 f_{xx}(x_0 + \varepsilon_0 h, y_0 + \varepsilon_0 k) + 2hk f_{xy}(x_0 + \varepsilon_0 h, y_0 + \varepsilon_0 k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \varepsilon_0 h, y_0 + \varepsilon_0 k) \right]$$

olmak üzere  $f(x, y) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + R_1$  olarak yazıldığını biliyoruz. Sonuçta  $f$  fonksiyonu için, hipotez gereği  $P_0(x_0, y_0)$  noktası bir ekstremum noktası ve böylelikle zorunlu olarak  $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$  olduğundan  $f(x, y) = f(x_0, y_0) + R_1$  bulunur ve kısalık amacıyla  $\xi_0 = x_0 + \varepsilon_0 h$ ,  $\eta_0 = y_0 + \varepsilon_0 k$  yazılırsa,  
 $f_{xx}(\xi_0, \eta_0) \neq 0$  gerçekleşmesi durumunda

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= R_1 = \frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}(\xi_0, \eta_0) + 2hk f_{xy}(\xi_0, \eta_0) + h^2 f_{yy}(\xi_0, \eta_0)] = \\ &= \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0)}{2!} \left[ h^2 + 2hk \frac{f_{xy}(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}(\xi_0, \eta_0)} + k^2 \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0) f_{yy}(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}^2(\xi_0, \eta_0)} \right] = \\ &\stackrel{*}{=} \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0)}{2!} \left[ \left( h + k \frac{f_{xy}(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}(\xi_0, \eta_0)} \right)^2 + k^2 \left( \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0) f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}^2(\xi_0, \eta_0)} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, eğer  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 < \Delta$  koşulu gerçekleşiyorsa, tüm ikinci mertebe kısmi türevleri ve özel olarak gerek  $f_{xx}$  gerekse  $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$  fonksiyonları hipotez gereği **sürekli** olduklarından, Bölüm 1'de kanıtlanan bilgiler nedeniyle, uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda  $f_{xx}(x, y) < 0 < f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) olur, dolayısıyla yeterince küçük  $h = x - x_0$  ve  $k = y - y_0$  için  $|\varepsilon_0 h| = \varepsilon_0 |h| \leq |h| < \delta_0$  ve böylece  $|\xi_0 - x_0| = |(x_0 + \varepsilon_0 h) - x_0| = |\varepsilon_0 h| < \delta_0$  ve benzeriyle  $|\eta_0 - y_0| < \delta_0$  ve sonuçta  $(\xi_0, \eta_0) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  gözleyerek (dikkat:  $(x, y) = (x_0, y_0) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  için hem  $h = x - x_0 = 0$  hem de  $k = y - y_0 = 0$  gözleyiniz), yukarıdaki son eşitsizliklerin gereği olarak

$$f_{xx}(\xi_0, \eta_0) < 0 < f_{xx}(\xi_0, \eta_0) f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0)$$

bulunur; özel olarak  $f_{xx}(\xi_0, \eta_0) < 0$  yani  $f_{xx}(\xi_0, \eta_0) \neq 0$  nedeniyle, yukarıda elde edilen (\*) eşitliği geçerli olur ve apaçık biçimde

$$0 \leq \left( h + k \frac{f_{xy}(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}(\xi_0, \eta_0)} \right)^2 + k^2 \left( \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0) f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0)}{f_{xx}^2(\xi_0, \eta_0)} \right)$$

ve  $\frac{1}{2!} f_{xx}(\xi_0, \eta_0) < 0$  nedeniyle, herbir  $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  için sonuçta (\*) eşitliğiyle  $f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0$  bulunur. Demek ki eğer

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 < \Delta$$

koşulu gerçekleşiyorsa aşağıdaki sonuç bulunmaktadır:

$$\exists \delta_0 > 0, f(x, y) \leq f(x_0, y_0) (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

bu sonuç ise  $P_0(x_0, y_0)$  noktasının  $f$  fonksiyonu için bir **yerel maksimum** olması demektir. Eğer  $f_{yy}(\xi_0, \eta_0) \neq 0$  ise, bu kez benzer biçimde

$$R_1 = \frac{f_{yy}(\xi_0, \eta_0)}{2!} \left[ \left( k + h \frac{f_{xy}(\xi_0, \eta_0)}{f_{yy}(\xi_0, \eta_0)} \right)^2 + h^2 \left( \frac{f_{xx}(\xi_0, \eta_0) f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0)}{f_{yy}^2(\xi_0, \eta_0)} \right) \right]$$

gözleyerek,  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0 < \Delta$  gerçekleşmesi durumunda, benzer kanıtlamayla uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda, herbir  $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  için  $f_{yy}(x, y) < 0 < f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$  gözleyerek ve böylece özel olarak  $f_{yy}(\xi_0, \eta_0) < 0$  ve  $0 < f_{xx}(\xi_0, \eta_0)f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0)$  bularak  $R_1 \leq 0$  nedeniyle  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) bulunur, kısacası  $P_0(x_0, y_0)$  noktasının yine  $f$  fonksiyonunun bir **yerel maksimumu** olduğu anlaşılr. Buna karşılık hem  $0 < f_{xx}(x_0, y_0)$  hem de  $0 < \Delta$  koşullarının gerçekleşmesi durumunda bu kez uygun bir  $\delta_1 > 0$  yardımıyla, kısmi türevlerin sürekliliği nedeniyle  $0 < f_{xx}(x, y)$  ve  $0 < f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0)$ ) ve  $(\xi_0, \eta_0) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0)$  gözleyip, yukarıda elde edilen (\*) eşitliği kullanılarak  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in K_{\delta_1}(x_0, y_0)$ ) bulunur, yani  $P_0(x_0, y_0)$  noktasının bu kez  $f$  fonksiyonunun bir yerel minimumu olduğu anlaşılr, bitti!

**Uyarı:** Eğer  $\Delta(P_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$  oluyorsa, ikinci mertebeden tüm kısmi türev fonksiyonlarının sürekliliği nedeniyle,  $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$  fonksiyonu sürekli olacağından

$$f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) < 0 \quad (\forall (x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

gerçekleşir, böylece özel olarak  $f_{xx}(\xi_0, \eta_0) \cdot f_{yy}(\xi_0, \eta_0) - f_{xy}^2(\xi_0, \eta_0) < 0$  olacağından yukarıdaki yöntem **kullanılmaz**. Fakat buna karşılık

$$d^2f|_{P_0} > 0 \text{ ya da } d^2f|_{P_0} < 0$$

ise bir sonuca varılabilir, dikkat edilirse daima

$$d^2f = d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}(dx)(dy) + f_{yy}(dy)^2$$

gerçekleştirinden, eğer

$$d^2f|_{P_0} = f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(dx)(dy) + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2$$

gerçel sayısının (genel olarak bir **kısıt** yardımıyla) işaretini belirlenebiliyorsa, Taylor açılımı ve  $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$  nedeniyle  $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot d^2f|_{(\xi_0, \eta_0)}$  olduğundan (dikkat  $dx = h = x - x_0$ ,  $dy = k = y - y_0$  değişim niceliklerinin birer gerçel sayı olduğunu unutmayınız)  $d^2f$  sürekli fonksiyonunun  $P_0$  noktasındaki işaretini aracılığıyla ekstremumun varlığı konusunda bir sonuca **varılabilir**.

Bunun için, önce bir **kısıt altında** ekstremumların aranmasına ilişkin aşağıdaki önemli sonuçları görelim:

**Gereklilik Teoremi 1:** Bir  $R$  ( $\subseteq \mathbb{R}^2$ ) bölgesinde birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan  $f$  ve  $g$  gerçel değerli fonksiyonları verilsin.  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y) = 0$

kısıtlayıcı koşulu (**kısıt'ı**) altında, yani  $R^* = R \cap Sif(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : g(x, y) = 0\}$  bölgesinde

$$g_y(x_0, y_0) \neq 0$$

koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^*$  noktasında ekstremuma sahip olması için **gerekli koşul**  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}|_{P_0} = 0$  gerçekleşmesidir.

**Kanıtlama:**  $P_0$  noktasında  $g(x_0, y_0) = 0$  ve  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  gerçekleştiği için (sözelimi  $g_y(x_0, y_0) > 0$  ise  $g_y$  kısmi türev fonksiyonu sürekli olduğundan, uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) komşuluğunda  $g_y(x, y) > 0$  ( $\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) gözleyiniz ), sonuçta ÖFT2 nedeniyle uygun bir  $I_0 = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  komşuluğunda kesinlikle var olan bir  $y = \varphi(x)$  örtük fonksiyonu için

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad g(x, \varphi(x)) = 0 \quad (\forall x \in I_0)$$

koşulları gerçekleşir, üstelik bilindiği gibi  $\varphi'(x) = -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))}$  ( $\forall x \in I_0$ ) geçerlidir. Şimdi  $I_0$  aralığında

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (\forall x \in I_0)$$

birimde tanımlanan gerçek değerli  $F$  fonksiyonu için, eğer  $P_0(x_0, y_0) \in R^*$  noktasında  $f$  fonksiyonunun bir ekstremumu varsa, sözelimi  $P_0$  noktası  $f$  için bir yerel minimum ise  $F$  için de bir yerel minimumdur, çünkü

$$F(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0))$$

böylece  $F(x_0) \leq f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = F(x)$  ( $\forall x \in I_0$ ) gerçekleşir, üstelik  $F$  fonksiyonu  $I_0$  aralığında

$$F'(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f_x(x, y) - \frac{f_y(x, y) \cdot g_x(x, y)}{g_y(x, y)}$$

bağıntısıyla görüldüğü gibi türetilebildiği için, Analiz I bilgisiyle ekstremuma sahip türetilebildiği  $x_0 \in I_0$  noktasında

$$\begin{aligned} 0 = F'(x_0) &= \frac{1}{g_y(x_0, y_0)} \cdot (f_x(x_0, y_0) \cdot g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot g_x(x_0, y_0)) \\ &= \frac{1}{g_y(x_0, y_0)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}|_{P_0} \text{ ve } \frac{1}{g_y(x_0, y_0)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan istenen  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}|_{P_0} = 0$  sonucuna ulaşılır, bitti!

Üç değerli fonksiyonlar için benzer sonuç aşağıdadır:

**Gereklilik Teoremi 2:** Bir  $R(\subseteq \mathbb{R}^3)$  açık bölgesinde, birinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan  $f$  ve  $g$  fonksiyonları verilsin.  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y, z) = 0$  kısıtı altında,

yani  $R^* = R \cap Sif(g)$  bölgesinde,bu bölgenin  $g_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in R^*$  noktasında ekstremuma sahip olabilmesi için gerek koşullar şunlardır :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}|_{P_0} = 0, \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}|_{P_0} = 0, \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}|_{P_0} = 0.$$

**Kanıtlama:**  $P_0$  noktasında hem  $g(x_0, y_0, z_0) = 0$  hem de  $g_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  olduğu için ÖFT3 nedeniyle,uygun bir  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda kesinlikle var olan uygun bir  $z = \varphi(x, y)$  örtük fonksiyonu için  $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$  ve  $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  ( $\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) gerçekleşir ve üstelik  $z_x = -\frac{g_x}{g_z}$  ve  $z_y = -\frac{g_y}{g_z}$  kısmi türevleri de  $K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  komşuluğunda tanımlı,üstelik  $g_z(x, y, z) \neq 0$  ( $\forall(x, y, z) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0, z_0)$ ) geçerlidir (neden?). Tipki önceki teoremden olduğu gibi, eğer  $P_0$  noktası  $f$  fonksiyonu için sözgelimi bir yerel minimum ise  $F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$  ( $\forall(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$ ) biçiminde tanımlanan  $F$  fonksiyonunun aynı noktada bir yerel minimumu vardır, çünkü her  $(x, y) \in K_{\delta_0}(x_0, y_0)$  için

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) = f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z) = f(x, y, \varphi(x, y)) = F(x, y)$$

olmaktadır, böylelikle Önerme 1 nedeniyle zorunlu olarak

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) + f_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \cdot z_x(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{g_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))} \cdot [f_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \cdot g_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) - f_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \cdot g_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))] \\ &= \frac{1}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}|_{P_0} \text{ ve } \frac{1}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \neq 0 \end{aligned}$$

nedeniyle zorunlu olarak  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}|_{P_0} = 0$  ve benzer biçimde

$$0 = F_y(x_0, y_0) = \frac{1}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}|_{P_0} \text{ nedeniyle } \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}|_{P_0} = 0 \text{ bulunur.}$$

Üstelik  $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  ve fakat

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}|_{P_0} = f_x(x_0, y_0, z_0) \cdot g_z(x_0, y_0, z_0) - g_x(x_0, y_0, z_0) \cdot f_z(x_0, y_0, z_0) \\ 0 &= \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}|_{P_0} = f_y(x_0, y_0, z_0) \cdot g_z(x_0, y_0, z_0) - g_y(x_0, y_0, z_0) \cdot f_z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

olduğundan, bu denklem sisteminin Cramer Teoremi nedeniyle katsayılar matrisinin determinantı, zorunlu olarak

$$0 = -\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}|_{P_0} = \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) & -g_x(x_0, y_0, z_0) \\ f_y(x_0, y_0, z_0) & -g_y(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

gerçeklemek zorundadır, tüm bunlar istenen sonuçlardır.Bitti !

Öte yandan 18inci yüzyılın büyük Fransız Matematikçisi Joseph Louis Lagrange, kısıt altında ekstremumları belirleme sorusunun çözümünü, hiç kısıt kullanmayan bir ekstremum probleminin çözümüne dönüştüren ünlü ve kullanışlı **Lagrange Çarpanları** adlı yöntemini 1770'lerde bulmuştur. Aşağıdaki teoremin benzerleri gerek üç değişkenli fonksiyonlar, gerekse birden fazla kısıt altında altında ekstremumları aranan fonksiyonlar için de geçerlidir:

**Lagrange Teoremi:**  $f$  ve  $g$  fonksiyonları bir açık  $R(\subseteq R^2)$  bölgesinde türetilebilir olsunlar.  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y) = 0$  kısıtı altında  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  koşulunu gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0) \in R \cap Sif(g)$  noktasında ekstremuma sahip olabilmesi ile  $\lambda \neq 0$  olmak üzere  $\varphi = f + \lambda g$  aracı fonksiyonunun  $P_0$  noktasında ekstremuma sahip olması iddiası eşdeğerdir.

**Not:** Burada  $\lambda \neq 0$  gerçel sabitine **Lagrange Çarpanı** denilir.

**Kanıtlama:**  $\varphi = f + \lambda g$  fonksiyonu için  $Tan(\varphi) = R$  ve herbir  $(x, y) \in R$  için  $\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  olur.  $P_0$  noktasının (dikkat:  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  gerçekleştiği unutulmamalıdır.)  $\varphi$  fonksiyonu için bir ekstremum noktası olması durumunda Önerme 1 nedeniyle zorunlu olarak aşağıdakiler geçerlidir:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \varphi_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) \\ 0 = \varphi_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) \end{array} \right\} \lambda = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

(dikkat:  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  varsayıy nedeniyle ikinci denklemden üstelik  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  bulunur) böylece ilk bağıntı kullanılarak

$$0 = f_x(x_0, y_0) - \frac{g_x(x_0, y_0) \cdot f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = \frac{1}{g_y(x_0, y_0)} \cdot \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0}$$

ve sonuçta,  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y) = 0$  kısıtı altında  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  koşulunu gerçekleyen  $P_0(x_0, y_0)$  noktasında ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli koşul olan  $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = 0$  yine gelir. Tersine  $f$  fonksiyonu  $R$  açık bölgesinde  $g(x, y) = 0$  kısıtı altında  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  koşulunu sağlayan  $P_0(x_0, y_0)$  noktasında bir ekstremuma sahipse, zorunlu olarak  $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = 0$  gerçekleşmesi Gereklik Teoremi 1'in bir sonucudur, buysa

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) \\ 0 &= \varphi_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{1}$$

lineer denklem sisteminde  $\lambda$  bilinmezinin  $\lambda \neq 0$  olarak çözüme sahip olabilmesi için, (1) sisteminin katsayılar matrisinin, Cramer Teoreminin gereği olarak

$$\begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = 0$$

koşulunun yerine gelmesi nedeniyle  $\lambda \neq 0$  belirlenerek,  $\varphi$  aracı fonksiyonun, hiç kısıt kulanmadan, bir ekstremuma sahip olması için  $0 = \varphi_x(x_0, y_0)$  ve  $0 = \varphi_y(x_0, y_0)$  koşullarının (yani (1) denklem sistemini) sağlayan bir  $\lambda \neq 0$  sabitinin varlığı gösterilmiş olur. Demek ki, kısıt altında  $f$  fonksiyonunun  $P_0(x_0, y_0)$  noktasında ekstremuma sahip olması iddiası ile

$$\varphi = f + \lambda g \quad (\lambda \neq 0)$$

aracı fonksiyonunun,  $R$  bölgesinin  $P_0(x_0, y_0)$  noktasında bir ekstremum'a sahip olması iddiası **EŞDEĞERDİRLER**.

**Uyarı:**  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki kısıtların koşulduğu bir ekstremum probleminde **en az iki** kısıt fonksiyonuna gerek vardır, örneğin bunlar

$$g(x, y, z) = 0 \quad \text{ve} \quad h(x, y, z) = 0$$

ise bu kez bir  $f$  fonksiyonunun bu kısıtlar altında ve  $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  ve  $h_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  gerçekleyen bir  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasında bir ekstremumunun varlığı sorusu

$$\varphi = f + \lambda_1 g + \lambda_2 h \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0)$$

aracı fonksiyonunun  $P_0$  noktasında ekstremumlarının aranması probleme dönüştürülür, burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  Lagrange çarpanları bu kez

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 h_x(x_0, y_0, z_0) \\ 0 &= \varphi_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 h_y(x_0, y_0, z_0) \\ 0 &= \varphi_z(x_0, y_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 g_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 h_z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

denklem sistemi ve kısıtlar kullanarak belirlenirler.

### Örnekler 1

1)  $y^2 - z^2 = 1$  hiperbolik silindiri ile  $x - y = 1$  düzleminin kesişimin eğrisinin  $O(0, 0, 0)$  orijinine en yakın noktasını belirleyiniz.

**Cözüm:**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  uzaklık fonksiyonunun  $g(x, y, z) = x - y - 1$  ve  $h(x, y, z) = y^2 - z^2 - 1$  olmak üzere  $g(x, y, z) = 0$  ve  $h(x, y, z) = 0$  kısıtı altında ekstremumu bulmak yerine

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= f(x, y, z) + \lambda_1 g(x, y, z) + \lambda_2 h(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x - y - 1) + \lambda_2(y^2 - z^2 - 1) \end{aligned}$$

aracı fonksiyonunun  $R = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  açık bölgesinde ekstremum noktalarını araştıralım.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_x(x, y, z) = 2x + \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = -2x \\ 0 &= \varphi_y(x, y, z) = 2y(\lambda_2 + 1) - \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2y(\lambda_2 + 1) \\ 0 &= \varphi_z(x, y, z) = 2z(1 - \lambda_2) \Rightarrow \text{ya } z = 0 \text{ ya } \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Dikkat edilirse  $\lambda_2 = 1$  seçeneği gerçekleşmez, çünkü eğer  $\lambda_2 = 1$  olsaydı  $-2x = \lambda_1 = 2y(\lambda_2 + 1) = 4y$  ve  $x = -2y$  böylece  $0 = g(x, y, z) = x - y - 1 = 3y - 1$  ve  $y = -\frac{1}{3}$  ve sonuçta  $0 = h(x, y, z)$  nedeniyle  $0 \leq z^2 = y^2 - 1 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} < 0$  OLURDU! Ohalde aranan kritik noktalar  $z = 0$ ,  $y = \mp 1$  ve  $x = 0, 2$  gerçekleyen  $P_0(0, -1, 0)$  ile  $P_1(2, 1, 0)$  noktalarıdır, bunlar kesişim eğrisi üzerindedirler, üstelik

$$f(0, -1, 0) = 1 < 5 = f(2, 1, 0)$$

olduğundan, kesişim eğrisinin  $O(0, 0, 0)$  noktasına en yakın noktası  $P_0$  noktası olur. Aparıktır ki kesişim eğrisi çizilise bu eğrinin orijine en uzak noktası belirlenemez! Bunu, herbir  $m > 2$  için  $q_m = \sqrt{m(m-2)}$  yazmak üzere  $R_m = (m, m-1, q_m)$  noktalarının, kesişim eğrisi üzerinde olduğunu ve  $OR_m = 3m^2 - 4m + 1$  uzaklık değerinin  $m \rightarrow \infty$  görerek de anlayabilirdik. Siz aşağıdaki doğrulanmayı yapınız

$$\left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_0} = 0.$$

2)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$  polinomunun ekstremumlarını bulunuz.

**Cözüm:** Hiç kısıt olmadığından Yeterlilik Teoremi kullanılır. Tüm  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noktalarda türetilebilir olan bu fonksiyonun bir  $P(x_0, y_0)$  noktasında ekstremuma sahip olabilmesi için  $f_x = 3(x^2 - 1)$  ve  $f_y = 3(y^2 - 4)$  kısmi türevlerinin  $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$  gerçeklemesi yani  $x_0^2 = 1$  ve  $y_0^2 = 4$  olması gereklidir. Dört aday nokta  $P_0(1, 2)$ ,  $P_1(-1, -2)$ ,  $P_2(1, -2)$ ,  $P_3(-1, 2)$  olup  $P_0$  noktasında  $f_{xx}(1, 2) = 6 > 0$  ve  $\Delta = f_{xx}(1, 2) \cdot f_{yy}(1, 2) - f_{xy}^2(1, 2) = 72 > 0$  gerçekleştiğinden  $P_0$  noktası bir yerel minimum noktası, buna karşılık  $f_{xx}(-1, -2) = -6 < 0 < 72 = f_{xx}(-1, -2) \cdot f_{yy}(-1, -2) - f_{xy}^2(-1, -2)$  gerçekleyen  $P_1$  noktası bir yerel maksimum noktasıdır. Buna karşılık  $P_2$  ve  $P_3$  noktalarının bir ekstremum noktası olmadığını gözleyiniz (nasıl?). **Dikkat:**  $P_0$  ve  $P_1$  noktaları birer yerel ekstremum noktasıdır, çünkü bu örnekte  $f$  polinomunun tanım kümesi açıkça belirtilmemiştir, yani  $\mathbb{R}^2$  kümesidir ve sunlar gerçekleşir:

$$\forall M > 0, \exists (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2 = \text{Tan}(f), f(x_M, y_M) < -M$$

ve

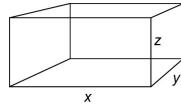
$$\forall M > 0, \exists (x_M^*, y_M^*) \in \mathbb{R}^2 = \text{Tan}(f), f(x_M^*, y_M^*) > M,$$

kısacası  $f$  polinomu, tanım kümesinde, istenilen her küçük gerçek sayıdan daha küçük ve istenilen her pozitif gerçek sayıdan daha büyük değerler alabilmektedir. Gerçekten sunları gözlemek yeterlidir:  $p(x) = x^2 - 10x - 10$  polinomunun en büyük kökü  $q = 5 + \sqrt{35}$  olup,  $12 < M$  gerçekleyen herhangi pozitif  $M$  için  $q = 5 + \sqrt{35} < 5 + \sqrt{36} = 11 <$

$12 < M$  ve böylece  $0 < M^2 - 10M - 10$  ve  $20M + 20 = 2(10M + 10) < 2M^2$  ve böylece  $f(0, -M) = -M^3 + 12M + 20 = -(M^3 - (12M + 20)) < -M$  olur, çünkü  $13M + 20 < 20M + 20 < 2M^2 < 12M^2 < M^3$  nedeniyle  $M < M^3 - (12M + 20)$  olmaktadır, kısacası  $x_M = 0, y_M = -M$  alırsa  $f(x_M, y_M) < -M$  gerçekleşmektedir.  $x_M^*$  ve  $y_M^*$  gerçek sayılarını siz belirleyiniz.

3) 32 birim metre küplük hacime sahip, üstten açık, **en küçük toplam yüzeye** sahip, dikdörtgenler prizması biçimindeki kutunun boyutları nedir?

**Çözüm:** Boyutları  $4 \times 4 \times 2$  olan kutu çözümüdür. Bu çözüm Lagrange yöntemiyle de bulunabilir. Gerçekten  $x > 0$  ve  $y > 0$  olmak



üzerine, tabanındaki dikdörtgenin alanı  $xy$  ve yüksekliği  $z > 0$  olan, üstü açık dikdörtgenler prizması biçimli kutunun yüzeylerinin toplam alanı  $S(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$  ve hacmi ise  $V(x, y, z) = xyz = 32$  olduğundan,  $S = S(x, y, z)$  alan fonksiyonunun  $g(x, y, z) = V(x, y, z) - 32 = xyz - 32 = 0$  kısıtı altında ekstremumunu bulmak için  $\varphi(x, y, z) = S(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 32)$  fonksiyonunun  $R = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$  açık bölgesinde ekstremumu aranmalıdır ve

$$0 = \varphi_x = (1 + \lambda z)y + 2z, \quad 0 = \varphi_y = (1 + \lambda z)x + 2z, \quad 0 = \varphi_z = 2(x + y) + \lambda xy$$

nedeniyle  $x = y = -\frac{2z}{1+\lambda z}$  ve  $x = y$  nedeniyle son koşul kullanılarak  $0 = \lambda x^2 + 4x = x(\lambda x + 4)$  olduğu ve  $0 < x$  unutmadan  $\lambda x + 4 = 0$  yani  $x = y = -\frac{4}{\lambda}$  ve böylece  $-\frac{2z}{1+\lambda z} = x = -\frac{4}{\lambda}$  yani  $2\lambda z = 4 + 4\lambda z$  nedeniyle  $z = -\frac{2}{\lambda}$  bularak  $32 = xyz = (-\frac{4}{\lambda})(-\frac{4}{\lambda})(-\frac{2}{\lambda}) = -\frac{32}{\lambda^3}$  ve  $\lambda = -1$  ve  $x = y = 4, z = 2$  elde edilir. Dikkat edilirse,  $P_0(4, 4, 2)$  noktasında, alan fonksiyonunun  $g(x, y, z) = 0$  kısıtı altında ekstremuma sahip olabilmek için gerekli koşul olan

$$\left. \frac{\partial(S, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = S_x g_y - S_y g_x|_{P_0} = xz(y + 2z) - yz(x + 2z)|_{P_0} = 2z^2(x - y)|_{P_0} = 0$$

yerine gelmektedir.

4)  $\mathbb{R}^2$  uzayında  $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$  hiperbolünün orijine en yakın noktalarını ve bu noktaların orijine olan uzaklıklarını belirleyiniz.

**Çözüm:**  $\mathbb{R}^2$  uzayında,  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktaları arasındaki Öklid uzaklığı  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$  ve böylece bir  $(x, y)$  noktasının  $O(0, 0)$  orijin noktasına uzaklık değeri  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ve böylece orijine olan uzaklık fonksiyonu  $\sqrt{x^2 + y^2}$  olduğundan, onun ekstremumlarıyla  $f(x, y) = x^2 + y^2$  fonksiyonunun ekstremumları aynı olduğundan (neden?), bu örnekte üstelik kısıt  $g(x, y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$  olduğu için,

Lagrange yöntemiyle  $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - \{(0, 0)\}$  açık bölgesinde

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225)$$

polinom fonksiyonunun ekstremumları aranır, böylece  $0 = \varphi_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 2((\lambda + 1)x + 4\lambda y)$  ve  $0 = \varphi_y = 2y + 14\lambda y + 8\lambda x = 2((7\lambda + 1)y + 4\lambda x)$  olması gereklidir ve  $x(\lambda + 1) + 4\lambda y = 0$  ve  $y(7\lambda + 1) + 4\lambda x = 0$  ve sonuçta  $x = -\frac{4\lambda y}{\lambda + 1}$  ve  $0 = y(7\lambda + 1) - \frac{16\lambda^2 y}{\lambda + 1}$  yani  $0 = y[(7\lambda + 1)(\lambda + 1) - 16\lambda^2]$  böylece  $(9\lambda^2 - 8\lambda - 1)y = 0$  ve sonuçta  $y \neq 0$  nedeniyle  $9\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0$  yani  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$  olur. Aranan Lagrange çarpanı  $\lambda = -\frac{1}{9}$  olur, çünkü  $\lambda = 1$  için  $x = -\frac{4y}{2} = -2y$  ve  $(x, y)$  noktası hiperbol üzerinde olması istendiğinden  $225 = x^2 + 8xy + 7y^2 = 4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = -5y^2 \leq 0$  bulunurdu; dikkat edilirse aranan kritik nokta için  $y = 0$  olsaydı  $x = -\frac{4\lambda_0}{\lambda+1} = 0$  olurdu, oysa  $(0, 0)$  noktası hiperbol üzerinde **değildir**. Sonuçta  $\lambda = -\frac{1}{9}$  ve böylece  $x = -\frac{4(\frac{1}{9})y}{1-\frac{1}{9}} = \frac{y}{2}$  ve sonuçta  $225 = \frac{y^2}{4} + \frac{8y^2}{2} + 7y^2 = \frac{45}{4}y^2$  yani  $y^2 = \frac{900}{45} = 20$  ve  $y = \pm\sqrt{20}$  yani  $y = \pm 2\sqrt{5}$  bularak hiperbol üzerinde yer aldığı kolayca gözlenecek olan  $P_0(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$  ve  $P_1(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$  noktalarının aranan noktalar olduğu ve bu noktaların orijine olan uzaklığı  $\overline{OP_0} = \overline{OP_1} = \sqrt{(\sqrt{5} - 0)^2 + (2\sqrt{5} - 0)^2} = 5$  olur. Dikkat edilirse,  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y) = 0$  kısıtı altında  $P_0$  ve  $P_1$  noktalarında ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli koşullar olan

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = 0 = \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_1}$$

yerine gelir, örneğin  $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = 16(x^2 + y^2) + 24xy \Big|_{P_0} = -16.15 + 240 = 0$  geçerlidir.

5)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$  elipsoidiyle  $z = x + y$  düzleminin kesişinin orijine en yakın ve en uzak noktalarını bulunuz ve bu uzaklıkları hesaplayınız.

**Cözüm:**  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1) + \lambda_2(x + y - z)$  fonksiyonunun ekstremumları aranır, burada

$$0 = g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 \quad ve \quad 0 = h(x, y, z) = x + y - z$$

kısıtları altında,  $\mathbb{R}^3$  uzayında orijine olan uzaklık fonksiyonu olan  $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  yerine  $f(x, y, z) = u^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  fonksiyonunun sözü edilen  $g(x, y, z) = 0$  ve  $h(x, y, z) = 0$  kısıtları altında ekstremumları aranmaktadır. Sonuçta  $0 = \varphi_x(x, y, z) = \frac{1}{2}[(\lambda_1 + 4)x + 2\lambda_2]$ ,  $0 = \varphi_y(x, y, z) = \frac{1}{2}[2(\lambda_1 + 5)y + 5\lambda_2]$  ve  $0 = \varphi_z(x, y, z) = \frac{1}{2}[(2\lambda_1 + 50)z - 25\lambda_2]$  nedeniyle  $(\lambda_1 + 4)x + 2\lambda_2 = 0$ ,  $2(\lambda_1 + 5)y + 5\lambda_2 = 0$  ve  $(2\lambda_1 + 50)z - 25\lambda_2 = 0$  bularak, hem elipsoid hem düzlem üzerinde bulunan (kısacası kısıtları gerçekleyen)  $P(x, y, z)$  noktası için

$$x = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + 4}, \quad y = -\frac{5\lambda_2}{2(\lambda_1 + 5)}, \quad z = \frac{25\lambda_2}{2(\lambda_1 + 50)}$$

ve zorunlu olarak  $\lambda_2 \neq 0$  gözleyip (dikkat:  $\lambda_2 = 0$  olsa  $P(x, y, z) = (0, 0, 0)$  olur, oysa bu nokta elipsoid üzerinde bulunmazdı), düzlem üzerinde bulunmanın gereği olarak

$$\frac{25\lambda_2}{2\lambda_1+50} = -\left(\frac{2\lambda_2}{\lambda_1+4} + \frac{5\lambda_2}{2(\lambda_1+5)}\right) = (-\lambda_2)\left(\frac{2}{\lambda_1+4} + \frac{5}{2(\lambda_1+5)}\right)$$

böylece  $0 = 17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = (\lambda_1 + 10)(17\lambda_1 + 75)$  ve sonuçta  $\lambda_1 = -10$  için  $x = \frac{\lambda_2}{3}, y = \frac{\lambda_2}{2}, z = \frac{5\lambda_2}{6}$  ve  $1 = \frac{x_2}{4} + \frac{y_2}{5} + \frac{z_2}{25} = \frac{19}{180}\lambda_2^2$  nedeniyle  $\lambda_2 = \mp 6\sqrt{\frac{5}{19}}$  bularak  $P_0\left(2\sqrt{\frac{5}{19}}, 3\sqrt{\frac{5}{19}}, 5\sqrt{\frac{5}{19}}\right)$  ve  $P_1\left(-2\sqrt{\frac{5}{19}}, -3\sqrt{\frac{5}{19}}, -5\sqrt{\frac{5}{19}}\right)$  noktaları, buna karşın  $\lambda_1 = -\frac{75}{17}$  için bu kez  $x = \frac{34\lambda_2}{7}, y = -\frac{17\lambda_2}{4}, z = \frac{17\lambda_2}{28}$  ve sonuçta  $\lambda_2 = \mp \frac{140}{17\sqrt{646}}$  bularak  $P_2\left(\frac{40}{\sqrt{646}}, \frac{-35}{\sqrt{646}}, \frac{5}{\sqrt{646}}\right)$  ve  $P_3\left(-\frac{40}{\sqrt{646}}, \frac{35}{\sqrt{646}}, -\frac{5}{\sqrt{646}}\right)$  noktaları elde edilir. Bu dört noktanın, sözü edilen kesişim eğrisi üzerinde bulunduğuunu, çünkü hem elipsoid hem de düzlem üzerinde bulunduğu gözleyiniz. Dikkat edilirse bu kapalı eğrinin orjine en **uzak** noktaları  $P_0$  ve  $P_1$  olup  $\overline{OP_0} = \overline{OP_1} = \sqrt{(4+9+25)\frac{5}{19}} = \sqrt{10}$  ve en **yakın** noktaları  $P_2$  ve  $P_3$  olup  $\overline{OP_2} = \overline{OP_3} = \sqrt{\frac{1}{146}(40^2+35^2+5^2)} = \sqrt{\frac{75}{17}}$  geçerlidir. Dikkat edilirse  $f$  fonksiyonunun  $g(x, y, z) = 0$  ve  $h(x, y, z) = 0$  kısıtları altında bu noktada ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli koşullar olan

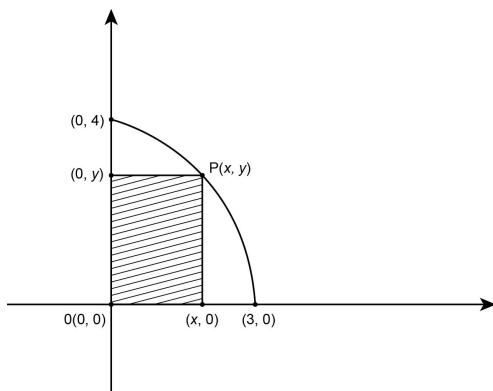
$$\left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_3} = 0$$

yerine gelir, örneğin, kısalık amacıyla  $q = \sqrt{\frac{5}{19}}$  yazarsak aşağıdaki bulunur:

$$\left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \right|_{P_0} = \begin{vmatrix} 4q & 6q & 10q \\ q & \frac{6q}{5} & \frac{10q}{25} \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = q^2 \begin{vmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

6)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  elipsinin içine çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin alanı nedir?

**Cözüm:** Apaçktır ki, bir elipsin içine çizilen dikdörtgenler içinde en büyük alanlı olanı, tüm köşe noktaları elipsin üzerinde bulunan, dikdörtgendir. Şekilde görülen ve her iki bileşeni pozitif gerçel sayılar olan



$P(x, y)$  noktasının belirlediği çizili alanı (ki bu küçük dikdörtgen, aranan dikdörtgenin dörte birlik parçasıdır) maksimum yapan dikdörtgen aranmaktadır. Çizili alan apaçık biçimde  $xy$  olup, aranan alan fonksiyonu elbette  $S(x, y) = 4xy$  olup,  $P(x, y)$  köşe noktası elipsin üzerinde kısacısı  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$  olmalıdır. O halde  $S(x, y) = 4xy$  alan fonksiyonunun  $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$  kısıtı altındaki ekstremumları aranmalı yani Lagrange yöntemiyle,  $0 < x, 0 < y$  koşulları altında  $\varphi(x, y) = 4xy + \lambda(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1)$  fonksiyonunun ekstremumu belirlenmelidir. Burada  $R$  bölgesi  $R = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  ( $\subseteq \mathbb{R}^2$ ) açık bölgesidir, çünkü sorudaki elips bu açık bölgede çizilidir ve elipsin üzerindeki  $P(x, y)$  noktası  $P \in R = \text{ic}R$  gerçeklediği için  $P$  noktasının  $x$  ve  $y$  bileşenlerini  $0 = \varphi_x(x, y)$  ve  $0 = \varphi_y(x, y)$  bağıntıları aracılığıyla belirleriz çünkü Önerme 1 kullanılır, o halde  $0 = \varphi_x(x, y) = 4y + \frac{2\lambda x}{9} = \frac{2}{9}(\lambda x + 18y)$  ve  $0 = \varphi_y(x, y) = 4x + \frac{2\lambda y}{16} = \frac{1}{8}(32x + \lambda y)$  gerçekleyen  $x$  ve  $y$  pozitif gerçel sayıları aranmalıdır. Kolayca  $\lambda x + 18y = 0$  ve  $32x + \lambda y = 0$  nedeniyle  $y = -\frac{\lambda x}{18}$  ve  $32x - \frac{\lambda^2 x}{18} = 0$  yani  $\lambda^2 = 32 \cdot 18 = 576 = 24^2$  ve böylece  $\lambda = -24$  bulunur, çünkü dikkat edilirse  $\lambda = 24$  olsaydı, zaten  $0 < x, 0 < y$  nedeniyle  $0 = \lambda x + 18y = 24x + 18y = 3(8x + 6y) > 0$  bulunurdu! Böylece  $y = -\frac{(-24)x}{18} = \frac{4x}{3}$  ve  $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{9} + \frac{16x^2}{16 \cdot 9} = \frac{2x^2}{9}$  ve  $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$  ve  $S(x, y) = 4(\frac{3}{\sqrt{2}})(2\sqrt{2}) = 24$   $bm^2$  olur.  $P_0(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$  noktasının gerçekten sözü edilen elips üzerinde olduğunu ve  $S(x, y) = 4xy$  fonksiyonunun  $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$  kısıtı altında bir ekstremum noktası olduğunu, çünkü

$$\left. \frac{\partial(S, g)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} = S_x g_y - S_y g_x|_{P_0} = \left. \frac{y^2}{2} - \frac{8x^2}{9} \right|_{P_0} = \left. \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} - \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{2} \right|_{P_0} = 0$$

gerçekleştiğini gözleyiniz.

**Ödev:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsinin içine çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin alanının  $2ab$  olduğunu gösteriniz.

7)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$  elipsoidinin içine çizilen en büyük hacimli dikdörtgenler prizması biçimli kutunun hacmini hesaplayınız.

**Çözüm:** Aranan maksimum hacimli dikdörtgenler prizmasının, tüm köşe noktaları elipsoid üzerinde bulunan kutu olacağı apaçaktır ve bu kutunun, her üç bileşeni de pozitif gerçel sayılar olan biricik köşe noktası  $P(x, y, z)$  olmak üzere, hacminin  $V(x, y, z) = 8xyz$  olduğu ve üstelik  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} - 1 = 0$  gerçekleşeceği gözlenerek bir önceki örnekte olduğu gibi  $(x, y, z) \in R = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$  olmak üzere

$$\varphi(x, y, z) = 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} - 1)$$

fonksiyonun ekstremumu aranmalıdır.  $0 = \varphi_x = \frac{2}{9}(36yz + \lambda x), 0 = \varphi_y = \frac{1}{16}(64xz +$

$\lambda y), 0 = \varphi_z = \frac{1}{36}(144xy + \lambda z)$  ve böylece

$$\lambda = -\frac{36yz}{x} = -\frac{64xz}{y} = -\frac{144xy}{z}$$

ve  $z > 0$  olduğu için  $\frac{1}{x}(36yz) = \frac{1}{y}(64xz)$  eşitliğinden  $36y^2 = 64x^2$  yani  $3y = 4x$  ve  $x > 0$  olduğu için son eşitlikten  $64z^2 = 144y^2 = 144 \cdot \frac{16x^2}{9} = 16^2x^2$  yani  $z = 2x$  ve böylece  $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$  yani  $x = \sqrt{3}, y = \frac{4}{\sqrt{3}}, z = 2\sqrt{3}$  bularak  $V = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$  olur.

**Ödev :**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidinin içine çizilen en büyük hacimli dikdörtgenler prizması biçimli kutunun hacmini bulunuz.

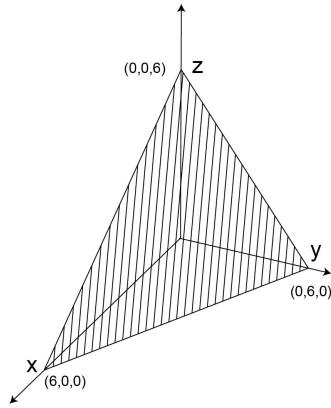
8)  $0 < a < 6$  ve  $0 < M < 6$  sabitleri verilsin.  $f(x, y) = ax^2y^3$  iki değişkenli polinomunun  $x + y = M$  ve  $x > 0, y > 0$  kısıtları altında ekstremumunu bulunuz.

**Cözüm :** Dikkat edilirse  $0 < y = M - x < M$  ve benzer biçimde  $0 < x < M$  gözleyerek, bunu bir Analiz I sorusuna dönüştürmek kolaydır, çünkü  $y = M - x$  olduğundan  $p(x) = ax^2(M - x)^3$  ( $\forall x \in (0, M)$ ) polinomunun ekstremumu aranır ve  $p'(x) = 2ax(M - x)^3 - 3ax^2(M - x)^2 = ax(M - x)^2(2M - 5x)$  nedeniyle  $(0, \frac{2M}{5}]$  aralığında artan  $[\frac{2M}{5}, M)$  aralığında azalan bu polinom  $\max_{x \in (0, M)} p(x) = p(\frac{2M}{5}) = \frac{4aM^2}{5^2}(M - \frac{2M}{5})^3 = \frac{108aM^5}{5^5}$  gerçekler. Böylece  $F = F(x, y)$  iki değişkenli polinomu için  $R = \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : x + y = M\}$  bölgesinde  $\max_{(x,y) \in R} F(x, y) = \max_{x \in (0, M)} p(x) = \frac{108aM^5}{5^5}$  bulunur. Başka ekstremum yoktur!

9)  $F(x, y, z) = xy^2z^3$  fonksiyonunun  $x + y + z = 6$  ve  $x > 0, y > 0, z > 0$  kısıtları altında ekstremumlarını bulunuz.

**Cözüm :**  $(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$  olmak üzere  $\varphi(x, y, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + y + z - 6)$  fonksiyonunun ekstremumları aranır, böylece  $0 = \varphi_x = y^2z^3 + \lambda, 0 = \varphi_y = 2xyz^3 + \lambda, 0 = \varphi_z = 3xy^2z^2 + \lambda$  nedeniyle  $-\lambda = y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2$  ve sonuçta  $y = 2x = \frac{2z}{3}$  nedeniyle  $y = 2x, z = 3x$  ve  $6 = x + y + z = 6x$  ve böylece  $x = 1, y = 2, z = 3$  belirlenerken  $P_0(1, 2, 3)$  ekstremum noktası  $F(1, 2, 3) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$  bulunur. Bu soruda kısıt  $G(x, y, z) = x + y + z - 6$  olup,  $F = F(x, y, z)$  fonksiyonunun bu kısıt altında  $P_0$  noktasında ekstremuma sahip olabilmesi için gerekli koşul olan  $\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right|_{P_0} = F_x - F_y|_{P_0} = yz^3(y - 2x)|_{P_0} = 54(2 - 2) = 0$  yerine gelmektedir. Dikkat edilirse bir önceki sorudaki yöntemle şu gözlenir:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, 0 < y, 0 < z, x + y + z = 6\} \\ &= \{(x, y, z) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) : x + y + z = 6\} \end{aligned}$$



sınırlarını içermeyen **üçgensel levha bölge**  $R$  yukarıya çizilmiştir ve bu levhanın yanal duvarların hiçbirisinde elemanı yoktur, çünkü söz gelimi  $xz$  yanal duvarındaki tüm noktalar  $(x, 0, z)$  biçimindedir ve bunların hiçbirisi  $R$  bölgesine ait değildir, işte her bir  $(x, y, z) \in R$  için bir önceki sorudaki gibi  $F(x, y, z) = xy^2z^3 \leq 108 = F(1, 2, 3)$  gözlenerek (nasıl?)  $\max_{(x,y,z) \in R} F(x, y, z) = 108 = F(1, 2, 3)$  sonucuna ulaşılır, kısacası  $P_0$  noktası **bölgesel maksimum noktasıdır**. Oysa  $F$  fonksiyonunun  $R$  bölgesinde gerek yerel minimumu gerekse bölgesel minimumu yoktur (tanımlanamaz). Gerçekten her  $(x, y, z) \in R$  için, bu bileşenler pozitif gerçel sayılar olduğundan,  $0 < xy^2z^3 = F(x, y, z)$  olmaktadır ve dikkat edilirse  $\min_{(x,y,z) \in R} F(x, y, z) = m_0$  olacak biçimde hiçbir  $m_0$  pozitif gerçel sayısı belirlenemez, çünkü  $\exists (x_0, y_0, z_0) \in R$ ,  $F(x_0, y_0, z_0) < m_0$  geçerlidir. Gerçekten herhangi  $\varepsilon \in (0, 1)$  için  $\exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in R$ ,  $F(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) < \varepsilon$  göstermek yeterlidir; bunu gözmek için  $0 < \delta_\varepsilon = \sqrt[3]{\varepsilon}$  yazıp  $q(x) = x^2 - 3x + \frac{\delta_\varepsilon}{2}$  polinomundan yararlanabiliriz. Bu polinomun kökleri olan  $r_1$  ve  $r_2$  gerçel sayıları (dikkat:  $0 < \delta_\varepsilon < 1$  ve  $2\delta_\varepsilon < 2 < 9$  nedeniyle  $0 < 9 - 2\delta_\varepsilon < 9$  gözleyiniz).

$$0 < r_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 2\delta_\varepsilon}}{2} < \frac{3 + \sqrt{9 - 2\delta_\varepsilon}}{2} = r_2 < 3$$

gerçekler, o halde herhangi  $0 < x_\varepsilon < r_1 < r_2 < 3$  gerçel sayısı için  $(x_\varepsilon, x_\varepsilon, 6 - 2x_\varepsilon) \in R$  ve  $0 < (x_\varepsilon - r_1)(x_\varepsilon - r_2) = x_\varepsilon^2 - 3x_\varepsilon - \frac{\delta_\varepsilon}{2}$  ve sonuçta  $0 < 2(x_\varepsilon - r_1)(x_\varepsilon - r_2) = 2x_\varepsilon^2 - 6x_\varepsilon + \delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon - 2x_\varepsilon(3 - x_\varepsilon)$  nedeniyle  $0 < 2x_\varepsilon(3 - x_\varepsilon) < \delta_\varepsilon$  ve böylece  $F(x_\varepsilon, x_\varepsilon, 6 - 2x_\varepsilon) = x_\varepsilon \cdot x_\varepsilon^2(6 - 2x_\varepsilon)^3 = x_\varepsilon^3(2(3 - x_\varepsilon))^3 = (2x_\varepsilon(3 - x_\varepsilon))^3 < \delta_\varepsilon^3 = \varepsilon$  bulunur. Demek ki  $F$  fonksiyonu  $R$  bölgesinin hiçbir noktasında **bölgesel minimumuma erişemez**, üstelik  $\inf_{(x,y,z) \in R} F(x, y, z) = 0$  olur (neden?). Şimdi de  $F$  fonksiyonunun, herhangi bir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  noktasında yerel minimuma sahip olmadığını gözleyelim. O halde  $0 < x_0$ ,  $0 < y_0$ ,  $0 < z_0$ ,  $6 = x_0 + y_0 + z_0$  ve  $z_0 \in \mathbb{R}^+$  nedeniyle  $x_0 + y_0 < x_0 + y_0 + z_0 = 6$  ve  $0 < x_0 < x_0 + y_0 < 6$  olduğundan  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $0 < x_0 - \varepsilon_0 < x_0 < x_0 + y_0 < x_0 + y_0 + \varepsilon_0 < 6$  ve böylece  $0 < x_0 - \varepsilon_0 < x_0 < x_0 + \varepsilon_0 < 6 - y_0 < 6$  bulunur ve kısalık amacıyla  $M_0 = 6 - y_0$  yazılırsa  $0 < x_0 - \varepsilon_0 < x_0 < M_0 < 6$  gözlenir. Tipki bir önceki örneğin çözümünde olduğu gibi  $p(x) = x(M_0 - x)^3$  ( $\forall x \in [0, M_0]$ ) polinomu için  $p'(x) = (M_0 - x)^2(M_0 - 4x)$  nedeniyle,  $p = p(x)$  polinomunun  $(0, M_0)$  aralığındaki biricik ekstremum noktası  $\xi_0 = \frac{M_0}{4} \in (0, M_0)$

olup  $\max_{x \in [0, M_0]} p(x) = p(\xi_0) = \frac{3^3 M_0^4}{4^4}$  geçerlidir ve bu polinomun  $(0, M_0)$  aralığında **hiçbir yerel minimumu yoktur**, dolayısıyla  $x_0 \in (0, M_0)$  iç noktasında da bir yerel minimuma sahip olması söz konusu olmaz, dolayısıyla yeterince küçük her  $\varepsilon > 0$  için, sözgelimi her  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  için

$$\exists a_\varepsilon \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad p(a_\varepsilon) = a_\varepsilon \cdot (M_0 - a_\varepsilon)^3 < p(x_0) = x_0 \cdot (M_0 - x_0)^3$$

bulunarak, zaten  $0 < y_0^2$  ve  $z_0 = 6 - (x_0 + y_0)$  nedeniyle  $a_\varepsilon y_0^2 \cdot (M_0 - a_\varepsilon)^3 < x_0 y_0^2 \cdot (M_0 - a_\varepsilon)^3 = x_0 y_0^2 \cdot (6 - (x_0 + y_0))^3 = x_0 y_0^2 z_0^3 = F(x_0, y_0, z_0)$  ve kolayca  $0 < x_0 - \varepsilon_0 < a_\varepsilon < x_0 + \varepsilon < x_0 + \varepsilon_0 < 6 - y_0 = M_0$  nedeniyle  $0 < a_\varepsilon$  ve  $0 < M_0 - a_\varepsilon$  ve  $|a_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$  ve  $|(M_0 - a_\varepsilon) - z_0| = |(6 - (a_\varepsilon + y_0)) - (6 - (x_0 + y_0))| = |a_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$  nedeniyle  $(a_\varepsilon, y_0, M_0 - a_\varepsilon) = (a_\varepsilon, y_0, 6 - (a_\varepsilon + y_0)) \in R \cap K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$  ve ayrıca  $F(a_\varepsilon, y_0, M_0 - a_\varepsilon) = a_\varepsilon y_0^2 (M_0 - a_\varepsilon)^3 < F(x_0, y_0, z_0)$  istenen sonucu bulunur.

Demek ki gerçekten şu gösterilmiş olur(neden?):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) \cap R, F(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) < F(x_0, y_0, z_0)$$

Bu sonuç  $R$  bölgesinin hiçbir noktasının  $F$  fonksiyonu için bir yerel minimum **olamadığını** kanıtlamaktadır. Bitti!

10)  $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$  elipsinin orijine en yakın ve en uzak noktalarını ve bu uzaklıkları hesaplayınız.

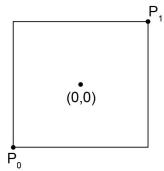
**Cözüm:** Tıpkı 4) çözümündeki yol izlenip  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140)$  için  $0 = \varphi_x$  ve  $0 = \varphi_y$  nedeniyle  $(3\lambda + 1)x + 2\lambda y = 0$  ve  $(6\lambda + 1)y + 2\lambda x = 0$  ve böylece  $x = \frac{-2\lambda}{3\lambda+1} \cdot y$  ve  $(x, y)$  noktası sözü edilen elips üzerinde olduğu için  $y \neq 0$  gözleyerek (aksi halde hem  $y = 0$  hem de  $x = \frac{-2\lambda}{3\lambda+1} \cdot 0 = 0$  bulunarak  $(x, y) = (0, 0)$  noktasının elips üzerinde olması gerekiyor.) İlkinci eşitlikten  $(6\lambda + 1)y - \frac{4\lambda^2}{3\lambda+1} \cdot y = \frac{y}{3\lambda+1}[14\lambda^2 + 9\lambda + 1] = 0$  ve böylece  $14\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 0$  nedeniyle (dikkat: yukarıdaki birinci eşitlik nedeniyle, zorunlu olarak  $3\lambda + 1 \neq 0$  gözleyiniz (nasıl?)) sonuçta  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  ve  $\lambda_2 = -\frac{1}{7}$  bulup  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$  için  $x = -2y$  ve  $140 = 3(-2y)^2 + 4(-2y)y + 6y^2 = 10y^2$  ile elipsin orjine en uzak noktaları  $P_0(2\sqrt{14}, -\sqrt{14})$  ve  $P_1(-2\sqrt{14}, \sqrt{14})$  ve  $\lambda_2 = -\frac{1}{7}$  içinse, elipsin en yakın noktaları  $P_2(2, 4)$  ile  $P_3(-2, -4)$  belirlenip  $\overline{OP_2} = \overline{OP_3} = \sqrt{20} < \sqrt{70} = \overline{OP_0} = \overline{OP_1}$  bulunur. Dikkat edilirse  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ve kısıt  $g(x, y) = 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 140 = 0$  için  $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$  jakobiyenin, bu dört ekstremum noktasında sıfırdır.

11)  $f(x, y) = e^{x+y^2}$  ve  $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y + xy^2$  fonksiyonlarının  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$  bölgesinde ekstremumlarını araştırınız.

**Cözüm:**  $g$  fonksiyonu için  $|g(x, y)| \leq 4$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) gerçeklendiğini gözlemek güç değildir. Gerçekten  $g(x, y) = x(x^2y^2 + 2xy + y^2)$  ve ayrıca her  $(x, y) \in R$  için hem  $|x| \leq 1$  hem de  $|y| \leq 1$  ve sonuçta  $x^2 = |x|^2 \leq 1$  ve  $y^2 \leq 1$  ve  $x^2y^2 \leq 1$  olduğundan, kolayca

$$|g(x, y)| = |x| \cdot |x^2y^2 + 2xy + y^2| \leq |x^2y^2 + 2xy + y^2| \leq x^2y^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 \leq 2 + 2|x||y| \leq 4$$

ve böylece  $g(-1, -1) = -4 \leq g(x, y) \leq 4 = g(1, 1)$  nedeniyle  $\min_{(x,y) \in R} g(x, y) = g(-1, -1)$  ve  $\max_{(x,y) \in R} g(x, y) = g(1, 1)$  bulunarak  $P_0(-1, -1)$  ve  $P_1(1, 1)$  noktalarının  $g$  polinomu için sırasıyla,  $R$  bölgesinin bölgесel minimumu ve bölgесel maksimumu olukları anlaşılır. Unutulmasın: Tıkit (kapalı-sınırlı) bir bölgede tanımlı, **gerçel değerli ve sürekli her fonksiyon**, bu tıkit bölgenin uygun bir noktasında en küçük değerine, uygun bir noktasında en büyük değerine erişir! Oysa dikkat edilirse  $g_x(-1, -1) = 0$  olur ama  $g_y(-1, -1) = 0$  koşulu GERÇEKLEŞMEZ, çünkü  $g_y(-1, -1) = -2$  ve benzer biçimde  $g_x(1, 1) = 8 > 6 = g_y(1, 1)$  olmaktadır. Demek ki şu uyarıyi öğrenmiş oluyoruz:  $R$  kapalı-sınırlı bölgesini çevreleyen eğriye ait bir  $(x_0, y_0)$  noktasında ekstremum varsa, bu noktasada  $g_x(x_0, y_0) = 0$  ve  $g_y(x_0, y_0) = 0$  gerçekleşmesi GEREKMEMEKTEDİR; burada  $P_0$  ve  $P_1$  noktalarının  $R$  bölgesini çevreleyen kapalı eğrinin noktaları olduğunu ve



$P_0$  noktasının sol alt ve  $P_1$  noktasının sağ üst köşe noktası olduğunu gözleyin. **Kompleks Analiz**'in benzer bir sonucu  $\text{ic } R \neq \emptyset$  gerçekleyen bir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  bölgesinde tanımlı ve **analitik** bir  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  kompleks değerli fonksiyonu ve her bir  $x_0 \in \text{ic } R$  için  $|f(x_0)| < \max_{x \in R} |f(x)|$  gerçekleştigiini, kısacası  $|f|$  fonksiyonunun en büyük değerine asla  $\text{ic } R$  kümesinde erişemediğini söyler. Yukarıdaki  $P_0$  ve  $P_1$  noktaları kolayca görülebileceği gibi  $\text{ic } R = (-1, 1) \times (-1, 1)$  açık bölgesinin elemanı değildir! Benzer biçimde, her  $(x, y) \in \mathbb{R}$  için  $-1 \leq x \leq 1$  nedeniyle  $-1 \leq x \leq x + y^2$  ve böylece  $-1 \leq x + y^2$  ve  $f(-1, 0) = \frac{1}{e} = e^{-1} \leq e^{x+y^2} = f(x, y)$  gözleyerek  $f(-1, 0) = \min_{(x,y) \in R} f(x, y)$  fakat daima  $0 < e^{x+y^2} = f(x, y) = f_x(x, y)$  olduğundan, özel olarak  $0 < f_x(-1, 0)$  geçerlidir (unutmayın:  $0 < a$  sabiti ne olursa olsun, her  $x \in \mathbb{R}$  için  $0 < a^x$  geçerlidir), kısacası  $P_2(-1, 0)$  noktası  $f$  fonksiyonu için bölgесel (ve sonuçta yerel (neden?)) bir ekstremum noktasıdır ve  $f_y(-1, 0) = 0$  olmasına karşın  $f_x(-1, 0) = 0$  koşulu **gerçekleşmemektedir**.

**Ödev:** 2) örneğindeki polinomun  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$  tıkit bölgesinde ekstremumlarını araştırınız.

12)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  polinomunun tıkit  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  kare bölgesinde ekstremumlarını araştırınız.

**Cözüm:** Bu polinomun  $f(0, 0) = \min_{(x,y) \in R} f(x, y)$  ve  $f(1, 1) = \max_{(x,y) \in R} f(x, y)$  gerçeklediği kolayca görülür, çünkü her  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $0 \leq (x-y)^2$  nedeniyle  $2xy \leq x^2 + y^2$  ve böylece  $-xy \leq | - xy | = |x| \cdot |y| \leq 2|x| \cdot |y| \leq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$  nedeniyle  $f(0, 0) = 0 \leq x^2 + xy + y^2$  ( $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \supseteq R$ ) ve böylece  $f(0, 0) = \min_{(x,y) \in R} f(x, y)$  bulunur. Her  $(x, y) \in R$  için  $x^2 \leq 1$ ,  $y^2 \leq 1$  ve  $0 \leq xy \leq 1$  nedeniyle  $f(x, y) \leq 3 =$

$f(1, 1)$  yani  $f(1, 1) = \max_{(x,y) \in R} f(x, y)$  bulunur. Dikkat edilirse  $P_0(1, 1) \in R$  bir ekstremum olmasına karşın  $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 3 > 0$  gerçekleşmektedir.  $P_0$  noktasının  $R$  kapali-sınırlı bölgesini çevreleyen çevre eğriye ait olduğunu gözleyiniz. Eğer  $(x_0, y_0) \in R$  noktasının bileşenlerinden birisi pozitif ise, sözgelimi  $0 < x_0$  ise  $\exists \varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 < x_0 - \varepsilon_0$  olur, dolayısıyla her  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  için  $0 < \varepsilon_0 < x_0 - \varepsilon_0 < x_0 - \varepsilon = \xi_\varepsilon < x_0 \leq 1$  nedeniyle  $(\xi_\varepsilon, y_0) \in K_\varepsilon(x_0, y_0) \cap ((0, 1) \times [0, 1]) \subseteq K_\varepsilon(x_0, y_0) \cap R$  ve ayrıca  $0 \leq y_0$  ve  $\xi_\varepsilon^2 < x_0^2$  nedeniyle  $f(\xi_\varepsilon, y_0) = \xi_\varepsilon^2 + \xi_\varepsilon y_0 + y_0^2 < x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 = f(x_0, y_0)$  olur, kısacası

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in K_\varepsilon(x_0, y_0) \cap R, f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < f(x_0, y_0)$$

olmaktadır, siz benzer biçimde,  $x_1 < 1$  ya da  $y_1 < 1$  gerçekleşen  $(x_1, y_1) \in R$  için,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \in K_\varepsilon(x_1, y_1) \cap R, f(x_1, y_1) < f(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$$

gerçeklediğini gösteriniz.  $f$  polinomunun iç  $R = (0, 1) \times (0, 1)$  açık bölgesinde hiç ekstremum noktasına sahip olmadığını Önerme1 yardımıyla gösteriniz.

13) Son iki örnekte karşılaşılan durumun benzerlerini, tek değişkenli gerçek değerli fonksiyonlar için elde ediniz.

**Çözüm:** Analiz I derslerinde,  $[a, b]$  aralığında gerçek değerli ve sürekli ve  $(a, b)$  aralığında türetilebilir olan bir  $f = f(x)$  fonksiyonu için  $x_0 \in (a, b)$  iç noktası bir ekstremum noktası **ise** zorunlu olarak  $f'(x_0) = 0$  gerçekleştiği kanıtlanır.  $f$  fonksiyonu söz konusu aralığın uç noktalarında ekstremuma sahipse, bu iddianın doğru olması gerekmek!  $h(x) = \cos x$  ( $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ) fonksiyonu tanım aralığında her noktada türetilebilir dolayısıyla sürekli, bu aralıkta  $h'(x) = -\sin x < 0$  ( $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ) gerçekleştiği için azalandır, dolayısıyla  $x = \frac{\pi}{4}$  sol uç noktası bir ekstremum noktasıdır, oysa  $h'(\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$  olmakta, kısacası  $h'(\frac{\pi}{4}) = 0$  koşulu **gerçekleşmemektedir**. Benzer şeyler  $\min_{x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]} h(x) = h(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  gerçekleşen, yani bir ekstremum noktası olan  $x = \frac{\pi}{2}$  sağ uç noktası içinde geçerlidir ve  $h'(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$  olmaktadır. Benzer şeyler  $[0, 1]$  aralığında  $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$  polinomu için gözleyin.

14)  $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$  elipsoidindeki noktaların üçüncü bileşenlerinin en küçüğü ve en büyüğü nedir.

**Çözüm:**  $\varphi(x, y, z) = z + \lambda(2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35)$  polinomunun ekstremumlarını aranır ve  $0 = \varphi_x = 4\lambda(x - 3y + z)$ ,  $0 = \varphi_y = 6\lambda(y - 2x)$ ,  $0 = \varphi_z = 1 + 2\lambda(2x + z)$  bularak, elipsoid üzerinde yer alan  $P(x, y, z)$  noktası için  $y = 2x$ ,  $z = 5x$ , ve  $14\lambda x + 1 = 0$  bularak

$x = -\frac{1}{14\lambda}$ ,  $y = -\frac{2}{14\lambda}$ ,  $z = -\frac{5}{14\lambda}$  ve sonuçta  $35 = 2(-\frac{1}{14\lambda})^2 + 3(-\frac{1}{14\lambda})^2 + (-\frac{5}{14\lambda})^2 + 4(\frac{5}{14\lambda})^2 = \frac{35}{14^2 \lambda^2}$  yani  $\lambda = \pm \frac{1}{14}$  bulup  $\lambda = -\frac{1}{14}$  için  $z = 5$  en büyük değerini  $\lambda = \frac{1}{14}$  için  $z = -5$  en küçük değerini elde ederiz.

15) İki değişkenli  $F(x, y) = \int_0^\pi (\sin t - (xt^2 + yt))^2 dt$  fonksiyonunun minimumunu belirleyiniz.

**Cözüm :** Her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $F = F(x, y)$  fonksiyonunun tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Birazdan göreceğimiz ünlü Leibniz bağıntısıyla, tümlev altında türev alarak aşağıdakiler bulunur:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^\pi \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ (\sin t - (xt^2 + yt))^2 \right] dt = 2 \int_0^\pi (-t^2)(\sin t - xt^2 - yt) dt \\ &= (-2) \int_0^\pi t^2 \sin t dt + 2x \int_0^\pi t^4 dt + 2y \int_0^\pi t^3 dt \\ &= 8 - 2\pi^2 + \frac{2x\pi^5}{5} + \frac{2y\pi^4}{4} \quad \text{ve} \quad F_y = -2\pi + \frac{x\pi^4}{2} + \frac{2y\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Böylelikle, tüm  $\mathbb{R}^2$  kümesinde sürekli kısmi türevlere sahip olan  $F$  fonksiyonunun ekstremumlarını belirlemek için  $F_x = 0$  ve  $F_y = 0$  denklemleriyle, katsayılar determinantı

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\pi^5}{5} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^4}{2} & \frac{2\pi^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{\pi^8}{120}$$

olan

$$\frac{\pi^5 x}{5} + \frac{\pi^4 y}{4} = \pi^2 - 4, \quad \frac{\pi^4 x}{2} + \frac{2\pi^3 y}{3} = 2\pi$$

denklem sistemi elde edilerek

$$x = \frac{1}{D} = \begin{vmatrix} \pi^2 - 4 & \frac{\pi^4}{4} \\ 2\pi & \frac{2\pi^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{20(\pi^2 - 16)}{\pi^5}, \quad y = \frac{12(20 - \pi^2)}{\pi^4}$$

bulunur. Bu gerçel sayılarla  $x_0 = \frac{20(\pi^2 - 16)}{\pi^5}$  ve  $y_0 = \frac{12(20 - \pi^2)}{\pi^4}$  denilirse  $F$  fonksiyonu için

$$F_x(x_0, y_0) = 8 - 2\pi^2 + \frac{2x_0\pi^5}{5} + \frac{2y_0\pi^4}{4} = 8 - 2\pi^2 + 8(\pi^2 - 16) + 6(20 - \pi^2) = 0$$

benzer biçimde  $F_y(x_0, y_0) = 0$  gözleyip  $P_0(x_0, y_0)$  noktasının  $F$  için bir ekstremum noktası olduğu bir kez daha gözlendikten sonra üstelik

$$0 < F_{xx}(x_0, y_0) \text{ ve } 0 < F_{xx}(x_0, y_0) \cdot F_{yy}(x_0, y_0) - F_{xy}^2(x_0, y_0)$$

nedeniyle Yeterlik Teoreminin gereği olarak  $P_0$  noktasının  $F$  için **biricik minimum noktası** olduğu anlaşılır, çünkü aslında,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $0 < F_{xx} = \frac{2\pi^5}{5}$ ,  $0 < F_{yy} = \frac{2\pi^3}{3}$ ,  $F_{xy} = \frac{\pi^4}{2}$  ve  $0 < \frac{\pi^8}{60} = F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{xy}^2$  nedeniyle,  $\text{Tan}F = \mathbb{R}^2$  kümesinde  $F_x(x, y) =$

$0 = F_y(x, y)$  gerçekleyen biricik ekstremum noktası zorunlu olarak minimum noktası olacaktır, bu koşulların tümünü yerine getiren biricik nokta  $P_0(x_0, y_0)$  noktasıdır ve

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} F(x, y) &= F(x_0, y_0) = \int_0^\pi (\sin t - x_0 t^2 + y_0 t)^2 dt \\ &= \int_0^\pi \sin^2 t dt - 2x_0 \int_0^\pi t^2 \sin t dt - 2y_0 \int_0^\pi t \sin t dt + \int_0^\pi (x_0 t^2 + y_0 t)^2 dt \\ &= \frac{x_0^2 \pi^5}{5} + \frac{x_0 y_0 \pi^4}{2} + \frac{y_0^3 \pi^3}{3} - 2x_0 \pi^2 + 8x_0 - 2y_0 \pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

bulunup  $x_0$  ve  $y_0$  sayılarının değeri konularak bu minimum hesaplanır, öğrenci bu hesaplamayı yapmalıdır!

16)  $0 < b < a$  olmak üzere  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsinin orijine en yakın ve en uzak olduğu noktaları belirleyiniz.

**Cözüm:**  $0 < b < a$  nedeniyle, elips üzerinde yer alıp orijine en uzak olan iki noktanın  $P_0(a, 0)$  ve  $P_1(-a, 0)$  en yakın olanlarında  $P_2(0, b)$  ile  $P_3(0, -b)$  oldukları, hiç Önerme 1 kullanmadan gözlenir, çünkü  $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  ve sonuçta  $0 < \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2}$  ve  $\frac{y^2}{a^2} \leq \frac{y^2}{b^2}$  ( $\forall y \in R$ ) nedeniyle, elips üzerinde bulunan herhangi bir  $P(x, y)$  için  $\overline{OP} \leq \overline{OP_0}$  gözlemek kolaydır, çünkü  $\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ve böylece  $\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 \leq a^2 = \overline{OP_0}^2$  olur. Böylece  $\overline{OP} \leq \overline{OP_0} = \overline{OP_1}$  ve  $\overline{OP_2} = \overline{OP_3} = b \leq \overline{OP}$  bularak (nasıl?) istenenler elde edilir.

17)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $ax + by + cz + d = 0$  düzleminin, uzayın  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  sabit noktasına en yakın noktası ve onun  $P_0$  noktasına olan uzaklışı nedir?

**Cözüm:**  $\mathbb{R}^3$  uzayında, herhangi bir  $P(x, y, z)$  noktasının  $P(x_0, y_0, z_0)$  noktasına uzaklışı  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  olup, bunun  $g(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$  kısıtı altında ekstremumu aramak yerine, Lagrange yöntemiyle

$$\varphi(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \lambda(ax + by + cz + d)$$

polinomununki aranır ve aşağıdakileri gözleyip  $0 = \varphi_x = 2(x - x_0) + \lambda a, 0 = \varphi_y = 2(y - y_0) + \lambda b, 0 = \varphi_z = 2(z - z_0) + \lambda c$  sonuçta  $x = x_0 - \frac{\lambda a}{2}, y = y_0 - \frac{\lambda b}{2}, z = z_0 - \frac{\lambda c}{2}$  bulunur ve  $P(x, y, z)$  noktasının sözü edilen düzlem üzerinde olması istendiğinden

$$0 = ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d - \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ve böylece, kısalık amacıyla  $\lambda_0 = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$  yazıp  $\lambda = 2\lambda_0$  yani  $\frac{\lambda}{2} = \lambda_0$  gözleyerek, aranan  $P(x, y, z)$  noktasının bileşenleri aşağıdakilerdir:

$$x = x_0 - \lambda_0 a, y = y_0 - \lambda_0 b, z = z_0 - \lambda_0 c$$

Dikkat edilirse  $P_1(x_0 - \lambda_0 a, y_0 - \lambda_0 b, z_0 - \lambda_0 c)$  noktası gerçekten sözü edilen düzlem üzerindedir, çünkü  $a(x_0 - \lambda_0 a) + b(y_0 - \lambda_0 b) + c(z_0 - \lambda_0 c) + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d - \lambda_0(a^2 + b^2 + c^2) = 0$  geçerlidir ve sözü edilen düzlemin  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasına en yakın noktasıdır ve kolayca  $P_1$  noktasının  $P_0$  noktasına olan uzaklığı

$$\begin{aligned}\overline{P_0 P_1} &= \sqrt{(x_0 - (x_0 - \lambda_0 a))^2 + (y_0 - (y_0 - \lambda_0 b))^2 + (z_0 - (z_0 - \lambda_0 c))^2} = \sqrt{\lambda_0^2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse  $P_1$  noktası şu geometri sorusunun da çözümü olarak belirlenebilir:  $F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$  düzlemsel yüzeyinin hangi noktasından çıkan normal doğrusu, verilen  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  noktasından geçer? Bu sorunun yanıtı,  $P_0$  noktasından düzleme indirilen dikmenin düzlemi hangi noktada kestiğini, yani düzlemin hangi noktasının  $P_0$  noktasına en yakın nokta olduğunu belirler. Düzlemin  $P_1$  noktasından çıkan normal doğrusunun sayfa 106'daki denklemleri

$$x = x_0 - \lambda_0 a + at, y = y_0 - \lambda_0 b + bt, z = z_0 - \lambda_0 c + ct \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

olup,  $P_0$  noktasının gerçekten bu doğru üzerinde olduğunu, çünkü  $t = \lambda_0 \in \mathbb{R}$  için  $x_0 = x_0 + a(t - \lambda_0), y_0 = y_0 + b(t - \lambda_0), z_0 = z_0 + c(t - \lambda_0)$  gerçeklendiğini görmek yeter. Dikkat edilirse, eğer  $P_0$  noktası düzlemin üzerinde ise, yani  $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$  ise  $\lambda_0 = 0$  ve sonuçta  $P_1 = P_0$  bulunur, kısacası düzlemin  $P_0$  noktasına en yakın noktası  $P_0$  noktasının kendisi olur.

18) Bir elipsin bir  $P_0(x_0, y_0)$  noktasına en yakın noktası nasıl belirlenir?

**Cözüm:** Elipsimiz  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ise, sorunun Lagrange yöntemiyle çözümü için

$$\varphi(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

fonksiyonunun ekstremumları aranır ve  $0 = \varphi_x$  ile  $0 = \varphi_y$  denklemlerinden  $x = \frac{a^2 x_0}{\lambda + a^2}$  ve  $y = \frac{b^2 y_0}{\lambda + b^2}$  bulunup  $P(x, y)$  noktasının elips üzerinde olması istendiğinden  $1 = \frac{a^2 x_0^2}{(\lambda + a^2)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(\lambda + b^2)^2}$  ve böylelikle  $((\lambda + a^2)(\lambda + b^2))^2 = (\lambda + b^2)^2 a^2 x_0 + (\lambda + a^2)^2 b^2 y_0$  bulunarak, aranan  $\lambda$  Lagrange çarpanının dördüncü dereceden aşağıdaki polinomun kökleri olması gereklidir:

$$\begin{aligned}\lambda^4 + 2(a^2 + b^2)\lambda^3 + (a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - (a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2))\lambda^2 + 2a^2b^2(a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2)\lambda \\ + a^2b^2(a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2) = 0\end{aligned}$$

Dördüncü derece polinomlarının köklerini belirleyen cebirsel bağlantılar kullanılır.

19)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $O(0,0,0)$  noktasının  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidiyle  $Ax + By + Cz = 0$  düzleminin kesişim eğrisine en kısa ve en uzun uzaklıği nasıl bulunur, açıklayınız.

**Çözüm:** Extremumları araştırılacak polinom şudur:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \lambda_2(Ax + By + Cz)$$

O halde  $0 = \varphi_x = \lambda_2 A + 2x\left(1 + \frac{\lambda_1}{a^2}\right)$ ,  $0 = \varphi_y = \lambda_2 B + 2y\left(1 + \frac{\lambda_1}{b^2}\right)$ ,  $0 = \varphi_z = \lambda_2 C + 2z\left(1 + \frac{\lambda_1}{c^2}\right)$  ve böylelikle şunlar bulunur:

$$x = -\frac{\lambda_2 A a^2}{2(\lambda_1 + a^2)}, \quad y = -\frac{\lambda_2 B b^2}{2(\lambda_1 + b^2)}, \quad z = -\frac{\lambda_2 C c^2}{2(\lambda_1 + c^2)} \quad (*)$$

Bu noktanın elipsoid ve düzlemin kesişim eğrisi üzerinde olması istendiğinden, elipsoid üzerinde bulunmanın gereği olarak öncelikle  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  ve sonuçta  $\lambda_2 \neq 0$  gözlemlenerek  $0 = Ax + By + Cz = -\frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{A^2 a^2}{\lambda_1 + a^2} + \frac{B^2 b^2}{\lambda_1 + b^2} + \frac{C^2 c^2}{\lambda_1 + c^2} \right]$  ve böylece  $0 = \frac{A^2 a^2}{\lambda_1 + a^2} + \frac{B^2 b^2}{\lambda_1 + b^2} + \frac{C^2 c^2}{\lambda_1 + c^2}$  bulunur, demek ki  $\lambda_1$  çarpanı,  $\lambda$  değişkeninin ikinci dereceden polinomu olan

$$(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)a^2 A^2 + (\lambda + a^2)(\lambda + c^2)b^2 B^2 + (\lambda + a^2)(\lambda + b^2)c^2 C^2 = 0$$

polinomunun kökü olmalıdır.  $\lambda_1$  çarpanı belirlendikten sonra, bu kez

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\lambda_2^2}{4} \left[ \frac{A^2 a^2}{(\lambda_1 + a^2)^2} + \frac{B^2 b^2}{(\lambda_1 + b^2)^2} + \frac{C^2 c^2}{(\lambda_1 + c^2)^2} \right]$$

bağıntısından  $\lambda_2$  Lagrange çarpanı aşağıdaki biçimde belirlenir:

$$\lambda_2 = \mp \sqrt{\frac{A^2 a^2}{(\lambda_1 + a^2)^2} + \frac{B^2 b^2}{(\lambda_1 + b^2)^2} + \frac{C^2 c^2}{(\lambda_1 + c^2)^2}}$$

Böylece aranan  $P(x, y, z)$  noktaları (\*) bağıntılarından belirlenir, bitti!

20)  $f(x, y) = xy \ln(x + y)$  fonksiyonunun aşağıdaki gibi açık bölgede ekstremumlarını araştırınız:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$$

**Çözüm:**  $R$  bölgesi gerçekten açık olduğundan, kritik noktaları bulmak için

$$0 = f_x(x, y) = y \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}, \quad 0 = f_y(x, y) = x \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}$$

böylece  $f_x(x, y) - f_y(x, y) = 0$  yani  $(x - y) \ln(x + y) = 0$  böylelikle ya  $x = y$  yada  $x + y = 1$  olması gerektiği anlaşılır.  $x = y$  iken  $x \ln(2x) + \frac{x}{2} = 0$  böylece  $\ln(2x) = -\frac{1}{2}$  ve

$y = x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$  böylece  $P_0(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}})$  kritik noktası bulunur.  $x + y = 1$  iken  $0 = xy$  böylece  $P_1(1, 0)$  ve  $P_2(0, 1)$  kritik noktaları bulunur. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 \\ &= \left( \frac{y}{x+y} + \frac{y^2}{(x+y)^2} \right) \cdot \left( \frac{x}{x+y} + \frac{x^2}{(x+y)^2} \right) - \left( \ln(x+y) + \frac{y}{x+y} + \frac{x^2}{(x+y)^2} \right)\end{aligned}$$

böylece  $\Delta(P_0) > 0$  ve  $f_{xx}|_{P_0} > 0$  bulunarak  $P_0$  noktasının bir yerel minimum olduğu anlaşılır,  $f\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{8e} < 0$  olur.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarının  $f$  için bir ekstremum noktası **olmadığı** sözgelimi  $R_\varepsilon = (1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4})$  ve  $R_\varepsilon^* = (1 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$  noktalarının hem  $R_\varepsilon, R_\varepsilon^* \in K_\varepsilon(1, 0)$  hem de  $f(1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}) < 0 = f(1, 0) < f(1 + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$  gözleyiniz.

21)  $R = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$  açık bölgesinde  $f(x, y) = x + y + 4 \cos x \cdot \cos y$  fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

**Cözüm:**  $R$  açık bölgesinde  $f$  fonksiyonunun kritik noktalarını bulmak için  $f_x(x, y) = 1 - 4 \sin x \cdot \cos y$ ,  $f_y(x, y) = 1 - 4 \cos x \sin y$  olduğundan  $0 = 1 - 4 \sin x \cdot \cos y$ ,  $0 = 1 - 4 \cos x \cdot \sin y$  bağıntılarının farkını alıp  $0 = 4(\cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y) = 4 \sin(y - x) \Rightarrow \sin(y - x) = 0$  böylece  $R$  bölgesinde ya  $y - x = 0$  yada  $y - x = \mp\pi$  olur, çünkü  $R$  bölgesinde  $y - x = \mp 2\pi$ ,  $y - x = \mp 3\pi$  vb. **gerçekleşmez** (neden?). Eğer  $x = y$  ise  $0 = f_x(x, x) = 1 - 4 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin(2x) = f_y(x, x)$  böylece  $\sin(2x) = \frac{1}{2}$  yani  $x = \frac{\pi}{12} = y$  ve  $P_0(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$  bulunur. Eğer  $x \mp \pi = y$  ise  $0 = f_x(x, x \mp \pi) = 1 - 4 \sin x \cos(x \mp \pi) = 1 + 4 \sin x \cos x \Rightarrow 0 = 1 + 2 \sin(2x)$  ve  $x = -\frac{\pi}{12}$ ,  $y = \frac{11\pi}{12}$  yada  $y = -\frac{13\pi}{12}$  olur ve  $P_1(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12})$  ve  $P_2(-\frac{\pi}{12}, -\frac{13\pi}{12})$  kritik noktaları bulunur.  $f_{xx}(x, y) = -4 \cos x \cdot \cos y = f_{xx}(x, y)$  ve  $f_{xy}(x, y) = 4 \sin x \cdot \sin y$  olduğundan,  $P_0$  noktası için  $f_{xx}(P_0) = -4 \cos^2(\frac{\pi}{12}) < 0$  buna karşılık  $f_{xy}(P_0) = 4 \sin^2(\frac{\pi}{12})$ ,  $\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$  ve  $\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  olup  $\Delta(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) = f_{xx}^2(P_0) - f^2 xy(P_0) = 8\sqrt{3} > 0$  bulunacağından  $P_0$  noktası bir yerel maksimumdur  $f(P_0) = \frac{\pi}{6} + \frac{4+\sqrt{12}}{2} > 0$  olur. Öteki noktaları araştırınız.

22)  $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$  fonksiyonu  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 14\}$  küresinin hangi noktasında maksimumuna erişir, belirleyiniz.

**Cözüm:**  $\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)$  aracı fonksiyonunun  $R = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  açık bölgesinde ekstremumları aranır ve  $\lambda = \pm\frac{1}{2}$  bularak, küre üzerindeki aranan noktanın  $P_0(3, -2, 1)$  ve  $f$  gerçek değerli fonksiyonunun  $S$  küresinin noktalarında eristiği en büyük değerinin  $f(P_0) = 14$  olduğu anlaşılır.

23)  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  gerçek değerli fonksiyonunun  $\sum_{k=1}^3 x_k^2 = 1$  ve  $\sum_{k=1}^3 y_k^2 = 1$  ve  $x_k \geq 0, y_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) kısıtları altında maksimumunu araştırınız.

**Cözüm:** Soru şunu sormaktadır: Hangi  $P_1 = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $P_2 = (y_1, y_2, y_3)$  nokta çifti

için, soruda **verilen kısıtlar altında**  $\langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k y_k$  iç çarpım değeri olan gerçel sayı maksimumuna erişir. Oysa ünlü Cauchy-Schwarz eşitsizliği nedeniyle

$$|\langle P_1, P_2 \rangle| = \left| \sum_{k=1}^3 x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^3 y_k^2} = 1$$

bilindiğinden  $\langle P_1, P_2 \rangle$  iç çarpım değeri en fazla 1 olabilir ve aslında bu iç çarpımı 1 değerine eriştiğinde ve kısıtları gerçekleyen nokta çiftleri vardır; örneğin  $P_1(1, 0, 0) = P_2(1, 0, 0)$  çifti için ya da  $P_1^*(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = P_2^*(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  çifti için hem kısıtlar, hem de  $\langle P_1, P_2 \rangle = 1$  koşulları kolayca gerçekleşir. Bu sonucu Lagrange yöntemiyle de bulabiliyoruz. Gerçekten  $R = (\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}) \times (\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\})$  açık bölgesinde altı değişkenli aşağıdaki aracı fonksiyonu

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \sum_{k=1}^3 x_k y_k + \lambda_1 \left( \sum_{k=1}^3 x_k^2 - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_{k=1}^3 y_k^2 - 1 \right)$$

ekstremumlarını arayarak  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm \frac{1}{2}$  ve herbir  $k = 1, 2, 3$  için  $x_k \geq 0$  ve  $y_k \geq 0$  unutmadan sonuçta  $x_k = y_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) bularak, kısıtları gerçekleyen, yani  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki  $S$  birim külesi üzerinde bulunup tüm bileşenleri **negatif olmayan** herhangi bir  $P_1 \in S$  noktası için  $P_1 = P_2$  olması gereği anlaşılır, istenen çözüm bulunmuş olur.

24) Düzlemede  $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$  parabolünün  $9x - 7y + 16 = 0$  doğrusuna en yakın olduğu noktayı bulunuz.

**Cözüm:** Bilindiği gibi düzlemede sabit bir  $P(x_0, y_0)$  noktasının bir  $ax + by + c = 0$  doğrusuna olan uzaklık değeri

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 0$$

olup, sonuçta verilen parabolün herhangi bir  $P(x, y)$  noktasının  $9x - 7y + 16 = 0$  doğrusuna olan uzaklık değerinden yararlanıp

$$\varphi(x, y) = \frac{(9x - 7y + 16)^2}{130} + \lambda(2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y)$$

aracı fonksiyonunun ekstremumları aranır.

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_x(x, y) &= \frac{9}{65}(9x - 7y + 16) + \lambda(4x - 4y - 1) \\ 0 = \varphi_y(x, y) &= -\frac{7}{65}(9x - 7y + 16) + \lambda(4y - 4x - 1) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 9x - 7y + 16 &= 65\lambda \\ 4x - 4y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

sonuçta  $y = x+2$  ve  $P(x, y)$  noktasının parabol üzerinde olması koşulundan  $x = 3$ ,  $y = 5$  yani  $P_0(3, 5)$  kritik noktası ve (1) nedeniyle  $\lambda = \frac{8}{65}$  bulunur. Kısıt var olduğundan Yeterlik Teoremi kullanılmaz!

$$\varphi_{xx} = \frac{81}{65} + 4\lambda = \frac{113}{65}, \quad \varphi_{yy} = \frac{63}{65} + 4\lambda = \frac{95}{65}, \quad \varphi_{xy} = -\frac{190}{65}$$

böylece

$$d^2\varphi = \varphi_{xx}(x, y)(dx)^2 + \varphi_{yy}(dy)^2 + \varphi_{xy}(x, y)(dx)(dy) = \frac{113}{65}(dx)^2 + \frac{95}{65}(dy)^2 - \frac{190}{65}(dx)(dy)$$

kısıt koşulundan yararlanıp onun diferansiyelini alıp

$$(4x - 4y - 1)dx - (4x - 4y + 1)dy|_{P_0} = -9dx + 7dy = 0 \text{ ve } dy = \frac{9}{7}dx$$

böylece  $d^2\varphi|_{P_0} = \left(\frac{113}{65} + \frac{19 \cdot 81}{13 \cdot 49} - \frac{9 \cdot 38}{13} \cdot 7\right)(dx)^2 = \frac{1262}{65 \cdot 49}(dx)^2 > 0$  bulunur, demek ki  $P_0$  noktası aranan ekstremumdur ve aranan uzaklık  $\frac{8}{\sqrt{130}} > 0$  sayısıdır.

## Leibniz Bağıntısı ve Uygulamaları

Bu bölümde son olarak usta Alman Matematikçi G.Wilhelm Leibniz'in iki yararlı teoremini kanıtlayıp, onlardan yararlanıp bazı Riemann tümlevlerini hesaplamayı öğreneceğiz ve ünlü Pfaff Teoremini kanıtlayacağız. Önce gerekli olduğu için aşağıdaki ünlü teoremi kanıtlayalım:

### Tümlev Hesabın Birinci Aradeğer Teoremi:

$f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $g$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $R$  tümlevlenebilir ve  $g(x) \geq 0$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) ise şu geçerlidir:

$$\exists \xi \in [a, b], \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

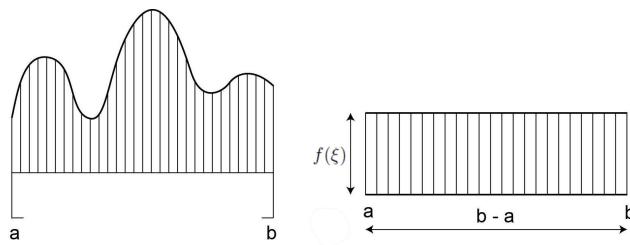
**Kanıtlama:**  $[a, b]$  kapalı-sınırlı aralığında sürekli  $f$  fonksiyonu, bu aralıkta en büyük ve en küçük değerine eriştiğinden  $m = \min f([a, b])$  ve  $M = \max f([a, b])$  gerçek sayıları iyi tanımlı ve  $m \leq f(x) \leq M$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) ve  $0 \leq g(x)$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) nedeniyle  $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) ve dolayısıyla tümlev alarak  $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$  bulunur. Kısalık amacıyla  $T_g = \int_a^b g(x)dx$  ( $\geq 0$ ) ve  $c = \int_a^b f(x)g(x)dx$  gerçek sayılarıyla  $h(x) = T_g \cdot f(x)$  ( $\forall x \in [a, b]$ ) sürekli fonksiyonu tanımlanırsa, sürekli gerçek değerli  $h$  fonksiyonu, uygun  $x_0, x_1 \in [a, b]$  gerçek sayılarında en küçük ve en büyük değerine erişeceğini  $h(x_0) = \min_{x \in [a, b]} h(x) = \min_{x \in [a, b]} T_g \cdot f(x) = T_g \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) = m \cdot T_g \leq h(x) \leq \max_{x \in [a, b]} h(x) = T_g \cdot \max_{x \in [a, b]} f(x) = M \cdot T_g = h(x_1)$

yani biraz önce bulunan  $m \cdot T_g \leq c \leq M \cdot T_g$  eşitsizliği nedeniyle  $h(x_0) = mT_g \leq c \leq M \cdot T_g = h(x_1)$  bulunur, oysa ünlü aradeğer teoremiyle sürekli gerçel değeri bir fonksiyon eriştiği iki değer arasında yer alan her değere en az bir kez eriştiğinden  $\exists \xi \in [x_0, x_1] \subseteq [a, b]$ ,  $c = h(\xi) = T_g \cdot f(\xi) = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$  yani  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx$  olur.

**Dikkat:**  $f$  fonksiyonu, o halde,  $[a, b]$  aralığında sürekli ise şu gerçekleşir:

$$\exists \xi \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

çünkü  $g$  fonksiyonu  $g(x) = 1 (\forall x \in [a, b])$  biçiminde tanımlanırsa, tüm hipotezleri yerine gelen önceki teorem kullanılır. Bu inanılmaz sonuç şu şaşrtıcı gerçeği söylemektedir: Bir  $[a, b]$  aralığında sürekli bir  $f$  gerçel değerli fonksiyonunun, bu aralıktaki Riemann tümlev değeri (ki bu değer aslında  $f$  fonksiyonunun grafiği ile  $Ox$  ekseni arasında kalan bölgenin alanıdır.) yüksekliği  $f(\xi)$  olan uygun bir dikdörtgenin alanı olmaktadır.



Kısacası yukarıdaki taralı alanlar, inanılması güç olsa da, **esittirler!** Artık ünlü Leibniz Teoremini kanıtlayabiliriz.

**Leibniz Teoremi:**  $g$  ve  $h$  fonksiyonları  $\alpha \in [a, b]$  değişkeninin türetilenler fonksiyonları,  $f$  ve  $f_\alpha$  ise  $(x, \alpha)$  değişkeninin sürekli fonksiyonları ise  $\varphi(\alpha) = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha)dx$  fonksiyonu türetilenidir ve şu bağıntı geçerlidir:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha)dx + f(h(\alpha), \alpha) \cdot h'(\alpha) - f(g(\alpha), \alpha) \cdot g'(\alpha)$$

Buna **Leibniz bağıntısı** denilir.

**Kanıtlama:**  $\alpha \in [a, b]$  alınınsın, sabit tutulsun.  $\varphi$  fonksiyonunun tanımı nedeniyle, yete-

rince küçük  $\delta$  için

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha + \delta) &= \int_{g(\alpha+\delta)}^{h(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx \\
 &= \int_{g(\alpha+\delta)}^{g(\alpha)} f(x, \alpha + \delta) dx + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha + \delta) dx + \int_{h(\alpha)}^{h(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx \\
 \varphi(\alpha + \delta) - \varphi(\alpha) &= \int_{g(\alpha+\delta)}^{g(\alpha)} f(x, \alpha + \delta) dx + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} (f(x, \alpha + \delta) - f(x, \alpha)) dx \\
 &\quad + \int_{h(\alpha)}^{h(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx \\
 &= \int_{h(\alpha)}^{h(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} (f(x, \alpha + \delta) - f(x, \alpha)) dx \\
 &\quad - \int_{g(\alpha)}^{g(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx
 \end{aligned}$$

bulunur, burada birinci ve sonuncu Riemann tümlevlerine, Tümlev Hesabın Birinci Ara-değer Teoreminin sonucu uygulanırsa, üstelik  $f_\alpha$  kısmi türevinin sürekli olması nedeniyle  $f(x, \alpha + \delta) - f(x, \alpha) = \delta \cdot f_\alpha(x, \xi_{3,\delta})$  olacak biçimde uygun bir  $\xi_{3,\delta}$  gerçek sayısı,  $0 < \delta$  ise  $\alpha < \xi_{3,\delta} < \alpha + \delta$  ve  $\delta < 0$  ise  $\alpha + \delta < \xi_{3,\delta} < \alpha$  gerçekleşeceğin var olduğundan, sonuçta

$$\varphi(\alpha + \delta) - \varphi(\alpha) = f(\xi_{1,\delta}, \alpha + \delta) \cdot (h(\alpha + \delta) - h(\alpha)) + \delta \cdot \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \xi_{3,\delta}) dx - f(\xi_{2,\delta}, \alpha + \delta) \cdot (g(\alpha + \delta) - g(\alpha))$$

bulunur, burada örneğin  $F(x) = f(x, \alpha + \delta)$  biçiminde tanımlanan gerçek değerli sürekli  $F$  fonksiyonu aracılığıyla aşağıdakının geçerli olduğu gözlenmiştir :

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\alpha+\delta)} f(x, \alpha + \delta) dx = \int_{h(\alpha)}^{h(\alpha+\delta)} F(x) dx = F(\xi_{1,\delta}) \cdot (h(\alpha + \delta) - h(\alpha)) = f(\xi_{1,\delta}, \alpha + \delta) \cdot (h(\alpha + \delta) - h(\alpha))$$

O halde, yeterince küçük  $\delta \neq 0$  sayıları için

$$\frac{\varphi(\alpha + \delta) - \varphi(\alpha)}{\delta} = f(\xi_{1,\delta}, \alpha + \delta) \cdot \frac{h(\alpha + \delta) - h(\alpha)}{\delta} + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) dx - f(\xi_{2,\delta}, \alpha + \delta) \cdot \frac{g(\alpha + \delta) - g(\alpha)}{\delta}$$

ve  $\delta \rightarrow 0$  için  $g(\alpha + \delta) \rightarrow g(\alpha)$ ,  $h(\alpha + \delta) \rightarrow h(\alpha)$ ,  $\xi_{1,\delta} \rightarrow h(\alpha)$ ,  $\xi_{2,\delta} \rightarrow g(\alpha)$ ,  $\xi_{3,\delta} \rightarrow \alpha$  ve  $|f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) - f_\alpha(x, \alpha)| < \varepsilon$  nedeniyle

$$\left| \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} (f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) - f_\alpha(x, \alpha)) dx \right| \leq \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} |f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) - f_\alpha(x, \alpha)| dx < \varepsilon \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} dx$$

$$= \varepsilon \cdot (h(\alpha) - g(\alpha)) \leq \varepsilon \| h - g \|$$

ve böylece, özel olarak  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\|h-g\|}$  için bunlar yazılıarak sonuçta  $\delta \rightarrow 0$  için  $|\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) dx - \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx| \rightarrow 0$  kısacası

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \xi_{3,\delta}) dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx$$

gözleyerek, istenen

$$\varphi'(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha + \delta) - \varphi(\alpha)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\xi_{1,\delta}, \alpha + \delta) \cdot \frac{h(\alpha + \delta) - h(\alpha)}{\delta} + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\xi_{2,\delta}, \alpha + \delta) \cdot \frac{g(\alpha + \delta) - g(\alpha)}{\delta}$$

$$= f(h(\alpha), \alpha) \cdot h'(\alpha) + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x, \alpha) dx - f(g(\alpha), \alpha) \cdot g'(\alpha)$$

sonucu bulunur, bitti!

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki iki kullanışlı sonuç elde edilir:

**Önerme 2:**  $c$  ve  $d$  sabit olmak üzere,  $f = f(x, \alpha)$  fonksiyonu  $(x, \alpha) \in [c, d] \times [a, b]$  değişkeninin sürekli fonksiyonu ve  $f_\alpha$  fonksiyonu da sürekli ise  $\varphi(\alpha) = \int_c^d f(x, \alpha) dx$  ( $\forall \alpha \in [a, b]$ ) fonksiyonu türetilebilirdir ve aşağıdaki

$$\varphi'(\alpha) = \int_c^d \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \right) dx = \int_c^d f_\alpha(x, \alpha) dx$$

**tümlev altında türev alma bağıntısı** geçerlidir, çünkü bu bağıntı

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \int_c^d f(x, \alpha) dx \right] = \int_c^d \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \right) dx$$

gerçekleştiğini söylemektedir.

**Kanıtlama :** Her sabit fonksiyon türetilebilir olduğundan, Leibniz Teoremi, her  $\alpha \in [a, b]$  için  $g(\alpha) = c < d = h(\alpha)$  biçiminde tanımlanan fonksiyon çifti ne uygulanırsa  $g'(\alpha) = 0 = h'(\alpha)$  ( $\forall \alpha \in [a, b]$ ) gözleyip istenen bağıntı bulunur.

**Önerme 3:**  $f = f(x, \alpha)$  fonksiyonu Önerme 2'deki gibiye, aşağıdaki geçerlidir:

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] d\alpha$$

**Kanıtlama :** Her  $\alpha \in [a, b]$  için  $\psi(\alpha) = \int_c^d [\int_a^\alpha f(x, t) dt] dx$  tanımlanırsa, **Tümlev Hesabın Temel Teoremi** nedeniyle

$$\frac{d}{dx} [\int_a^x h(t) dt] = h(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [\int_a^\alpha h(x, t) dt] = h(x, \alpha)$$

gerçekleştiği iyi bilindiğinden,  $\psi$  fonksiyonunun türevi, Leibniz bağıntısı  $F(x, \alpha) = \int_a^\alpha f(x, t) dt$  fonksiyonuna uygulanarak bulunur:

$$\psi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} [\int_c^d [\int_a^\alpha f(x, t) dt] dx] = \int_c^d (\frac{\partial}{\partial \alpha} [\int_a^\alpha f(x, t) dt]) dx = \int_c^d f(x, \alpha) dx$$

ve Önerme 2'de tanımlanan  $\varphi(\alpha) = \int_c^d f(x, \alpha) dx$  ( $\forall \alpha \in [a, b]$ ) fonksiyonu aracılığıyla  $\psi'(\alpha) = \phi(\alpha)$  ( $\forall \alpha \in [a, b]$ ) bulunacağından, sonuçta  $\psi(\alpha) = \int_a^\alpha \varphi(t) dt + c^*$  ve ayrıca  $\psi(a) = \int_a^d [\int_a^a f(x, t) dt] dx = 0$  nedeniyle  $0 = \psi(a) = \int_a^a \varphi(t) dt + c^* = 0 + c^* = c^*$  gözleyip  $\psi(\alpha) = \int_a^\alpha \varphi(t) dt$  ve böylece istenen bağıntı olan aşağıdaki eşitlik elde edilir :

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, \alpha) d\alpha \right] dx = \psi(b) = \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, \alpha) dx \right] d\alpha$$

**Örnekler 2:**

1) Her  $\alpha \in [0, \infty)$  için  $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx = \ln(\alpha + 1)$  gösterip  $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2$  bulunuz.

**Çözüm :**  $f = f(x, \alpha)$  fonksiyonu her  $(x, \alpha) \in (0, 1) \times [0, \infty)$  için  $f(x, \alpha) = \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}$  ve her  $\alpha \in (0, \infty)$  için  $f(0, \alpha) = 0$  ve  $f(1, \alpha) = \alpha$  biçiminde tanımlanırsa gerek  $f$  ve gerekse  $f_\alpha$  fonksiyonları  $[0, 1] \times [0, \infty)$  bölgesinde iyİ tanımlı ve sürekli olurlar ve Önerme 2 kullanılıp, üstelik  $f_\alpha(x, \alpha) = x^\alpha$  gözleyerek

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) dx \quad (\forall \alpha \in [0, \infty))$$

fonksiyonu için  $\varphi'(\alpha) = \int_0^1 f_\alpha(x, \alpha) dx = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$  nedeniyle, kolayca  $\varphi(\alpha) = \ln(\alpha + 1) + c$  ve  $f(x, 0) = 0$  ( $\forall x \in [0, 1]$ ) geçerli olduğundan (neden?)  $\varphi(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx = 0$  yani  $0 = \varphi(0) = \ln 1 + c = c$  bularak istenen  $\varphi(\alpha) = \ln(\alpha + 1)$  ( $\forall \alpha \in [0, \infty)$ ) elde edilir, bu isteneni verir (nasıl?).

2)  $0 < a$  ve  $0 < b$  ne olursa olsun  $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx = \ln(\frac{a+1}{b+1})$  gösteriniz.

**Çözüm :**  $\frac{x^a - x^b}{\ln x} = \frac{x^a - 1}{\ln x} - \frac{x^b - 1}{\ln x}$  özdeşliğini ve önceki soruyu kullanın.

3)  $f(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} \arctan(\frac{x}{\alpha}) dx$  olsun.  $f'(\alpha)$  türevini hem Leibniz bağıntısıyla hem de doğrudan tümlevi hesaplayarak bulunuz.

**Çözüm :** Leibniz bağıntısı kullanılrsa, her  $\alpha \in (0, \infty)$  için

$$f'(\alpha) = 2\alpha \arctan \alpha + \int_0^{\alpha^2} (\frac{\partial}{\partial \alpha} \arctan(\frac{x}{\alpha})) dx = 2\alpha \arctan \alpha - \int_0^{\alpha^2} \frac{x}{x^2 + \alpha^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2\alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2} \ln(x^2 + \alpha^2) \Big|_0^{\alpha^2} = 2\alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^4 + \alpha^2}{\alpha^2}\right) \\
&= 2\alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + 1)
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan, doğrudan tümlev bilgisiyle

$$\begin{aligned}
\int \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx &= \int x' \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = x \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \int x (\arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right))' dx \\
&= x \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \alpha \int \frac{x}{x^2 + \alpha^2} dx = x \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + \alpha^2)
\end{aligned}$$

ve böylece herbir  $\alpha \in (0, \infty)$  için

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \int_0^{\alpha^2} \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = x \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + \alpha^2) \Big|_0^{\alpha^2} \\
&= \alpha^2 \arctan \alpha - \frac{\alpha}{2} \ln\left(\frac{\alpha^4 + \alpha^2}{\alpha^2}\right) \\
&= \alpha^2 \arctan \alpha - \frac{\alpha}{2} \ln(\alpha^2 + 1)
\end{aligned}$$

bulup türev alarak aynı sonuca ulaşırın şunlar bulunur:

$$f'(\alpha) = 2\alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + 1) + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)} - \frac{\alpha}{2} \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \right) = 2\alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + 1)$$

4)  $-1 < \alpha$  ise, her  $n \in \mathbb{N}$  için aşağıdakini gösteriniz:

$$\int_0^1 x^\alpha \cdot (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}$$

**Cözüm:** Yine Leibnitz bağıntısını kullanıp, tümlev almadan bu tümlevi  $n > 1$  için hesaplamak kolaydır, çünkü  $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{(\alpha + 1)}$  bağıntısını  $\alpha$  değişkenine göre türeterek, her  $\alpha > -1$  için

$$-\frac{1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 x^\alpha dx = \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha \right) dx = \int_0^1 x^\alpha \cdot \ln x dx$$

bulunur, kısacası iddia  $n = 1$  için gösterilmiştir, iddia  $n$  için doğru varsayıldığında benzer biçimde

$$\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(\alpha + 1)^{n+2}} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{(-1)^n \cdot n!}{(\alpha + 1)^{n+1}} \right) = \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^\alpha \cdot (\ln x)^n) \right] dx = \int_0^1 x^\alpha \cdot (\ln x)^{n+1} dx$$

bularak iddianın  $n+1$  için doğru olduğu anlaşılr, o halde iddia tümevarımla kanıtlanmış olmaktadır.

5)  $1 < \alpha$  ise

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} ,$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2} = \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha + \cos x)^2} = \frac{\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

olduğunu gösterin.

**Çözüm:** Yalnızca birinci ve üçüncü tümlevlerle uğraşalım. Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$  ve böylece  $\forall x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$  için  $\cos x \neq 0$  olduğundan, bu son özdesliği  $\cos^2 x \neq 0$  ile bölgerek  $\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$  ve  $\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2tgx}{1+tg^2 x}$  ve böylece özel olarak

$$\cos x = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} , \quad \sin x = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} \quad \left( \forall x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla  $\forall x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\mp\pi, \mp3\pi, \mp5\pi, \dots\}$  için  $tg(\frac{x}{2})$  tanımlı olduğundan,  $y = tg(\frac{x}{2})$  dönüşümü yapılrsa  $x = 2 \arctan y$  ve  $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$  ve  $\cos x \leq |\cos x| \leq 1 < \alpha$  yani  $0 < \alpha - \cos x$  gözleyip  $\cos x = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$  olduğundan sonuçta aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\alpha - \cos x} &= 2 \int \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\alpha - \frac{1-y^2}{1+y^2}} dy = 2 \int \frac{dy}{\alpha(1+y^2) - (1-y^2)} = 2 \int \frac{dy}{y^2(\alpha+1) + \alpha - 1} \\ &= \frac{2}{\alpha+1} \int \frac{dy}{y^2 + (\frac{\alpha-1}{\alpha+1})} = \frac{2}{\alpha+1} \int \frac{dy}{y^2 + \beta^2} \quad \left( \beta = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} > 0 \right) \\ &= \frac{2}{(\alpha+1)\beta} \arctan \left( \frac{y}{\beta} \right) = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \cdot tg \left( \frac{x}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

ve böylece,  $\arctan(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$  olduğunu unutmadan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \cdot tg \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \cdot tg \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \quad (\forall \alpha \in (1, \infty)) \end{aligned}$$

böylece  $f(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$  ( $\forall \alpha \in (1, \infty)$ ) fonksiyonu için Önerme2 kullanılıp

$$\frac{-\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) = f'(\alpha) = \int_0^\pi \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\alpha - \cos x} \right) \right] dx = (-1) \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2}$$

ve benzer şeyler  $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \cos x}$  tümleri için yapılmışından şunlar bulunur:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2} = \frac{\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha + \cos x)^2} \quad (\forall \alpha \in (1, \infty)).$$

$$6) \int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^\pi \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} \text{ gösteriniz.}$$

**Çözüm:** Bir üst satırdaki bağıntıda  $\alpha = 2$  alınız!

7)  $0 \leq \alpha < 1$  ise

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} &= \int_0^\pi \frac{dx}{1 - \alpha \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \\ \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{(1 + \alpha \cos x)^2} &= \frac{-\pi\alpha}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ve \quad \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{(1 - \alpha \cos x)^2} = \frac{\pi\alpha}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \alpha \cos x)^2} &= \frac{\pi}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\pi \frac{dx}{(1 - \alpha \cos x)^2} \end{aligned}$$

gösteriniz.

**Çözüm:** İlk eşitlikler  $\alpha = 0$  içinapaçiktır.  $0 < \alpha < 1$  ise

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \alpha \cos x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \frac{dx}{\frac{1}{\alpha} + \cos x} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{(\frac{1}{\alpha})^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

sonucu bir önceki alıştırmadan bulunur, çünkü  $1 < \frac{1}{\alpha}$  olmaktadır. İkinci satırdakiler ilk eşitliklere Leibnitz Bağıntısı uygulanarak bulunur. Dikkat edilirse

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} - \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \alpha \cos x)^2} = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{(1 + \alpha \cos x)^2} = \frac{-\pi\alpha}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olduğundan kolayca üçüncü satırdaki ilk bağlantı bulunur.

$$8) \int_0^\pi \frac{dx}{(5 - 3 \cos x)^3} = \frac{59\pi}{2048} \text{ gösteriniz.}$$

**Çözüm:** Bir sonraki sorudan yararlanıp istenen kolayca bulunur:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(5 - 3 \cos x)^3} = \frac{1}{27} \int_0^\pi \frac{dx}{(\frac{5}{3} - \cos x)^3} = \frac{\pi}{54} \cdot \frac{\frac{50}{9} + 1}{(\frac{25}{9} - 1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{59\pi}{2 \cdot 4^5} = \frac{59\pi}{2048} .$$

9)  $1 < \alpha$  ise  $\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^3} = \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha + \cos x)^3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$  gösteriniz.

**Çözüm:** Bu kez  $F(x, \alpha) = \frac{1}{(\alpha - \cos x)^2}$  fonksiyonuna Önerme 2 uygulanır ve üstelik 5) nedeniyle  $\int_0^\pi F(x, \alpha) dx = \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \cos x)^2} = \frac{\pi \alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$  olduğundan,  $\alpha$  değişkenine göre türeterek, istenileni veren şunlar bulunur:

$$\frac{-\pi(2\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\pi \alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) = \int_0^\pi F_\alpha(x, \alpha) dx = (-1) \cdot \int_0^\pi \frac{2dx}{(\alpha - \cos x)^3} .$$

10)  $1 < \alpha$  ise

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha - \sin x)^2} = \frac{\pi \alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\alpha(\alpha^2 - 1)} + \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) .$$

**Çözüm:** Yine  $x = 2 \arctan y$  dönüşümü ile,  $1 < \alpha$  için  $0 < \alpha - \sin x$  gözleyip

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\alpha - \sin x} &= 2 \int \frac{dy}{\alpha(y^2 + 1) - 2y} = \frac{2}{\alpha} \int \frac{dy}{y^2 - \frac{2y}{\alpha} + 1} = \frac{2}{\alpha} \int \frac{dy}{(y - \frac{1}{\alpha})^2 + \beta^2} \\ &= \frac{2}{\alpha \beta} \arctan \left( \frac{y - \frac{1}{\alpha}}{\beta} \right) = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan \left( \frac{\alpha y - 1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right) \quad \left( \beta = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan \left[ \frac{\alpha \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right] \end{aligned}$$

ve böylece aşağıdaki sonuç bulunur:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \sin x} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} (\arctan(\infty) - \arctan(\frac{-1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}})) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}})$$

İstenen sonuç,  $\alpha$  değişkenine göre her yanı türeterek bulunur.

11)  $\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \sin x)^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (2\pi + \sqrt{3} + 4 \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}))$  gösteriniz.

**Çözüm:** Önceki sonucu kullanınız!

12)  $0 \leq \alpha < 1$  için aşağıdaki sonuçları gösteriniz:

$$\int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \int_0^\pi \ln(1 - \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right)$$

**Cözüm:** Önce kullanacağımız şu sonucu gözleyelim:  $x = \sin u$  dönüşümü ve  $(\frac{\sin u}{1+\cos u})' = \frac{1}{1+\cos u}$  ve  $\frac{1}{\sin u} = \frac{1}{1+\cos u} \cdot (\frac{\sin u}{1+\cos u})'$  gözlemimi yaparak

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left( \frac{\sin u}{1+\cos u} \right) = \ln \left( \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\forall x \in (0, 1))$$

Dolayısıyla yukarıda bulunan  $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\alpha \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  sonucundan yararlanarak

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx \quad (\forall \alpha \in [0, 1])$$

fonksiyonu için, yine Önerme 2 kullanılıp (dikkat:  $\varphi(0) = 0$  gözleyiniz)

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \int_0^\pi \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln(1 + \alpha \cos x)) \right] dx = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \alpha \cos x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \left( 1 - \frac{1}{1 + \alpha \cos x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{\alpha} - \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned}$$

ve sonuçta tümlev alarak, yukarıda gözlenen sonuç nedeniyle

$$\varphi(\alpha) = \pi \ln \alpha - \pi \int \frac{d\alpha}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} + c = \pi \ln \alpha - \pi \ln \left( \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} \right) + c = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) + c$$

ve böylece  $0 = \varphi(0) = \pi \ln 2 + c$  nedeniyle  $c = -\pi \ln 2 = \pi \ln(\frac{1}{2})$  bularak her  $\alpha \in [0, 1]$  için aşağıdaki istenen sonuç bulunur:

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \alpha \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right).$$

Öteki tümlev benzer biçimde hesaplanır, hesaplayınız!

**Uyarı:** Şimdi de aşağıda kullanacağımız şu sonucu elde edelim:

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{1}{2} \right) < 0.$$

Bu güç değildir, çünkü bilindiği ve hatırlanacağı gibi Analiz III dersinde **Özge Olmayan Tümlevler** bölümünde şu gerçekler elde edilmiştir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

O halde ünlü  $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$  özdeşliği kullanırsa istenen bulunur:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx &= \pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y) dy \\ &= \pi \ln 2 - 4 \left(\frac{\pi}{2} \ln 2\right) = \pi \ln\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Burada şuna özellikle dikkat edilmelidir: Yukardaki sonucun,  $a_n \downarrow 1^+$  olmak üzere, aşağıda her  $n \in \mathbb{N}$  için geçerli olan

$$1 < a_n \quad \text{ve} \quad \int_0^\pi \ln(a_n - \cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{a_n + \sqrt{1 - a_n^2}}{2}\right)$$

eşitliklerinden limit alarak kolayca bulunabilecegi düşünülebilir olsa  $f_n(x) = \ln(a_n - \cos x)$  ( $\forall x \in [0, \pi]$ ) fonksiyonlarının noktasal limit fonksiyonu olan  $f_0(x) = \ln(1 - \cos x)$  fonksiyonuna yakınsaması ne yazık ki **düzgün yakınsama degildir**, çünkü kısalık amacıyla  $I_\pi = (0, \pi]$  yazılırsa, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq \|f_n - f_0\|_{I_\pi}$  böylece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_{I_\pi} \neq 0$  gerçekleşir, çünkü  $1 < a_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) nedeniyle  $1 < \frac{a_n - \cos x}{1 - \cos x}$  ( $\forall x \in I_\pi$ ) ve  $|f_n(x) - f_0(x)| = \ln\left(\frac{a_n - \cos x}{1 - \cos x}\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n - 1}{1 - \cos x}\right) \geq \frac{a_n - 1}{a_n - \cos x}$  gözleyerek (nasıl?) sonuçta her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|f_n - f_0\|_{I_\pi} = \sup_{x \in I_\pi} |f_n(x) - f_0(x)| \geq (a_n - 1) \sup_{x \in I_\pi} \left(\frac{1}{a_n - \cos x}\right) = 1$$

bulunur, çünkü  $\sup_{x \in I_\pi} \left(\frac{1}{a_n - \cos x}\right) = \frac{1}{\inf_{x \in I_\pi} (a_n - \cos x)} = \frac{1}{a_n - 1}$  geçerlidir. Tüm bunlar nedeniyle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \ln(a_n - \cos x) dx$  limiti gerçek vardır, fakat bu limitin  $\int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx$  tümleme eşit olduğunun bağımsız kanıtlanması verilmelidir.

$$13) \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} \pi \ln \alpha^2 & ; \quad 1 < |\alpha| \\ 0 & ; \quad |\alpha| \leq 1 \end{cases} \text{ gösteriniz.}$$

**Çözüm:** Çözüm bir önceki sonuctan yararlanarak aşağıdaki gibi bulunur: Kısalık amacıyla,  $\alpha$  değişkeninin aşağıdaki

$$f(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \int_0^\pi \ln((\alpha^2 + 1) - 2\alpha \cos x) dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım.  $f(0) = 0$  apäiktür, üstelik  $f(1) = 0$  geçerlidir, çünkü dikkat edilirse, yukarıdaki **uyarı'yı** kullanarak

$$f(1) = \int_0^\pi \ln(2(1 - \cos x)) dx = \int_0^\pi (\ln 2 + \ln(1 - \cos x)) dx =$$

$$= \pi \ln 2 + \int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx = \pi \ln 2 + \pi \ln \frac{1}{2} = \pi \ln 1 = 0$$

bulunur. Aslında herhangi bir  $0 \leq \alpha < 1$  için  $f(\alpha) = 0$  gerçeklidir, çünkü  $0 < (1-\alpha)^2 = \alpha^2 + 1 - 2\alpha$  nedeniyle  $0 \leq \beta = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} < 1$  gözlenerek

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \int_0^\pi \ln \left[ (\alpha^2 + 1) \left( 1 - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cos x \right) \right] dx = \pi \ln(\alpha^2 + 1) + \int_0^\pi \ln \left( 1 - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cos x \right) dx = \\ &= \pi \ln(\alpha^2 + 1) + \int_0^\pi \ln(1 - \beta \cos x) dx \\ &= \pi \ln(\alpha^2 + 1) + \pi \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{2} \right) = \pi \left[ \ln(\alpha^2 + 1) + \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{2} \right) \right] = \pi \left[ \ln(\alpha^2 + 1) + \ln \left( \frac{1}{\alpha^2+1} \right) \right] = \\ &\pi \ln \left( \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+1} \right) = \pi \ln 1 \text{ bulunur, çünkü } \beta \text{ sayısının tanımı nedeniyle } 0 \leq \alpha^2 < 1 \text{ ol-} \\ &\text{duğundan } \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2)^2}} = \frac{\sqrt{|\alpha^2 - 1|^2}}{\alpha^2 + 1} = \frac{|1 - \alpha^2|}{\alpha^2 + 1} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \text{ ve} \\ &\text{böylece } \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) = \frac{1}{1 + \alpha^2} \text{ gerçeklidir. Demekki } f \text{ fonksiyonu gerçekten} \\ &f(\alpha) = 0 \quad (\forall \alpha \in [0, 1]) \text{ gerçeklemektedir. Buna karşılık} \end{aligned}$$

$$1 < \alpha \quad \text{ise} \int_0^\pi \ln(\alpha \mp \cos x) dx = \pi \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \right) \quad (*)$$

geçerlidir, sözgelimi, artılı tümlev için  $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} < 1$  olduğunda, kolayca

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(\alpha + \cos x) dx &= \int_0^\pi \ln[\alpha(1 + \alpha^{-1})] dx = \pi \ln \alpha + \int_0^\pi \ln(1 + \alpha^{-1} \cos x) dx = \\ &= \pi \ln \alpha + \pi \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^{-2}}}{2} \right) \pi \ln \left( \frac{\alpha(1 + \sqrt{1 - \alpha^{-2}})}{2} \right) = \pi \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \right) \\ &\text{bulunur. Dolayısıyla } \alpha > 1 \text{ iken } \gamma = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha} > 1 \text{ olacağından (*) kullanılmış} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \int_0^\pi \ln \left[ 2\alpha \left( \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} - \cos x \right) \right] dx = \pi \ln(2\alpha) + \int_0^\pi \ln(\gamma - \cos x) dx = \\ &= \pi \ln(2\alpha) + \pi \ln \left( \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2} \right) = \pi \ln(2\alpha) + \pi \ln \frac{\alpha}{2} = \pi \ln \alpha^2 \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü  $\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^4} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$  ve böylece  $\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2 + 1 + \alpha^2 - 1}{2\alpha} \right) = \frac{\alpha}{2}$  bulunur.  $\alpha < 0$  için çözüm size bırakılmıştır.

$$14) 1 < \alpha \text{ ise } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

**Çözüm:** İkinci tümlevde  $y = x - \pi$  dönüşümü yapılarak, kolayca

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \sin x} + \int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \sin x} + \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \sin x}$$

oysa yukarıda 10) örneğinin çözümünde yapıldığı gibi yine  $\beta = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\alpha + \sin x} &= 2 \int \frac{dy}{\alpha(1 + y^2) + 2y} = \frac{2}{\alpha} \int \frac{dy}{(y + \frac{1}{\alpha})^2 + (\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2})} = \frac{2}{\alpha\beta} \arctan \left( \frac{1}{\beta} \left( y + \frac{1}{\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan \left[ \frac{\alpha \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right] \end{aligned}$$

ve böylece

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)$$

fakat daha önceden hesaplandığı için

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \sin x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \right)$$

olduğundan bu sonuçlar kullanılarak istenen elde edilir. Burada  $1 < \alpha$  nedeniyle  $0 < \frac{1}{\alpha + \sin x}$  ( $\forall x \in [0, 2\pi]$ ) ve böylece, temel Reimann tümlevi bilgisile, tümlevi alınan, pozitif değerli sürekli fonksiyon olduğundan  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} > 0$  bulunması gerektiği unutulmamalıdır!

$$15) \text{ Bir önceki sorudan yararlanıp } \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{5+3\sin x}{5+4\sin x} \right) dx = 2\pi \ln \frac{9}{8} > 0 \text{ gösterin.}$$

$$\text{Çözüm: } \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{5+3\sin x}{5+4\sin x} \right) dx = \int_0^{2\pi} \ln \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\frac{5}{3} + \sin x}{\frac{5}{4} + \sin x} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \ln \frac{3}{4} + \ln \left( \frac{\frac{5}{3} + \sin x}{\frac{5}{4} + \sin x} \right) \right) dx = 2\pi \ln \left( \frac{3}{4} \right) + \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{\frac{5}{3} + \sin x}{\frac{5}{4} + \sin x} \right) dx$$

$$= 2\pi \ln \left( \frac{3}{4} \right) + 2\pi \ln \left( \frac{3}{2} \right) = 2\pi \ln \left( \frac{9}{8} \right)$$

bulunur, çünkü  $1 < a$  ve  $1 < b$  sabitleri ne olursa olsun

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{b + \sin x}{a + \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

geçerli olduğunu görmek güç degildir. Gerçekten iyi bilindiği gibi

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| \quad \text{yani} \quad \int \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} d\alpha = \ln |f(\alpha)|$$

ve ayrıca  $1 < a$  nedeniyle  $-\sin x \leq |\sin x| \leq 1 < a$  ve böylece  $0 < a + \sin x$  ve benzer biçimde  $0 < b + \sin x$  ve sonuçta bu bilgiler yardımıyla

$$\int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha + \sin x} = \ln |\alpha + \sin x| \Big|_a^b = \ln \left| \frac{b + \sin x}{a + \sin x} \right| = \ln \left( \frac{b + \sin x}{a + \sin x} \right)$$

ve böylece Önerme 3 kullanılrsa, zaten  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$  bilindiğinden

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{b + \sin x}{a + \sin x} \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha + \sin x} \right] dx = \int_a^b \left[ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} \right] dx = 2\pi \int_a^b \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

ve ayrıca  $x = \csc u = \frac{1}{\sin u}$  dönüşümüyle aşağıdaki bulunacağından

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= - \int \frac{du}{\sin u} = - \ln \left( \frac{\sin u}{1 + \cos u} \right) = \ln \left( \frac{1 + \cos u}{\sin u} \right) = \\ &= \ln \left( x \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) \right) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{b + \sin x}{a + \sin x} \right) dx = 2\pi \int_a^b \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = 2\pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \Big|_a^b = 2\pi \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$$

ve böylece aşağıdaki istenen sonuç bulunur:

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{\frac{5}{3} + \sin x}{\frac{5}{4} + \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left[ \frac{\frac{5}{3} \sqrt{\frac{25}{9} - 1}}{\frac{5}{4} \sqrt{\frac{25}{16} - 1}} \right] = 2\pi \ln \left( \frac{3}{2} \right).$$

16a)  $0 \leq \alpha < 1$  için  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\alpha \cos x} = \frac{\arccos \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  gösteriniz.

**Çözüm:** Her zamanki  $y = \tan \frac{x}{2}$  yani  $x = 2 \arctan y$  dönüşümüyle

$$\int \frac{dx}{1+\alpha \cos x} = \frac{2}{1-\alpha} \int \frac{dy}{y^2 + \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \tan \frac{x}{2} \right)$$

ve böylece aşağıdaki sonuç bulunur, çünkü  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  ve  $\tan 0 = 0$  geçerlidir:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left( \arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right)$$

Oysa aşağıdaki ünlü özdeşlikler iyi bilinmektedir:

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad \arccos x = \frac{\arccos(2x^2 - 1)}{2} \quad (\forall x \in [-1, 1])$$

örneğin birincisini göstermek için  $\arctan x = y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ise  $x = \tan y$  dolayısıyla  $\cos y = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  bularak  $\arctan x = y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  elde edilir. Bu özdeşliklerin ikisi birden ard arda kullanılırsa sonuçta

$$\arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1}} = \arccos \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{\arccos [2(\frac{1+\alpha}{2}) - 1]}{2}$$

yani  $2 \arctan \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \arccos (2(\frac{\alpha+1}{2}) - 1) = \arccos \alpha \quad (\forall \alpha \in [0, 1])$  bularak istenen sonuç elde edilir.

16b) Gösteriniz  $0 \leq a, b < 1$  ise  $\int_0^{\pi/2} \sec x \ln \left( \frac{1+b \cos x}{1+a \cos x} \right) dx = \frac{(\arccos a)^2 - (\arccos b)^2}{2}$ .

**Çözüm:** Dikkat edilirse  $-b \cos x \leq |b \cos x| = b |\cos x| \leq b < 1$  nedeniyle  $0 < 1 + b \cos x$  ve benzer biçimde  $0 < 1 + a \cos x$  nedeniyle

$$\begin{aligned} \sec x \ln \left( \frac{1+b \cos x}{1+a \cos x} \right) &= \sec x \ln \left| \frac{1+b \cos x}{1+a \cos x} \right| = \sec x \ln \left| \frac{\sec x + b}{\sec x + a} \right| = \frac{1}{\cos x} \ln \left| \frac{b + \sec x}{a + \sec x} \right| \\ &= \frac{1}{\cos x} \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha + \sec x} = \int_a^b \frac{d\alpha}{\cos x(\alpha + \sec x)} = \int_a^b \frac{d\alpha}{1 + \alpha \cos x} \end{aligned}$$

ve böylece aşağıdaki istenilenler bululunur:

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln \left( \frac{1+b \cos x}{1+a \cos x} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left[ \int_a^b \frac{d\alpha}{1 + \alpha \cos x} \right] dx = \int_a^b \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} \right] d\alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\arccos \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} dx = (-1) \int_a^b \left( \frac{-1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \arccos \alpha d\alpha = - \int_a^b (\arccos \alpha)' \arccos \alpha d\alpha \\
&= \left( -\frac{1}{2} \right) \int_a^b ((\arccos \alpha)^2)' d\alpha = \left( -\frac{1}{2} \right) (\arccos \alpha)^2 \Big|_a^b = \frac{(\arccos a)^2 - (\arccos b)^2}{2}
\end{aligned}$$

16c)  $\int_0^{\pi/2} \sec x \ln \left( 1 + \frac{\cos x}{2} \right) dx = \frac{5\pi^2}{72}$  gösteriniz.

**Cözüm:** Aranan Riemann tümlevi aşağıdakidir:

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2} \cos x}{1 + 0 \cos x} \right) dx = \frac{(\arccos 0)^2 - (\arccos \frac{1}{2})^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9} \right) = \frac{5\pi^2}{72}$$

17a) Aşağıdakileri gösteriniz:  $\forall \alpha > 0$  için

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\alpha \cos x + \sin x} dx &= \frac{\pi \alpha}{2(\alpha^2 + 1)} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1}, \\
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{(\alpha \cos x + \sin x)^2} dx &= \frac{\pi(\alpha^2 - 1)}{2(\alpha^2)^2} + \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + 1)} - \frac{2\alpha \ln \alpha}{(\alpha^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

**Cözüm:** Dikkat edilirse  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  için  $\alpha \cos x + \sin x \geq \alpha \cos x > 0$  ve  $\alpha \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0$  dolayısıyla  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığında paydası hep pozitif değerler alan  $f(x, \alpha) = \frac{\cos x}{\alpha \cos x + \sin x}$  fonksiyonu ve  $f_\alpha(x, \alpha) = -\frac{\cos^2 x}{(\alpha \cos x + \sin x)^2}$  fonksiyonu sürekli dirler, dolayısıyla birinci tümlevleri hesaplarsak ikincisi Önerme 2 yardımıyla kolayca bulunur. Temel Riemann tümlev bilgisile rasyonel polinomlarını kesirlerine ayırtarak şunlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(\alpha x^2 - 2x - \alpha)} &= \frac{2}{\alpha^2 + 1} \left( \frac{\alpha - x}{x^2 + 1} + \frac{\alpha x - 1}{\alpha x^2 - 2x - \alpha} \right) = \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{2\alpha x - 2}{\alpha x^2 - 2x - \alpha}, \\
\int \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(\alpha x^2 - 2x - \alpha)} dx &= \frac{2\alpha \arctan x}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \ln \left| \frac{\alpha x^2 - 2x - \alpha}{x^2 + 1} \right|
\end{aligned}$$

ve böylece yine  $x = 2 \arctan y$  dönüşümü yaparak

$$\int \frac{\cos x}{\alpha \cos x + \sin x} dx = \int \frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}}{\frac{\alpha(1-y^2)+2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{2(y^2 - 1)dy}{(y^2 + 1)(\alpha y^2 - 2y - \alpha)} =$$

$$= \frac{2\alpha \arctan y}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \ln \left| \frac{\alpha y^2 - 2y - \alpha}{y^2 + 1} \right| = \frac{2\alpha(\frac{x}{2})}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \ln \left| \frac{\alpha \tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - \alpha}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \right|$$

ve sonuçta

$$\ln \left| \frac{\alpha \tan^2 \frac{\pi}{4} - 2 \tan \frac{\pi}{4} - \alpha}{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 1} \right| = \ln \left| \frac{\alpha - 2 - \alpha}{2} \right| = \ln 1 = 0$$

gözleyerek istenen sonuç aşağıdaki gibi bulunur:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\alpha \cos x + \sin x} dx = \left[ \frac{\alpha x}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} \cdot \ln \left| \frac{\alpha \tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - \alpha}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \right| \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi \alpha}{2(\alpha^2 + 1)} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1}$$

Bu sonuç ve Önerme 2 kullanılarak ikinci tümlev kolayca bulunur.

$$17b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{(2 \cos x + \sin x)^2} dx = \frac{3\pi + 5 - 8 \ln 2}{50} \text{ gösteriniz.}$$

**Cözüm:** Önceki sonuçta  $\alpha = 2$  alınır, dikkat edilirse  $8 \ln 2 < 8 \cdot \ln e = 8 = 3+5 < 3\pi+5$  nedeniyle sağ yan kesinlikle pozitiftir.

**Ödev:**  $\frac{\sin x}{\alpha \cos x + \sin x} = 1 - \frac{\alpha \cos x}{\alpha \cos x + \sin x}$  özdeşliğinden ve önceki sonuçtan yararlanıp  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\alpha \cos x + \sin x} dx$  tümlevini hesaplayıp gösteriniz:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(3 \cos x + \sin x)^2} dx = \frac{3\pi - 10 + 8 \ln 2}{50} .$$

**Ödev:**  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \alpha \sin x} dx = \frac{\pi \alpha - 2 \ln \alpha}{4(\alpha^2 + 1)}$  gösterip  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x + \alpha \sin x} dx$  hesaplayınız.

Bu bölümde son olarak, ilk kez Bölüm I'de söz edilen Pfaff Teoremini kanıtlayacağız:

**Pfaff Teoremi:** Bir  $R \subseteq \mathbb{R}^3$  bölgesinde, kısmi türevleri sürekli  $F = F(x, y, z)$ ,  $G = G(x, y, z)$ ,  $H = H(x, y, z)$  fonksiyonları verilsin. Tüm ikinci mertebe kısmi türevleri olan bir  $f = f(x, y, z)$  fonksiyonunun  $df = Fdx + Gdy + Hdz$  gerçekleyebilmesi için gerek  $F_y = G_x$ ,  $F_z = H_x$ ,  $G_z = H_y$  olmasıdır ve bu durumda  $f$  fonksiyonu, **herhangi** bir  $(x_0, y_0, z_0) \in R$  sabit noktası aracılığıyla aşağıda yazılmalıdır.

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^x F(t, y, z) dt = \int_{y_0}^y G(x_0, t, z) dt = \int_{z_0}^z H(x_0, y_0, z) dt + c. \quad (*)$$

**Kanıtlama:** Tüm ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olup üstelik  $df = Fdx + Gdy + Hdz$  gerçekleyen bir  $f$  fonksiyonu zaten  $f_x dx + f_y dy + f_z dz = df = Fdx + Gdy + Hdz$  nedeniyle  $F = f_x$ ,  $G = f_y$ ,  $H = f_z$  gözleyerek  $F_y = f_{xy} = f_{yx} = G_x$  ve  $F_z = f_{xz} = f_{zx} = H_x$  ve benzer biçimde  $G_z = H_y$  gerçekleşeceği apacaktır. Şimdi tersine  $F_y = G_x$ ,  $F_z = H_x$ ,  $G_z = H_y$  koşulları gerçeklendiğinde, amacımız  $df = Fdx + Gdy + Hdz$  gerçekleyen, ikinci

mertebeden kısmi türevleri sürekli bir  $f = f(x, y, z)$  fonksiyonunun var ve üstelik (\*) bağıntısıyla verilen fonksiyon olduğunu göstermektedir. Aranılan  $f$  fonksiyonunun öncelikle  $f_x = F$  yani  $f_x(x, y, z) = F(x, y, z)$  ( $\forall (x, y, z) \in R$ ) gerçekleşmesi **gerekeceğinden**,  $x$  değişkenine göre tümlev alarak, birazdan belirlenecek olan bir  $g = g(x, y, z)$  fonksiyonu aracılığıyla

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^x F(t, y, z) dt + g(y, z)$$

bulunur ve sonuçta, tümlev altında türev alma bağıntısını kullanıp  $y$  değişkenine göre türeterek ve yeterlik koşulları gereği  $F_y(x, y, z) = G_x(x, y, z)$  ve böylece  $F_y(t, y, z) = G_t(t, y, z)$  gerçeklendiğini unutmadan Leibniz teoremini kullanarak

$$\begin{aligned} \left( G(x, y, z) = \right) f_y(x, y, z) &= \int_{x_0}^x F_y(t, y, z) dt + g_y(y, z) = \int_{x_0}^x G_t(t, y, z) dt + g_y(y, z) \\ &= G(t, y, z)|_{x_0}^x + g_y(y, z) = G(x, y, z) + g_y(y, z) - G(x_0, y, z) \end{aligned}$$

ve böylece  $g_y(y, z) = G(x_0, y, z)$  gözleyerek

$$\begin{aligned} g(y, z) &= \int_{y_0}^y G(x_0, t, z) dt + h(z), \\ f(x, y, z) &= \int_{x_0}^x F(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y G(x_0, t, z) dt + h(z) \end{aligned}$$

ve bu kez  $z$  değişkenine göre türetip,  $f$  fonksiyonunun  $H = f_z$  gerçekleşmesi istendiğinden, ayrıca yeterlik koşullarını kullanarak ve sözgelimi

$$\int F_z(x, y, z) dx = \int H_x(x, y, z) dx = \int H_t(t, y, z) dt$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_z(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_z(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y G_z(x_0, t, z) dt + h'(z) \\ &= \int_{x_0}^x H_t(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y H_t(x_0, t, z) dt + h'(z) \\ &= H(x, y, z) - H(x_0, y, z) + H(x_0, y, z) - H(x_0, y_0, z) + h'(z) \\ &= H(x, y, z) - H(x_0, y_0, z) + h'(z) \end{aligned}$$

ve böylece  $h'(z) = H(x_0, y_0, z)$  yani  $h'(z) = \int_{z_0}^z H(x_0, y_0, t)$  bularak istenen  $f$  belirlenir. Bu  $f$  fonksiyonunun gerçekten

$$df = F(x, y, z) dx + G(x, y, z) dy + H(x, y, z) dz$$

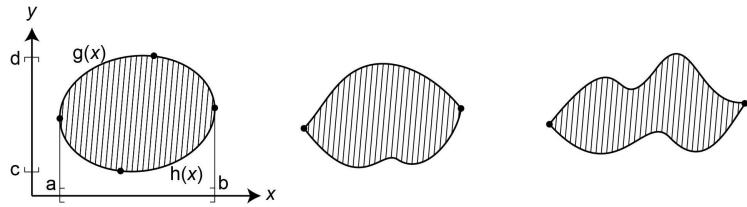
koşulunu gerçeklediğini, böylelikle ikinci mertebe türevlerinin sürekli olduğunu siz gösteriniz. Ayrıca

$$df = \left(\frac{x}{2} + y + 2z\right)dx + \left(x - \frac{3y}{2} - \frac{z}{2}\right)dy + \left(2x - \frac{y}{2} + z\right)dz$$

gerçekleyen  $f$  fonksiyonunu Pfaff Yöntemiyle belirleyiniz.

## Bölüm IV: Çok Katlı Riemann Tümlevleri

Bu bölümde, düzlemin, aşağıdaki şekillerde çizili olup, çevresini çevreleyen kapalı eğrinin iki gerçel değerli sürekli fonksiyonun grafiğindenoluştuğu, içeri boş olmayan kapalı sınırlı bölgelerde tanımlı  $f = f(x, y)$  gerçel değerli fonksiyonunun hangi koşullarda, onun  $R$  bölgesi üzerinde  $\int_R \int f(x, y) dx dy$  ile yazılan Riemann tümlevinin tanımlı olduğunu araştıracagız. Bölge örnekleri şunlardır:



Örnek bölge olarak yukarıdakilerin birincisi ile uğraşalım ve  $R$  bölgesini çevreleyen eğrinin üst parçası  $\pi_1(R) = [a, b]$  aralığında tanımlı gerçel değerli sürekli  $g = g(x)$  fonksiyonun grafiği, alt parçası ise  $[a, b]$  aralığında tanımlı gerçel değerli sürekli  $h = h(x)$  fonksiyonunun grafiği olsun. Sözü edilen tümlevi tanımlayabilmek için, tipki  $\int_a^b f(x) dx$  Riemann tümlevinde olduğu gibi,  $R$  bölgesinin parçalanışlarının alt ve üst Riemann topamları tanımlanmalıdır. Önce  $[a, b]$  aralığında gelişigüzel seçilen  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  gerçel sayıları aracılığıyla,  $[a, b]$  aralığını

$$[a, b] = [x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup [x_2, x_3) \cup \dots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}) \cup [x_{n-1}, x_n]$$

birimde ikişerli ayrik alt aralıklara ayırtılalım (parçalayalım). Dikkat bu ikişerli ayrik birleşime katılan son aralık kapalı  $[x_{n-1}, b]$  aralığıdır, fakat bu parçalanışı yine de kisalık amacıyla, sonuncu aralığın  $[x_{n-1}, x_n]$  olduğunu hiç unutmadan  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$  biçiminde yazacağiz. Benzer biçimde  $[c, d]$  aralığında gelişigüzel seçilen  $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$  gerçel sayıları aracılığıyla

$$[c, d] = [y_0, y_1) \cup [y_1, y_2) \cup \dots \cup [y_{m-1}, y_m] = \bigcup_{i=1}^m [y_{i-1}, y_i)$$

ayrışması ve böylece  $[a, b] \times [c, d]$  dikdörtgeninin

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k) \times \bigcup_{i=1}^m [y_{i-1}, y_i) = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^m ([x_{k-1}, x_k) \times [y_{i-1}, y_i))$$

ayrışması ve üstelik apaçık biçimde

$$R \subseteq \pi_1(R) \times \pi_2(R) = [a, b] \times [c, d] \text{ yani } R = R \cap ([a, b] \times [c, d])$$

olduğundan,  $R$  bölgesinin

$$R = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^m (([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R) = \bigcup_{(k,i)} R_{k,i}$$

ayrışması elde edilir, burada her bir  $(k, i)$  indis çifti için

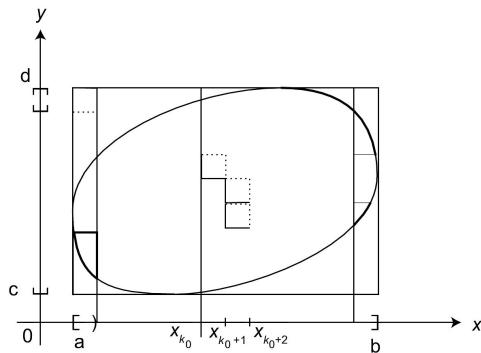
$$R_{k,i} = ([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R \subseteq R$$

yazılmıştır, kolaylıkla  $(k_1, i_1) \neq (k_2, i_2)$

$$\begin{aligned} R_{k_1,i_1} \cap R_{k_2,i_2} &\subseteq ([x_{k_1-1}, x_{k_1}] \times [y_{i_1-1}, y_{i_1}]) \cap ([x_{k_2-1}, x_{k_2}] \times [y_{i_2-1}, y_{i_2}]) \\ &= ([x_{k_1-1}, x_{k_1}] \cap [x_{k_2-1}, x_{k_2}]) \times ([y_{i_1-1}, y_{i_1}] \cap [y_{i_2-1}, y_{i_2}]) = \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü  $(k_1, i_1) \neq (k_2, i_2)$  nedeniyle ya  $k_1 \neq k_2$  olur ve sonuçta  $[x_{k_1-1}, x_{k_1}] \cap ([x_{k_2-1}, x_{k_2}] = \emptyset$  geçerli ya da  $i_1 \neq i_2$  olur ve  $[y_{i_1-1}, y_{i_1}] \cap ([y_{i_2-1}, y_{i_2}] = \emptyset$  geçerlidir. Şimdi  $R_{k,i}$  bölgelerinin boş olmayanlarını (dikkat: bazı  $(k, i)$  indisleri için  $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]$  ile  $R$  kesişmeyecek).

Örneğin şekilde en üst soldaki dikdörgen



$R$  bölgesi ile kesişmez ), evet  $R_{k,i}$  bölgelerinin boş olmayanlarının sayısını yeniden numaralayarak,  $R$  bölgesini, aşağıdaki gibi, ikişerli ayrık

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N \quad (1)$$

alt bölgelerine ayırtmış oluruz. Şimdi gerektiği için bu alt bölgelerin alanlarını tanımlayalım. Eğer

$$R_m = ([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \subseteq R$$

ise  $([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]$  olur, çünkü iyi bilindiği gibi  $A \subseteq B$  ve  $A = A \cap B$  iddiaları eşdeğerdir, bu durumda  $R_m$  alt bölgesinin alanı (dikkat:  $R_m$  bölgesi

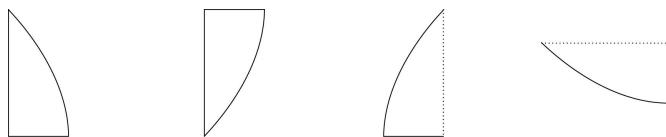


biçiminde sağ kenarını ve üst kenarını **icermeyen** bir dikdörtgendir)

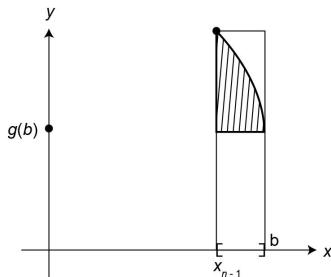
$$\text{Alan}R_m = (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_i - y_{i-1}) > 0$$

pozitif gerçel sayısı olarak tanımlanır. Sınırı yakın alt bölgelerin alanlarını ise Analiz I ve orta okul bilgisi yardımıyla hesaplayabiliriz,

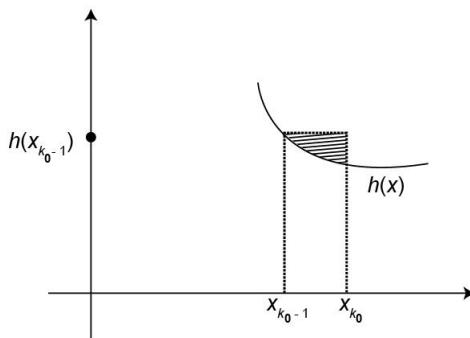
Örneğin aşağıdaki alt bölgelerin hepsinin alanı bu bilgilerle hesaplanır:



Örneğin en soldaki alanı belirleyen  $O_x$  eksenindeki alt parçalanış aralığı  $[x_{n-1}, b]$  ise,  $R$  bölgesini çevreleyen kapalı eğrinin üst parçası da sürekli  $g = g(x)$  fonksiyonunun grafiği ise, taralı alan,  $g$  fonksiyonunun  $[x_{n-1}, b]$  aralığındaki grafiği altında kalan alan ve küçük dikdörtgenin alanları cinsinden



$\int_{x_{n-1}}^b g(x)dx - (b - x_{n-1}) \cdot g(b)$  pozitif gerçel sayısından başka bir şey değildir. Sonuncu alt bölgenin alanı ise,  $R$  bölgesini çevreleyen eğrinin alt parçası  $[a, b]$  aralığında tanımlı sürekli gerçel değerli  $h = h(x)$  fonksiyonunun grafiği olmak üzere



$$(x_{k_0} - x_{k_0-1}) \cdot h(x_{k_0-1}) - \int_{x_{k_0-1}}^{x_{k_0}} h(x) dx$$

pozitif gerçel sayılarından başka birşey değildir. Artık (1) bağıntısında yazılan parçalanışı kısaltı amaciyla

$$\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$$

ile yazarak, aşağıdaki toplamları tanımlayabiliriz :

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_N) = \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k \cdot \inf f(R_k)$$

$$S_f(R_1, R_2, \dots, R_N) = \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_k)$$

Burada,  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde tanımlı gerçel değerli  $f$  fonksiyonunun **sınırlı** olduğu, kısacası

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad (\forall (x, y) \in R)$$

koşulları gerçekleşecek biçimde  $m$  ve  $M$  gerçel sabitlerinin varolduğu varsayılmaktadır ; Örneğin  $f = f(x, y)$  gerçel değerli  $R$  bölgesinde **sürekliyse**, kapalı-sınırlı  $R$  bölgesi tıpkı olduğundan,  $f$  fonksiyonu bu bölgede uygun bir noktada en büyük değerine, uygun bir noktada en küçük değerine erişir, kısacası

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) < f(x_1, y_1) \quad (\forall (x, y) \in R)$$

olacak biçimde  $(x_0, y_0) \in R$  ve  $(x_1, y_1) \in R$  noktaları vardır. Bu önemli gerçek yazının Genel Topoloji (Nobel Kitapevi, 2014) kitabında ispatlanmıştır!

**Temel Teorem:** **Herhangi** bir tıpkı  $A$  kümesinde tanımlanan **herhangi** bir **sürekli gerçel değerli**  $f : A \rightarrow R$  fonksiyonu için  $f(a_0) \leq f(x) \leq f(a_1)$  ( $\forall x \in A$ ) koşullarını gerçekleyen  $a_0, a_1 \in A$  elemanları vardır.

Demek ki, herhangi bir tıpkı kümede tanımlı, gerçel değerli ve sürekli **her** fonksiyon, bu tıpkı kümenin uygun bir noktasında en küçük ve uygun bir noktasında en büyük değerine **erişmektedir**. Bu nedenle, yukarıdaki kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde **sürekli**  $f$  gerçel değerli fonksiyonunun uygun  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in R$  noktalarında şunu gerçekler:

$$m_0 = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M_0 \quad (\forall (x, y) \in R)$$

O halde, yukarıdaki (1) parçalansızındaki her bir  $R_k \subseteq R$  alt bölgesi için  $0 \leq \text{Alan}R_k$  nedeniyle ve herbir  $(x, y) \in R_k$  için, apaklık biçimde  $m_0 \leq f(x, y) \leq M_0$  nedeniyle  $m_0 \leq \inf_{(x,y) \in R_k} f(x, y) = \inf f(R_k) \leq \sup f(R_k) = \sup_{(x,y) \in R_k} f(x, y) \leq M_0$  bularak

$$m_0 \cdot \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k \leq \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k \cdot \inf f(R_k) = s_f(R_1, R_2, \dots, R_N) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^N AlanR_k \cdot \sup f(R_k) = S_f(R_1, R_2, \dots, R_N) \leq M_0 \cdot \sum_{k=1}^N AlanR_k$$

ve kısalık amacıyla

$$AlanR = \sum_{k=1}^N AlanR_k > 0$$

yazılırsa sonuçta benzer şeyler, herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışı için yapılarak aşağıdaki temel eşitsizlikler bulunur:

$$-\infty < m_0 \cdot AlanR \leq s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq M_0 \cdot AlanR < +\infty$$

**Dikkat:** Bu eşitsizliklerin, aslında  $R$  bölgesinde tanımlı, gerçek değerli ve SINIRLI her fonksiyon için geçerli olduğunu gözleyiniz.  $R$  bölgesinin herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışları aracılığıyla tanımlanan

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n AlanR_k \cdot \inf f(R_k), \quad S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n AlanR_k \cdot \sup f(R_k)$$

toplamlarına, sırasıyla,  $f$  fonksiyonun bu parçalanışa karşılık gelen **alt Riemann toplamı** ve **üst Riemann toplamı** denilir.  $R$  bölgesinin her parçalanışının,  $[a, b] = \pi_1(R)$  ve  $[c, d] = \pi_2(R)$  aralıklarının

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = b$$

parçalanıları aracılığıyla belirlenen

$$\emptyset \neq R_{k,i} = ([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R \subseteq R$$

alt bölgelerindenoluştuğu, bunların ikişer ikişer ayrık oldukları unutulmamalıdır.  $[a, b]$  aralığının, yukarıdaki parçalanış noktalarına tek bir tane yeni bir parçalanış noktası eklendiğinde, örneğin

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_0-1} < \xi_0 < x_{k_0} < x_{k_0+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

parçalanışı tanımlandığında, her bir  $1 \leq i \leq m$  indis için,  $R$  bölgesinin hem  $([x_{k_0-1}, \xi_0] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R$  hem de  $([\xi_0, x_{k_0}] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R$  gibi yeni alt bölgeleri tanımlanır. Benzer gözlemler  $[c, d]$  aralığının yukarıda yazılı parçalanışa, tek bir tane yeni parçalanış noktası ekleyerek (bu yeni noktayı tanımlayarak) elde edilir. Biraz önce tanımlanan yeni alt bölgelerin

$$([x_{k_0-1}, \xi_0] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R \subsetneq R_{k_0,i} = ([\xi_0, x_{k_0}] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R,$$

$$([\xi_0, x_{k_0}] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R \subsetneq R_{k_0,i}$$

gerçeklediğini gözleyin çünkü hem  $[x_{k_0-1}, \xi_0] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$  hemde  $[\xi_0, x_{k_0}] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$

nedeniyle ve  $A_1 \subseteq A_2$ ,  $B_1 \subseteq B_2$  ise  $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$  olduğunu söyleyen bilgiyi kullanırız. Üstelik, dikkat edilirse, sözgelimi

$$R_{k_0,i} = [([x_{k_0-1}, \xi_0) \times [y_{i-1}, y_i)) \cap R] \cup [([\xi_0, x_{k_0}) \times [y_{i-1}, y_i)) \cap R]$$

gerçekleşir, yani  $R_{k_0,i}$  bölgesi iki yeni alt bölgeye ayrılmış (parçalanmış) olur. Böylece  $[a, b]$  aralığındaki parçalanışa, yeni bir tanecik nokta eklendiğinde  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışa tam 2m tane yeni alt parçalanış bölgesi eklenmiş olur, o halde  $[a, b]$  aralığına yeni N tane nokta eklenirse  $R$  bölgesinin parçalanış bölgelerinin sayısı  $2Nm$  tane artmış olur. Sayıları artan, alanları küçülen bu yeni alt parçalanış bölgelerinin belirlediği  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_{N^*}^*\}$  parçalanışına  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışının **bir incelmesi** denir, çünkü her bir  $R_k^*$  için, tek türlü belirli bir  $i$  indisinde  $R_k^* \subseteq R_i$  gerçekleşmektedir. Verilen bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışını yalnızca bu yöntemle inceltmek mümkündür.

Şimdi aşağıdaki önermeleri kanıtlayalım :

**Önerme 1:**  $R$  bölgesinin parçalanışları inceldikçe,  $R$  bölgesinde tanımlı gerçel değerli ve sınırlı bir  $f$  fonksiyonuna ait alt Riemann toplamları artar, üst Riemann toplamları ise küçülür.

**Kanıtlama :**  $R$  bölgesinin bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışı tanımlansın. Bunu belirleyen gerçel sayılar  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  ve  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$  olsunlar.  $[a, b]$  aralığındaki bu  $n$  tane parçalanış noktasına, yeni bir  $\xi_0 \in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$  noktası ekleyerek  $R$  bölgesinin parçalanış bölgelerinin sayısını  $m$  tane arttırılmış ve sözgelimi  $([x_{k_0-1}, x_{k_0}) \times [y_{i-1}, y_i)) \cap R$  bölgesi  $R_{m_0}$  ise,  $\xi_0$  aracılığıyla bu alt bölgeyi, tipki yukarıda yapıldığı gibi  $f(R_{m_0}) = f(R_{m_0,1}) \cup f(R_{m_0,2})$  olur ve ünlü  $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  için  $\inf B \leq \inf A$  bilgisile ( dikkat:  $\inf B$  gerçel sayısı  $B$  için bir alt sınır ve dolayısıyla  $\inf B < x$  ( $\forall x \in B$ ) ve üstelik  $A \subseteq B$  nedeniyle, sonuçta  $\inf B \leq x$  ( $\forall x \in A$ ) bularak  $\inf B \leq \inf A$  elde ediniz),  $\inf f(R_{m_0,1}) \geq \inf f(R_{m_0})$  ve  $\inf f(R_{m_0,2}) \geq \inf f(R_{m_0})$  bulunur, çünkü hem  $f(R_{m_0,1}) \subseteq f(R_{m_0})$  hemde  $f(R_{m_0,2}) \subseteq f(R_{m_0})$  kapsamları geçerlidir, ayrıca apaçık biçimde  $\text{Alan}R_{m_0} = \text{Alan}R_{m_0,1} + \text{Alan}R_{m_0,2}$  olduğundan, sonuçta

$$\text{Alan}R_{m_0} \cdot \inf f(R_{m_0}) = \text{Alan}R_{m_0,1} \cdot \inf f(R_{m_0}) + \text{Alan}R_{m_0,2} \cdot \inf f(R_{m_0})$$

$$\leq \text{Alan}R_{m_0,1} \cdot \inf f(R_{m_0,1}) + \text{Alan}R_{m_0,2} \cdot \inf f(R_{m_0,2})$$

bulunur; tüm bunları ikiye ayıran tüm  $R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}$  alt bölgeleri için yaparsak,  $f$  fonksiyonunun  $\{R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}\}$  parçalanışına karşılık gelen alt Riemann toplamı için şunlar geçerlidir:

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \inf f(R_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \neq k_1, k_2, \dots, k_m} AlanR_k \cdot \inf(R_k) + \sum_{i=1}^m AlanR_{k_i} \cdot \inf(R_{k_i}) \\
&\leq \sum_{k \neq k_1, k_2, \dots, k_m} + \sum_{i=1}^m (AlanR_{k_{i,1}} \cdot \inf(R_{k_{i,1}}) + AlanR_{k_{i,2}} \cdot \inf(R_{k_{i,2}}))
\end{aligned}$$

Bu son toplamın, üye sayısı  $2m$  tane artmış yeni parçalanişa karşılık gelen alt Riemann toplamı olduğunu gözleyiniz. Bunlar,  $[a, b]$  ve  $[c, d]$  aralığına yeni (sonlu tane keyfi) parçalaniş noktası ekleyerek elde edilen parçalanişlar için de yapılarak şu temel gerçek gözlenmiş olur: Eğer  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*\}$  parçalanişi  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanişının bir incelmesi ise

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq s_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*) \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

geçerlidir, sonuncu eşitsizlik, benzer düşüncelerle ve bu kez  $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  için  $\sup A \leq \sup B$  bilgisile kolayca gösterilir. Bitti!

**Önerme 2:** Önerme 1'deki  $f$  fonksiyonunun herhangi bir alt Riemann toplamı, herhangi bir üst Riemann toplamından daima eşit küçüktür.

**Kanıtlama:** Söylenen sudur:  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinin **herhangi** iki parçalanişi sırasıyla

$\{R_1, R_2, \dots, R_{n_1}\}$  ve  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_{n_2}^*\}$  olsun. Bu durumda

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_{n_1}) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_{n_2}^*)$$

geçerlidir. Bunu göstermek çok kolaydır.  $[a, b] = \pi_1(R)$  kapalı-sınırlı aralığının birinci parçalanişi belirleyen noktaları  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  ikincisini belirleyen noktaları  $a = x_0^* < x_1^* < \dots < x_{m-1}^* < x_m^* = b$  ise, tüm bu noktaların hepsi kullanarak tanımlanan parçalaniş

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_N = b$$

ile yazilsın, o halde herbir  $\xi_k$  ya bir  $x_i$  ya da bir  $x_j^*$  gerçel sayısıdır ve benzer şeyleri  $[c, d] = \pi_2(R)$  aralığı için yaparsak

$$c = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{m-1} < \eta_m = d$$

yeni parçalanişi ve böylece  $R$  bölgesinin

$$R_{k,i}^{**} = ([\xi_{k-1}, \xi_k] \times [\eta_{i-1}, \eta_i]) \cap R$$

alt bölgeleri belirlenmiş olur, bu çift indisli alt bölgeleri eğer yeniden sayıp numaralarsak  $\{R_1^{**}, R_2^{**}, \dots, R_M^{**}\}$  parçalanişi elde edilir. Dikkat edilirse bu yeni parçalaniş hem  $\{R_1, \dots, R_{n_1}\}$  hem de  $\{R_1^*, \dots, R_{n_2}^*\}$  parçalanişlarından ince olduğundan (neden?), bir önceki Önerme kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_{n_1}) \leq s_f(R_1^{**}, R_2^{**}, \dots, R_M^{**}) \leq S_f(R_1^{**}, R_2^{**}, \dots, R_M^{**}) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_{n_2}^*)$$

Bunun istenen eşitsizlik olduğuna dikkat ediniz.

**Önerme 3:**  $f$  fonksiyonunun alt ve üst Riemann tümlevleri için daima aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$-\infty < \underline{R}_f(R) \leq \overline{R}_f(R) < +\infty$$

**Kanıtlama:** Kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde gerçek değerli ve sınırlı herhangi bir  $f$  fonksiyonunun,  $R$  bölgesindeki **alt Riemann tümlevi** ile **üst Riemann tümlevi** sırasıyla

$$\underline{R}_f(R) = \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} s_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

$$\overline{R}_f(R) = \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

biçiminde tanımlanır. Dikkat edilirse,  $\mathbb{R}$  kümesinin  $\{a_\varphi : \varphi \in \Lambda\}$  ve  $\{b_\varphi : \varphi \in \Lambda\}$  gibi aynı bir  $\Lambda$  indis kümesiyle indislenmiş alt kümeleri için, eğer  $\varphi, \beta \in \Lambda$  indisleri *ne olursa olsun*  $a_\varphi \leq b_\beta$  eşitsizlikleri geçerliyse

$$-\infty < \sup_{\varphi \in \Lambda} a_\varphi \leq \inf_{\varphi \in \Lambda} b_\varphi < +\infty$$

bulunur, çünkü sabit bir  $\beta_0 \in \Lambda$  için, varsayılm gereği  $a_\varphi \leq b_{\beta_0}$  ( $\forall \varphi \in \Lambda$ ) olduğundan, kolayca  $\sup_{\varphi \in \Lambda} a_\varphi \leq b_{\beta_0}$  sonucu bulunur, buysa  $\sup_{\varphi \in \Lambda} a_\varphi \leq b_\beta$  ( $\forall \beta \in \Lambda$ ) sonucunu verir (neden?), dolayısıyla infimum tanımı gereği  $\sup_{\varphi \in \Lambda} a_\varphi \leq \inf_{\beta \in \Lambda} b_\beta = \inf_{\varphi \in \Lambda} b_\varphi$  ve dikkat edilirse keyfi bir  $\varphi_0 \in \Lambda$  indisini aracılığıyla,  $a_{\varphi_0}$  ve  $b_{\varphi_0}$  birer gerçek sayı olduğundan

$$-\infty < a_{\varphi_0} \leq \sup_{\varphi \in \Lambda} a_\varphi \leq \inf_{\varphi \in \Lambda} b_\varphi \leq b_{\varphi_0} < +\infty$$

bulunur. Oysa  $R$  bölgesinin herhangi  $\{R_1, \dots, R_n\}$  ve  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$  parçalanışları için, bir önceki önermede kanıtlandığı gibi

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*)$$

olduğundan, yukarıda söylenen bilgilerin işliğinde  $\underline{R}_f(R) = \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} (R_1, R_2, \dots, R_n) = \overline{R}_f(R)$  bulunur. Burada gerek  $\underline{R}_f(R)$  ve gerekse  $\overline{R}_f(R)$  yazılışlarında, birinci  $R$  Riemann ikinci  $R$  ise bölgeyi göstermektedir. **Dikkat:** Tüm parçalanışlar üzerinden supremum ve infimum alındığı unutulmamalıdır, dolayısıyla yerine küçük  $0 < \varepsilon < 1$  alındığında,  $[a, b]$  ve  $[c, d]$  aralıklarında  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  ve  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  noktaları, herbir  $k$  ve  $i$  indisleri için  $0 < x_k - x_{k-1} < \varepsilon$  ve  $0 < y_i - y_{i-1} < \varepsilon$  olacak biçimde tanımlanırsa,  $R$  bölgesinin bu noktalar aracılığıyla tanımlanan parçalanışı  $\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)\}$  ile yazılsa, herbir  $R_m(\varepsilon)$  alt bölgesinin alanı aşağıdaki geçerli olur:

$$\begin{aligned} Alan(R_m(\varepsilon)) &= Alan(([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i]) \cap R) \\ &\leq Alan(([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i])) = (x_{k-1} - x_k) \cdot (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

Böylece, sözgelimi üst Riemann tümlevi için

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_f(R) &= \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)) \\
 &= \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k(\varepsilon) \cdot \sup f(R_k(\varepsilon)) \\
 &\leq M \cdot \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k(\varepsilon) < M \cdot N\varepsilon
 \end{aligned}$$

bulunur, burada  $R$  bölgesinde  $f(x, y) \leq M$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) varsayılmıştır. Burada  $\varepsilon$  yerine küçük, sözgelimi  $0 < \varepsilon < \frac{1}{10^{10}}$  alınsa bile, parçalanmış bölgelerinin sayısı  $N$  **çok büyük** olabilir, bu nedenle  $\overline{R}_f(R) \leq M \cdot N\varepsilon$  sınırlamasındaki üst sınırın sıfıra yakın olduğu **düşünülmemelidir**.

**Tanım:** Kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde tanımlı, gerçel değerli ve **sınırlı** bir  $f$  fonksiyonuna, ancak ve yalnız aşağıda yazılı

$$\underline{R}_f(R) = \overline{R}_f(R)$$

koşulunu gerçeklerse  $R$  bölgesinde **Riemann tümlevlenebilir** denir.

**Önerme 4:** Riemann tümlevlenebilir **olmayan** sınırlı gerçel değerli fonksiyonlar vardır.

**Kanıtlama:** Kapalı-sınırlı  $R$  bölgesi, bu bölümün girişinde çizilen bölgelerden birisi olsun.  $f$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & ; (x, y) \in R - (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 0 & ; (x, y) \in R \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Göründüğü gibi  $f$  gerçel değerli fonksiyonu 0 ve 1'den başka değer almamaktadır, böylece  $0 \leq f(x, y) \leq 1$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) olmaktadır, yani  $f$  gerçel değerli fonksiyonu sınırlıdır.  $R$  bölgesinin **herhangi** bir  $R_1, R_2, \dots, R_n$  parçalanışına karşılık gelen alt ve üst Riemann toplamları

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = 0 < \text{Alan}R = S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

gerçekler, çünkü düzlemede alanı,  $0 < \text{Alan}R^*$  gerçekleyen **herhangi** bir  $R^*$  bölgesi **daima**  $(a_1, b_1) \times (c_1, d_1)$  gibi, şekli aşağıdaki gibi olan bir dikdörtgeni kapsar (neden?)



böylece bu dikdörtgen bölgede, her iki bileşeni de rasyonel sayılar olan sayılabilir sonsuz sayıda sıralı ikili verdır, çünkü her  $r_1 \in (a_1, b_1)$ ,  $r_1 \in (c_1, d_1)$  rasyonel sayıları için  $(r_1, r_2)$  noktaları bu niteliktedir (dikkat: herhangi iki farklı gerçel sayı arasında sayılabilir

sonsuz tane rasyonel sayı vardır, (bkz. Analiz III ders notları), benzer biçimde en az bir bileşeni irrasyonel olup  $R^*$  bölgesine ait olan sayılamaz sonsuz tane  $(x, y)$  sıralı ilişkisi vardır. Bu gözlemler nedeniyle yukarıdaki  $R_1, R_2, \dots, R_n$  parçalanışı için  $0 < \text{Alan}R_k$  ise  $f(R_k) = \{f(x, y) : (x, y) \in R_k\} = \{0, 1\}$  böylece  $\inf f(R_k) = 0 < 1 = \sup f(R_k)$  olur  $s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \inf f(R_k) = 0$  bulunur, çünkü toplama katılan çarpım değerlerindeki ikinci çarpanlar hep sıfırdır; benzer biçimde  $S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k = \text{Alan}R$  bulunur (neden?) O halde bu  $f$  fonksiyonu için, üst ve alt Riemann tümler değerleri

$$\underline{R}_f(R) = \sup s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = 0 < \text{Alan}R = \inf S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \overline{R}_f(R)$$

kısaltası  $\underline{R}_f(R) < \overline{R}_f(R)$  olmaktadır, bu nedenle  $f$  fonksiyonu Riemann tümlevlenebilir **değildir**.

Temel Teorem ashında aşağıdakidir:

**Teorem 1:** Kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde hemen her yerde gerçel değerli, hemen her yerde sürekli olan herhangi bir fonksiyon,  $R$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilirdir.

Bu olağanüstü teorem  $f$  fonksiyonunun,  $f(x, y) = \mp\infty$  koşulunu gerçekleyen  $(x, y) \in R$  noktaları kümesinin ve aynı zamanda  $f$ 'in süreksiz olduğu  $(x^*, y^*) \in R$  noktaları kümesinin Lebesgue ölçüsünün SIFIR olması durumunda,  $R$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilir olduğunu söylemektedir ve **çarpım ölçüüsü** kavramının okutulduğu **Reel Analiz** derslerinde kanıtlaması yapılmıştır. Biz bunun çok özel aşağıdaki biçimini kanıtlayalım.

**Teorem 2:**  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde **sürekli** gerçel değerli her fonksiyon  $R$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilirdir.

**Kanıtlama:**  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde tanımlı gerçel değerli bir  $f$  fonksiyonu eğer sürekli ise, bilindiği ve gösterildiği gibi öncelikle sınırlıdır, yani  $m \leq f(x, y) \leq M \quad (\forall (x, y) \in R)$  olacak biçimde  $m, M$  sabitleri vardır, böylece daha önce gösterildiği gibi, her  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışı için  $-\infty < m \cdot \text{Alan}R \leq s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq \underline{R}_f(R) \leq \overline{R}_f(R) \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq M \cdot \text{Alan}R < +\infty$  olur, ayrıca  $f$  fonksiyonu  $R$  bölgesinde düzgün süreklidir, yani

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

çıkarsama koşulunu gerçekler. Özellikle  $0 < \gamma_0 = \text{Alan}R$  sabiti aracılığıyla  $< \frac{\varepsilon}{\gamma_0 + 1}$  pozitif sayısına karşılık

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\gamma_0 + 1}$$

koşulu gerçekleyenecek biçimde pozitif bir  $\delta_\varepsilon$  vardır (belirlenir). O halde  $\pi_1(R) = [a, b]$  ve  $\pi_2(R) = [c, d]$  aralıklarında,  $0 < \delta'_\varepsilon < \frac{\delta_\varepsilon \wedge (b-a) \wedge (d-c)}{2}$  gerçel ve  $\left[ \frac{b-a}{\delta'_\varepsilon} \right] = n_\varepsilon$  ile  $\left[ \frac{d-c}{\delta'_\varepsilon} \right] = m_\varepsilon$  doğal sayıları aracılığıyla (dikkat: sözelimi  $\delta'_\varepsilon < \frac{b-a}{2}$  nedeniyle  $2 < \frac{b-a}{\delta'_\varepsilon}$  ve böylece

$2 \leq \left[ \frac{b-a}{\delta'_\varepsilon} \right] = n_\varepsilon$  ve ayrıca  $0 < \delta'_\varepsilon < \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon$  olduğunu gözleyiniz)

$$x_k = a + k\delta'_\varepsilon \quad , \quad y_i = c + i\delta'_\varepsilon \quad (k = 1, \dots, n_\varepsilon \text{ ve } i = 1, \dots, m_\varepsilon)$$

gerçek sayılarının belirlediği parçalanışlar aracılığıyla,  $R$  bölgesinde

$$R_{k,i}(\varepsilon) = ([x_{k-1}, x_k) \times [y_{i-1}, y_i)) \cap R \subseteq R$$

alt bölgelerinin belirlediği ayrışma (parçalanış) göz önüne alınsin. Dikkat edilirse  $x_k - x_{k-1} = \delta'_\varepsilon < \delta_\varepsilon$ ,  $y_i - y_{i-1} = \delta_\varepsilon < \delta_\varepsilon$  olmaktadır. Bu çift indisli  $R_{k,i}(\varepsilon)$  bölgelerini yeniden sayıp numaralandıralım ve belirledikleri parçalanışı

$$\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)\} \quad (*)$$

olarak yazalım; kolayca  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in R_m(\varepsilon)$  düzlem noktaları ne olursa olsun  $\xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k)$  ve  $\eta_1, \eta_2 \in [y_{i-1}, y_i)$  gerçekleyen  $k$  ve  $i$  indisleri var ve sonuca  $|\xi_1 - \xi_2| \leq x_k - x_{k-1} < \delta_\varepsilon$  ve  $|\eta_1 - \eta_2| \leq y_i - y_{i-1} < \delta_\varepsilon$  olduğundan  $|f(\xi_1, \eta_1) - f(\xi_2, \eta_2)| < \frac{\varepsilon}{\gamma_0+1}$  ve böylece

$$0 \leq \sup f(R_m(\varepsilon)) - \inf f(R_m(\varepsilon)) = \sup_{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in R_m(\varepsilon)} |f(\xi_1, \eta_1) - f(\xi_2, \eta_2)| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma_0 + 1}$$

elde edilir, çünkü şu temel bilgiyi kullanmaktayız:

**Temel Bilgi:** Boştan farklı ve sınırlı **herhangi**  $A \subseteq R$  alt kümesi için daima  $0 \leq \sup A - \inf A = \sup_{x,y \in A} |x - y|$  geçerlidir.

Gerçekten, öncelikle, en az bir  $a_0 \in A \neq \emptyset$  elemanı var olduğundan, kolayca  $\inf A \leq a_0 \leq \sup A$  ve benzeriyle  $\inf A - \sup A \leq x - y \leq \sup A - \inf A$  yani  $-(\sup A - \inf A) \leq x - y \leq \sup A - \inf A$  böylece  $|x - y| \leq \sup A - \inf A$  elde edileceğinden (unutulmasın:  $0 \leq \alpha$  ise  $-\alpha \leq x \leq \alpha$  ile  $|x| \leq \alpha$  iddiaları eşdeğerdir.) sonuca  $|x - y| \leq \sup A - \inf A$  ( $\forall x, y \in A$ ) bulup, supremum olarak  $0 \leq \sup_{x,y \in A} |x - y| \leq \sup A - \inf A$  elde edilir. Oysa supremum ve infimum tanımları gereği,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$  olacak biçimde  $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A$  gerçek sayıları var olduğundan, sonuca  $\forall \varepsilon > 0$  için  $(\sup A - \inf A) - \varepsilon = (\sup A - \frac{\varepsilon}{2}) - (\inf A + \frac{\varepsilon}{2}) < x_\varepsilon - y_\varepsilon \leq |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \sup_{x,y \in A} |x - y|$  kısacası,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\sup A - \inf A \leq (\sup_{x,y \in A} |x - y|) + \varepsilon$  nedeniyle  $\sup A - \inf A \leq \sup_{x,y \in A} |x - y|$  geçerlidir, (1) ve (2) eşitsizlikleri istenileni verir.; burada şu gerçek kullanıldı: **Temel Gerçek:**  $a, b \in \mathbb{R}$  gerçek sayılarının  $a \leq b$  gerçekleyebilmesi için gerek  $\forall \varepsilon > 0$  için  $a \leq b + \varepsilon$  olmalıdır. Gereklik apakiktır, tersine yeterlilik varsayımlı altında  $a \leq b$  olur, çünkü olmasaydı  $b < a$  olur ve  $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{3} > 0$  için yeterlik varsayımlı gereği  $a \leq b + \varepsilon_0$  olduğundan sonuca  $a \leq b + \varepsilon_0 = \frac{a+2b}{3} < \frac{a+2a}{3} = a$  yani  $a < a$  bulunurdu! Tüm bu bilgi ve gerçekler kullanırsa, yukarıda (\*) parçalanışı için zaten hem  $\overline{R}_f(R) = \inf S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_1(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon))$  hem

de  $s_f(R_1(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)) \leq \sup s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \underline{R}_f(R)$  olduğundan, (dikkat: infimum ve supremum tüm  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalaları üzerinden alınmaktadır) sonuçta

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{R}_f(R) - \underline{R}_f(R) \leq S_f(R_1(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)) - s_f(R_1(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)) \\ &= \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k(\varepsilon) \cdot (\sup f(R_k(\varepsilon)) - \inf f(R_k(\varepsilon))) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\gamma_0 + 1} \cdot \sum_{k=1}^N \text{Alan}R_k(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \cdot \gamma_0}{\gamma_0 + 1} < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \end{aligned}$$

bularak, biraz önceki Temel Gerçek nedeniyle  $0 \leq \overline{R}_f(R) - \underline{R}_f(R) \leq 0$  yani  $f$  fonksiyonunun  $R$  bölgesinde Riemann tımlımlenebilir olduğunu söyleyen  $\overline{R}_f(R) = \underline{R}_f(R)$  sonucu bulunur. Bitti!

Bundan böyle  $R$  bölgesinde Riemann tımlımlenebilir  $f$  için, eşit olan  $\overline{R}_f(R) = \underline{R}_f(R)$  gerçek sayısına  $f$ 'in **Riemann tımlılev değeri** diyeceğiz ve bu gerçek sayıyı kısaca  $R_f(R)$  ile ya da daha yaygın kullanım olan

$$R_f(R) = \iint_R f(x, y) dx dy$$

işareti ile yazacağız.

**Ödev:**  $f$  fonksiyonu  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde sabit fonksiyon ise, yani  $f(x, y) = c_0$  ( $\forall (x, y) \in R$ ) olacak biçimde bir  $c_0$  sabiti varsa

$$\overline{R}_f(R) = \underline{R}_f(R) = c_0 \cdot \text{Alan}R$$

gerçekleştiğini gösteriniz.

**Ödev:** Önceki örnekten yararlanarak gösterin: Düzlemde kapalı-sınırlı herhangi  $R$  bölgesi için aşağıdaki geçerlidir:

$$\iint_R dx dy = \text{Alan}R$$

**Önerme 5:**  $f$  fonksiyonu kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde Riemann tımlımlenebilirse  $R_f(R)$  tımlılev değeri aşağıdaki limite eşittir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot f(x_k, y_k) : (x_k, y_k) \in R_k (k = 1, \dots, n) \text{ ve} \right.$$

$$\left. \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N, \max_{1 \leq k \leq n} (\text{Alan}R_k) < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_\varepsilon) \right\}$$

kıscası, yeterince küçük her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık,  $R$  bölgesinin  $\max_{1 \leq k \leq n} (\text{Alan}R_k) < \varepsilon$  koşuluunu gerçekleyen herbir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalansıyla, gelişigüzel seçilen  $(x_k, y_k) \in R_k$  noktaları ne olursa olsun (alanlar çok küçük olduğundan, parçalansıa katılan alt bölgelerin sayısı  $n$  yeterince büyütür) bu türde parçalansılar üzerinden alındıktan toplamların limiti şunu gerçekler :

$$R_f(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot f(x_k, y_k)$$

**Kanıtlama :** Öncelikle  $f$  fonksiyonu Riemann tümlevlenebilir, kıscası  $R_f(R) = \overline{R}_f(R) = \underline{R}_f(R)$  olduğundan

$$\sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = R_f(R) = \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

geçerlidir, dolayısıyla her  $\varepsilon > 0$  için, infimum ve supremum olmanın gereği

$$R_f(r) - \varepsilon < s_f(R_1^*(\varepsilon), R_2^*(\varepsilon), \dots, R_{n_1}^*(\varepsilon)) \leq S_f(R_1^*(\varepsilon), R_2^*(\varepsilon), \dots, R_{n_2}^*(\varepsilon)) < R_f(R) + \varepsilon$$

gerçeklenecek biçimde  $R$  bölgesinin  $\{R_1^*(\varepsilon), \dots, R_{n_1}^*(\varepsilon)\}$  ve  $\{R_1^{**}(\varepsilon), \dots, R_{n_2}^{**}(\varepsilon)\}$  parçalansıları vardor, ayrıca hem  $[a, b] = \pi_1(R)$  hem de  $[c, d] = \pi_2(R)$  aralıklarında, her bir alt aralığın uzunluğu  $< \varepsilon$  olan parçalansılar aracılığıyla,  $R$  bölgesinin bir  $\{R_1^{***}(\varepsilon), \dots, R_{n_3}^{***}(\varepsilon)\}$  parçalansı ve sonuçta bu üç parçalansın ortak incelmesi olan  $\{R_1(\varepsilon), \dots, R_N(\varepsilon)\}$  vardır. Bu son belirlenen parçalansıstan daha ince olan herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalansı için, zorunlu olarak  $n > N$  olduğu, üstelik

$$\max_{1 \leq k \leq n} (\text{Alan}R_k) \leq \max_{1 \leq i \leq N} (\text{Alan}(R_i(\varepsilon))) \leq \max_{1 \leq j \leq n_3} (\text{Alan}R_j^{***}(\varepsilon)) < \varepsilon$$

gerçeklendiğini gözleyiniz (nasıl?). Ayrıca  $(x_k, y_k) \in R_k$  noktaları nasıl seçilirse seçilsin, herbir  $1 \leq k \leq n$  indis için

$$\inf f(R_k) = \inf_{(x,y) \in R_k} f(x, y) \leq f(x_k, y_k) \leq \sup_{(x,y) \in R_k} f(x, y) = \sup f(R_k)$$

olduğu ve parçalansılar inceldikçe alt Riemann toplamları artıp üst Riemann toplamları azaldığı için, tüm bilgiler kullanılıp

$$\begin{aligned} R_f(R) - \varepsilon &< s_f(R_1^*(\varepsilon), \dots, R_{n_1}^*(\varepsilon)) \leq s_f(R_1, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \inf f(R_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot f(x_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_k) = S_f(R_1, \dots, R_n) \\ &\leq S_f(R_1^{**}(\varepsilon), \dots, R_{n_2}^{**}(\varepsilon)) < R_f(R) + \varepsilon \end{aligned}$$

ve böylece

$$R_f(R) - \varepsilon < \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot f(x_k, y_k) < R_f(R) + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot f(x_k, y_k) - R_f(R) < \varepsilon$$

yani

$$\left| R_f(R) - \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot f(x_k, y_k) \right| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

bularak istenen

$$R_f(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\text{Alan} R_k \cdot f(x_k, y_k))$$

sonucu bulunur (neden?)

**Teorem 3:** Düzlemede  $R$  ve  $R^*$  bölgeleri, girişte anlatılan niteliklerde kapalı-sınırlı ve üstelik **ayrık** olsunlar.  $f$  fonksiyonu hem  $R$  hem de  $R^*$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilirse aşağıdaki eşitlik geçerlidir :

$$\iint_{R \cup R^*} f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f(x, y) dx dy$$

**Kanıtlama :**  $R \cup R^*$  bölgesinin herhangi bir parçalanışı,  $R$  ve  $R^*$  bölgelerine uygun birer  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  ve  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$  parçalanışları aracılığıyla

$$R \cup R^* = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_1^* \cup R_2^* \cup \dots \cup R_m^*$$

biçiminde tanımlanacağından, sağ yanda birleşime katılan alt bölgelerin herhangi farklı iki tanesinin ayrı olduğuna ve bu parçalanışın, söz gelimi Riemann toplamının

$$\begin{aligned} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n, R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) &= \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot \sup f(R_k) + \sum_{i=1}^m \text{Alan} R_i^* \cdot \sup f(R_i^*) \\ &= S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) + S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) \end{aligned}$$

ve böylece  $f$  fonksiyonunun  $R \cup R^*$  bölgesindeki üst Riemann tümlevi

$$\bar{R}_f(R \cup R^*) \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n, R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) = S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) + S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*)$$

gerçekler. Demek ki  $R$  bölgesinin herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  ve  $R^*$  bölgesinin herhangi bir  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$  parçalanışı için

$$\bar{R}_f(R \cup R^*) - S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

bularak kolayca

$$\overline{R}_f(R \cup R^*) - S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) \leq \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \overline{R}_f(R)$$

ve dolayısıyla  $\overline{R}_f(R \cup R^*) - \overline{R}_f(R) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*)$  elde edilir ve infimum alarak sonuçta

$$\overline{R}_f(R \cup R^*) - \overline{R}_f(R) \leq \overline{R}_f(R^*)$$

yani

$$\overline{R}_f(R \cup R^*) \leq \overline{R}_f(R) + \overline{R}_f(R^*)$$

bulunur. Sonuncu eşitsizliğin tersi de kolayca elde edilir ve ödevdir. Böylece, benzer sonuçları alt Riemann tümlevleri için de elde ederek

$$\overline{R}_f(R \cup R^*) = \overline{R}_f(R) + \overline{R}_f(R^*) \text{ ve } \underline{R}_f(R \cup R^*) = \underline{R}_f(R) + \underline{R}_f(R^*)$$

ve böylece,  $f$  fonksiyonu hem  $R$  hem de  $R^*$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilir olduğundan, sonuçta  $f$  fonksiyonunun  $R \cup R^*$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilir olduğunu söyleyen aşağıdaki eşitlikler bulunur :

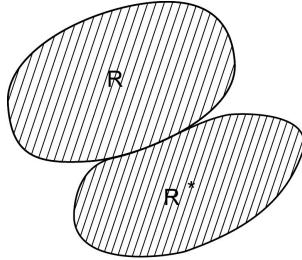
$$\underline{R}_f(R \cup R^*) = \underline{R}_f(R) + \underline{R}_f(R^*) = \overline{R}_f(R) + \overline{R}_f(R^*) = \overline{R}_f(R \cup R^*)$$

Dikkar edilirse bu bulunan sonuçlar

$$R_f(R \cup R^*) = R_f(R) + R_f(R^*)$$

gerçekleştiğini söylemektedir, bu istenendir (neden?)

**Uyarı:** Aslında  $R$  ve  $R^*$  kapalı-sınırı bölgeleri, eğer  $\mu(R \cap R^*) = 0$  koşulunu yani  $R \cap R^*$  kesişim kümesinin **Lebesque ölçüsünün sıfır olması** koşulunu yerine getirseler bile (örneğin aşağıdaki gibiyseler) yine



$$\iint_{R \cup R^*} f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f(x, y) dx dy$$

eşitliği geçerlidir. Bunun kanıtlanması **Reel Analiz** derslerinde verilir.

**Teorem 4:**  $c_0 \in R$  sabiti ve  $R$  bölgesindeki Riemann tümlevlenebilir  $f$  fonksiyonu ne olursa olsun

$$\iint_R (c_0 \cdot f)(x, y) dx dy = c_0 \cdot \iint_R f(x, y) dx dy$$

geçerlidir.

**Kanıtlama:** Gerçel değerli  $c_0 \cdot f$  fonksiyonu iyi bilindiği gibi  $(c_0 \cdot f)(x, y) = c_0 \cdot f(x, y) (\forall (x, y) \in R)$  biçiminde tanımlanır. Bu teoremdeki iddia dolayısıyla  $c_0 = 0$  için apaçktır, çünkü bu durumda her iki yan da sıfır olur. Şimdi  $c_0 > 0$  olsun, oysa herhangi bir sınırlı  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesi için  $c_0 \cdot \sup A = \sup\{c_0 \cdot x : x \in A\}$  göstermek güç degildir, çünkü zaten, kısalık amacıyla  $\alpha_A = \sup A (\in \mathbb{R})$  yazarak, her  $x \in A$  için  $x \leq \alpha_A$  ve sonuçta  $c_0 \cdot x \leq c_0 \cdot \alpha_A (\forall x \in A)$  ve ayrıca her  $\varepsilon > 0$  için, supremum tanımı gereği  $\alpha_A - \frac{\varepsilon}{c_0} < x_\varepsilon$  ve sonuçta  $c_0 \alpha_A - \varepsilon = c_0(\alpha_A - \frac{\varepsilon}{c_0}) < c_0 x_\varepsilon$  gerçekleyen en az bir  $x_\varepsilon \in A$  var olduğundan  $c_0 \alpha_A$  gerçel sayısının  $c_0 \cdot A \{c_0 \cdot x : x \in A\}$  kümesinin bir üst sınırı ve üst sınırlarının en küçüğü olduğu anlaşılır ve  $c_0 \cdot \alpha_A = \sup\{c_0 \cdot x : x \in A\} = \sup(c_0 A)$  eşitliği bulunur. O halde  $c_0 \cdot f$  fonksiyonunun,  $R$  bölgesinin herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışına karşılık gelen üst Riemann toplamı

$$\begin{aligned} S_{c_0 \cdot f}(R_1, R_2, \dots, R_n) &= \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot \sup((c_0 \cdot f)(R_k)) = \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot c_0 \sup f(R_k) \\ &= c_0 \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot \sup f(R_k) = c_0 \cdot S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \end{aligned}$$

ve böylece  $c_0 > 0$  iken  $c_0 \cdot f$  fonksiyonunun üst Riemann tümlevi

$$\begin{aligned} \overline{R}_{c_0 f}(R) &= \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_{c_0 f}(R_1, R_2, \dots, R_n) = \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} (c_0 \cdot S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)) \\ &= c_0 \cdot \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = c_0 \cdot \overline{R}_f(R) \end{aligned}$$

gerçekler, çünkü  $c_0 > 0$  iken, sınırlı ve boştan farklı herhangi bir  $A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesi için  $c_0 \cdot \inf A = \inf\{c_0 \cdot x : x \in A\}$  geçerlidir. (neden?). Benzer biçimde  $\underline{R}_{c_0 f}(R) = c_0 \cdot \underline{R}_f(R)$  eşitliği ve tüm bunlardan  $\underline{R}_{c_0 f}(R) = c_0 \cdot \underline{R}_f(R) = c_0 \cdot \overline{R}_f(R) = \overline{R}_{c_0 f}(R) \quad (c_0 > 0)$  elde edilerek  $c_0 \geq 0$  iken  $c_0 \cdot f$  fonksiyonunun hem Riemann tümlevlenebilir olduğu hem de  $R_{c_0 f}(R) = c_0 \cdot R_f(R)$  yani  $\iint_R (c_0 f)(x, y) dx dy = c_0 \cdot \iint_R f(x, y) dx dy$  gerçeklediği anlaşılır. Öte yandan sınırlı ve boştan farklı  $A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesiyle  $c_0 < 0$  sabiti ne olursa olsun

$$\inf\{c_0 \cdot x : x \in A\} = c_0 \cdot \sup A \quad , \quad \sup\{c_0 \cdot x : x \in A\} = c_0 \cdot \inf A$$

eşitliklerini gösterip,  $c_0 < 0$  için teoremdeki iddiayı kanıtlamak ödevdir.

**Teorem 5:**  $R$  bölgesinde Riemann türevlenebilir  $f$  ve  $g$  fonksiyonları ve  $a_0, b_0$  sabitleri ne olursa olsun aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\iint_R (a_0 f + b_0 g)(x, y) dx dy = a_0 \iint_R f(x, y) dx dy + b_0 \iint_R g(x, y) dx dy$$

**Kanıtlama :** Öncelikle,  $\mathbb{R}$  kümesinin aynı bir  $\Lambda$  indis kümesiyle indislenmiş sınırlı  $A = \{a_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  ve  $B = \{b_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  alt kümelerinin

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} (a_\alpha + b_\alpha) \leq \sup A + \sup B, \quad \inf A + \inf B \leq \inf_{\alpha \in \Lambda} (a_\alpha + b_\alpha)$$

gerçeklediğini çünkü sözgelimi, her  $\alpha \in \Lambda$  indisinde  $a_\alpha \leq \sup A$  ve  $b_\alpha \leq \sup B$  nedeniyle  $a_\alpha + b_\alpha \leq \sup A + \sup B$  olduğunu gözlemleyiniz. O halde kolayca

$$\sup(f+g)(R_k) = \sup\{f(x)+g(x) : x \in R_k\} = \sup_{x \in R_k} (f(x)+g(x)) \leq \sup f(R_k) + \sup g(R_k)$$

eşitsizlikleri,  $R$  bölgesinin herhangi bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışındaki her bir  $R_k$  alt bölgesi için geçerli olur, böylelikle  $f + g$  toplam fonksiyonunun bu parçalanışa karşılık gelen üst Riemann toplamı için

$$\begin{aligned} S_{f+g}(R_1, R_2, \dots, R_n) &= \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot \sup(f+g)(R_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{Alan} R_k \cdot (\sup f(R_k) + \sup g(R_k)) \\ &= S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) + S_g(R_1, R_2, \dots, R_n) \end{aligned}$$

ve bu eşitsizlikler kullanılarak, üstelik  $f$  ve  $g$  Riemann tımlıhlenenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{R}_{f+g}(R) &= \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_{f+g}(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} (S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) + S_g(R_1, R_2, \dots, R_n)) \\ &\leq \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) + \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_g(R_1, R_2, \dots, R_n) \\ &= \overline{R}_f(R) + \overline{R}_g(R) = R_f(R) + R_g(R) \end{aligned}$$

ve benzer işlemleri infimumlar için yaparak

$$R_f(R) + R_g(R) = \underline{R}_f(R) + \underline{R}_g(R) \leq \underline{R}_{f+g}(R) \leq \overline{R}_{f+g}(R) \leq R_f(R) + R_g(R)$$

ve böylelikle  $f+g$  toplam fonksiyonunun  $R$  bölgesinde Riemann tımlıhlenenebilir olduğunu söyleyen

$$\underline{R}_{f+g}(R) = \overline{R}_{f+g}(R) = R_f(R) + R_g(R)$$

yani eşdeğer yazışla

$$\begin{aligned} \iint_R (f+g)(x, y) dx dy &= \iint_R (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = R(f+g) \\ &= R_f(R) + R_g(R) = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy \end{aligned}$$

eşitliği bulunur, bu sonuç ve Teorem 4 kullanılarak istenen elde edilir.

**Uyarı:** Yukarıda,  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde gerçel değerli (yani  $-\infty < f(x, y) < \infty \forall (x, y) \in R$ ) gerçekleyen ) Riemann tümlevlenebilir bu  $f$  fonksiyonu için şu temel gerçeklere dikkat edilmiştir: Bilindiği gibi böyle bir  $f$  fonksiyonu için

$$\sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = l = \inf_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

gerçekleyen tek türlü belirli bir  $l (= R_f(R))$ ) tümlev değeri olan gerçel sayı vardır, dolayısıyla, sözgelimi en az bir  $\{R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}\}$  parçalanışı için  $S_f(R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n})$  üst Riemann toplamı bir GERÇEL SAYI olmalıdır, yani  $-\infty < l < S_f(R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}) < \infty$  olmalıdır, çünkü eğer tüm üst Riemann toplamları  $+\infty$  olsaydı, infimumları olan  $l$  gerçel sayısı için de  $l = +\infty$  bulunurdu ; dolayısıyla  $\{R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}\}$  parçalanışından ince olan **tüm**  $\{R_1, R_2, \dots, R_N\}$  parçalanışları için apaçık biçimde

$$-\infty < l < S_f(R_1, R_2, \dots, R_N) \leq S_f(R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}) < \infty$$

gözlenmelidir. Burada yeri geldiği için şunu söyleyelim:

**Temel Gerçek:** Bir  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesinin gelişigüzel seçilmiş sabit bir  $x_0 \in A$  elemanı için  $\inf A = \inf\{x \in A : x \leq x_0\}$  eşitliği geçerlidir. Gerçekten  $A_0 = A \cap (-\infty, x_0] = \{x \in A : x \leq x_0\} \subseteq A$  alt kümesi tanımlanırsa, öncelikle  $x_0 \in A_0 \neq \emptyset$  gözleyip  $\inf A = \inf A_0$  bulmak güç değildir. Gerçekten eğer bu infimumlardan birisi  $-\infty$  ise, zaten  $\inf A = -\infty = \inf A_0$  gözlemek kolaydır ve **ödevdir** ; eğer her ikisi birden birer gerçel sayı ise  $\emptyset \neq A_0 \subseteq A$  nedeniyle  $\inf A \leq \inf A_0$  gözleyip  $\inf A \neq \inf A_0$  olmayacağı çakarsanız, çünkü olsaydı  $\inf A < \inf A_0$  bulunur ve bunlar birer gerçel sayı olduklarından, var olan uygun bir  $\varepsilon_0 > 0$  sayesinde  $\inf A + \varepsilon_0 < \inf A_0 - \varepsilon_0 < \inf A_0$  gerçekleşir ve infimum tanımı ve  $x_0 \in A_0$  bilgileri kullanılarak

$$\exists a_0 \in A, a_0 < \inf A + \varepsilon_0 < \inf A_0 \leq x_0$$

ve böylece  $A_0$  alt kümesinin tanımı gereği,  $a_0 < x_0$  sonucu bize  $a_0 \in A_0$  verir, sonuçta  $\inf A_0 \leq a_0 < \inf A_0$  çelişkisini bulurduk! Şimdi bu temel gerçeği,  $f$  fonksiyonunun tüm üst Riemann toplamları kümesine uygulayarak ve kolaylık amacıyla  $R$  bölgesinin bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalanışı bir  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$  parçalanışının incelmesi olduğunda

$$\{R_1, R_2, \dots, R_n\} \prec \{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$$

yazarak, yukarıda belirlenen  $\{R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}\}$  parçalanışı aracılığıyla

$$\inf_{R_1, R_2, \dots, R_n} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \inf\{S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) : \{R_1, R_2, \dots, R_n\} \prec \{R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}\}\}$$

bulunur ve sağ yanda infimumu alınan tüm üst Riemann toplamları

$$-\infty < l \leq S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_{0,1}, R_{0,2}, \dots, R_{0,n}) < \infty$$

nedeniyle birer gerçel sayı olduğundan, sonuçta genelliği bozmaksızın  $f$  fonksiyonunun, tüm parçalansıslara karşılık gelen üst Riemann toplamlarının birer **gerçel sayı** olduğunu varsayıyalıyız. Bu nedenle  $R$  bölgesinin **herhangi** bir  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  parçalansısi göz önüne alındığında, tüm  $f(R_k) (\subseteq \mathbb{R})$  kümeleri için zaten  $\emptyset \neq f(R_k)$  nedeniyle, yani en az  $(x_k, y_k) \in R_k$  aracılığıyla  $-\infty < f(x_k, y_k) \leq \sup_{(x,y) \in R_k} f(x, y) = \sup f(R_k)$  olduğunu unutmadan  $-\infty < \sup f(R_k) < +\infty$  gerçekleştiği anlaşılır, çünkü eğer en az bir  $1 \leq k_0 \leq n$  indis için  $\sup f(R_k) = +\infty$  olsaydı, zaten  $0 < \text{Alan}R_{k_0}$  olduğundan

$$+\infty = \text{Alan}R_{k_0} \cdot \sup f(R_{k_0}) = \sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_{k_0}) = S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) < +\infty$$

çelişkisi doğardı (dikkat:  $x \in \mathbb{R}$  ne olursa olsun, genişletilmiş  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  kümesindeki aritmetikte daima  $x + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + (+\infty)$  geçerlidir, dolayısıyla  $\sum_{k \neq k_0} \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_k)$  toplamı ister bir gerçel sayı isterse  $+\infty$  olsun

$$\sum_{k=1}^n \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_k) = \text{Alan}R_{k_0} \cdot \sup f(R_{k_0}) + \sum_{k \neq k_0} \text{Alan}R_k \cdot \sup f(R_k) = +\infty$$

olur). Bu nedenle,  $R$  bölgesinin tüm parçalansıslarındaki tüm  $R_k$  alt bölgeleri için,  $R$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilir  $f$  fonksiyonunun

$$-\infty < \sup f(R_k) < +\infty$$

gerçeklediği anlaşılır. Benzer biçimde  $\sup_{\{R_1, \dots, R_n\}} S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = l \in \mathbb{R}$  nedeniyle benzer gerekçeler kullanılarak  $-\infty < \inf f(R_k) \leq \sup f(R_k) < +\infty$  olduğu çıkarsanır, yani  $m_k = \inf f(R_k)$  ve  $M_k = \sup f(R_k)$  gerçel sayıları aracılığıyla  $m_k \leq f(x, y) \leq M_k$  ( $\forall (x, y) \in R_k$ ) bulunarak  $f(R_k)$  görüntü kümelerinin SINIRLI olduğu anlaşılır. İşte bu nedenle yukarıdaki son kanıtlamalarda, açıkça vurgulamadan, hep, bu görüntü kümelerinin sınırlı olduğu bilgisi kullanılmıştır.

Bu bölümde, bundan sonra  $R$  kapalı-sınırlı bölgesinde Riemann tümlevlenebilen  $f = f(x, y)$  gerçel değerli fonksiyonu için  $\iint_R f(x, y) dx dy$  Riemann tümlevini hesaplayabilmeimize elveren kullanışlı yeter koşulları belirlemeye çalışalım. Bu son kısımda ki teoremlerin (özellikle son ikisi için belirli düzeyde **Reel Analiz** bilgisi bilmek gereğinden) hiçbirisinin kanıtlamasını vermeyeceğiz. Temel üç teorem şunlardır:

**Teorem 6:** Eğer  $f = f(x, y)$  fonksiyonu, kapalı-sınırlı  $R$  bölgesinde Riemann tümlevlenebilirse, herhangi bir sabit  $y_0 \in [c, d] = \pi_2(R)$  gerçel sayısı için  $F(x) = f(x, y_0)$  ( $\forall x \in [a, b] = \pi_1(R)$ ) biçiminde tanımlanan gerçel değerli  $F = F(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında ve benzer biçimde herhangi  $x_0 \in [a, b]$  için  $G(y) = f(x_0, y)$  ( $\forall y \in [c, d] = \pi_2(R)$ ) biçiminde tanımlanan gerçel değerli  $G = G(y)$  fonksiyonu da  $[c, d]$  aralığında Riemann

tümlevlenebilirdirler.

**Teorem 7:** Eğer  $R$  kapalı-sınırlı bölgesini çevreleyen çevre eğrisinin üst parçası  $\pi_1(R) = [a, b]$  aralığında tanımlı ve sürekli  $g = g(x)$  fonksiyonunun ve alt parçasıysa  $h = h(x)$  fonksiyonunun grafikleri ise, kısacası

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] = \pi_1(R) \text{ ve } h(x) \leq y \leq g(x)\}$$

ise, bu özel durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx .$$

Benzer biçimde, çevre eğrisi  $\pi_2(R) = [c, d]$  aralığında tanımlı gerçel değerli ve sürekli  $h = h(y)$  ve  $g = g(y)$  fonksiyonlarının grafikleri yani

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] = \pi_2(R) \text{ ve } h(y) \leq x \leq g(y)\}$$

ise, bu özel durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left[ \int_{x=h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx \right] dy .$$

**Fubini Teoremi:**  $x = f(u, v)$  ve  $y = g(u, v)$  eğrisel koordinat dönüşümleri altında  $xy$  düzlemindeki  $R$  kapalı-sınırlı bölgesi,  $uv$  düzlemindeki  $R'$  bölgesine dönüşüyorrsa, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} F(f(u, v), g(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Bu sonucu eşitlik,  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  jakobyeni  $R$  bölgesinde sıfırdan farklı iken aşağıdaki gibi yazılır:

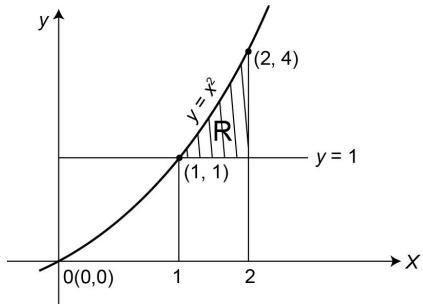
$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} \frac{F(f(u, v), g(u, v))}{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|} du dv .$$

### Örnekler

1)  $R(\subseteq \mathbb{R}^2)$  kapalı-sınırlı bölgesi  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x = 2$  egrileri ile sınırlı bir bölge ise, gösteriniz:  $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1006}{105}$ .

**Çözüm:**  $R$  bölgesi aşağıda çizilmiştir ve  $\pi_1(R) = [1, 2]$  ve ayrıca

$$R = \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : x \in [1, 2] \text{ ve } h(x) = 1 \leq y \leq x^2 = g(x)\} .$$



Dikkat edilirse  $y = x^2$  parabolü, düzlemede her iki bileşeni de negatif olmayan gerçel sayılarından oluşan birinci bölgeyi

$$R_1 = \{(x, y) \in [0, \infty) \times (0, \infty) : x^2 < y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : y \leq x^2\}$$

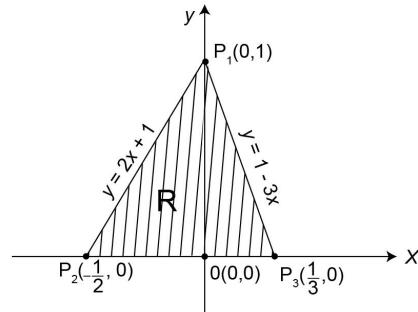
birimde ayrik iki tane alt bölgeye ayırır ve  $R_2$  bölgesi aslında  $y = x^2$  parabolünün grafiğine ait noktalar ile bu grafiğin alt kısmında yer alıp, her iki bileşeni de negatif olmayan düzlem noktalarından, yani  $y = x^2$  parabolünün şekildeki grafiği ile  $O_x$  ekseni arasında yer alan noktalardan ve ayrıca eksenin üzerindeki  $(x, 0)$  noktalarıyla parabolün grafiği üzerinde yer alan  $(x, x^2)$  noktalarından ( $x \geq 0$  olmak üzere) oluşur ve apaçık biçimde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2] \text{ ve } 1 \leq y \leq x^2\} \subsetneq R_2$  geçerlidir; dolayısıyla Teorem 7 kullanılırsa aranılan tümlev

$$\iint_R (x^2 + y^2) dxdy = \int_{x=1}^2 \left[ \int_{y=1}^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \int_1^2 (x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3}) dx = \frac{1006}{105}$$

olarak bulunur, çünkü apaçık biçimde aşağıdaki geçerlidir:

$$\int_{y=1}^{x^2} (x^2 + y^2) dy = x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \quad (\forall x \in [1, 2])$$

- 2) Düzlemede  $y = 2x + 1$ ,  $y = 1 - 3x$  ve  $y = 0$  doğruları ile çevrili bölgenin alanı nedir?  
**Cözüm:** Sözü edilen bölge aşağıda çizilidir: Dikkat edilirse  $R$  bölgesi köşe noktaları  $P_1(0, 1)$ ,  $P_2(-\frac{1}{2}, 0)$  ve  $P_3(\frac{1}{3}, 0)$  olan bir üçgen bölgedir, dolayısıyla ilkokul bilgisiyle bu bölgenin alanı  $AlanR = \overline{P_2P_3} \cdot \frac{\overline{P_1O}}{2} = (\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2})) \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$  olarak kolayca hesaplanır. Şimdi de üniversite bilgisi kullanalım. Solda yer alan üçgensel bölgeyi  $R_1$  ile yazarsak, kolayca



$$R_1 = \{(x, y) \in R^2 : x \in \pi_1(R_1) = [-\frac{1}{2}, 0] \quad ve \quad 0 \leq y \leq 2x + 1\}$$

ve böylece Teorem 7 kullanılarak

$$\text{Alan}R_1 = \iint_R dx dy = \int_{x=-\frac{1}{2}}^0 \left[ \int_{y=0}^{2x+1} dy \right] dx = \int_{x=-\frac{1}{2}}^0 (2x+1) dx = \frac{1}{4}$$

ve sağ yandaki üçgensel  $R_2$  bölgesi için

$$R_2 = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in \pi_1(R_2) = [0, \frac{1}{3}] \quad ve \quad 0 \leq y \leq 1 - 3x\},$$

$$\text{Alan}R_2 = \iint_R dx dy = \int_{x=0}^{\frac{1}{3}} \left[ \int_{y=0}^{1-3x} dy \right] dx = \int_{x=0}^{\frac{1}{3}} (1-3x) dx = \frac{1}{6}$$

ve böylece  $\text{Alan}R = \text{Alan}R_1 + \text{Alan}R_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$  olarak bulunur. Bu alanı **Analiz1** bilgisiyle de bulabilirdik. Dikkat edilirse

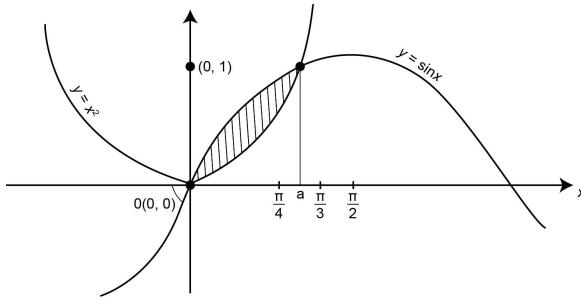
$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1-3x & : x \in [0, \frac{1}{3}] \end{cases}$$

fonksiyonu  $g(0-) = g(0+) = g(0) = 1$  nedeniyle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$  tanım aralığında sürekli olup, sözü edilen alan bu fonksiyonun grafiği ile  $Ox$  ekseni arasında kalan bölgenin alanıdır, yani aşağıdaki bulunur:

$$\text{Alan}R = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 g(x) dx + \int_0^{\frac{1}{3}} g(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

3) Düzlemede  $y = x^2$  ve  $y = \sin x$  fonksiyonlarının grafikleri ile çevrili  $R$  bölgesinin alanını ve  $\iint_R (x+y) dx dy$  türmeyini hesaplayınız.

**Cözüm:** Dikkat edilirse  $9\sqrt{3} < 9\sqrt{4} = 18 < 19 < 19,73 < 2\pi^2$  ve ayrıca  $\sqrt{2}\pi^2 < (1,5)\cdot\pi^2 < 15 < 16$  nedeniyle  $h(x) = x^2 - \sin x$  sürekli fonksiyonu  $h(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16} - \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 - 16}{\sqrt{2}\cdot 16} < 0 < \frac{2\pi^2 - 9\sqrt{3}}{18} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} = h(\frac{\pi}{3})$  yani  $h(\frac{\pi}{4}) < 0 < h(\frac{\pi}{3})$  gerçekleştiği için, ünlü Aradeğer Teoremi kullanılarak tek türlü belirli bir  $a \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  pozitif gerçek sayısı için  $a^2 - \sin a = h(a) = 0$  yani  $a^2 = \sin a$  gerçekleşir. Aşağıdaki  $R$  bölgesinin



$R = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in \pi_1(R) = [0, a] \text{ ve } x^2 \leq y \leq \sin x\}$ , olduğu gözlenerek, onun alanı bu pozitif  $a$  gerçek sayısı sayesinde

$$\text{Alan}R = \iint_R dxdy = \int_{x=0}^a \left[ \int_{y=x^2}^{\sin x} dy \right] dx = \int_{x=0}^a (\sin x - x^2) dx = 1 - \cos a - \frac{a^3}{3}$$

bulunur. Dikkat:  $0 < \text{Alan}R$  olduğundan  $\cos a + \frac{a^3}{3} < 1$  gerçekleştiği anlaşılır. Öte yandan ikinci tümlev ise,  $\sin a = a^2$  ve  $\cos a = \sqrt{1 - a^4}$  bilgileriyle aşağıdakidir.

$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dxdy &= \int_0^a \left[ \int_{y=x^2}^{\sin x} (x + y) dy \right] dx = \int_0^a \left( x \sin x - x^3 + \frac{\sin^2 x - x^4}{2} \right) dx \\ &= \frac{a}{4} + a^2 \left( 1 - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{10} \right) - a\sqrt{1 - a^4} \left( 1 - \frac{a}{4} \right) \end{aligned}$$

Aslında  $h(\frac{4\pi}{15}) < 0 < h(1)$  gözleyip  $\frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{15} < a < 1 < \frac{\pi}{3}$  ve böylece  $0 < 1 - a^4$  elde ediniz.

4)  $y = 1 - x^2$  parabolü ve  $y = 1 - 2x$  ile  $y = 2x - 1$  doğrularıyla çevrili olup  $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  noktasını ihtiva eden  $R$  bölgesinin alanını ve ayrıca  $\iint_R (x^2 + xy) dxdy$  tümlevini hesaplayınız.

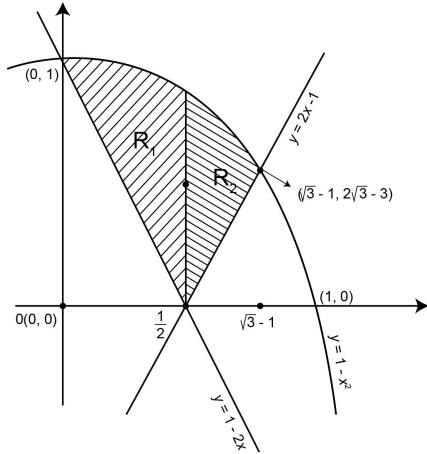
**Cözüm:** Bilindiği gibi,  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $|x| = x \vee (-x)$  ve sözü edilen  $R$  bölgesindeki  $(x, y) \in R$  noktaları için hem  $1 - 2x \leq y$  hem de  $2x - 1 \leq y$  olduğundan, aşağıda çizili  $R$  bölgesi için

$$R = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in \pi_1(R) = [0, \sqrt{3} - 1] \text{ ve } |1 - 2x| \leq y \leq 1 - x^2\}$$

ve böylece  $x = \frac{1}{2}$  dikey doğrusu ile bölgeyi ikiye ayırarak

$$R_1 = \{(x, y) \in R : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ ve } 1 - 2x \leq y \leq 1 - x^2\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in R : x \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3} - 1\right] \text{ ve } 2x - 1 \leq y \leq 1 - x^2\} \text{ ve } R = R_1 \cup R_2 \text{ olur.}$$



Üstelik dikkat edilirse  $R_1 \cap R_2$  kesişimi

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &= \left\{ (x, y) \in R : x = \frac{1}{2} \text{ ve } 0 \leq y \leq \frac{3}{4} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \right\} \times \left[ 0, \frac{3}{4} \right] = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left[ 0, \frac{3}{4} \right] \neq \emptyset \end{aligned}$$

ve böylece onun Lebesgue ölçüsü, alanı yani  $\mu(R_1 \cap R_2) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{3}{4} - 0) = 0$  olduğundan, Teorem 4 den önce gelen **Uyarı**'da söylenen bilgile

$$\begin{aligned} \text{Alan } R &= \iint_R dx dy = \iint_{R_1 \cup R_2} dx dy = \iint_{R_1} dx dy + \iint_{R_2} dx dy = \text{Alan } R_1 + \text{Alan } R_2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{1-2x}^{1-x^2} dy \right] dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \left[ \int_{2x-1}^{1-x^2} dy \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - x^2) dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} (2 - 2x - x^2) dx = 2\sqrt{3} - \frac{19}{6} \end{aligned}$$

bulunur, dikkat edilirse  $1 < 1,39 < 3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$  ve böylece  $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$  nedeniyle  $\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} < 2\sqrt{3}$  kısacısı  $0 < 2\sqrt{3} - \frac{19}{6}$  geçerlidir. Bu alan Analiz I bilgisi kullanılarak da kolayca hesaplanabilirdi. Gerçekten köşe noktaları  $P_1(0, 1)$ ,  $O(0, 0)$  ve  $P_2(\frac{1}{2}, 0)$

olan üçgenin alanı apaçık biçimde  $\frac{1}{4}$  ve köşe noktaları  $P_3(\sqrt{3}-1, 2\sqrt{3}-3)$ ,  $P_2(\frac{1}{2}, 0)$  ve  $P_4(1, 0)$  olan pasta dilimine benzer  $R^*$  bölgesinin alanı ise  $P'_3(\sqrt{3}-1, 0)$  noktası aracılığıyla ko-  
layca

$$\text{Alan } R^* = \overline{P'_3 P_1} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \int_{\sqrt{3}-1}^1 (1-x^2)dx = \frac{43}{12} - 2\sqrt{3}$$

olarak belirlenirse, istenen alan aşağıdaki olarak bulunur:

$$\text{Alan } R = \int_0^1 (1-x^2)dx - (\frac{1}{4} + \text{Alan } R^*) = \frac{2}{3} - \left[ \frac{1}{4} + \frac{43}{12} - 2\sqrt{3} \right] = 2\sqrt{3} - \frac{19}{6}$$

Öte yandan, öteki tümlev, yine  $\mu(R_1 \cap R_2) = 0$  bilgisiyle

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + xy)dxdy &= \iint_{R_1 \cup R_2} (x^2 + xy)dxdy \\ &= \iint_{R_1} (x^2 + xy)dxdy + \iint_{R_2} (x^2 + xy)dxdy \\ &= \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{1-2x}^{1-x^2} (x^2 + xy)dy \right] dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \left[ \int_{2x-1}^{1-x^2} (x^2 + xy)dy \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ x^2(2x - x^2) + \frac{x}{2}((1-x^2)^2 - (1-2x)^2) \right] dx \\ &\quad + \int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} \left[ (2x^2 - x^4 - 2x^3) - \frac{x}{2}((1-x^2)^2 - (2x-1)^2) \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^3 - x^4)dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}-1} (2x^2 - x^4 - 2x^3)dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}-1} x((1-x^2)^2 - (1-2x)^2)dx \end{aligned}$$

bulunur, çünkü apaçık biçimde  $(1-x^2)^2 - (1-2x)^2 = (1-x^2)^2 - (2x-1)^2$  geçerlidir,  
bu sonuncu tümlevleri hesaplayınız!

**Ödev:**  $y = 1 - x^2$  parabolü ve  $y = 1 - 3x$  ile  $y = \frac{3x-2}{2}$  doğruları ile çevrili olup  $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  noktasını ihtiva eden bölgenin alanını Analiz I bilgisi kullanarak ve kullanmadan hesap-  
layınız.

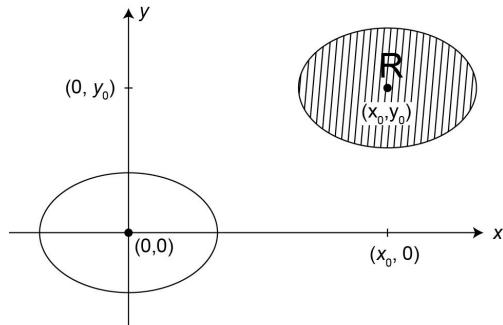
5) Düzleme elips ile çevrelenen bölgenin ve daha sonra dairenin alanını bulunuz.

**Cözüm:**  $a > 0$  ve  $b > 0$  eksen sabitleri aracılığıyla tanımlanan

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

elipsiyle, ağırlık merkezi  $O(0, 0)$  olan  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsinin çevrelediği bölgelerin alanlarının eşit ve  $\pi ab$  olduğunu gözlemek güç degildir. Birinci elipsi  $(y - y_0)^2 = b^2 \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}\right)$  yani  $|y - y_0| = b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}}$  olarak yazarsak, sözü edilen elipsle çevrelenen bölgedeki tüm noktaların, elips üzerinde olanları aşağıdaki birinci koşulu, bölgenin içinde olanları ise ikinci koşulu gerçekler:

$$|y - y_0| = b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} \quad , \quad |y - y_0| < b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}}$$



Üstelik apaçık biçimde  $\pi_1(R) = [x_0 - a, x_0 + a]$  ve böylelikle

$$\begin{aligned} R &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - a, x_0 + a], |y - y_0| < b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - a, x_0 + a], y_0 - b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} \leq y \leq y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} \right\} \end{aligned}$$

olduğundan, elips ile çevrelenen  $R$  bölgesinin alanı

$$\begin{aligned} \text{Alan } R = \iint_R dx dy &= \int_{x=x_0-a}^{x_0+a} \left[ \int_{y_0-b\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}}^{y_0+b\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}} dy \right] dx \\ &= 2b \cdot \int_{x_0-a}^{x_0+a} \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} dx = \frac{2b}{a} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} dx \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{2b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \pi ab \end{aligned}$$

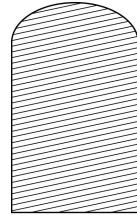
olarak bulunur, çünkü iyi bilindiği gibi  $x = a \sin v$  dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left[ \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \right], \\ \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] = \frac{a^2}{2} 2(\arcsin 1) = a^2 \arcsin 1 = \frac{\pi a^2}{2}\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki  $a$  ve  $b$  asal eksen ve yedek eksen sabitlerini kullanan herhangi bir elipsin, ağırlık merkezi ne olursa olsun, alanı  $\pi ab$  olmaktadır. Bu sonuç Analiz I bilgisi kullanılarak da bulunabilirdi: Gerçekten sözü edilen elipsin üst yayını oluşturan sürekli

$$y(x) = y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} \quad (\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a])$$

fonksiyonunun grafiğiyle  $Ox$  ekseni arasında kalan ve şekli aşağıdaki gibi



olan bölgenin alanından, taban kenar uzunluğu  $2a$  yüksekliği  $y_0$  olan dikdörtgenin alanı çıkartılırsa, elipsin çevrelediği bölgenin yarımi bulunacağının (neden?) istenen alan:

$$\text{Alan } R = 2 \left[ \int_{x_0-a}^{x_0+a} y(x) dx - 2ay_0 \right] = 2b \int_{x_0-a}^{x_0+a} \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}} dx = \pi ab$$

olarak bulunur. Artık, yarıçapı  $r > 0$  olan herhangi bir dairenin alanını bulmak kolaydır, çünkü herhangi bir  $(x_0, y_0)$  merkezli  $r$  yarıçaplı çemberin

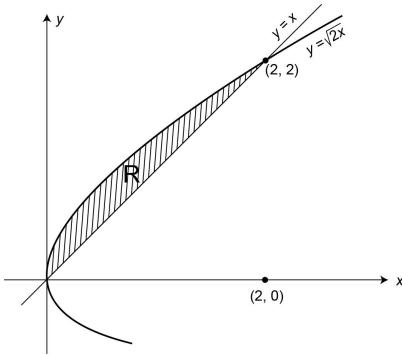
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{yani} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

olduğu ve dairenin bu çember tarafından çevrelenen

$$R^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

bölgesi olduğu anımsanırsa, çemberin  $a$  ve  $b$  ekseni sabitleri  $a = b = r$  gerçekleyen özel bir elips olması nedeniyle, yukarıda bulunan sonuç nedeniyle, ilkokuldan beri bildiğimiz Alan  $R^* = \pi r \cdot r = \pi r^2$  sonucuna erişiriz.

6) Düzlemede  $y^2 = 2x$  parabolü ile  $y = x$  doğrusu tarafından çevrelenen  $R$  bölgesinin alanını bulunuz.



**Çözüm:** Analiz I bilgisile kolayca Alan  $R = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - 2 = \frac{2}{3}$  bulunur, burada köşe noktaları  $O(0,0)$ ,  $P_1(2,0)$  ve  $P_2(2,2)$  olan üçgenin alanı apaçık biçimde  $\overline{OP_1} \cdot \frac{\overline{P_2P_1}}{2} = 2$  olarak hesaplanır. Öte yandan şunları da gözleyebilirdik:  $y(x) = \sqrt{2x}$  parabolü  $x \in [0, \infty)$  aralığında içbükeydir, yani teğetler zarfinin altında kalır çünkü  $y''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x^3}} < 0$  ( $\forall x \in (0, \infty)$ ) olmaktadır ve üstelik  $x \in [0, 2]$  için  $0 \leq x \leq 2$  ve böylece  $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$  nedeniyle bu parabolün grafiği  $[0, 2]$  aralığında  $y = x$  doğrusunun üzerinde yer alır, böylece  $R$  bölgesi için aşağıdakiler bulunur:

$$R = \left\{ (x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in \pi_1(R) = [0, 2] \text{ ve } x \leq y \leq \sqrt{2x} \right\},$$

$$\text{Alan} R = \iint_R dxdy = \int_{x=0}^2 \left[ \int_{y=x}^{\sqrt{2x}} dy \right] dx = \int_0^2 (\sqrt{2x} - x) dx = \frac{2}{3}$$

7) Aşağıdaki eşitliği gösterip, bu tümlevi hesaplayınız:

$$\int_{y=0}^3 \left[ \int_{x=1}^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx \right] dy = \int_{x=1}^2 \left[ \int_{y=0}^{4-x^2} (x+y) dy \right] dx$$

**Çözüm:** İlk tümlevler  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 3] \text{ ve } 1 \leq x \leq \sqrt{4-y}\}$  olmak üzere  $T = \iint_R (x+y) dxdy$  tümlevidir.  $R$  bölgesini belirleyen

$$\text{Koş1: } y \in [0, 3] \text{ ve } 1 \leq x \leq \sqrt{4-y} (\leq \sqrt{4-0} = 2)$$

koşulu kolayca görülebileceği gibi, aşağıdaki yazılı

**Koş2:**  $x \in [1, 2]$ ,  $y \in [0, 3]$  ve  $x^2 \leq 4 - y$ , **Koş3:**  $x \in [1, 2]$  ve  $0 \leq y \leq 4 - x^2$  ( $\leq 3$ ) eşdeğer koşulların herbirisile eşdeğerdir, sonuçta

$$R = \left\{ (x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in [1, 2] \text{ ve } 0 \leq y \leq 4 - x^2 \right\},$$

$$T = \iint_R (x+y) = \int_{x=1}^2 \left[ \int_{y=0}^{4-x^2} (x+y) dy \right] dx = \int_1^2 (\frac{x^4}{2} - x^3 - 4x^2 + 4x - 8) dx = \frac{241}{60}$$

bulunur, Aslında birinci tümlev doğrudan şöyle hesaplanabilirdi:

$$T = \int_{y=0}^3 \left[ \int_{x=1}^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx \right] dy = \int_0^3 \left( \frac{3-y}{2} + y(\sqrt{4-y} - 1) \right) dy = \int_0^3 y\sqrt{4-y} dy - \frac{9}{4} = \frac{241}{60}$$

çünkü  $a - x = u^2$  dönüşümü yapılarak kolayca  $\int x\sqrt{a-x} dx = \frac{2}{5}(a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2a}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}$  ve böylece istenen bulunur:

$$\int_0^3 y\sqrt{4-y} dy = \int_0^3 x\sqrt{4-x} dx = \frac{94}{15}, \quad T = \frac{94}{15} - \frac{9}{4} = \frac{241}{60}$$

$$8) \int_{x=1}^2 \left[ \int_{y=\sqrt{x}}^x \sin(\frac{\pi x}{2y}) dy \right] dx + \int_{x=2}^4 \left[ \int_{y=\sqrt{x}}^2 \sin(\frac{\pi x}{2y}) dy \right] dx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3} \text{ gösteriniz.}$$

**Cözüm:** Dikkat:  $\int \sin(\frac{a}{x}) dx$  ve dolayısıyla  $\int_{y=\sqrt{x}}^x \sin(\frac{\pi x}{2y}) dy$  tümlevini seri açılımı kullanmadan hesaplamak olanaklı değildir. Fakat burada başka bir kolaylık vardır. Tümlevlerin bölgeleri sırasıyla

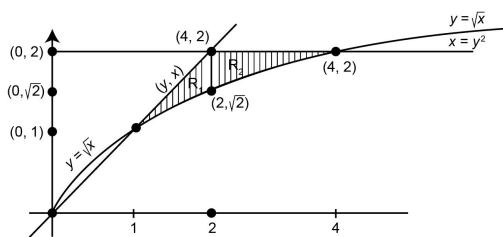
$$R_1 = \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : x \in [1, 2] \text{ ve } \sqrt{x} \leq y \leq x\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : x \in [2, 4] \text{ ve } \sqrt{x} \leq y \leq 2\}$$

denilirse aranan toplam aşağıdakidir:  $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2y}$  olmak üzere

$$\iint_{R_1} f(x, y) dxdy + \iint_{R_2} f(x, y) dxdy = \iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dxdy = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$$

Burada bölgeleri çizerek ve  $R_1 \cap R_2 = \{2\} \times [\sqrt{2}, 2]$  nedeniyle  $\mu(R_1 \cap R_2) = 0$  gözleyerek,  $R_1 \cup R_2$  birleşim bölgesinin çizili bölge olduğu görülür.



$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : y \in [1, 2] \text{ ve } y \leq x \leq y^2\}$$

Dikkat edilirse, kısalık amacıyla  $R = R_1 \cup R_2$  denilirse herbir  $(x, y) \in R$  için  $1 \leq y \leq x \leq y^2$  ve böylece  $1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$  yani  $1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$  nedeniyle  $0 < \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}(\frac{x}{y}) = \frac{\pi x}{2y} \leq \frac{\pi}{2}(2) = \pi$  kısacası  $0 < \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2y} \leq \pi$  olduğundan  $f(x, y) = \sin(\frac{\pi x}{2y}) \geq 0$  ve ayrıca

$$\begin{aligned} \iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dxdy &= \int_{y=1}^2 \left[ \int_{x=y}^{y^2} \sin\left(\frac{\pi}{2y} \cdot x\right) dx \right] dy = \left(-\frac{2}{\pi}\right) \int_1^2 y \left( \cos \frac{\pi y}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) dy = \\ &\quad \left(-\frac{2}{\pi}\right) \int_1^2 y \cdot \cos \frac{\pi}{2} dy = \frac{4(\pi + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

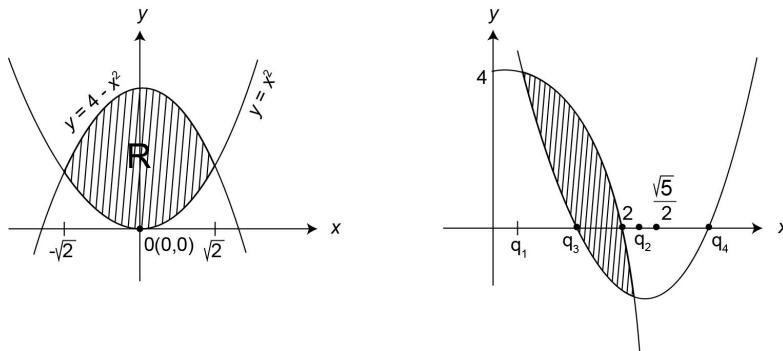
bulunur, çünkü burada kolayca gözlenecek olan şu temel bilgiler kullanılmıştır:

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) \quad , \quad \int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \left( x \sin(ax) + \frac{\cos(ax)}{a} \right)$$

**Ödev:** Aşağıdaki tümlevler toplamını hesaplayınız:

$$\int_{x=1}^2 \left[ \int_{y=\sqrt{x}}^x \cos \frac{\pi x}{2y} dy \right] dx + \int_{x=2}^4 \left[ \int_{y=\sqrt{x}}^2 \cos \frac{\pi x}{2y} dy \right] dx$$

9)  $y = x^2$  ve  $y = 4 - x^2$  parabolleri ile çevrelenen  $R$  bölgesinin, ayrıca  $y = 4 - x^2$  ve  $y = x^2 - 5x + \frac{17}{4}$  parabolleri ile çevrelenen bölgenin alanını bulunuz.



**Çözüm:** Her iki kapalı-sınırlı bölge yukarıda çizilmiştir. Kolayca

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \pi_1(R) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ ve } x^2 \leq y \leq 4 - x^2\},$$

$$AlanR = \int_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[ \int_{y=x^2}^{4-x^2} dy \right] dx = 2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

bulunur. Öte yandan ikinci kapalı-sınırlı bölgeye  $R^*$  denilirse ve  $y = x^2 - 5x + \frac{17}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 - 2$  parabolünün,  $y = x^2 - 2$  parabolünün  $Oy$  ekseni yerine  $x = \frac{5}{2}$  dikey doğrusunu eksen kabul eden ötelemiş olduğuuna, bölgeyi çevreleyen parabolllerin kesişim noktalarının  $4 - x^2 = x^2 - 5x + \frac{17}{4}$  yani  $2x^2 - 5x + \frac{1}{4} = 0$  gerçekleyen  $q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{4}$  irrasyonel sayıları olduğuna, ayrıca

$$0 < q_1 = \frac{5 - \sqrt{23}}{4} < \frac{1}{10} < 1 < 2 < \frac{5 + \sqrt{23}}{4} = q_2 < \frac{5 + \sqrt{25}}{4} = \frac{5}{2}$$

ve  $y(x) = (x - \frac{5}{2})^2$  parabolünün  $Ox$  eksenini kestiği  $q_3 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$  ve  $q_4 = \frac{5}{2} + \sqrt{2}$  irrasyonel sayılarının  $q_1 < \frac{1}{10} < 1 < q_3 < 2 < q_2 < \frac{5}{2} < 3 < q_4$  gerçekleş diligine dikkat ederek aşağıdaki bulunur:

$$R^* = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \pi_1(R^*) = \left[ \frac{5 - \sqrt{23}}{4}, \frac{5 + \sqrt{23}}{4} \right] \text{ ve } x^2 - 5x + \frac{17}{4} \leq y \leq 4 - x^2 \right\}$$

$$AlanR^* = \int_{q_1}^{q_2} \left[ \int_{y=x^2-5x+\frac{17}{4}}^{4-x^2} dy \right] dx = \int_{q_1}^{q_2} \left( 5x - 2x^2 - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{23\sqrt{23}}{24}$$

10)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 5x + \frac{17}{4}$  parabolleri ile  $y = 3$  ve  $y = -1$  doğruları tarafından çevrelenen  $R$  bölgesinin alanını bulunuz.

**Cözüm:** Bu bölgeyi çiziniz ve  $\pi_1(R) = \left[ \frac{5-2\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} \right]$  ve ayrıca  $\frac{5-2\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3}{2} < \sqrt{5}$  gözleyip,  $a, b \in \mathbb{R}$  ne olursa olsun

$$a \wedge b = \frac{a + b - |a - b|}{2} , \quad a \vee b = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

gerçek değerli herhangi  $g$  ve  $h$  fonksiyonları için, dolayısıyla  $g(x) \wedge h(x) = \frac{g(x)+h(x)-|g(x)-h(x)|}{2}$ ,  $g(x) \vee h(x) = \frac{g(x)+h(x)+|g(x)-h(x)|}{2}$  ve böylelikle  $R$  bölgesi için

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[ \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} \right] \text{ ve } (x^2 - 5x + \frac{17}{4}) \wedge (-1) \leq y \leq 84 - x^2 \vee 3 \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[ \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} \right] \text{ ve } \frac{|(x - \frac{5}{2})^2 - 1| + x^2 - 5x + \frac{13}{4}}{2} \leq y \leq \frac{(7 - x^2) - |1 - x^2|}{2} \right\}$$

bulunur. Bu bölgeyi aşağıdakilerin birleşimi olarak yazabiliriz, burada şu gözlenmiştir: Hangi  $x \in \left[\frac{5-2\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}\right]$  gerçel sayıları için  $1 \leq (x - \frac{5}{2})^2$  ve hangileri için  $1 \leq x^2$  gerçekleşir sorusunu belirleyerek ve sözgelimi  $x \in \left[\frac{5-2\sqrt{5}}{2}, 1\right]$  yani  $\frac{5-2\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$  olduğunda  $-\sqrt{5} \leq x - \frac{5}{2} \leq -\frac{3}{2}$  böylece  $1 < \frac{3}{2} \leq |x - \frac{5}{2}| \leq \sqrt{5}$  ve  $(x - \frac{5}{2})^2 - 1 > 0$  ve  $x^2 - 1 \leq 0$  ve ayrıca  $\frac{|(x - \frac{5}{2})^2 - 1| + x^2 - 5x + \frac{13}{4}}{2} = x^2 - 5x + \frac{34}{8}$  ve  $\frac{7-x^2 - |1-x^2|}{2} = 3$  gözleyip

$$R_1 = \{(x, y) \in R : x \in \left[\frac{5-2\sqrt{5}}{2}, 1\right] \text{ ve } x^2 - 5x + \frac{34}{8} \leq y \leq 3\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in R : x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ ve } x^2 - 5x + \frac{34}{8} \leq y \leq 3 - x^2\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in R : x \in \left[\frac{3}{2}, \sqrt{5}\right] \text{ ve } -2 \leq y \leq 3 - x^2\}$$

alt bölgeleri cinsinden  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$  ve  $\mu(R_1 \cap (R_2 \cup R_3)) = 0 = \mu(R_2 \cap R_3)$  nedeniyle sonuçta, aranılan alan değerleri aşağıdakidir:

$$\text{Alan}R = \text{Alan}R_1 + \text{Alan}R_2 + \text{Alan}R_3$$

$$= \int_{x=\frac{5-2\sqrt{5}}{2}}^1 \left[ \int_{y=x^2-5x+\frac{34}{8}}^3 dy \right] dx + \int_{x=1}^{\frac{3}{2}} \left[ \int_{y=x^2-5x+\frac{34}{8}}^{3-x^2} dy \right] dx + \int_{x=\frac{3}{2}}^{\sqrt{5}} \left[ \int_{y=-2}^{3-x^2} dy \right] dx$$

bulunur, bu hesaplamaları yapınız.

11) Düzlemede  $a > 0$  yarıçaplı  $O(0, 0)$  merkezli daire bölge  $R$  ise  $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$  nedir?

**Çözüm:**  $R$  bölgesi aşağıdakidir:

$$\begin{aligned} R = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\} &= \{(x, y) \in R^2 : x \in \pi_1(R) = [-a, a] \text{ ve } |y| \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 : x \in [-a, a], -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\} \end{aligned}$$

Böylece aranan tümlev  $T$  için, üstelik

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right),$$

$$\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{y^2 + x^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{x^2}{2} \ln \left( \frac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x} \right) \Big|_{y=-\sqrt{a^2 - x^2}}^{y=\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{2} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right)$$

nedeniyle

$$\begin{aligned}
T &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{x=-a}^a \left[ \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx \\
&= \int_{x=-a}^a \left[ a\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{2} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right) \right] dx \\
&= \frac{\pi a^3}{2} + \frac{1}{2} \int_{x=-a}^a x^2 \cdot \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx
\end{aligned}$$

bulunur, oysa sonuncu tümlevi hesaplamak kolay değildir. Demek ki  $T$  tümlevini bu yoldan hesaplamak güçtür. Şimdi aşağıda yazılı dönüşüm bağıntısını kullanalım :

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} F(f(u, v), g(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Özel olarak  $x = f(\rho, \phi) = \rho \cos \phi$  ve  $y = g(\rho, \phi) = \rho \sin \phi$  kutupsal koordinat dönüştümü kullanılırsa, bu dönüşümün Jakobyeni  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} = x_\rho y_\phi - x_\phi y_\rho = \rho \geq 0$  ve böylece  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} \right| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} = \rho$  olur.  $R$  bölgesinde  $\rho^2 = x^2 + y^2 \leq a^2$  nedeniyle  $0 \leq \rho \leq a$  ve  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  gözleyerek, kutupsal koordinat dönüşümüyle  $R$  bölgesi  $(\rho, \phi)$  düzleminde

$$R' = \{(\rho, \phi) : \rho \in [0, a] \text{ ve } \phi \in [0, 2\pi]\}$$

bölgelerinde dönüşeceğine ve  $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  fonksiyonu için

$$F(f(\rho, \phi), g(\rho, \phi)) = \sqrt{f^2(\rho, \phi) + g^2(\rho, \phi)} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

olduğundan, kolayca

$$\begin{aligned}
T &= \iint_R F(x, y) dx dy = \iint_{R'} F(f(\rho, \phi), g(\rho, \phi)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} \right| d\rho d\phi = \iint_{R'} \rho \rho d\rho d\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \int_{\rho=0}^a \rho^2 d\rho \right] d\phi = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

12)  $R$  bölgesi bir önceki soruda bölge ise  $\iint_R \frac{dx dy}{e^{x^2+y^2}}$  nedir, neden ?

**Çözüm:** Kolayca aranılan  $T$  tümlev için aşağıdaki geçerlidir :

$$T = \int_{x=-a}^a \left[ \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy \right] dx = \int_{x=-a}^a e^{-x^2} \left[ \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-y^2} dy \right] dx$$

Oysa  $\int e^{-y^2} dy$  ilkelini seri açılımı kullanmadan hesaplamak olanaklı olmadığından, en iyisi yine kutupsal koordinat dönüşümü yapmaktadır.  $R$  bölgesi, bir önceki çözümde olduğu gibi  $R' = \{(\rho, \phi) : \rho \in [0, a] \text{ ve } \phi \in [0, 2\pi]\}$  bölgesine dönüseceğinden, aşağıdaki bilgiyi kullanarak

$$\int_0^a x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^a (e^{-x^2})' dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^a = \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})$$

$$T = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi = \frac{1 - e^{-a^2}}{2} \int_0^{2\pi} d\phi = \pi(1 - e^{-a^2})$$

sonucu bulunur.

**Uyarı:** Son iki soruda bölge, sözgelimi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsiyle çevrelenen  $R$  bölgesi oluyordu, kutupsal koordinat dönüşümünün işleri **kolaylaştırılmayacağına** dikkat ediniz. Bölge **daire** ise, kutupsal koordinat dönüşümü özellikle yararlı olmaktadır. Aşağıdaki örneğe bkz.

**Örnek:**  $R = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$  ve  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  ise  $\iint_R f(x, y) dx dy$  tümlevi nasıl hesaplanır belirleyiniz, burada  $0 < a < b$  geçerlidir.

**Çözüm:** Dikkat:  $R$  eliptik bölge dir. Bu kez  $x = a\rho \cos \phi$ ,  $y = b\rho \sin \phi$  dönüşümü uygulanırsa  $J = ab\rho$  gözleyip  $\rho^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  nedeniyle aşağıdakiler bulunur.

$$R^* = \{(\rho, \phi) : \rho \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi]\},$$

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 ab\rho^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} d\rho d\phi \\ &= \frac{ab}{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} d\phi = \frac{4ab^2}{3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \phi} d\phi \end{aligned}$$

olur, dikkat edilirse

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2(1 - \cos^2 \phi)} = b\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \phi}, \quad 0 < k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} < 1$$

geçerlidir. Ayrıca şunlar Analiz III dersinden bilinmektedir:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \phi} d\phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\forall x \in (-1, 1)),$$

$$(1-ax)^{1/2} \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} a^n x^n,$$

$$|k^2 \sin^2 \phi| \leq k^2 < 1 \text{ böylece } \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} k^{2n} \sin^{2n} \phi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} k^{2n} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \phi d\phi \right)$$

çünkü (\*) açılımı  $[-1, 1]$  aralığında düzgün ve mutlak yakınsar ve her  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  için  $0 \leq \sin \phi < 1$  olmaktadır. O halde

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \cdots \left( -\frac{2n-3}{2} \right) \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

olduğundan aranan tümlev değeri,  $k$  sabiti yukarıda yazılan olmak üzere aşağıdakidir:

$$T = \frac{2\pi ab^2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot k^{2n} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2$$

13) Aşağıdaki tümlevi  $x+y = u$ ,  $y = uv$  eğrisel koordinat dönüşümü kullanarak hesaplayınız :

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx = \frac{e-1}{2}$$

**Çözüm:** Verilen tümlev  $R = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$  bölgesinde tanımlı ve her  $(x, y) \in R$  için  $0 \leq x + y \leq 1$  geçerli ve  $f(x, y) = e^{\frac{y}{x+y}}$  fonksiyonu  $R$  bölgesinin  $(0, 0)$  köşe noktasında **tanımlı değildir**. Aslında verilen tümlev, sözü edilen dönüşümde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x=\varepsilon}^1 \int_{y=0}^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varepsilon^2}{2} (e - 1) = \frac{e - 1}{2}$$

olarak hesaplanır, çünkü  $R_\varepsilon = \{(x, y) : x \in [\varepsilon, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$  bölgesi için  $u = x + y$ ,  $uv = y$  dönüşümü yapılrsa  $\varepsilon \leq x \leq x + y = u \leq 1$  ve  $0 \leq \frac{y}{x+y} = \frac{uv}{u} = v = 1 - \frac{x}{x+y} \leq 1$  nedeniyle bu bölge  $R'_\varepsilon = \{(u, v) : u \in [\varepsilon, 1], v \in [0, 1]\}$  bölgesine dönüşür. Böylelikle

$$\begin{aligned} \iint_{R_\varepsilon} e^{\frac{x}{x+y}} dx dy &= \iint_{R'_\varepsilon} e^v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_{v=0}^1 \int_{u=\varepsilon}^1 ue^v du dv \\ &= \int_{v=0}^1 e^v \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_{u=\varepsilon}^1 dv = \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \int_0^1 e^v dv = \frac{(1 - \varepsilon^2)(e - 1)}{2} \end{aligned}$$

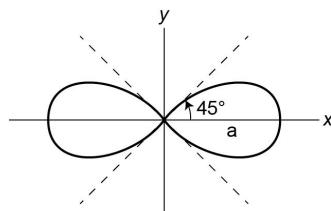
bulunur, çünkü  $v = \frac{y}{x+y}$ ,  $u = x + y$  böylelikle

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = v_y - v_x = \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{u}$$

ve sonuçta  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = u \geq \varepsilon > 0$  geçerli olmaktadır.

14) Lemniskat eğrisiyle çevrili bölgenin alanını bulunuz.

**Çözüm:** Bu eğri aşağıda çizilidir. Bu eğri alışıklaştırmış olduğumuz dik koordinat sisteminde  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$  yani  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2)$  polinomu aracılığıyla  $f(x, y) = 0$  biçimindedir ve  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$  kutupsal koordinat dönüşümüyle  $x^2 - y^2 = \rho^2(\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}) = \rho^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = \rho^2 \cos 2\phi$  ve  $x^2 + y^2 = \rho^2$  nedeniyle sonuçta  $\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\phi$  yani



$$\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$$

biçimini alır. Dolayısıyla düzlemede Lemniskat eğrisiyle çevrili  $R$  bölgesi aşağıdakidir (burada  $a$  sabiti  $a > 0$  gerçekler ) :

$$R = \{(x, y) \in R^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\}$$

Dikkat edilirse her  $(x, y) \in R$  için  $0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$  ve  $0 < a^2$  nedeniyle  $0 \leq x^2 + y^2 = |x|^2 - |y|^2$  yani  $|y| \leq |x|$  olduğundan,  $R$  bölgesi sayfa 21'de çizili olan  $R^* = \{(x, y) \in R^2 : |y| \leq |x|\}$  bölgesinin bir alt bölgesidir, dolayısıyla her  $(x, y) \in R \subseteq R^*$  için, bu noktanın ikinci kutupsal koordinatı olan  $\phi$  için  $\frac{-\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$  ya da  $\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4}$  geçerlidir(neden ?). Üstelik  $(x, y) \in R$  ile  $(-x, y) \in R$  iddiaları, kolayca görüleceği gibi eşdeğerdir, çünkü dikkat edilirse  $(x, y) \in R$  ise

$$((-x)^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2) = a^2((-x)^2 - y^2)$$

yani  $(-x, y) \in R$  ve benzer biçimde  $(-x, y) \in R$  ise  $(x, y) \in R$  olmaktadır. Böylece

$$R_1 = \{(x, y) \in [0, \infty) \times R : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\} = \{(x, y) \in [0, \infty) \times R : x^2 + y^2 \leq a\sqrt{(x^2 - y^2)}\}$$

$R_2 = \{(x, y) \in [-\infty, 0) \times R : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\} = \{(x, y) \in [-\infty, 0) \times R : x^2 + y^2 \leq a\sqrt{(x^2 - y^2)}\}$  olmak üzere  $R = R_1 \cup R_2$  ve  $R_1 \cap R_2 \subseteq 0 \times R$  nedeniyle  $\mu(R_1 \cap R_2) = 0$  ve böylece  $\text{Alan } R = \text{Alan } R_1 + \text{Alan } R_2 = 2 \cdot \text{Alan } R_1$  bulunur, neden? Kutupsal koordinat dönüşümüyle  $R_1$  bölgesi aşağıdaki bölgeye dönüseceğinden

$$R'_1 = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\phi} \quad \text{ve} \quad \phi \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan } R_1 &= \iint_{R_1} dx dy = \iint_{R'_1} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} \right| d\rho d\phi = \int_{\phi=\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_{\rho=0}^{\sqrt{\cos 2\phi}} \rho d\rho \right] d\phi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{\phi=\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\phi d\phi = \frac{a^2}{4} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) = \frac{2a^2}{4} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

ve böylece  $\text{Alan } R = 2 \cdot \text{Alan } R_1 = a^2$  bulunur.

**Ödev:** Kutupsal koordinatlardaki ifadesi  $\rho = \sqrt{\sin 2\phi}$  olan eğriyle çevrili bölgenin alanını bulunuz.

15) Aşağıdaki ünlü sonuçları iki katlı tümlev bilgisiyile elde ediniz :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

**Çözüm:** Öncelikle her  $M > 0$  için  $\int_0^M e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1 - e^{-2M^2})}$  gözleyelim. Kısalık amacıyla bu tümleve  $T_M$  diyecek olursak, kutupsal koordinat dönüşümü yapılarak  $R_M = [0, M] \times [0, M]$  kapalı kare bölgesi  $\sqrt{2}M > 0$  yarıçaplı dairesel bölgenin dörtte birlik bölgesi olan

$$R'_M = \{(\rho, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{2}M] \quad \text{ve} \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

bölgесine dönüşeceğini (neden ?), sonuçta  $\int_0^a te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})$  bilgisиyle

$$\begin{aligned} T_M^2 &= T_M \cdot T_M = \left( \int_0^M e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^M e^{-y^2} dy \right) = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{R'_M} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{R'_M} e^{-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\phi = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}M} \rho e^{-\rho^2} d\rho \right] d\phi \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2M^2}) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \frac{\pi(1 - e^{-2M^2})}{4} \end{aligned}$$

bularak  $T_M = \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1 - e^{-2M^2})}$  ve böylece aşağıdaki elde edilir :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} T_M = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi(1 - e^{-2M^2})}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

O halde  $x = u^2$  dönüşümüyle ikinci tümlev aşağıdaki gibi bulunur :

$$\int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M x' e^{-x^2} dx = \frac{x}{e^{x^2}} \Big|_0^M + 2 \int_0^M x^2 e^{-x^2} dx = \frac{M}{e^{M^2}} + 2 \int_0^M x^2 \cdot e^{-x^2} dx$$

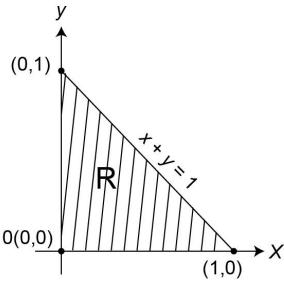
gözlemiyle

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \frac{M}{e^{M^2}} + 2 \int_0^M x^2 e^{-x^2} dx \right] = 2 \cdot \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

ve böylece üçüncü tümlev bulunur.

16)  $R$  bölgesi  $x+y = 1$ ,  $y = 0$  ve  $x = 0$  doğruları ile çevrelenen bölge ise  $\iint_R \cos(\frac{x-y}{x+y}) dx dy = \frac{\sin 1}{2}$  gösterin.

**Çözüm:** Dikkat edilirse  $R \subsetneq [0, 1] \times [0, 1]$  olduğundan, her  $(x, y) \in R$  için  $0 \leq x$  ve  $0 \leq y$  nedeniyle hem  $-x \leq x$  hem de  $-y \leq y$  ve böylece  $x - y = u$ ,  $x + y = v$  eğrisel koordinat dönüşümü yapılarak  $-v = -(x + y) = -x - y \leq x - y (= u) \leq x + y = v$  yani  $-v \leq u \leq v$  olur.



Ayrıca  $-(x+y) \leq x-y \leq x+y$  nedeniyle  $(0,0) \neq (x,y)$  gerçekleyen her  $(x,y) \in R$  için  $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \frac{x-y}{x+y} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$  ve böylece  $0 < \cos(\frac{x-y}{x+y}) < 1$  gözlenmelidir. Şimdi

$$\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x=\varepsilon}^1 \left[ \int_{y=0}^{1-x} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dy \right] dx = \frac{\sin 1}{2}$$

bulunur, çünkü sözü edilen eğrisel koordinat dönüşümü ile aşağıdaki bölge

$$R_\varepsilon = \{(x,y) \in [\varepsilon, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq 1-x\}$$

her  $(x,y) \in R_\varepsilon$  için  $\varepsilon \leq x \leq y+x = v \leq 1$  gözleyip  $R'_\varepsilon = \{(u,v) : v \in [\varepsilon, 1] \text{ ve } -v \leq u \leq v\}$  bölgesine dönüştüğü ve ayrıca

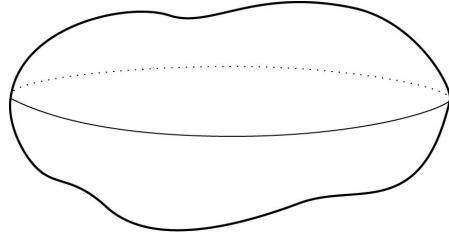
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{u_x v_y - u_y v_x} = \frac{1}{u_x - u_y} = \frac{1}{2} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

nedeniyle aşağıdaki sonuç kullanılır: Her  $\varepsilon \in (0, 1)$  için

$$\begin{aligned} \iint_{R_\varepsilon} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \int_{x=\varepsilon}^1 \left[ \int_{y=0}^{1-x} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dy \right] dx = \iint_{R'_\varepsilon} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=\varepsilon}^1 \left[ \int_{u=-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du \right] dv = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{u=-v}^v dv = \frac{2 \sin 1}{2} \int_{\varepsilon}^1 v dv = \frac{\sin 1}{2} (1 - v^2) \end{aligned}$$

Dikkat edilirse  $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$  nedeniyle  $0 < \sin 1$  gözlenmelidir.

17) Üç boyutlu  $\mathbb{R}^3$  uzayında, üst parçası gerçel değerli sürekli  $z = f_1 = (x, y)$  ve alt parçası gerçel değerli sürekli  $z = f_2 = (x, y)$  fonksiyonlarının belirlediği yüzeylerle çevrili  $R(\subseteq \mathbb{R}^3)$  bölgesinde gerçel



değerli  $f = f(x, y, z)$  fonksiyonu için  $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$  üç katlı Riemann tümlevinin gerek varlığı ve tanımı gerekse özellikleri ve hesaplama yöntemleri, yukarıda anlatılan iki katlı tümleve benzerdir.  $R$  bölgesinin sınırlılığı nedeniyle  $R \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  gerçekleşenecek biçimde dikdörtgenler prizması biçimli bir  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  kutusu vardır. Şimdi  $f$  gerçel değerli fonksiyonu  $R$  bölgesinde sınırlı olsun, yani uygun  $m$  ve  $M$  gerçel sabitleri aracılığıyla  $m \leq f(x, y, z) \leq M$  ( $\forall (x, y, z) \in R$ ) gerçekleşsin ve sözü edilen kutuyu oluşturan aralıkların her birisinde tanımlanan keyfi  $a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1-1} < x_{n_1} = b_1$ ,  $a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2-1} < y_{n_2} = b_2$  ve  $a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n_3-1} < z_{n_3} = b_3$  gerçel sayıları aracılığıyla tanımlanan  $R_{k,i,j} = ([x_{k-1}, x_k] \times [y_{i-1}, y_i] \times [z_{j-1}, z_j]) \cap R \subseteq R$  alt bölgelerinin ikişerli ayrık ve sonlu sayıda olduklarını, böylelikle bunların **boş olmayanlarını** yeniden sayıp numaralandırarak,  $R$  bölgesinin

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$$

gibi bir parçalanışı ve bu parçalanışın alt ve üst Riemann toplamları olan

$$s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n Hacim R_k \cdot \inf f(R_k),$$

$$S_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \sum_{k=1}^n Hacim R_k \cdot \sup f(R_k)$$

toplamları tanımlanır, burada  $Hacim R_k$  hacim değerleri sayfa ??? dakine benzer biçimde (nasıl?) tanımlanır. Kolayca  $R$  bölgesinin herhangi iki  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  ve  $\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$  parçalanışı için daima  $s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) \leq S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*)$  gerçekleştiği gözlenir.  $f$  fonksiyonuna ancak ve yalnız

$$\underline{R}_f(R) = \sup_{\{R_1, R_2, \dots, R_n\}} s_f(R_1, R_2, \dots, R_n) = \inf_{\{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}} S_f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*) = \overline{R}_f(R)$$

koşulunu sağlıyorsa  $R(\subseteq \mathbb{R}^3)$  bölgesinde **Riemann tümlevlenebilir** ve Riemann tümlevi  $R_f(R)$  ( $= \underline{R}_f(R) = \overline{R}_f(R)$  gerçel sayısıdır denir ve yaygın olarak

$$R_f(R) = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$

işareti yazılır. İki katlı tümleve ilişkin önerme ve teoremlerin hepsinin benzerleri üç katlı Riemann tümlevleri için geçerlidir. Aşağıdakiler bunu aşağı kavuşturmaktadır. Verilen her  $\varepsilon > 0$  için  $\max(Hacim R_k) < \varepsilon$  gerçekleyen ve dolayısıyla parçalanışa katılan  $R_k$  alt bölgelerinin sayısı olan  $n$  doğal sayısının yeterince büyük olduğu  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$

parçalanişları ve gelişigüzel seçilen  $(x_k, y_k z_k) \in R_k$  noktaları için  $n$  sayısının arttırılması durumunda

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = R(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{Hacim} R_k \cdot f(x_k, y_k, z_k)$$

geçerlidir. Ayrıca  $R(\subseteq \mathbb{R}^3)$  bölgesinin  $xy$  düzlemi (yani  $z = 0$  düzlemi) üzerine yapılan  $\pi_{xy}(R)$  izdüşüm bölgesi, sürekli ve gerçek değerli  $q_1 = q_1(x)$  ve  $q_2 = q_2(x)$  fonksiyonlarının grafikleri olan eğrilerle çevrilen kapalı-sınırlı bölgeyi göstermek ve bu bölgede  $x \in [a, b]$  olmak üzere

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \left[ \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz \right] dy \right] dx$$

geçerlidir. Ayrıca aşağıdaki bağıntı  $x = f(u, v, w)$ ,  $y = g(u, v, w)$ ,  $z = h(u, v, w)$  eğrisel koordinat dönüşümü için  $R$  bölgesinde  $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$  olduğunda geçerlidir :

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{R'} F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

18)  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $z = x + y$ ,  $z = 6$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  düzlemleriyle çevrili  $R$  bölgesinin hacmini bulunuz.

**Cözüm:**  $R$  bölgesi aşağıda çizilidir ve  $\iiint_R dx dy dz$  tümlevi sorulmaktadır. Bu bölge, tepeden  $z = 6$  ve yanlardan ise koordinat düzlemleri ile  $z = x + y$  düzlemi tarafından çevrilidir. Tipki  $y = ax + b$  doğrusunun düzlemi  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + b \leq y^2\}$  ve  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < ax + b\}$  olmak üzere iki ayırik bölgeye ayırması gibi  $z = x + y$  düzlemi de  $\mathbb{R}^3$  uzayını  $R_1 = \{(x, y, z) : z < x + y\}$  ve  $R_2 = \{(x, y, z) : x + y \leq z\}$  biçimde iki ayırik bölgeye ayırır ve dikkat edilirse  $P_0, P_1 \in R \subsetneq R_2$  gerçekler. Ayrıca  $R$  bölgesinin  $xy$  düzlemine yapılan izdüşümü ise

$$\begin{aligned} \pi_{xy}(R) &= \{(x, y) \in R^2 : x \in [0, 6], 0 \leq y \text{ ve } x + y \leq 6\} \\ &= \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in [0, 6] \text{ ve } 0 \leq y \leq 6 - x\} \end{aligned}$$

gerçekler. Ayrıca her  $(x, y, z) \in R$  için  $x + y \leq z \leq 6$  gerçekleştiğinden

$$R = \{(x, y, z) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in [0, 6], 0 \leq y \leq 6 - x, x + y \leq z \leq 6\}$$

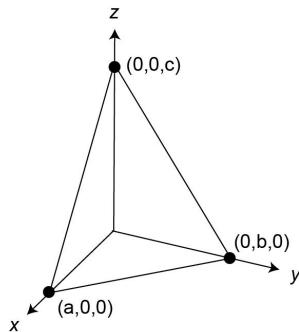
ve böylelikle aranan hacim aşağıdakidir :

$$\text{Hacim} R = \iiint_R dx dy dz = \int_{x=0}^6 \left[ \int_{y=0}^{6-x} \left[ \int_{z=x+y}^6 dz \right] dy \right] dx = \int_{x=0}^6 \left[ \int_{y=0}^{6-x} (6 - (x + y)) dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^6 (6-x)dx = 36$$

19) Tetrahedronun hacmini bulunuz.

**Çözüm:**



$\mathbb{R}^3$  uzayında  $0 < a, b, c$  sabitleri aracılığıyla  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  düzlemiyle koordinat düzlemleri tarafından çevirili bölgeye **dört yüzelyi** yani tetrahedron denir ve aranan hacim aşağıdakidir:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^a \left[ \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} \left[ \int_{z=0}^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz \right] dy \right] dx &= c \int_{x=0}^a \left[ \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy \right] dx \\ &= \frac{bc}{2} \int_0^a \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \frac{bc}{2a^2} \int_0^a (x-a)^2 dx = \frac{abc}{6} \end{aligned}$$

20)  $z = x^2 + y^2$  paraboloidi ile  $z = 0, x = -a, x = a, y = -a$  ve  $y = a$  düzlemleri tarafından çevrilen bölgenin hacmi nedir?

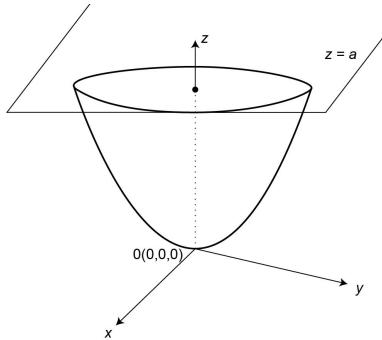
**Çözüm:** Sözü edilen  $R$  bölgesinin aşağıda yazılan olduğunu gözleyiniz.

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a] \text{ ve } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

dolayısıyla onun hacmi:

$$\text{Hacim}R = \int_{x=-a}^a \left[ \int_{y=-a}^a \left[ \int_{z=0}^{x^2+y^2} dz \right] dy \right] dx = \int_{x=-a}^a \left[ \int_{y=-a}^a (x^2 + y^2) dy \right] dx = \frac{8a^4}{3}$$

21)  $z = x^2 + y^2$  paraboloidinin  $z = 0$  ve  $z = a$  düzlemleri arasındaki kısmının hacmini hesaplayınız.



**Cözüm:**  $O(0, 0, 0)$  dip noktasında  $xy$  düzleme yani  $z = 0$  düzlemine oturan bu içi boş vazo biçimli bölgenin  $z = a$  düzlemi ile kesitinin  $xy$  düzleme izdüşümü aşağıdakidir:

$$\pi_{xy}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$$

$R$  bölgesine ait  $(x, y, z)$  noktalarının ya vazo yüzeyine ya da vazonun iç kısmında bulunduğu, böylece

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}], -\sqrt{a-x^2} \leq y \leq \sqrt{a-x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq a\}$$

sözelimi  $Oz$  ekseni üzerinde bulunan  $P_0(0, 0, \frac{a}{2})$  noktasının  $R$  bölgesine ait olduğunu söylelikle aranan hacmin

$$\begin{aligned} \text{Hacim}R &= \int_{x=-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left[ \int_{y=-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^a dz \right] dy \right] dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left[ \int_{y=-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} (a - x^2 - y^2) dy \right] dx \\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left( (a - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} dx = \frac{4}{3} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

olur, çünkü dikkat edilirse,  $c > 0$  ve  $x \in [-c, c]$  olmak üzere

$$\begin{aligned} h(x) &= \int (c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int x'(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = x(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + 3 \int x^2 \sqrt{c^2 - x^2} dx \\ &= x(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \int [(c^2 - x^2) - c^2] \sqrt{c^2 - x^2} dx \\ &= x(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - 3h(x) + 3c^2 \left[ \frac{x\sqrt{c^2 - x^2}}{2} + \frac{c^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) \right], \\ h(x) &= \int (c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \left[ x(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3c^2}{2} x\sqrt{c^2 - x^2} + \frac{3c^4}{2} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

ve böylelikle aşağıdaki sonuç,  $\arcsin(-1) = -\arcsin 1$  bilgisi kullanılıp bulunur:

$$\int_{-c}^c (c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{3c^4}{2} \arcsin 1 - \frac{3c^4}{2} \arcsin(-1) \right) = \frac{3c^4}{4} \arcsin 1 = \frac{3\pi c^4}{8}$$

Bu kadar uzun hesaplama yapmaya gerek var mıdır? Hayır **yoktur**, çünkü kutupsal koordinat dönüşümü yapılrsa,  $\pi_{xy}(R) = R^*$  yazarak kolayca

$$\begin{aligned} \text{Hacim}R &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \int_{y=-\sqrt{a-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} (a - (x^2 + y^2)) dy dx = \iint_{R^*} (a - (x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{a}} (a - \rho^2) \rho d\rho d\phi \\ &= (2\pi) \cdot \int_{\rho=0}^{\sqrt{a}} (a\rho - \rho^3) d\rho = 2\pi \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

**Ödev:**  $z = 2 - (x^2 + y^2)$  paraboloidinin  $z = -1$  ve  $z = 1$  düzlemleri arasında kalan kısmının hacmini bulunuz.

22) Elipsoid, küre ve koni ile çevrelenen bölgelerin hacmini bulunuz.

**Cözüm:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoidinin çevrelediği bölge

$$\begin{aligned} R &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-a, a], -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \right. \\ &\quad \left. -c\sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} \leq z \leq c\sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} \right\} \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\text{Hacim}R = \int_{-a}^a \left[ \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left[ \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}} dz \right] dy \right] dx = \frac{4\pi abc}{3}$$

olur, çünkü öncelikle, kısalık amacıyla  $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  yazarak

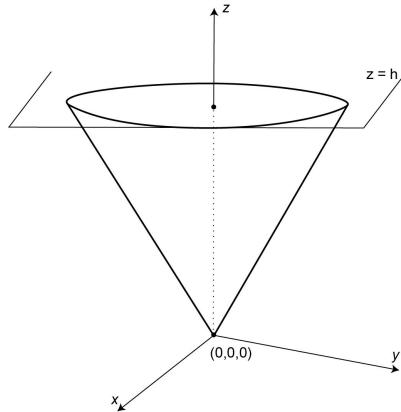
$$\begin{aligned}
 \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy &= \frac{1}{b} \int_{y=-f(x)}^{f(x)} \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) - y^2} dy \\
 &= \frac{1}{b} \int_{y=-f(x)}^{f(x)} \sqrt{f^2(x) - y^2} dy \\
 &= \frac{1}{b} \left[ \frac{y\sqrt{f^2(x) - y^2}}{2} + \frac{f^2(x)}{2} \arcsin \frac{y}{f(x)} \right]_{y=-f(x)}^{f(x)} \\
 &= \frac{f^2(x) \arcsin 1}{b} \\
 &= \frac{\pi b}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)
 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\text{Hacim}R = 2c \int_{x=-a}^a \left[ \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right] dx = \pi abc \int_{-a}^a \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4\pi abc}{3}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla  $a > 0$  yarıçaplı küre tarafından çevrelenen bölgenin hacmi, bu küre  $a = b = c$  gerçekleyen çok özel bir elipsoid olduğunda  $\frac{4\pi abc}{3}$  olarak bulunur. Şimdi  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  dairesel koninin  $z = h$  düzlemiyle  $z = 0$  düzlemleri arasında kalan kısmının hacminin, tipki 21) numaralı örnekteki gibi,  $R^* = \pi_{xy}(R)$  yazarak aşağıdaki bulunur:

$$\begin{aligned}
 \text{Hacim}R &= \iint_{R^*} \left[ \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^h dz \right] dydx = \iint_{R^*} (h - \sqrt{x^2 + y^2}) dydx \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^h (h - \rho) \rho d\rho d\phi = 2\pi \int_0^h (h\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi h^3}{3}
 \end{aligned}$$



23) Kürenin çevrelediği bölgenin hacmini dönüşüm bağıntısıyla bulunuz.

**Çözüm:** Küresel koordinat dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned}x &= f(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \cos \phi \\y &= g(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \sin \phi \\z &= h(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \theta\end{aligned}$$

ve sonuçta

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = \rho^2 \sin \theta$$

bularak, kürenin sekizde birlik parçasının hacmi için

$$R_{\frac{1}{8}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

bu bölgede ikinci küresel koordinat  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ve böylece  $0 \leq \rho^2 \sin \theta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right|$  gözleyerek, sayfa ? daki son bağıntıyla

$$\begin{aligned}\text{Hacim } R_{\frac{1}{8}} &= \iiint_{R_{\frac{1}{8}}} dz dy dx = \iiint_{R'_{\frac{1}{8}}} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| d\rho d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^a \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi \\&= \frac{a^3}{3} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right] d\phi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \frac{\pi}{2}) d\phi = \frac{\pi a^3}{6}\end{aligned}$$

bularak, kürenin, çevrelediği bölgenin hacmi  $\text{Hacim } R = 8 \cdot \frac{\pi a^3}{6} = \frac{4\pi a^3}{3}$  bulunur.

24)  $x^2 + y^2 = a^2$  ve  $x^2 + z^2 = a^2$  silindirlerinin kesişimiyle oluşan kapalı-sınırlı  $R (\subseteq \mathbb{R}^3)$  bölgesinin hacmini bulunuz.

**Çözüm:**  $R$  bölgesi, tabanı  $xy$  düzleminde bulunup,  $a > 0$  yarıçaplı  $O(0, 0, 0)$  merkezli olup  $Oz$  ekseni boyunca sonsuz biçimde uzayan dairesel silindirle, tabanı  $xz$  düzleminde bulunup  $Oy$  ekseni boyunca uzayan benzer silindirin kesişimiyle oluşmuştur ve aşağıdaki sekizde birlik bölgedir:

$$R_{\frac{1}{8}} = \{(x, y, z) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) : x \in [0, a], 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\},$$

$$\begin{aligned}\text{Hacim } R &= 8 \cdot \text{Hacim } R_{\frac{1}{8}} = \iint \int_{R_{\frac{1}{8}}} dz dy dx = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dz dy dx \\&= 8 \int_0^a \left[ \int_{y=0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \right] dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}\end{aligned}$$

25) İki ve üç katlı tümlevlerin fiziksel yorumlarını veriniz.

**Cözüm:** Düzlemede kapalı-simrlı  $R$  bölgesinde tanımlı gerçel değerli bir  $f = f(x, y)$  fonksiyonu için  $K = \iint_R f(x, y) dx dy$  gerçel sayısı, **yoğunluk fonksiyonu**  $f = f(x, y)$  olan  $R$  **bölgesinin kütle değeridir**. Özel olarak  $\iint (x^2 + y^2) dx dy$  tümlevi,  $R$  bölgesinin  $O(0, 0)$  orijine göre atalet (devinimsizlik) momenti değeridir, kısacası  $R$  bölgesinin devinimsizlik momenti, yoğunluk fonksiyonu  $x^2 + y^2$  olan  $R$  bölgesinin kütle değeridir, benzer fiziksel yorumlar  $\iint \iint_R F(x, y, z) dx dy dz$  tümlevi için geçerlidir.

26) Düzlemede birinci bölgede yer alıp  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 9$ ,  $xy = 2$  ve  $xy = 4$  hiperboller ile çevrili bçlgenin devimsizlik momentini bulunuz.

**Cözüm:**  $R$  aşağıda gösterilen bölge olmak üzere, soru  $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$  tümlev değerini sormaktadır. Hiperbolik koordinat dönüşümü olan  $x^2 - y^2 = u$ ,  $2xy = v$  eğrisel koordinat dönüşümü altında,  $R$  bölgesi,  $uv$  düzlemindeki  $R' = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 9 \text{ ve } 4 \leq v \leq 8\}$  kapalı-simrlı bölgesine dönüşür, üstelik  $f(x, y) = x^2 + y^2$  yoğunluk fonksiyonu  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$ , ayrıca  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = 4(x^2 + y^2) = 4\sqrt{u^2 + v^2} \geq 0$  geçerli olduğundan  $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| du dv = \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{du}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} dv$ .

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| du dv = \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{du dv}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{4} \int_{u=1}^9 \left[ \int_{v=4}^8 dv \right] du = 8 \text{ sonucu bulunur.}$$

27)  $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2} xyz \, dz dy dx$  hesaplayıp, fiziksel yorumunu veriniz.

**Cözüm:**  $R = \{(x, y, z) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) : (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$  olmak üzere  $f(x, y, z) = xyz$  yoğunluk fonksiyonlu  $R$  bölgesinin **toplam kütlesi** soruda sorulan tümlev olup

$$K = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left[ \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^2 z dz \right] y x dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (4 - (x^2 + y^2)) y x dy dx = \frac{3}{8}.$$

28) Soruda sorulan toplam kütle

$$K = \int_{x=0}^2 \left[ \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \left[ \int_{z=0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz \right] dy \right] dx = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy(4-x^2-y^2)}{2} dy dx = \frac{4}{3}.$$

29) Sorulan hacim =  $\int_{x=-2}^2 \left[ \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[ \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz \right] dy \right] dx = 8\pi$ .

30)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  konisi ve  $z = 3$  düzlemi ile çevreleyen  $R$  bölgesinde  $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  tümlevini hesaplayınız.

**Cözüm:** Bu sivri koni dip noktası  $O(0, 0, 0)$  ve yükseliği  $h = 3$  olan koni olup  $R$  bölgesi onunla çevrelenen bölgedir, böylece  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ,  $z = z$  silindirik koordinat dönüşümü altında ve  $\rho^2 = x^2 + y^2 = z^2$  yani  $0 \leq \rho \leq z$  ve  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z) = \rho \geq 0}$  nedeni ve aşağıdaki bilgi ile

$$\int x\sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned} \iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz &= \iiint_{R'} \sqrt{\rho^2 + z^2} \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} \right| d\rho d\phi dz = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 \int_{\rho=0}^z \rho \sqrt{\rho^2 + z^2} d\rho dz d\phi \\ &= 2\pi \cdot \int_{z=0}^3 \left[ \int_{\rho=0}^z \rho \sqrt{\rho^2 + z^2} d\rho \right] dz = \frac{(2\sqrt{2} - 1)2\pi}{3} \int_0^3 z^3 dz \\ &= \frac{2(2\sqrt{2} - 1)\pi}{3} \cdot \frac{3^4}{4} = \frac{27\pi(2\sqrt{2} - 1)}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

31) Bu soruda  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  konisi ile  $z = x^2 + y^2$  paraboloidi  $x^2 + y^2 = 1 = z$  çemberinde kesitleri için  $\pi_{xy}(R) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ve

$$R = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : x \in [-1, 1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

ve böylelikle aranan hacim

$$\begin{aligned} HacimR &= \int_{x=-1}^1 \left[ \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right] dy \right] dx = \iint_{\pi_{xy}(R)} \left( \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \right) dy dx \\ &= \iint_{R'} (\rho - \rho^2) \rho d\rho d\phi = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho d\phi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

32) Küresel koordinat dönüşümü yaparak çözümü.

**Ödev:**  $x^2 + y^2 = 1$  silindirinin  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  kapalı-sınırlı küresel bölgeyle çevrelenen kısmının hacmini ve ayrıca kürenin bu silindirin dışındaki kısmının hacmini hesaplayınız. (Yanıt: Birinci hacim değerinin  $\frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$  ikincisinin  $4\sqrt{3}$  olduğunu gösteriniz.)

**Ödev:**  $z = 64 - x^2$  yüzeyi ile  $3x + 4y = 24$  ve koordinat düzlemleriyle çevrili bölgenin hacminin 1280 tam sayısı olduğunu gösteriniz.

**Ödev:**  $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ( $a, b, c > 0$ ) eliptik konisinin  $z = -h$  ve  $z = h$  düzlemleriyle çevrili kısmının hacmini bulunuz.

**Lambert Teoremi:**  $\pi$  irrasyoneldir.

Kanıtlama: Bu kanıtlama Amerikalı Ivan Niven tarafından 1954 yılında verilmiştir: Aslında  $\pi^2$  irrasyoneldir! (Legendre 1768) İki aracı polinom tanımlayacağız.

$$p(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{n+k}$$

$$x \in (0, 1) \text{ için } 0 < p(x) < \frac{1}{n!}$$

**Ara iddia 1:** Her  $m \in \mathbb{N}$  için  $p^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$  olur.

$$p^{(m)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a_{n,k}(m) x^{n+k-m},$$

$$a_{n,k}(m) = (n+k)((n+k)-1)\dots((n+k)-(m-1)),$$

$$p^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \binom{n}{n} (-1)^n a_{n,n}(2n) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

$$m > 2n \text{ ise kolayca } p^{(m)}(x) = 0.$$

$n \leq m < 2n$  ise

$$\text{eğer } m = n \text{ ise } p^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} a_{n,0}(n) + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k a_{n,k}(n) x^k$$

$$p^{(n)}(0) = \frac{n!}{n!} = 1$$

eğer  $0 < k_0 < n$  ve  $m = n + k_0 < 2n$  ise

$$p^{(m)}(x) = p^{(n+k_0)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k < k_0} + \frac{1}{n!} (-1)^{k_0} \binom{n}{k_0} a_{n,k_0}(n+k_0) x^0 +$$

$$+ \sum_{k_0 < k}^n \binom{n}{k} (-1)^k a_{n,k}(n+k_0) x^{k-k_0}$$

$$k < k_0 \text{ ise } n+k \leq n+k_0-1 = m-1, \quad a_{n,k}(n+k_0) = 0$$

ve

$$p^{(m)}(0) = (-1)^{k_0} \binom{n}{k_0} \frac{(n+k_0)!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

$1 \leq m < n$  ise herbir  $k = 0, 1, \dots, n$  için  $n + k - m > 0$ ,

$$p^{(m)}(0) = 0$$

**Ara iddia 2:** Her  $m \in \mathbb{N}$  için  $p^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}$  olur, çünkü

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1-x) \\ p^{(m)}(x) &= (-1)^m p^{(m)}(1-x). \end{aligned}$$

Şimdi ikinci aracı polinomu şöyle tanımlayalım: Varsayımlı: Eğer  $\pi^2 \in \mathbb{Q}$  olsaydı, kısaca  $\pi^2 = \frac{m}{N}$  olur ve böylece yukarıdaki  $p$  polinomu aracılığıyla

$$q(x) = N^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} p^{(2k)}(x)$$

tanımlanırsa aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} q''(x) &= N^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} p^{(2k+2)}(x) \\ &= N^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi^{2n-2k} p^{(2k+2)}(x) \\ &= N^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \pi^{2n-2k+2} p^{(2k)}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \pi^2 q(x) &= N^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k+2} p^{(2k)}(x) \\ &= N^n \pi^{2n+2} p(x) - N^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \pi^{2n-2k+2} p^{(2k)}(x). \end{aligned}$$

Sonuçta

$$q''(x) + \pi^2 q(x) = N^n \pi^{2n+2} p(x)$$

ve böylece

$$N^n \pi^{2n+2} = \pi^2 N^n \left(\frac{m}{N}\right)^n = \pi^2 m^n$$

ve

$$\begin{aligned} (q'(x) \sin \pi x - \pi q(x) \cos \pi x)' &= (q''(x) + \pi^2 q(x)) \sin \pi x \\ &= N^n \pi^{2n+2} p(x) \sin \pi x \\ &= \pi^2 m^n p(x) \sin \pi x \\ \left(\frac{1}{\pi} q'(x) \sin \pi x - q(x) \cos \pi x\right)' &= \pi m^n p(x) \sin \pi x \end{aligned}$$

ve sonuçta

$$\begin{aligned} (\pi m^n) \int_0^1 p(x) \sin \pi x &= \left( \frac{1}{\pi} q'(x) \sin \pi x - q(x) \cos \pi x \right) \Big|_0^1 \\ &= q(1) + q(0) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^n N^n \pi^{2n-2k} p^{(2k)}(x) \\ \text{için } q(0) &= \sum_{k=0}^n (-1)^n N^n \pi^{2n-2k} p^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}, \\ N^n \pi^{2n-2k} &= N^n \left( \frac{m}{N} \right)^{n-k} = N^k m^{n-k} \end{aligned}$$

aynen  $q(1) \in \mathbb{Z}$  bulunur, oysa

$$0 < (\pi m^n) \int_0^1 p(x) \sin \pi x dx < \frac{\pi m^n}{n!} < \frac{(\pi m)^n}{n!}$$

yeteri kadar büyük  $n$  doğal sayısı için

$$0 < q(0) + q(1) < 1$$

çelişkisi doğardı, çünkü iyi bilindiği gibi

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists N_a \in \mathbb{N}, 0 < \frac{a^n}{n!} < 1 \quad (\forall n \geq N_a)$$

**Sonuç:**  $\pi^2$  ve böylelikle  $\pi$  irrasyoneldir. Bitti!