

Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 20 Kasım 2021	

Süre 90dk.

Lagrange-Charpit Denklemleri:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)}$$

1. (30 puan) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)z$ kısmi türevli denkleminin $x = 2y$, $z = 2$ başlangıç eğrisinden geçen çözümünü bulun.

Çözüm:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \implies \frac{-1}{x} = \frac{-1}{y} + c_1 \implies u_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1$$

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z} \implies \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z} \implies u_2 = \frac{z}{x-y} = c_2$$

$$x = 2y, \quad z = 2 \implies u_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y} \quad \text{ve} \quad u_2 = \frac{2}{2y-y} = \frac{2}{y} \implies y = \frac{1}{2u_1} = \frac{2}{u_2}$$

$$\frac{1}{2u_1} = \frac{2}{u_2} \implies u_1 = \frac{u_2}{4} \implies \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{z}{4(x-y)}$$

Cevap:

$$z = \frac{4(x-y)^2}{xy}$$

2. (30 puan) $2xzdx + zdy - dz = 0$ Pfaff denkleminin (a) integrallenebilir olduğunu gösterin, (b) ilkel fonksiyonunu elde edin.

Cözüm: (a)

$$\mathbf{X} = (2xz, z, -1) \implies \operatorname{curl}(X) = (-1, 2x, 0) \implies \mathbf{X} \cdot \operatorname{curl}(\mathbf{X}) = -2xz + 2xz = 0$$

(b)

$$0 = 2xzdx + zdy - dz = z\left(2xdx + dy - \frac{dz}{z}\right) \implies \int 2xdx + dy - \frac{dz}{z} = x^2 + y - \ln z = c$$

Cevap:

$$\phi = x^2 + y - \ln z = c \quad \text{veya} \quad \phi = \frac{\exp(x^2 + y)}{z}$$

3. (20 puan) $qp = 4z$, denkleminin $x = 0$ ve $y^2 = z$, $z > 0$ parabolünden geçen çözümünü bulun.

Çözüm:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)}$$

$$F = qp - 4z \implies F_x = F_y = 0, \quad F_z = -4, \quad F_q = p, \quad F_p = q$$

$$\frac{dp}{-pF_z} = \frac{dq}{-qF_z} \implies \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \implies p = a^2 q \implies a^2 q^2 = 4z \implies q = \frac{2\sqrt{z}}{a} \implies p = 2a\sqrt{z}$$

$$dz = pdx + qdy \implies dz = 2a\sqrt{z}dx + \frac{2\sqrt{z}}{a}dy$$

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int adx + \frac{1}{a}dy \implies \sqrt{z} = ax + \frac{y}{a}$$

$$x = 0, \quad y^2 = z \implies y = \frac{y}{a} \implies a = 1$$

Cevap:

$$z = (x + y)^2$$

4. (20 puan) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 + 4 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$ denkleminin tam çözümünü yazın.

Çözüm:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$F(p, q) = p^4 + 4pq + 1 = 0$$

$$\dots = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt \implies p = a \implies a^4 + 4aq + 1 = 0 \implies q = -\frac{1+a^4}{4a}$$

$$dz = pdx + qdy = adx - \frac{1+a^4}{4a} dy$$

Cevap:

$$z = ax - \frac{1+a^4}{4a} y + b$$