

Analiz 3 Ders Notları

Taylan Şengül

24 Aralık 2021

Lütfen gördüğünüz hataları bildiriniz.

İçindekiler

İçindekiler	1
1. Hafta. Reel Sayı Dizileri	2
2. Hafta. Noktasal Yakınsaklık	8
3. Hafta. Düzgün Yakınsaklık: Tanım, Sup Norm ve Örnekler	12
4. Hafta. Düzgün Yakınsaklığın Özellikleri	16
5. Hafta. Düzgün yakınsamayla ilgili alıştırmalar	23
6. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Noktasal Yakınsama	27
7. Hafta. Arasınav Öncesi Genel Tekar	38
8. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Yakınsama	38
9. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Yakınsama Örnekleri	43
10. Hafta. Kuvvet Serileri	46
11. Hafta. Fourier Serileri	56
12 ve 13. Haftalar. Has Olmayan İntegraller	70
14. Hafta. Final Öncesi Genel Tekrar	80

Kaynakça	81
-----------------	-----------

1. Hafta. Reel Sayı Dizileri

- Dizinin tanımı.** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesi doğal sayıları göstersin. Bir $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **dizi** deriz. Dizinin terimleri genellikle $a_n = a(n)$ olarak yazılır. Bu diziyi göstermek için $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ veya $\{a_n\}$ yazacağız.

- Artan, azalan, kesin artan, kesin azalan, sınırlı ve sınırsız dizi kavramlarının önceki analiz derslerinden bilindiğini varsayıyoruz.

- Dizilerin yakınsaklılığı.** Bir $L \in \mathbb{R}$ ve her $\epsilon > 0$ için

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \epsilon,$$

şartını sağlayan (ve genellikle ϵ 'a bağlı olarak belirlenebilen) bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, L sayısına $\{a_n\}$ dizisinin **limiti** denir. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ yazılır ve $\{a_n\}$ dizisine **yakınsak** dizi denir.

Örnek 1. $c \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = c$ dizisine **sabit dizi** denir. Sabit dizinin limitinin $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ olduğunu limit tanımını kullanarak gösterin.

Örnek 2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^n = 1$ olduğundan (1^n) dizisi sabit dizidir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ olur. $(\sin 2\pi n)$ dizisi sabit dizi olduğu için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0$.

Örnek 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{n} = 1$ olduğunu limit tanımından gösterelim. $\epsilon > 0$ için $N > \frac{2}{\epsilon}$ şartını sağlayan herhangi bir doğal sayı olsun (Örneğin $\frac{2}{\epsilon}$ 'dan büyük en küçük doğal sayı olabilir).

$$n \geq N > \frac{2}{\epsilon} \implies \frac{2}{n} < \epsilon \implies \left| \frac{2}{n} \right| < \epsilon \implies \left| \frac{2+n}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

-
- Eğer $\{a_n\}$ dizisinin bir limiti varsa bu limitin tek olduğu gösterilebilir. (ispatlayın). Yani bir dizinin en çok bir limiti olabilir.

- Iraksak diziler.**

Tanım 1. Eğer $\{a_n\}$ dizisinin bir limiti yoksa, $\{a_n\}$ dizisine **iraksak** dizi denir. Eğer dizinin limiti yoksa ve verilen her $M > 0$ reel sayısı için

$$a_n \geq M, \quad \forall n \geq N$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ yazılır. Benzer şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ tanımlanabilir.

Örnek 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ yoktur. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0. \quad (1)$$

İspat. Her üç limitin de aynı olduğu tanımdan görüülür.

Örnek 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{n} = 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{n} - 1 \right) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2+n}{n} - 1 \right| = 0$ olur.

7. **Yakınsak diziler sınırlıdır** (ispatlayın). Tersi doğru değildir, örneğin $a_n = (-1)^n$ dizisi sınırlı ama iraksaktır.

8. Eğer $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için öyle bir N varsa ki $\{x_n\}_{n \geq N}$ dizisi X özelliğini sağlıyorsa, $\{x_n\}$ dizisi X özelliğini **nihai** olarak sağlar denir.

9. **Yakınsaklık nihai bir özelliktir.** Yani $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yakınsaksa, her $N \in \mathbb{N}$ için $\{a_n\}_{n \geq N}$ dizisi yakınsaktır. Ters olarak da bir $N \in \mathbb{N}$ için $\{a_n\}_{n \geq N}$ dizisi yakınsaksa, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de yakınsaksaktır. Yani dizinin yakınsaklığı dizinin sonlu sayıda elemanı dışında kalan elemanları tarafından belirlenir.

10. **Dizilerde aritmetik işlemler ve limit.** Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ varsa (ispatlayın ki)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x a_n &= x \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad x \in \mathbb{R} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{eğer } \forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.\end{aligned}$$

Örnek 6. Yukarıdaki özellikten yararlanırsak, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

buluruz.

Örnek 7. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x n^4 + 1}{x^2 n^4 + n^2} = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

olduğunu görelim.

$x \neq 0$ değilse, pay ve paydanın en kuvvetli terimleri n^4 olur.

$$x \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x n^4 + 1}{x^2 n^4 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1/n^4}{x^2 + 1/n^2} = \frac{e^x}{x^2}$$

$x = 0$ durumunda payın en kuvvetli terimi n^4 , paydanın en kuvvetli terimi ise n^2 olur. Bu durumda

$$x = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^0 n^4 + 1}{0 n^4 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + \frac{1}{n^2} = \infty$$

11. **Karşılaştırma kriteri.** Eğer nihai olarak $a_n \geq b_n$ ise ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ ve $L, M \in [-\infty, \infty]$ ise $L \geq M$ olur.

Sonuç 1) Nihai olarak $a_n \geq b_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ olur.

Sonuç 2) Nihai olarak $a_n \geq c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in [-\infty, \infty]$, ise $L \geq c$ olur.

Yukarıdaki önermeler, \geq simbolü yerine \leq simbolü olduğu durumda da geçerlidir.

12. **Sıkıştırma Lemması:** Eğer bir $L \in [-\infty, \infty]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ise ve nihai olarak $a_n \leq b_n \leq c_n$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ olur. İspat. Karşılaştırma kriteri kullanılarak gösterilebilir.

Özel olarak $|a_n| \leq b_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olduğunu sıkıştırma lemmasını kullanarak gösterin.

Örnek 8. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(e^x n + n^2)}{n} = 0$ olduğunu görelim.

$$0 \leq \left| \frac{\cos(e^x n + n^2)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

olduğundan sıkıştırma lemması uyarınca sonuç çıkar.

13. $L \in [-\infty, \infty]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ olur. Yani $\{a_n\}$ dizisi yakınsaksa $\{|a_n|\}$ dizisi de yakınsaktır.

İspat. $L \in \mathbb{R}$ için ters üçgen eşitsizliğini kullanırsak $0 \leq ||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$ olur. Şimdi sıkıştırma teoremini kullanarak sonucu gösterin. $L = \pm\infty$ için de önermeyi ispatlayın.

Tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin $a_n = (-1)^n$ dizisi yakınsak değildir ama $|a_n| = 1$ sabit dizisi yakınsaktır. Tersi genel olarak sadece $L = 0$ için doğrudur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ancak ve ancak} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

İspat. (1) ozelliğinin sonucudur.

14. Dizilerde l'Hopital kuralı. $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \in \mathbb{R}}} f(y) = L \in [-\infty, \infty] \implies \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N}}} f(n) = L$$

olur.

Yani reel sayılar üzerinde sonsuza giderken limit varsa, doğal sayılar üzerinde sonsuza giderken de limit aynıdır. Ama bu önermenin tersi doğru değildir. Örneğin $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, fakat $\lim_{y \rightarrow \infty} \sin(y\pi)$ tanımsızdır.

Özel olarak, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ limitini belirlemek için $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)$ limitini belirlememiz yeterlidir. Daha önceki analiz derslerinde, $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y)$ limitini belirlemek için belli şartlarda l'Hopital (l'Hospital veya l'Hôpital olarak da yazılır) kuralının kullanılabileceğini biliyoruz.

Örnek 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ limitini belirlemek için $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y}$ limitini bulalım. Bu limit $[\infty/\infty]$ tarzı bir belirsiz form olduğundan, l'Hopital kuralı uyarınca

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{\ln y}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{1/y}{1} = 0$$

Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ olur.

15. Limit ve fonksiyon ne zaman yer değiştirebilir? $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ve f fonksiyonu L noktasında sürekli bir reel değerli fonksiyon ve $f(a_n)$ her n için tanımlı ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(L).$$

olur.

Ispat. Limit tanımı gereği

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N > 0 \quad n \geq N \implies |a_n - L| < \delta$$

Süreklik tanımı gereği

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - L| < \delta \implies |f(x) - f(L)| < \epsilon$$

Bu iki tanımı birleştirerek

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n \geq N \implies |f(a_n) - f(L)| < \epsilon$$

buluruz.

Örnek 10. Karekök fonksiyonu sürekli olduğundan, her $x \geq 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2nx}{n+x^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{n+x^2}} = \sqrt{2x}$$

olur.

16. **exp(ln) yöntemi.** $\exp x = e^x$ olarak tanımlanır. Hem \exp hem de \ln fonksiyonları sürekli olduğundan, bir önceki maddede verilen özellikten yararlanarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \ln a_n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n$$

olarak yazmak özellikle üslü ifadelerde limit alırken oldukça kullanışlıdır.

Örnek 11. $x > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1$ olduğunu görelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \exp \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{x} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln x \right) = \exp(0) = 1.$$

Örnek 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu görelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \ln n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \frac{\ln n}{n} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \right) = \exp 0 = 1$$

Örnek 13. Yukarıdaki iki örneği birleştirerek, her $x > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (xn)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1,$$

buluruz.

17. **Geometrik Dizi.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \text{yok}, & x \leq -1 \end{cases}$$

İspat. $0 < |x| < 1$ için $-\alpha = \ln|x| < 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \exp \left(\ln \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln |x| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha n} = 0.$$

Eğer $x > 1$ ise

$$\exists \delta > 0, x > 1 + \delta \implies x^n > (1 + \delta)^n > n\delta$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta = \infty$ olduğundan sonuç çıkar.

Örnek 14. l'Hopital kuralından yararlanarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n \ln x}{1} = \infty, \quad \forall x > 1$$

olduğunu gösterin.

18. Diziler İçin Oran Testi: a_n pozitif bir dizi ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun. O halde $L \geq 0$ olur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{eğer } 0 \leq L < 1 \\ +\infty, & \text{eğer } L > 1 \end{cases}$$

Eğer $L = 1$ ise bu test sonuç vermez.

İspat. $L \geq 0$ olduğu barizdir. $L < 1$ olsun. O zaman $r := L + \epsilon < 1$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Limit tanımı gereği

$$\exists N, \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

olur. Yani

$$a_{N+1} < r a_N, \quad \forall n \geq N$$

olur. Dolayısıyla $0 < a_{N+m} < r^m a_N$ olur. Ama $0 < r < 1$ olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} r^m = 0$ (bkz. geometrik dizi) olur. Ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r^m a_N = a_N \lim_{m \rightarrow \infty} r^m = 0,$$

olduğundan, sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{N+m} = 0$ olur. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur.

$L > 1$ durumunu siz gösterin.

Şimdi $L = 1$ olduğu durumda testin sonuç vermediğini görelim. $a_n = 3$ sabit dizisi için $L = 1$ olur ve bu dizi yakınsar. $a_n = n$ dizisi için de $L = 1$ olur ama bu dizi iraksar.

Örnek 15. Diziler için oran testini kullanarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x^n = 0, \quad |x| < 1, \quad \alpha > 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

olduğunu gösterin.

Örnek 16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm. Birinci yöntem olarak diziler için oran testini kullanarak gösterin. İkinci yöntem olarak

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n} \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

olduğuna dikkat ederek sıkıştırma teoremini kullanabiliriz.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki dizilerin $n \rightarrow \infty$ limitlerini her $x \in \mathbb{R}$ için bulun.

a) $\frac{1 + 2n \sin x - xn^2}{3 + 2n + e^x n^2}.$

b) $\frac{x}{1 + n^2 x^2}.$

c) $\frac{\sqrt{2x^2 n^2 + 5}}{n + e^x}.$

d) $\sqrt{n^2 + 2x^2 n} - \sqrt{n^2 + 1}.$

e) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$

f) $\left(\frac{n + \cos x}{n}\right)^n.$

g) $\sqrt[n]{n^x}$

h) $\left(e^{nx + \sqrt{n}x^2 + x^4}\right)^{1/n}$

i) $\sqrt[n]{3^{nx+x^2} \sin n}$

j) $\frac{\sin(ne^x + n^3)}{\sqrt{n}}$

k) $\frac{3^{n^2} x}{2^{n^4} x^2}$

l) $\frac{\ln n}{\ln(e^x n + 2)}$

m) $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$

n) $\frac{(1+x)^n}{n}$

2. $x > 0$ için $\frac{n^n}{x^n n!}$ dizisinin $0 < x < e$ için iraksak, $x > e$ için 0 'a yakınsak olduğunu gösterin. Dizinin $x = e$ için davranışını araştırın. (bkz. Stirling formülü)

Cevaplar: (1a) $-x/e^x$, (1b) 0, (1c) $\sqrt{2x^2}$, (1d) x^2 , (1e) e^x , (1f) $e^{\cos x}$, (1g) 1, (1h) e^x , (1i) 3^x , (1j) 0 (ipucu: sıkıştırma lemması), (1k) $x \neq 0$ ise 0, $x = 0$ ise 1 (ipucu: expln yöntemi), (1l) 1 (ipucu: l'Hopital), (1m) $\ln e^{x^2} = x^2$, (1n) $-2 \leq x \leq 0$ için 0, $x > 0$ için $+\infty$, $x < -2$ için yok.

2. Hafta. Noktasal Yakınsaklık

Tanım 2. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ve $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ olsun. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir **fonksiyon dizisi** denir.

Fonksiyon dizileri için birçok farklı yakınsama türleri vardır. Biz bu derste bunlardan sadece iki tanesi ile ilgileneceğiz. Diğer yakınsama türleri fonksiyonel analiz dersinin konusudur.

Tanım 3. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in A$ için $\{f_n(x)\}$ sayı dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi

$$f(x) = \lim f_n(x), \quad x \in A$$

olarak tanımlana noktasal limit fonksiyonuna A kümesi üzerinde noktasal olarak yakınsar denir.

Limitin tanımı gereği $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna A kümesi üzerinde noktasal olarak yakınsak ise

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall x \in A, \quad \exists N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

şartı sağlanır.

Aşağıda örnekler, noktasal yakınsamanın, fonksiyon dizisindeki süreklilik, sınırlılık, türetilibilirlik ve integrallenebilirlik gibi bir takım özelliklerini, limit fonksiyona aktarmakta yetersiz kallığını gösterir.

1. Sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limiti sürekli olabilir. $\{f_n\}$ dizisindeki her bir fonksiyon a noktasında sürekli ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$$

olur. Ayrıca $\{f_n\}$ dizisinin noktasal limiti f olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

olabilir. Burada eşitliğin sol tarafı $f(a)$ değerine, sağ tarafı ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limitine eşittir. Bu da iki ardışık limitin yer değiştiremeyeceğini söyler.

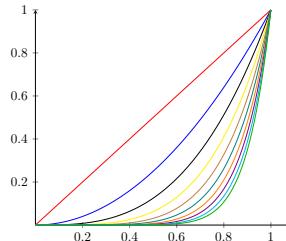
Örnek 17. $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$ dizisinin noktasal limitini

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterin. Dolayısıyla

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

Şekil 0.1: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.



2. Sürekli sınırlı fonksiyonların noktasal limiti sürekli ama sınırsız olabilir.

Örnek 18.

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n \\ 1/x, & 1/n \leq x < 1 \end{cases}$$

olsun. Arşimed prensibi $0 < x < 1$ için $\exists N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \leq x$, $\forall n \geq N$ olduğunu (örneğin $x = 0.11$ ise $N = 10$ seçilebilir) yani $f_n(x) = 1/x$, $\forall n \geq N$ olduğunu söyle. Dolayısıyla

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

3. Fonksiyonların türevlerinin (varsalar) noktasal limiti ile fonksiyonların noktasal limitinin türevi (varsayıf) farklı olabilir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

olabilir.

Örnek 19. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

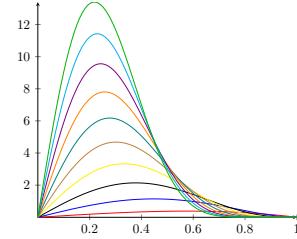
ve

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cos 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0) = 0.$$

4. Fonksiyonların (belirli) integralinin noktasal limiti ile fonksiyonların noktasal limitinin (belirli) integrali farklı olabilir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx \neq \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

olabilir.



Örnek 20. $f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Once $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ olduğunu gösterin. Sonra

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \rightarrow \infty$$

Yani

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = 0$$

Şekil 0.2: $f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi. Fonksiyon dizisi sıfıra noktasal olarak yaklaşırken altlarındaki alan $\frac{n^2}{2n+2}$ olarak sonsuza gidiyor.

Aliştırmalar

Örnek 21. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ dizisinin noktasal limit fonksiyonunun $f(x) = e^x$ olduğunu gösterin.

Çözüm. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{R}} f_n(x)$$

limiti varsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

limiti de olduğunu ve iki limitin eşit olduğunu gördük.

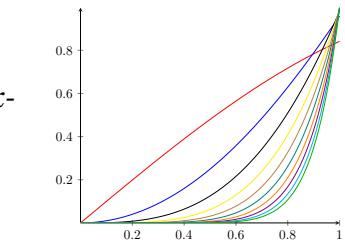
Birinci limiti bulmak için ifadenin logaritmasını alıp L'Hospital kuralını kullanabiliriz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{R}} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{R}} \exp \ln f_n(x) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{R}} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)\left(\frac{-x}{n^2}\right)}{\frac{-1}{n^2}} \right) = e^x.$$

Örnek 22. $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x^n}{n}\right)$, $0 \leq x \leq 1$ dizisinin noktasal limit fonksiyonunun

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

olduğunu gösterin.



Şekil 0.3: $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x^n}{n}\right)$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

Çözüm. Ünlü $|\sin y| \leq |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$ eşitsizliğinden,

$$0 \leq |f_n(x)| = n |\sin(x^n/n)| \leq n \left| \frac{x^n}{n} \right| = |x|^n$$

Bir önceki örnek ve sıkıştırma lemması nedeniyle, $0 \leq x < 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = 0$ olur. $x = 1$ için limite bakalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$$

çünkü $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Örnek 23. $h_n(x) = \sin(n\pi x)$, $x \in [0, 1]$ dizisi $(0, 1)$ aralığındaki hiçbir rasyonel x için yakınsak değildir.

Çözüm. $x = \frac{k}{m}$, $0 < x < 1$, k ve m aralarında asal doğal sayılar olsun. Örnek olarak $x = \frac{3}{5}$ için $h_n(3/5)$ dizisinin iraksak olduğunu bakalım.

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(3\pi) = h_5\left(\frac{3}{5}\right) = \sin(6\pi) = h_{10}\left(\frac{3}{5}\right) = \dots = \sin(3n\pi) = h_{5n}\left(\frac{3}{5}\right) \\ 0 &\neq \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = h_{11}\left(\frac{3}{5}\right) = h_{21}\left(\frac{3}{5}\right) = \dots = h_{10n+1}\left(\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

Yani $\{h_n(\frac{3}{5})\}$ dizisinin iki ayrı limite sahip olan iki farklı alt dizisi vardır. Bu yüzden $\{h_n(\frac{3}{5})\}$ dizisinin limiti yoktur.

Yukarıdaki örneği genelleştirecek olursak, $0 < k/m < 1$ ve k, m aralarında asal olmak üzere,

$$\{h_m(k/m), h_{2m}(k/m), h_{3m}(k/m), \dots\}$$

sabit dizisinin limiti 0 ve

$$\{h_1(k/m), h_{2m+1}(k/m), h_{4m+1}(k/m), \dots\}$$

sabit dizisinin limiti $\sin(k\pi/m) \neq 0$ 'dır (çünkü $0 < \frac{k\pi}{m} < \pi$). Dolayısıyla $\{h_n(k/m) : n \in \mathbb{N}\}$ dizisinin iki ayrı limite olan iki farklı alt dizisi vardır ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ limiti yoktur.

Uyarı 1. $0 < x < 1$ aralığındaki her irrasyonel sayı için yukarıdaki dizinin iraksadığı daha zor bir problemdir ve ünlü Dirichlet Teoremi yardımıyla gösterilebilir, bkz. [Erg15]. Dirichlet Teoremi $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $0 < q < 1$ ise,

$$\{\sin(nq\pi)\}_{n=1}^{\infty}$$

kümесinin $[-1, 1]$ aralığında yoğun olduğunu söyler. Yani $(\sin(nq\pi))$ dizisinin $[-1, 1]$ aralığındaki her sayıya istenilen kadar yakınında bir elemanı vardır.

3. Hafta. Düzgün Yakınsaklık: Tanım, Sup Norm ve Örnekler

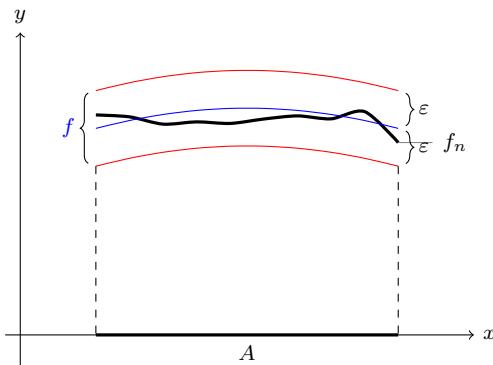
$f_n, n \in \mathbb{N}$ dizisindeki fonksiyonların süreklilik, integrallenebilirlik ve türevlenebilirlik gibi bazı önemli özelliklerin noktasal yakınsama altında limit fonksiyonuna taşınamayabileceğini görürük. Bu bölümde bu özellikleri limit fonksiyonuna taşıyan daha güçlü bir yakınsama türü olan düzgün yakınsamayı inceleyeceğiz.

Tanım 4. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ olsun. $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Eğer bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq N) \quad \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \right]$$

koşulu gerçekleşirse $\{f_n\}$ dizisi f 'e **A kümesi üzerinde düzgün yakınsar** denir ve $f_n \xrightarrow{d} f$ yazılır.



Şekil 0.4: Düzgün yakınsamada her $n \geq N$ için f_n 'in grafiğinin f 'in grafiğinin bir ϵ -şeridi içerisinde kalması gereklidir.

Supremumun tanımından,

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq N) \quad (\forall x \in A) \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

koşulunun da düzgün yakınsaklık tanımındaki koşula eşdeğer olduğu görülebilir.

Düzgün yakınsama koşulunun, noktasal yakınsama koşulu olan

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\forall x \in A) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \geq N) \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ile farkına dikkat edin. Noktasal yakınsama için bulunması gereken N sayısı hem x hem de ϵ 'a bağlıken, düzgün yakınsamada N sayısı sadece ϵ 'a bağlı olarak bulunmalıdır.

Sup Norm

Tanım 5. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ise

$$\|f\|_A = \|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| \in [0, \infty]$$

genişletilmiş sayısına f in **sup normu** denir.

Uyarı 2.

1.

$$\|f\|_A = \max \left\{ \left| \sup_{x \in A} f(x) \right|, \left| \inf_{x \in A} f(x) \right| \right\}$$

Eğer f türevlenebilir bir fonksiyon ve A kümesi de bir kapalı bir aralıksa, $\sup_{x \in A} f(x)$ ve $\inf_{x \in A} f(x)$ değerlerini bulmak için fonksiyonun kritik noktalarına ve aralığın uç noktalara bakmamız gereklidir.

Örnek 24. $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonu için $\|f\|_{[-3,3]} = 21$ olduğunu gösterin.

$$f'(x) = 0 \implies x = \pm 2$$

f fonksiyonu max ve min değerlerini sınır noktaları olan $x = \pm 3$ ve kritik noktaları olan $x = \pm 2$ noktalarında alabilir. $f(-3) = 4$, $f(3) = -14$, $f(-2) = 11$, $f(2) = -21$ olduğundan

$$\sup_{-3 \leq x \leq 3} f(x) = \max_{-3 \leq x \leq 3} f(x) = 14, \quad \inf_{-3 \leq x \leq 3} f(x) = \min_{-3 \leq x \leq 3} f(x) = -21,$$

ve

$$\|f\|_{[-3,3]} = \sup_{-3 \leq x \leq 3} |f(x)| = |f(2)| = 21.$$

2. Tanım gereği her $x \in A$ için

$$|f(x)| \leq \|f\|_A.$$

3. $M \geq 0$ olmak üzere, her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ ise $\|f\|_A \leq M$ olur.

4. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ancak ve ancak sınırlıysa, $\|f\|_A < \infty$ aksi halde $\|f\|_A = \infty$ olur.

5. $\|f\|_A = 0$ ise her $x \in A$ için $f(x) = 0$ olur.

6. Eğer f fonksiyonu, kapalı ve sınırlı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlıdır ve $\|f\|_{[a,b]} < \infty$ olur. Hatta öyle bir $x_0 \in [a, b]$ vardır ki $\|f\|_{[a,b]} = |f(x_0)|$. Zira $|f|$ fonksiyonu da sürekli ve maksimum değerini $[a, b]$ aralığı içindeki bir x_0 noktasında almak zorundadır. (bkz. sürekli fonksiyonlar için ekstremum değer teoremi)

7. Sup norm, mutlak değer gibi üçgen eşitsizliğini sağlar. Yani eğer f ve g A kümesi üzerinde sınırlı ise, $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$ olur.

İspat. Her $x \in A$ için

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = \|f\|_A + \|g\|_A,$$

olduğundan

$$\|f + g\|_A = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_A + \|g\|_A.$$

8. Her a sabit sayısı için

$$\|af\|_A = |a| \|f\|_A.$$

olur.

Sup norm düzgün yakınsamanın kolay bir tarifini verir.

Teorem 1. A kümesi üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$.

İspat. Her iki koşulun da

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists N) \quad (\forall n \geq N) \quad \|f_n - f\|_A < \epsilon$$

şartına eşdeğer olduğu görülebilir.

Yukarıdaki teoremde yer alan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$ koşulu daha açık olarak şöyle yazılabilir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsaksa, noktasal yakınsaktır.

Teorem 2. $\{f_n\}$ dizisi A kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsiyorsa, A kümesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsar.

İspat. $x \in A$ olsun. $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_A$ olduğundan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ olur. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olur.

Uyarı 3. [Teorem 2](#)'nin sonuçlarına bakalım.

1. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ancak noktasal olarak yakınsadığı bir fonksiyona düzgün olarak yakınsayabilir.
2. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin düzgün yakınsayıp yakınsamadığını bulmak için öncelikle bu dizinin noktasal limit fonksiyonu olan f fonksiyonunu bulup daha sonra $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A$ limite bilmeliyiz. Bu limit sıfırsa dizi düzgün yakınsar, değilse (yani yoksa veya varsa ama sıfır değilse) düzgün yakınsamaz.

[Teorem 2](#)'deki önermenin tersi doğru olmayabilir. Yani **noktasal yakınsayan bir dizi düzgün yakınsamayabilir**. Bunun sebebi şudur: Eğer $\{f_n\}$ dizisi A kümesinde noktasal olarak f fonksiyonuna yakınsiyorsa, her $x \in A$ için yakınsama hızı farklı olabilir.

Örnek 25. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ dizisinin noktasal limiti $f(x) = 0$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} = \|f_n\|_{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$$

olduğundan (bkz. ??) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[0,1]} \neq 0$ olur. Yani $\{f_n\}$ dizisi f 'e noktasal olarak yakınsar ama düzgün olarak yakınsamaz.

Bir A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olmayan bir fonksiyon dizisi, A 'nın bir alt kümesi üzerinde düzgün yakınsak olabilir. Bunu görmek için yukarıdaki örneği biraz değiştirelim.

Örnek 26. $f_n(x) = x^n$, dizisinin $x \in [0, 0.99]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Bu durumda $f = 0$ olmak üzere

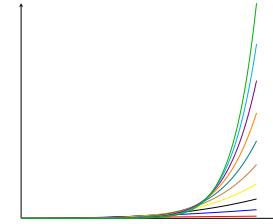
$$\|f_n - f\|_{[0, 0.99]} = \|f_n\|_{[0, 0.99]} = \sup_{x \in [0, 0.99]} |x^n| = (0.99)^n$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[0, 0.99]} = 0$ olur. Yani $\{f_n\}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Teorem 3. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = n^\alpha x^n$ olsun.

1. Hiçbir $-1 < a < 1$ için $A = [a, 1)$ kümesi üzerinde bu dizi düzgün yakınsamaz.
2. Her $0 < a < 1$ için $A = [-a, a]$ kümesi üzerinde bu dizi düzgün yakınsar.

dizisi $(-1, 1)$ aralığı üzerinde noktasal olarak sıfır fonksiyonuna yakınsar. Her $0 < a < 1$ için bu yakınsama $[-a, a]$ üzerinde düzgün ama $(a, 1)$ aralığında düzgün değildir.



Şekil 0.5: $f_n(x) = n^2 x^n$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

İspat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x^n = 0$$

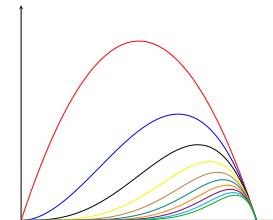
olur. Yani Diziler için oran testini uygularsak $\lim_{n \rightarrow \infty} |n^\alpha x^n| = 0$ buluruz. Yani $f_n(x) = n^\alpha x^n$ dizisinin noktasal limiti $f(x) \equiv 0$ olur. Bu yakınsama $-1 < a < 1$ için $[a, 1)$ aralığında düzgün değildir. Zira

$$\|f_n - f\|_{[a, 1)} = \|f_n\|_{[a, 1)} = \sup_{|x| < 1} |n^\alpha x^n| = n^\alpha \sup_{|x| < 1} |x|^n = n^\alpha \cdot 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[a, 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty.$$

Örnek olarak $\alpha = 2$ durumunda dizinin ilk terimleri için bakınız [Şekil 0.5](#).



Şekil 0.6: $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

Çözüm. Her $x \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x) \equiv 0$ olduğunu gösterin.

$h'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$ olduğundan

$$h'_n(x) = 0 \implies x = 0 \text{ veya } x = \frac{n}{n+1}$$

Türevin işaretini inceleyerek h_n 'lerin, $(0, \frac{n}{n+1})$ aralığında artan, $(\frac{n}{n+1}, 1)$ aralığında azalan olduğunu gösterin. Yani

$$\max_{0 \leq x \leq 1} h_n(x) = h_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

ve

$$\|h_n - h\|_{[0,1]} = \|h_n\|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |h_n(x)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} h_n(x) = \max_{0 \leq x \leq 1} h_n(x) = h_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$h_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{n+1}.$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$$

Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{[0,1]} = 0$ ve yakınsama düzgün olur.

Düzgün yakınsaklığını incelemek için $\|f_n - f\|_A$ sayılarını tam olarak belirlemektense, bir üst sınırlarının sıfırı gittiğini göstermek yeterlidir. Bir örnekle görelim.

Örnek 28. $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$, $x \in A = [0, 1]$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Dizinin noktasal limit fonksiyonu $f(x) = 0$ olur. $\|f_n\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{n^2}$ olduğundan $[0, 1]$ üzerinde $f_n \xrightarrow{d} 0$ olur.

4. Hafta. Düzgün Yakınsaklılığın Özellikleri

Teorem 4. $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

1. $B \subset A$ ise ve $\{f_n\}$ dizisi A kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsiyorsa B kümesi üzerinde de f'ye düzgün yakınsar.
2. Eğer $\{f_n\}$ dizisi hem A kümesinde hem B kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsiyorsa $A \cup B$ kümesi üzerinde de f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat. Bu ispatları gösterin.

Örnek 29. $\{f_n\}$ dizisi $(2, 10)$ aralığında düzgün yakınsak ise $[3, 5]$ aralığında da düzgün yakınsaktır. Ayrıca $(6, 12]$ üzerinde de düzgün yakınsaksa $(2, 10) \cup (6, 12] = (2, 12]$ üzerinde de düzgün yakınsak olur.

Düzgün yakınsaklılık özelliği dizilerin toplanması ve skalerle çarpılmasında korunur (ama çarpma ve bölmelerinde genellikle korunmaz).

Teorem 5. Eğer a, b sabit sayılarsa, bir A kümesi üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ve $g_n \xrightarrow{d} g$ ise $af_n + bg_n \xrightarrow{d} af + bg$ ve olur.

İspat. Sup normun özelliklerini kullanırsak

$$\|af_n + bg_n - (af + bg)\|_A \leq |a| \|f_n - f\|_A + |b| \|g_n - g\|_A$$

olduğu görülür.

Örnek 30. Daha önce $[0, 1]$ üzerinde $\frac{x}{x^2+n^2} \xrightarrow{d} 0$ ve $x^n(1-x) \xrightarrow{d} 0$ olduğunu gördük. Ayrıca $h_n(x) = 8 + x^3$ dizisi de $h(x) = 8 + x^3$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Dolayısıyla bir önceki teorem nedeniyle $[0, 1]$ üzerinde $f_n(x) = \frac{3x}{x^2+n^2} - 2x^n(1-x) + 8 + x^3$ dizisi $f(x) = 8 + x^3$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Geçtiğimiz bölümde noktasal yakınsaklılığın dizideki sürekliliği, integrallenebilirliği ve türevlenebilirliği limitte koruyamadığını gördük. Bu bölümde bu özelliklerini koruyan daha güçlü bir yakınsama türü göreceğiz.

Süreklik

Düzgün yakınsaklılık süreklilığı korur. Yani dizideki her fonksiyon (nihai olarak) sürekli ise limit fonksiyonu da süreklidir.

Teorem 6. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ise, f fonksiyonu da A üzerinde süreklidir.

Ispat. Bu teorem $\frac{\epsilon}{3}$ argümanıyla ispatlanabilir. $x_0 \in A$ ve $\epsilon > 0$ olsun.

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ bulmak istiyoruz.

1. f_n 'ler f 'e düzgün yakınsadığından öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$\|f_N - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$$

2. f_N x_0 'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta(\epsilon) > 0$ vardır ki

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

olur.

Şimdi $|x - x_0| < \delta$ ise

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_N\|_A + \frac{\epsilon}{3} + \|f - f_N\|_A = \epsilon \end{aligned}$$

Yani sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizinin noktasal limiti süreksiz ise bu yakınsama düzgün olamaz.

Örnek 31. Örneğin $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ dizisi düzgün yakınsamaz zira f_n 'ler sürekli dir ama limit fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

süreksizdir.

Örnek 32. $f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx - 1)^2}$, $x \in [0, 1]$.

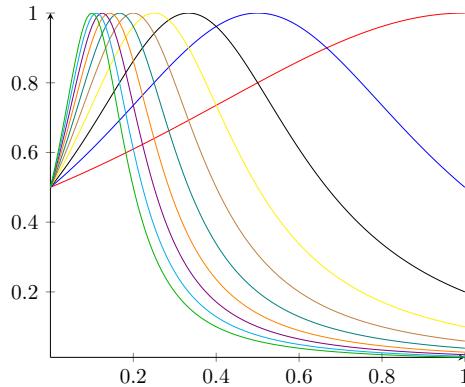
Cözüm. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \frac{1}{2}$.

$$0 < x \leq 1 \implies nx \rightarrow \infty \implies nx - 1 \rightarrow \infty \implies 1 + (nx - 1)^2 \rightarrow \infty \implies \frac{1}{1 + (nx - 1)^2} \rightarrow 0$$

Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

f_n 'ler sürekli ama f süreksiz olduğundan yakınsama düzgün olamaz.



Şekil 0.7: $f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx - 1)^2}$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

Sınırlılık

Düzgün yakınsaklık sınırlılığı korur. Yani sınırlı fonksiyonlardan oluşan bir dizinin düzgün yakınsak limiti sınırlıdır.

Teorem 7. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı (yani $\|f_n\|_A < \infty$) ve A üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ise, f fonksiyonu da A üzerinde sınırlıdır (yani $\|f\|_A < \infty$).

İspat. Düzgün yakınsaklık gereği,

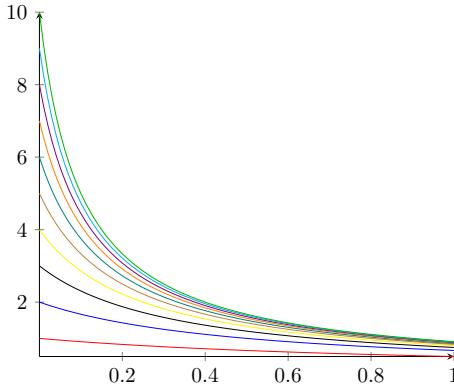
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \|f - f_N\|_A \leq 1$$

Ayrıca f_N sınırlı olduğundan öyle bir $M > 0$ vardır ki, $\|f_N\|_A \leq M$.

$$\|f\|_A \leq \|f - f_N\|_A + \|f_N\|_A \leq 1 + M$$

Bu teoremin bir sonucu şudur: Eğer sınırlı fonksiyonlar sınırlı olmayan bir fonksiyona noktasal olarak yakınsarsa bu yakınsama düzgün olamaz.

Örnek 33. $f_n(x) = \frac{n}{nx + 1}$, $x \in (0, 1)$ dizisi $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar ama bu yakınsama düzgün olamaz. Çünkü her f_n sınırlıdır ($x \in (0, 1)$ için $|f_n(x)| \leq n$ olduğunu gösterin) ama limit fonksiyon sınırsızdır.



Şekil 0.8: $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$, $x \in (0, 1)$ dizisinin ilk 10 terimi.

Bir önceki teoremde dizideki her fonksiyonun aynı sayıyla sınırlı olduğunu varsayıyoruz. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\|_A \leq M$ olsaydı, noktasal limit fonksiyonu f için de $\|f\|_A \leq M$ olurdu. Yani f 'de sınırlı olurdu.

Örnek 34. $(0, 1)$ aralığı üzerinde $f(x) = 1/x$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinom dizisi olamaz. Gösterin.

Riemann İntegralebilirlik

Teorem 8. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için f_n , $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx$$

olur.

(Aslında bu teorem f_n 'ler sadece Riemann integrallenebilir ise de doğrudur. Ama teoremin bu versiyonu daha az teknik detay içerir.)

İspat. Düzgün yakınsama nedeniyle f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olur. Kapalı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyonun integrallenebilir olduğunu önceki analiz derslerinden biliyoruz. (Eğer f_n 'leri sürekli kabul etmemiş olsaydık, f 'in integrallenebilir olduğunu göstermemiz gerekiirdi.)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{[a,b]} dx = (b-a) \|f_n - f\|_{[a,b]} \\ \|f_n - f\|_{[a,b]} \rightarrow 0 \text{ olduğundan } \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| &\rightarrow 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Eğer integral aralığı sınırsız ise (bkz. ileride göreceğimiz has olmayan integraller bölümü) yukarıdaki teorem geçerli değildir.

Örnek 35. Örneğin $\int_0^\infty f(x) dx = 1$ olan sınırlı bir f fonksiyonu alalım. Mesela $f(x) = xe^{-x}$ olsun. Bu durumda $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x/n)$ dizisi 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar. Ama

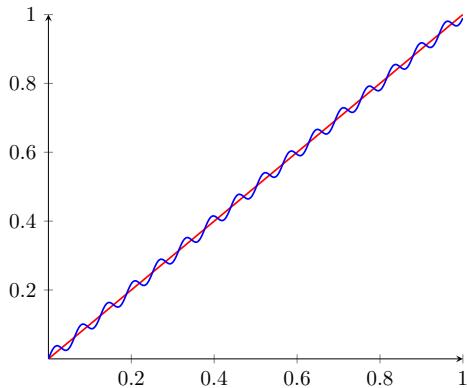
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{n} f(x/n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(x) dx = 1 \neq 0.$$

Örnek 36. Aşağıdaki limitlerin önce var olduğunu ispatlayın ve sonra limitleri hesaplayın.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 e^{x^2/n} dx$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{nx^2 + 3}{x^3 + nx} dx$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{n}} dx$

Türevlenebilirlik

Türevlenebilir fonksiyonların düzgün yakınsak limiti genel olarak türevlenebilir olmayı bilir. Zira iki fonksiyonun grafikleri birbirine yakın olsa bile türevlerinin grafikleri yakın olmayı bilir. Örneğin fonksiyonlardan biri sabit diğeri ondan uzaklaşmadan, etrafında hızlı bir şekilde salınıyorsa.



Şekil 0.9: $f(x) = x$, ve $g(x) = x + \frac{1}{50} \sin(100x)$ fonksiyonları birbirine “yakınken” ($\|f - g\|_{[0,1]} = 1/50$), türevleri birbirine “uzak” ($\|f' - g'\| = 2$) olur.

Örnek 37. $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar ama $f'_n(x) = n \cos(n^2 x)$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde noktasal olarak yakınsamaz. Örneğin,

$$f'_n(0) = n \rightarrow \infty$$

olur.

Yani düzgün yakınsak ve türetilebilir bir fonksiyon dizisinin türev dizisi $\{f'_n(x)\}$ noktasal olarak bile yakınsamayabilir.

Örnek 38. $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ dizisi $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{n} |x|}{2\sqrt{n}(1 + n^2 x^2)} \leq \frac{(1^2 + n^2 |x|^2)}{2\sqrt{n}(1 + n^2 x^2)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

olduğunu gösterebiliriz. Yani $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ve $f_n \xrightarrow{d} 0$ olur.
 $f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ türev dizisi noktasal olarak

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla $f'_n \rightarrow g$ yakınsaması (sürekli fonksiyonların düzgün limitinin sürekli olması gereği için) düzgün olamaz.

$$0 = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \Big|_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \Big|_{x=1} = 0$$

Yani düzgün yakınsak ve türetilebilir bir fonksiyon dizisinin, türev dizisi noktasal olarak yakınsasa bile türev dizisinin limiti (g fonksiyonu) ile dizinin limitinin türevi (f' fonksiyonu) aynı olmayabilir. Başka bir deyişle

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

olabilir.

Teorem 9. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ türetilebilir ve f'_n sürekli olsun. Eğer $[a, b]$ aralığındaki bir x_0 noktası için $\{f_n(x_0)\}$ dizisi yakınsak ve $\{f'_n\}$ dizisi $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

olur.

(Aslında bu teorem f'_n sürekli olmasa da geçerlidir. Ama teoremin bu versiyonu daha az teknik detay içerir. Teoremin bu şeklinin ispatı için bkz. [\[Erg15\]](#).)

İspat. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = c \in \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ üzerinde $f'_n \xrightarrow{d} g$ ve f'_n fonksiyonları sürekli olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

yazabilirim.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right)$$

olarak tanımlayalım. $f'_n \xrightarrow{d} g$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$f(x) = c + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

olur.

Ayrıca $\{f'_n\}$ dizisi sürekli fonksiyonlardan oluşanundan düzgün yakınsak limiti g de sürekli dir. g sürekli olduğundan analizin temel teoremi bize $\int_{x_0}^x g(t)dt$ fonksiyonunun türetilebilir olduğunu ve

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(t)dt = g(x)$$

olduğunu söyler.

Yani

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(t)dt = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

anlamına gelir.

Uyarı 4. Yukarıdaki ispatta $\{f_n\}$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilebilir. Bunun için $F_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$ olarak tanımlanan fonksiyon dizisinin $G(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmelidir. Bu durumda $\{f_n\} = \{f_n(x_0) + F_n\}$ dizisi de $f = c + G$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Düzgün yakınsaklığa ilgili bir test

Teorem 10. A üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ olsun. Eğer f_n 'ler sürekli ise ve $\{x_n\} \subset A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in A$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

İspat.

$$|f(x_0) - f_n(x_n)| \leq |f(x_0) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq |f(x_0) - f(x_n)| + \|f - f_n\|_A$$

Daha sonra göreceğimiz gibi sürekli f_n fonksiyonları, f 'e düzgün yakınsarsa f 'de sürekli dir. f sürekli olduğundan $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_0) - f(x_n)| = 0$ olur. Ayrıca $f_n \xrightarrow{d} f$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki bağıntıda limit alıp, sıkıştırma teoremini kullanırsak $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_0) - f_n(x_n)| = 0$ çıkar.

Bu teoremin kontrapozitifi, bir fonksiyon dizisinin noktasal limitine düzgün yakınsamadığını göstermekte çok kullanışlı bir koşul sunar. Bir örnekle görelim.

Örnek 39. $g_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2}$, $x \in [0, 1]$.

Çözüm. Her $x \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \equiv 0$ olduğunu gösterin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1/n) = 1 \neq g(0) = 0$$

olduğundan yukarıdaki teoreme göre yakınsama düzgün olamaz.

5. Hafta. Düzgün yakınsamayla ilgili alıştırmalar

Bir f fonksiyonuna A kümesi üzerinde noktalı olarak yakınsayan bir f_n dizisinin düzgün yakınsaklığını incelemek için aşağıdaki yöntemler kullanılabilir.

- Türev yöntemi.** $\|f_n - f\|_A = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ değerini bulmak için $f'_n(x) - f'(x) = 0$ denklemi çözülerek, kritik noktalar hesaplanır. Eğer A kümesi kapalı bir aralık ise, bu supremum ya kritik noktalarda ya da aralığın uç noktalarında ortaya çıkmalıdır. Eğer A kümesi kapalı bir aralık değil ise, türevin işaretini incelenerek fonksiyonun artan/azalan olduğu aralıklar belirlenerek, supremum değer belirlenebilir. Bu yöntemi kullanarak, dizinin düzgün yakınsak olup olmadığı gösterilebilir.
- Değer koyma yöntemi.** Supremum ifadesinde n 'ye bağlı bir x değeri konularak,

$$\|f_n - f\|_A = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$$

elde edilir. En sağdaki ifadenin sıfıra gitmediği gösterilebilirse, dizi düzgün yakınsak olamaz. Bu yöntem kullanılarak bir dizinin sadece düzgün yakınsamadığı gösterilebilir.

- Eşitsizlikler kullanmak.** Cauchy-Schwarz gibi eşitsizlikler yardımıyla

$$\|f_n - f\|_A = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

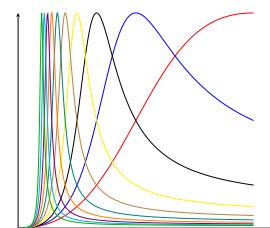
olduğunu göstermiş olalım. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$ ve dizi düzgün yakınsak olur. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise dizinin düzgün yakınsaklılığı hakkında bir şey söylemeyecez.

$$\|f_n - f\|_A = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \geq b_n \geq 0$$

olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A \neq 0$ olur ve dizi düzgün yakınsak olamaz. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ise dizinin düzgün yakınsaklılığı hakkında bir şey söylemeyecez.

Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralık üzerindeki noktalı ve düzgün yakınsaklıklarını araştırınız.

Örnek 40. $g_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2}$, $x \in [0, 1]$.



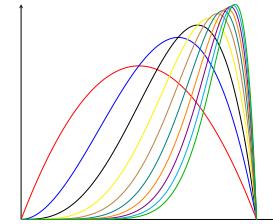
Şekil 0.10: $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2}$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

Çözüm. Her $x \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \equiv 0$ olduğunu gösterin.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|g_n - g\| = \|g_n\| \geq |g_n(1/n)| = 1$$

Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| \neq 0$ olduğundan yakınsama düzgün değildir.



Örnek 41. $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$ dizisinin düzgün ve noktasal yakınsaklığını inceleyelim.

Şekil 0.11: $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

Çözüm. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$. Ayrıca $0 \leq x < 1$ için [Teorem 3](#) sebebiyle $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ olur.

$f'_n(x) = nx^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$, $x = \frac{n}{n+1}$. 1. türev analizi

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

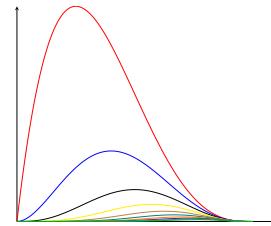
olduğunu gösterir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[0,1]} = 1 \cdot \frac{1}{e} \neq 0$$

Yani yakınsama düzgün değildir.

Örnek 42. Sabit bir $0 < a < 1$ için $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0, a]$ dizisinin düzgün ve noktasal yakınsaklığını inceleyelim.

Çözüm. f_n 'in $[0, \frac{n}{n+1}]$ aralığında artan bir fonksiyon olduğunu gördük. $\{\frac{n}{n+1}\}$ dizisi artan bir dizidir ve limiti birdir. Yani öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$ için $\frac{n}{n+1} > a$ ve dolayısıyla her $n \geq N$ için $\|f_n\|_{[0,a]} = f_n(a) = na^n(1-a)$ olur. $na^n(1-a) \rightarrow 0$ olduğundan $f_n \xrightarrow{d} 0$.



Örnek 43. $g_n(x) = n^2 x^n(1-x)^3$, $x \in [0, 1]$ dizisinin noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Şekil 0.12: $g_n(x) = n^2 x^n(1-x)^3$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk 10 terimi.

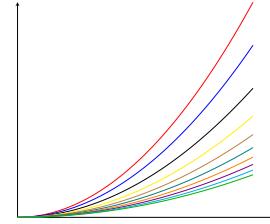
Çözüm. Öncelikle $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \equiv 0$ olduğunu gösterin. Daha sonra

$$\|g_n - g\| = g_n\left(\frac{n}{n+3}\right) = 3^3 \left(\frac{n}{n+3}\right)^2 \frac{1}{(n+3)} \frac{1}{(1 + \frac{3}{n})^n} \rightarrow 3^3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{e^3} = 0$$

olduğunu gösterin. Yani yakınsama düzgündür.

Örnek 44. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$ olsun. $\{f_n\}$ ve $\{f'_n\}$ dizilerinin yakınsaklığını inceleyin.

Örnek 45. $h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$.



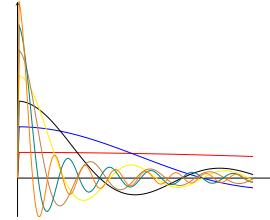
Şekil 0.13: $h_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk terimleri.

Çözüm. $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x) = x$, $x \in [0, 1]$ olduğunu gösterin.

$$\|h_n - h\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{1+nx} = \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{\frac{1}{x} + n} = \frac{1}{1+n}$$

Yani $\|h_n - h\| \rightarrow 0$ olur ve yakınsama düzgündür.

Örnek 46. $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{nx}$, $x \in (0, 1)$.



Şekil 0.14: $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{nx}$, $x \in [0, 1]$ dizisinin ilk terimleri.

Çözüm. $0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{nx}$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$, $\forall x \in (0, 1)$ olur.

$$\|f_n - f\| \geq |f_n(1/n^2)| = \left| \frac{\sin 1}{\frac{1}{n}} \right| = n \sin 1$$

Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \infty$ olur ve yakınsama düzgün olmaz.

Örnek 47. $g_n(x) = \frac{nx}{n^2 x^2 + x + e^n}$, $x \in [0, 1]$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm.

$$|g_n(x)| = g_n(x) \leq \frac{nx}{e^n} \leq \frac{n}{e^n}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

olduğundan $\|g_n\|_{[0,1]} \leq \frac{n}{e^n} \rightarrow 0$ yani $g_n \xrightarrow{d} 0$ olur.

Örnek 48. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. [Örnek 21](#)'de $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = e^x$ olduğunu görmüştük.

$$\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \geq |f_n(n) - f(n)| = |2^n - e^n| = 2^n \left|1 - \left(\frac{e}{2}\right)^n\right| \rightarrow \infty$$

Yani yakınsama düzgün değildir. Aynı dizinin bir $M > 0$ için $[-M, M]$ aralığı üzerinde yakınsaklığını inceleyin.

Örnek 49. $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = x^2$$

olduğunu gösterin. Bu yakınsama \mathbb{R} üzerinde düzgün değildir. Çünkü

$$\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \geq |f_n(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n})| = |n \ln 2 - n| = n \ln(2 - 1) \rightarrow \infty$$

Örnek 50. $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm.

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{x^2 + n^2} = \frac{n|x|}{n(x^2 + n^2)} \leq \frac{n^2 + x^2}{2n(n^2 + x^2)} = \frac{1}{2n}$$

olduğu gösterilebilir. Yani $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \rightarrow 0$ ve \mathbb{R} üzerinde $f_n \xrightarrow{d} 0$ olur.

Örnek 51. $f_n(x) = \arctan \left(\frac{2x}{x^2 + n^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Önce Ortalama Değer Teoremi yardımıyla her $x \in \mathbb{R}$ için $|\arctan x| \leq |x|$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \neq 0$ için, öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$\frac{|\arctan x - \arctan 0|}{|x - 0|} = \left| \frac{d}{dx} \Big|_{x=c} \arctan x \right| \implies |\arctan x| = \frac{1}{1+c^2} |x|$$

olur. $1/(1+c^2) \leq 1$ olduğundan $|\arctan x| \leq |x|$ olur.

Şimdi [Örnek 50](#) yardımıyla $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \rightarrow 0$ olduğunu bulun.

Örnek 52. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{n}}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

limitini hesaplayın.

Çözüm. Noktasal limit fonksiyonunun $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ olduğunu görmek kolay ama $\|f - f_n\|_{[0,1]}$ normunu hesaplamak zor. Bu normu hesaplamak yerine her $x \in [0, 1]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^2+x^4/n)} \leq \frac{1}{n} \frac{1^4}{(1+0)(1+0+0)} = \frac{1}{n}$$

olduğuna dikkat edersek

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} \leq \frac{1}{n}$$

buluruz. Bu da $\{f_n\}$ dizisinin f fonksiyonuna $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsadığını gösterir. Artık integralin limitini alabiliriz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Alıştırmalar

1. Mustafa Balcı, Konu 1.1, Sorular: 1-6.
2. Mustafa Balcı, Konu 1.2, Sorular: 1-5.
3. Mustafa Balcı, Konu 1.3, Sorular: 1-8.
4. Verilen A kümesi üzerinde f_n dizisinin noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyin.
 - a) $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{1}{nx}\right)$, $A = [0, \infty)$.
 - b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $A = [0, \infty)$.
 - c) $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)^2$, $A = [0, 1]$.
 - d) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $A = \mathbb{R}$.
 - e) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{e^x n}$, $A = (0, 2)$.
 - f) $f_n(x) = \frac{nx^2}{e^{nx^3}}$, $A = [0, 1]$.

Cevaplar: (4f) noktasal limit 0 (ipucu: L'Hospital), düzgün yakınsamaz.

6. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Noktasal Yakınsama

Limsup ve Liminf

Limsup ve liminf kavramları, alt limit ve üst limit olarak da bilinir.

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümeye genişletilmiş reel sayı kümesi diyeceğiz.

Alt Diziler $n_k \in \mathbb{N}$ dizisi kesin artan bir dizi yani $n_1 < n_2 < \dots$ olsun. Bu durumda $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin alt dizisi denir. Örneğin $(x_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \{x_4, x_7, x_{10}, \dots\}$ ve $(x_{2^n}) = \{x_2, x_4, x_8, \dots\}$ dizileri, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin birer alt dizileridir.

Bir (x_n) reel sayı dizisinin herhangi bir alt dizisinin $\overline{\mathbb{R}}$ içinde bir limiti varsa, bu limite dizinin bir **yığılma noktası** denir. Neden burada \mathbb{R} yerine $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde yığılma noktası arıyoruz? Çünkü bir dizinin \mathbb{R} içinde limiti olan hiçbir alt dizisi olmayabilir. Örneğin $x_n = n$.

$$\liminf_n x_n = (x_n) \text{ dizisinin yığılma noktalarının en küçüğüdür}$$

$$\limsup_n x_n = (x_n) \text{ dizisinin yığılma noktalarının en büyüğüdür}$$

Bu tanım gereği, (x_n) dizisinin $\liminf_n x_n$ ve $\limsup_n x_n$ değerlerine yakınsayan birer alt dizisi mutlaka vardır.

1. Her (x_n) dizisi için

$$-\infty \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq \infty$$

olur.

2. Dizinin sadece bir tane yığılma noktası varsa, o yığılma noktası dizinin aynı zamanda limitidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_n x_n = \limsup_n x_n = L$$

3. $\limsup_n x_n = L$ ise her $M > L$ için, dizinin M 'den büyük en fazla sonlu sayıda terimi vardır (veya hiç yoktur). Benzer şekilde $\liminf_n x_n = L$ ise her $M < L$ için, dizinin M 'den küçük en fazla sonlu sayıda terimi vardır (veya hiç yoktur).

4. Her (x_n) dizisi için

$$\limsup_n x_n = \max\{\limsup_n x_{2n}, \limsup_n x_{2n+1}\}$$

ve

$$\liminf_n x_n = \min\{\liminf_n x_{2n}, \liminf_n x_{2n+1}\}$$

olur.

5. Her (x_n) dizisi için ve $c > 0$ ise

$$\limsup_n cx_n = c \limsup_n x_n, \quad \liminf_n cx_n = c \liminf_n x_n$$

ve $c < 0$ ise

$$\limsup_n cx_n = c \liminf_n x_n, \quad \liminf_n cx_n = c \limsup_n x_n$$

olur.

Örnek 53. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ olsun. $x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1$ ve $x_{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1$ olur. Yani dizinin iki yığılma noktası vardır ve $\liminf_n x_n = -1$, $\limsup_n x_n = 1$ olur, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ise yoktur.

Örnek 54. $x_n = n^{\sin(n\pi/2)}$ olsun. $x_{2n} = 1 \rightarrow 1$, $x_{4n-1} = \frac{1}{4n-1} \rightarrow 0$ ve $x_{4n-3} = 4n-3 \rightarrow \infty$ olduğundan dizinin üç yığılma noktası vardır. $\liminf_n x_n = 0$, $\limsup_n x_n = \infty$ olur. Dizinin limiti yoktur.

Aliştırmalar

1. Aşağıdaki dizilerin üst ve alt limitlerini belirleyin.

a) $x_1 = 0, x_{2m} = \frac{x_{2m-1}}{2}, x_{2m+1} = \frac{1}{2} + x_{2m}$

b) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & n \text{ tek} \\ 1, & n \text{ çift} \end{cases}$

c) $x_n = 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

d) $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

2. (Opsiyonel soru) Herhangi bir (x_{n_m}) alt dizisi için

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_n x_{n_m} \leq \limsup_n x_{n_m} \leq \limsup_n x_n$$

olduğunu gösterin.

3. (Opsiyonel soru) $\liminf x_n = -\infty$ olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin

alttan sınırsız olmasıdır. $\limsup_n x_n = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin üstten sınırsız olmasıdır. Gösterin.

4. (Opsiyonel soru) p_n, n . asal sayı olsun. Sayılar kuramındaki bir sanı (henüz ispatlanmamış önerme) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) = 2$ olduğunu söyler. Bir başka deyişle aralarındaki fark 2 olan sonsuz tane asal sayı vardır. Öte yandan $\limsup_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) = \infty$ olduğu bilinmektedir. Bu konuyu araştırın.
5. (Opsiyonel soru) Ünlü Dirichlet teoremi, $x \in (0, 1)$ bir irrasyonel sayı ise, $[-1, 1]$ aralığındaki her sayının $x_n = \sin(nx)$ dizisinin bir yığılma noktası olduğunu söyler. Bu dizi için $\limsup x_n = 1, \liminf x_n = -1$ ve $\lim x_n$ yoktur. Araştırın.

Fonksiyon Serilerinin Noktasal Yakınsaklılığı

1. Eğer $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine **yakınsak seri** denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

yazılır. Eğer kısmi toplamlar dizisi iraksaksa, seride de **iraksak seri** denir.

Örnek 55. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ serisi iraksaktır, çünkü kısmi toplam dizisi

$$\{-1, -1+1, -1+1-1, \dots\} = \{-1, 0, -1, \dots\}$$

iki farklı limite sahip iki alt dizeye sahiptir.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise her $n \in \mathbb{N}$ için $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ olur.

ispat.

$$r_n = -s_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -s_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ serisi de yakınsak olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

olur. Ayrıca her $c \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ serisi de yakınsak olur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

olur.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$ serisine **teleskopik seri** denir. Teleskopik seriler eğer a_n yakınsak bir dizi ise $a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sayısına yakınsar. Eğer a_n dizisi yakınsak değilse seri de iraksar.

Örnek 56.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

serilerini teleskopik seri formuna getirerek toplamlarını bulun.

Örnek 57. $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1})$ serisini yakınsak yapan x değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} - x^{2n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 - 1) + (x^4 - x^2) + \cdots + (x^{2n+2} - x^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} - 1 \\ &= \begin{cases} -1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Seri $x \in [-1, 1]$ için yakınsar.

5. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ serisine **geometrik seri** denir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{eğer } |x| < 1 \\ \text{iraksak}, & \text{eğer } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Bunu görmek için

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1.$$

olduğuna dikkat edin ve geometrik diziler ile ilgili sonucu uygulayın.

Örnek 58.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$$

serilerinin hangi x değerleri için yakınsak olduğunu ve yakınsadığı değeri bulun.

6. **n. terim testi** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsarsa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise seri iraksaktır. Ama bu önermenin tersi doğru değildir.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = L - L = 0.$$

olur.

Örnek 59. Aşağıdaki serilerin iraksak olduğunu gösterin.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
 - b) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xn+1}{ne^x + \sqrt{n}}$, $x > 0$.
7. $a_n \geq 0$ ise $s_N = \sum_{n=1}^N a_n$ kısmi toplam dizisi artan bir dizi olur. Artan bir dizi ya üstten sınırlıdır ve bir limite sahiptir ya da üstten sınırlı değildir sonsuza gider. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi iraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
8. **Karşılaştırma Ölçütü.** Eğer $0 \leq a_n \leq b_n$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsak olur. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ iraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ iraksak olur.

İspat. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ dizisi $s_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ olduğundan üstten sınırlı artan bir dizi olacağından yakınsamak zorundadır. İkinci önerme birinci önermenin bir sonucudur.

9. **Cauchy Sıklaştırma Teoremi.** $a_n \geq 0$ ve a_n azalan bir dizi yani $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ancak ve ancak $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ yakınsarsa yakınsar.

İspat.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots \leq a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \dots$$

yani $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ olur. Yani $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsak olur. Öte yandan

$$a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + \dots \leq 2(a_1/2 + a_2 + 2a_4 + \dots) \leq 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots)$$

yani $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olur. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ serisi de yakınsak olur.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisine **p-serisi** denir. $p = 1$ durumuna, yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine **harmonik seri** denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{yakınsak,} & \text{eğer } p > 1 \\ \text{iraksak,} & \text{eğer } p \leq 1 \end{cases}$$

Özel olarak harmonik serinin iraksadığınına dikkat edin.¹ Harmonik seri terimleri sıfıra yaklaşan iraksak serilerin belki de en ünlüsüdür.

¹n. adımda $1/n$ metre giden Merve sonsuz adım atarsa, başlangıç noktasından sonsuz metre uzaklaşır.

İspat. Eğer $p \leq 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ olduğundan (niye?) n . terim testi uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi iraksak olur. $p > 0$ ise $a_n = \frac{1}{n^p}$ azalan pozitif bir dizi olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

Son seri geometrik seridir ve $1 - p \geq 0$ ise iraksak $1 - p < 0$ ise iraksaktır. Cauchy sıklaştırma ölçütünü kullanırsak sonuç çıkar.

Örnek 60. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^x}$ serisinin $x > 1$ için yakınsak, $x \leq 1$ için iraksak olduğunu gösterin.

İpucu: Cauchy Sıklaştırma Teoremini kullanabilirsiniz.

Örnek 61. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ serisinin iraksak, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^2}$ serisinin ise yakınsak olduğunu gösterin.

11. **Limit Karşılaştırma Ölçütü.** $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ ve $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n$ olsun. Eğer $0 < L < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsarsa yakınsar.

İspat. Limitin tanımı gereği öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$\frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2} b_n, \quad \forall n \geq N.$$

Limit karşılaştırma teoreminden $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ serileri ya aynı anda yakınsaktır ya da aynı anda iraksaktır.

Örnek 62. Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını inceleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4 + n|x| + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^x + x^2}{n2^n x^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, (x > 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+x^2) + 2x^4 n}{n^3 + 5}$$

Not: $a > 0$ ise $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ olduğunu kullanın.

12. $\sum a_n$ serisine $\sum |a_n|$ serisi yakınsaksa **mutlak yakınsak** denir. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ama mutlak yakınsak değilse $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini **şartlı yakınsak** denir.
13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsak ise yakınsaktır ve

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

olur.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak olsun. $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$ olduğundan limit karşılaştırma teoremi uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n)$ serisi de yakınsak olur. Ama

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

ve en sağdaki iki seri de yakınsak olduğunu en soldaki seri de yakınsaktır. Son olarak her N için

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

olduğundan her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ limitini alırsak sonuç bulunur.

14. **Kök Testi.** $a_n \in \mathbb{R}$, $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

- $r < 1$ ise mutlak yakınsak,
- $r > 1$ ise ıraksaktır.

Not: Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ varsa $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olur. Yani kök testini uygularken, öncelikle $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ limitine bakılmalıdır. Bu limit varsa r sayısı bulunmuş olur.

Not 2: $r \geq 0$ olması gerektigine dikkat edin.

İspat. $r < 1$ ise $r < R < 1$ olacak bir R vardır. \limsup tanımından öyle bir N vardır ki her $n \geq N$ için $|a_n|^{1/n} < R$ olur.

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} R^n$$

$0 < R < 1$ olduğundan son seri yakınsak bir geometrik seridir. O zaman $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ yakınsar. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

$r > 1$ ise \limsup tanımından

$$|a_n|^{1/n} \geq 1$$

yani $|a_n| \geq 1$ şartını sağlayan sonsuz n vardır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olamaz ve n . terim testi sebebiyle seri ıraksar.

15. **D'Alambert Oran Testi.** $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ (n yeterince büyükse), $R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $r = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

- $R < 1$ ise mutlak yakınsaktır.
- $r > 1$ ise ıraksaktır.

Eğer $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ limiti varsa. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

- $L < 1$ ise mutlak yakınsak,
- $L > 1$ ise ıraksaktır.

İspat. İspat için herhangi bir $\{a_n\}$, $a_n > 0$ dizisi için

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (2)$$

bilgisinden faydalabilir. İspat için bkz. Rudin, Principles of Mathematical Analysis Teorem 3.37.

16. Oran testi genellikle kök testine göre uygulaması daha kolay bir testtir. Ancak (2) sebebiyle, kök testi daha geniş bir uygulamaya sahiptir. Zira oran testi bir serinin yakınsak olduğunu belirlerse ($\limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise), kök testi de o serinin yakınsak olduğunu belirler ($\limsup_n \sqrt[n]{a_n} < 1$). Öte yandan oran testinin sonuç vermediği bazı durumlarda, kök testi sonuç verebilir.

Örnek 63.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

serisi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

$$\liminf_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Yani bu örnek için kök testi, serinin yakınsak olduğunu belirler. Ama oran testi sonuç vermez.

Örnek 64.

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

serisi içinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{a_n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ve $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösterin. Yani seri kök testine göre yakınsaktır. Oran testi ise bize serinin yakınsaması ile ilgili bilgi vermez.

Çözümlü Örnekler

Örnek 65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Bu seri Riemann zeta fonksiyonu olarak bilinir ve bir p -serisidir. $x > 1$ için yakınsar, $x \leq 1$ için iraksar.

Örnek 66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ne^x)}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm.

$$\left| \frac{\sin(ne^x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

olduğundan seri karşılaştırma kriterine göre her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsak yani yakınsaktır.

Örnek 67. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$ serisi hangi x değerleri için yakınsar?

Çözüm. $x = 0$ için serinin ilk terimi 0^0 olduğundan, seri $x = 0$ için tanımsızdır. $x < 0$ için $x^{\ln 2}$ tanımsız olacağından (zira $x < 0$ ve r irrasyonel bir sayı ise x^r tanımsızdır) seri $x < 0$ için de tanımsızdır. $x > 0$ için

$$x^{\ln n} = e^{\ln x^{\ln n}} = e^{\ln x \ln n} = e^{\ln n^{\ln x}} = n^{\ln x} = n^{-\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{n^{\ln \frac{1}{x}}}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \frac{1}{x}}}$ serisi $p = \ln \frac{1}{x} > 1$ için yakınsak ve $p = \ln \frac{1}{x} \leq 1$ için iraksak olur. Yani seri $x \leq 0$ için tanımsızdır, $0 < x < \frac{1}{e}$ için yakınsar, $x \geq \frac{1}{e}$ için iraksar.

Örnek 68. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^n$ serisi hangi x değerleri için yakınsar.

Çözüm. Seri $x = 0$ için yakınsar. $x \neq 0$ için seriyi $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^n$ olarak yazalım. Seri bir geometrik seridir ve $|1-x^2| < 1$ için yakınsar. Buradan serinin $|x| < \sqrt{2}$ için yakınsak, $|x| \geq \sqrt{2}$ için iraksak olduğunu görürüz.

Örnek 69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{e^{n^2|x|}}$ serisi hangi x değerleri için yakınsar.

Çözüm. Seri $x = 0$ için yakınsar. $x \neq 0$ için seriyi $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2|x|}}$ olarak yazalım. Oran testi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-|x|(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-|x|(2n+1)} = 0$$

verir. Yani seri her x için yakınsar.

Örnek 70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2+x^3}{n^3x+n^2}$, $x > 0$ serisinin hangi x değerleri için yakınsadığını bulun.

Çözüm.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n^2} = x$$

olduğundan, verilen seri her $x > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ serisi ile aynı karakterlidir. İlkinci seri $p = 2$ yakınsak serisi olduğundan birinci seri de her $x > 0$ için yakınsar.

Örnek 71. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ serisinin her $x \in [0, 1]$ için yakınsak olduğunu gösterin ve toplamını bulun.

Çözüm. Seri bir teleskopik seridir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x - \frac{x^n}{n} = x$$

Zira $x \in [0, 1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0$ olduğu $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x^n = 0$, $|x| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ kuralından görülür. $x = 1$ için ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Serinin toplamı her $x \in [0, 1]$ için x olur.

Örnek 72. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$ serisinin hangi x değerleri için yakınsadığını ve yakınsak olduğu x değerleri için toplamını bulun.

Çözüm. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$ bir geometrik seridir ve $|\sin x| < 1$ için yakınsar $|\sin x| \geq 1$ için iraksar. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ için $|\sin x| = 1$ olduğundan seri $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$ için iraksak, diğer x 'ler için yakınsak olur. Yakınsadığı x 'ler için toplamı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x = \frac{1}{1 - \sin x}$$

olarak bulunur.

Örnek 73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ serisinin hangi x 'ler için yakınsadığını belirleyin.

Çözüm. Serinin ilk terimi $x = -1$ için tanımsız olur. $x \neq -1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \\ \text{yok}, & x < -1 \end{cases}$$

n . terim testine göre seri ancak $x > 1$ için yakınsak olabilir. $x > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} < \infty,$$

olduğundan karşılaştırma kriteri uyarınca seri yakınsar. Yani seri $x > 1$ ise yakınsak, $x = -1$ için tanımsız, diğer $x \in \mathbb{R}$ değerleri için ise iraksak olur.

Örnek 74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n^3 + \sqrt{n}}$ serisinin yakınsadığı x değerlerini bulun.

Çözüm. Serinin paydasındaki terim büyük n değerleri için n^3 gibi davranır. Bu yüzden büyük n değerleri için, serinin terimleri $1/n^{3-x}$ gibi davranır. Gerçekten

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^x}{n^3 + \sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3-x}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + \sqrt{n}} = 1$$

olduğundan verilen seri ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-x}}$ serisi aynı karakterlidir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-x}}$ serisi p -serisi olduğundan $p = 3 - x > 1$ ise yakınsak, $p \leq 1$ ise iraksak olur. Yani verilen seri $x < 2$ için yakınsak, $x \geq 2$ için iraksar.

Örnek 75. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ serisinin $(-\infty, 0)$ aralığında yakınsadığını, $[0, \infty)$ aralığında iraksadığını gösteriniz.

Çözüm.

$$r = \limsup |a_n|^{1/n} = \left| \limsup \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

olduğundan, seri $r = e^x < 1$ için, yani $x < 0$ için, yakınsak, $r = e^x > 1$ için, yani $x > 0$ için, iraksaktır. $e^x = 1$, yani $x = 0$ için serinin iraksak olduğu belliidir.

Örnek 76. $0 < x < 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+\sqrt{n}}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. $0 < x < 1$ ve her $\alpha > 0$ için $x^\alpha < 1$ olur. Yani $x^{\sqrt{n}} < 1$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Son seri geometrik seridir ve yakınsar.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını inceleyin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\pi^n},$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n,$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\pi - \frac{1}{n}\right) n^{-1},$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n},$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$ Cevap: Yakınsak.

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ Cevap: Yakınsak.

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ Cevap: Iraksak.

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Cevap: Yakınsak (oran testi).

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ Cevap: Iraksak (limit karşılaştırma testi).

p) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ Cevap: Iraksak (n. terim testi).

2. Verilen serilerin hangi x 'ler için noktasal yakınsadığını bulunuz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ (çözüm: N.E. syf 47)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ (çözüm: N.E. syf 47)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ (çözüm: N.E. syf 47)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$

- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ (çözüm: N.E. syf 47)
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{nx^n}.$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{x^2+n^2}$ (Karşılaştırma kriterini kullanabilirsiniz. Cevap: \mathbb{R})
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$. Cevap: $x \in (0, \infty)$.
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$. Cevap: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} + \frac{1}{n+1}$. Cevap $x = -1$.
3. Verilen serinin belirtilen aralık üzerinde yakınsaklıklarını inceleyin.
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^4 + n^5}$, $x \in \mathbb{R}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n|x|}}$, $x \in [1, \infty)$
- d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [-R, R]$,
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^{2n}}$, $x \in [2, \infty)$,
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$,
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n|x|}}$, $x \in \mathbb{R}$,

7. Hafta. Arasınav Öncesi Genel Tekar

8. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Yakınsama

Fonksiyon serileri, açık tarifini bilmediğimiz bir fonksiyonu yazmanın yeni bir yoludur. Fonksiyonları, seriler tarafından yazmanın örneğin diferansiyel denklem çözümlerinde (doğayı anlatmada) müthiş faydası vardır.

$f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

kısmi toplam dizisi olsun.

1. Eğer s_n dizisi A kümesi üzerinde bir s fonksiyonuna noktasal olarak yakınsıyorsa,

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in A$$

yazarız ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine A üzerinde s fonksiyonuna **noktasal yakınsar** deriz.

Bir serinin A kümesi üzerinde noktasal yakınsaması, her $x \in A$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sayı serisinin yakınsaması anlamına gelir.

2. Eğer s_n dizisi A kümesi üzerinde s fonksiyonuna düzgün yakınsaksa, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine A üzerinde s fonksiyonuna **düzgün yakınsar** denir.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisi A üzerinde bir s fonksiyonuna noktasal olarak yakınsasın.

$$R_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in A$$

olarak tanımlayalım. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in A$$

olur.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisinin A üzerinde düzgün yakınsamasının tanımı $s_n \xrightarrow{d} s$ yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\|_A = 0$$

veya başka bir deyişle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_A = 0$$

olmasıdır.

Örnek 77. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ geometrik serisinin

- a) \mathbb{R} ,
- b) $(-1, 1)$,
- c) $0 < a < 1$ için $[a, 1)$,
- d) $-1 < a < 0$, için $(-1, a]$,
- e) $0 < a < 1$ için $[-a, a]$,

kümeleri üzerinde noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Biliyoruz ki

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{eğer } |x| < 1 \\ \infty, & \text{eğer } x \geq 1 \\ \text{iraksak}, & \text{eğer } x \leq -1 \end{cases}$$

a) Seri \mathbb{R} üzerinde noktasal ve dolayısıyla düzgün olarak yakınsamaz.

b) Seri $(-1, 1)$ aralığında noktasal yakınsar. Hatta mutlak noktasal yakınsar.

Bu yakınsamanın düzgün olmadığını üç farklı yoldan görelim.

Birinci yol. Kismi toplam dizisi $s_N = 1 + \dots + x^N$, $(-1, 1)$ üzerinde sürekli ve sınırlıdır ($|s_N| < N$) ama limit fonksiyonu olan $\frac{1}{1-x}$, $(-1, 1)$ aralığında sınırlı değildir. Dolayısıyla yakınsama düzgün olamaz.

İkinci yol. $x \in (-1, 1)$ için

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

İki tarafında limitini alırsak

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$$

olduğundan R_n fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında sınırsız yani $\|R_n\|_{(-1,1)} = \infty$ olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_{(-1,1)} \neq 0$$

olduğundan geometrik seri $(-1, 1)$ aralığında düzgün yakınsamaz.

Üçüncü yol.

$$\|R_n\| \geq \left| R_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \right|$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| R_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \infty$$

olduğunu göstererek de görebilirdik.

c) Yukarıdaki analiz, her $0 < a < 1$ için $[a, 1)$ aralığında $\|R_n\| = \infty$ olduğunu ve bu yüzden geometrik serinin düzgün yakınsamadığını gösterir.

d)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} R_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$$

ve her n için $\|R_n\|_{(-1, a]} \geq \frac{1}{2}$ olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_{(-1, a]} \neq 0$$

olduğundan yakınsama düzgün olamaz.

e) $0 < a < 1$ için $[-a, a]$ kümesinde yakınsamanın düzgün olduğunu aşağıda verilen Weirstrass-M testini kullanarak görebiliriz.

Geometrik serinin $(-1, 1)$ aralığında mutlak noktasal yakınsadığına ama düzgün yakınsama-dığına dikkat edelim.

Weirstrass-M Testi

Teorem 11 (Weirstrass-M Testi). Eğer her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x)| \leq M_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi A üzerinde düzgün yakınsar.

İspat. $x \in A$ ise

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = r_n$$

Yani $\|R_n\|_A \leq r_n$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsadığına göre $r_n \rightarrow 0$ yani $\|R_n\|_A \rightarrow 0$ olur.

Örnek 78. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ serisinin $(-1, 1)$ aralığında düzgün yakınsak olmadığını görmüştük. Şimdi sabit $0 < a < 1$ için aynı serinin $A = [-a, a]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsadığını gösterelim.

$f_n(x) = x^n$ olsun. $\|f_n\| = a^n$ ve $\sum a^n < \infty$ olduğundan Weirstrass-M testine göre seri A üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek 79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n|x|}}$ serilerinin \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterin.

Fonksiyon Serilerinin Süreklliliği

Teorem 12. $f_n : A \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için f_n sürekli ise ve $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi düzgün yakınsaksa, $s(x)$ fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

İspat. İspat iki sürekli fonksiyonun toplamının sürekli olması ve sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsak limitinin sürekli olmasını sonucudur.

Örnek 80.

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{2^{nx}}$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında sürekli olduğunu ispatlayın.

Çözüm. $x = 0$ için seri iraksar. Dolayısıyla $(0, \infty)$ aralığında serinin düzgün yakınsak olmasını beklemiyoruz. Ama sürekliliği göstermek için buna gerek yok.

Serinin $(0, \infty)$ aralığında sürekli olduğunu göstermek için, herhangi bir $x = x_0 > 0$ noktasında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $0 < a < x_0$ olacak bir a vardır. $[a, \infty)$ aralığında serinin düzgün yakınsak olduğunu gösterebilirsek, serinin $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve bu yüzden $x = x_0$ 'da sürekli olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi bunu görelim.

$$\left| \frac{\cos nx}{2^{nx}} \right| \leq \frac{1}{2^{an}}, \quad \forall x \geq a$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{an}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^a} \right)^n$$

ve $\frac{1}{2^a} < 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{an}}$ serisi yakınsak bir geometrik seridir. Weirstrass-M testi uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$ serisi $[a, \infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olur.

Teorem 12 sonucu olarak eğer seri $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak ve $x_0 \in (a, b)$ ise

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

olur. Burada $x_0 = a$ ise $\lim_{x \rightarrow x_0}$ ifadesini $\lim_{x \rightarrow a+}$ ve $x_0 = b$ ise $\lim_{x \rightarrow x_0}$ ifadesini $\lim_{x \rightarrow b-}$ ile değiştirmek gereklidir.

Örnek 81.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^n - x^{n+1})$$

olduğunu gösterin. Neden eşitlik yoktur?

Çözüm.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{x}{1-x} = 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^n - x^{n+1}) &\neq \sum_{n=1}^{\infty} 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Eşitlik olmamasının sebebi serinin hiçbir $a < 1$ için $(a, 1)$ aralığında düzgün yakınsak olmamasıdır.

Fonksiyon Serilerinin İntegralebilmesi

Teorem 13. Eğer her n için f_n fonksiyonu $[a, b]$ kümesi üzerinde Riemann-integralebilirse, ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaksa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi $[a, b]$ üzerinde Riemann-integralebilir ve

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

olur.

Fonksiyon Serilerinin Türetilebilmesi

Aşağıdaki teorem, türev ve toplam sembollerinin yer değiştirebilmesinin koşullarını söyler.

Teorem 14. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları türetilebilir olsun. Eğer*

- $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak ise ve
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisini yakınsak yapan bir $x = x_0 \in [a, b]$ varsa

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve her $x \in [a, b]$ için türetilebilir. Ayrıca,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

olur.

İspat. Fonksiyon dizilerindeki ilgili teoremi kullanarak gösterin.

Uyarı 5. Yukarıdaki teoremden ikinci şartın daha güclü olan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olması şartıyla değiştirileceğine dikkat edin.

Uyarı 6. Bir fonksiyonun sınırsız bir I aralığı üzerinde türetilebilir olduğunu göstermek için, her kapalı ve sınırlı $K \subset I$ aralığı üzerinde türetilebilir olduğunu göstermek yeterlidir.

Örnek 82. Verilen fonksiyon serisinin yanında verilen A kümesi üzerinde türetilebilir olduğunu gösterin.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, A = \mathbb{R}.$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx^2)}{n^3 + 1}, A = \mathbb{R}.$$

Çözüm. Birinci örnek için hem serinin kendisinin hem de türev serisi olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{n^2 + x^2} = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x^2)^2}$$

serisinin \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Serinin \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görelim.

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi $p=2$ serisi olduğundan yakınsaktır. Weirstrass-M testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ serisinin \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğu görüllür.

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| = \left| \frac{2nx}{n(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \left| \frac{n^2 + x^2}{n(n^2 + x^2)^2} \right| = \left| \frac{1}{n(n^2 + x^2)} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ serisi $p = 3$ serisi olduğundan yakınsaktır. Weirstrass-M testinden $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisinin \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğunu buluruz. Düzgün yakınsak serilerin türetilebilmesi ile ilgili teorem uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ serisi \mathbb{R} üzerinde türetilebilirdir ve

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$$

olur.

İkinci örnekteki serinin tüm \mathbb{R} üzerinde düzgün yakınsak olduğu M-testiyle görülebilir. Türev serisi olan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx\cos(nx^2)}{n^3+1}$ serisinin tüm \mathbb{R} üzerinde olmasa bile her $M > 0$ için $[-M, M]$ aralığında düzgün yakınsak olduğu M-testi sayesinde görülebilir.

Örnek 83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+x^2}$ serisi hangi p değerleri için her $x \in \mathbb{R}$ noktasında türetilebilirdir?

9. Hafta. Fonksiyon Serilerinde Yakınsama Örnekleri

1. exp, cos ve sin fonksiyonlarının seri açılımları olan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ serileri her $R > 0$ için $[-R, R]$ aralığında (yani \mathbb{R} 'nin her sınırlı alt kümelerinde) düzgün yakınsaktır.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ serisinin her $x \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \dots\}$ için yakınsadığını gösteriniz. Aynı serinin $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsak olmadığını ama her $M > 0$ için $[0, M]$ aralığında düzgün yakınsadığını gösterin.

Örnek 84. Verilen serinin belirtilen aralık üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^{3/2}}, x \in \mathbb{R} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^4+n^5}, x \in \mathbb{R} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n|x|}}, x \in [1, \infty)$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in [-R, R], \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^{2n}}, x \in [2, \infty), \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, x \in \mathbb{R}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n|x|}}, x \in \mathbb{R}, \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, x \in (-1, \infty)$$

Çözüm. a) $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^{3/2}}$ olsun. $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ ve $\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ olduğundan sonuç Weirstrass-M testinden çıkar.

e)

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{0+n^2x^{2n}} \leq \frac{x^n}{1^2x^2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ yakınsak olduğundan sonuç Weirstrass-M testinden çıkar.

h) Eğer $-1 < x \leq 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \neq 0$ olduğundan seri yakınsamaz. Herhangi bir $a > 1$ için eğer $x > a > 1$ ise

$$\left| \frac{1}{1+x^n} \right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{a^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$$

olur ve Weirstrass-M testine göre seri $[a, \infty)$ aralığında düzgün yakınsar. Dolayısıyla her $x > 1$ için noktalı yakınsar. Yani $(1, \infty)$ aralığında noktalı yakınsaktır. Ama $(1, \infty)$ aralığında düzgün yakınsamaz. Görelim.

$$\|R_n\| \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} \geq \frac{1}{1+x^{n+1}}, \quad \forall x > 1$$

ve

$$\|R_n\| \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+x^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Yani yakınsama düzgün değildir.

Bu serinin $(-\infty, -1)$ aralığında noktalı yakınsak olduğu da gösterilebilir. Bkz. N.E. ders notları.

Örnek 85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin yakınsaklığını inceleyin. Bu seride **Riemann zeta fonksiyonu** denir.

Çözüm. Seri bir p -serisidir ve p -serisinin özellikleri nedeniyle $(-\infty, 1]$ aralığındaki her x için iraksak, $(1, \infty)$ aralığında ise yakınsak olur. $a > 1$ olsun. Her $x \geq a > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < \infty$$

olduğundan Weirstrass-M testi uyarınca seri $[a, \infty)$ aralığında düzgün yakınsar.

Serinin $(1, \infty)$ aralığında düzgün yakınsamadığını görelim. Her $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$ ve her $x \in (1, \infty)$ için

$$\|R_n\| \geq |R_n(x)| \geq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^x}$$

olur. İki tarafında $x \rightarrow 1^+$ limitini alırsak

$$\|R_n\| \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k}$$

olur. İki tarafın bu sefer $N \rightarrow \infty$ limitini alırsak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|R_n\| \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

buluruz. Son seri toplamının sonsuz olması harmonik serinin iraksak olmasından kaynaklanır.

Seri her $a > 1$ için $[a, \infty)$ aralığında düzgün yakınsar.

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a}, \quad \forall x \in [a, \infty)$$

Yani

$$\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ serisi $p = a > 1$ serisi olduğundan yakınsaktır ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = 0$ olur.

Örnek 86. Riemann zeta fonksiyonun her $x > 1$ için türetilebilir olduğunu gösterin ve türevini bir seri olarak ifade edin.

Çözüm. $x_0 > 1$ olsun. O halde $1 < a < x_0 < b$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır.

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{n^x} = -\frac{1}{n^x} \ln n$$

olduğuna dikkat edelim. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{n^x}$ serisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösterebilirsek, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin aynı aralık üzerinde yakınsak olduğunu bir önceki örnek dolaşıyla bildiğimizden, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin her $x \in [a, b]$ için türetilebilir olduğunu ve

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^x} \ln n$$

olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^x}$ serisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu görelim.

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \left| \frac{\ln n}{n^a} \right| = \frac{\ln n}{n^a}, \quad \forall x \in [a, b]$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ serisinin yakınsak olduğunu görelim. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\delta \ln n}{\delta n^a} = \frac{\ln n^\delta}{\delta n^a} \leq \frac{n^\delta}{\delta n^a} = \frac{1}{\delta n^{a-\delta}}$$

olur. Burada her $y > 1$ için $\ln y \leq y$ olduğunu kullandık. Burada $0 < \delta < a - 1$ olacak şekilde seçenek, $\frac{1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\delta}}$ serisinin $p = a - \delta > 1$ yakınsak serisi olduğunu görürüz. Karşılaştırma kriteri uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ serisi de yakınsaktır. Weirstrass-M testi uyarınca $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^x}$ serisi $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olur.

Örnek 87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ serisinin $x \geq 0$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Serinin her $M > 0$ için, $[0, M]$ aralığında düzgün yakınsadığını Weirstrass-M testi ile gösterin. Bu yüzden seri $[0, \infty)$ üzerinde noktalı olarak yakınsar. (Niye?) Ama seri $[0, \infty)$ üzerinde düzgün yakınsamaz. Görelim. Her $N \in \mathbb{N}$, $N > n + 1$ ve her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\|R_n\|_{[0, \infty)} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)} \geq \sum_{k=n+1}^N \frac{x}{k(x+k)}$$

olur. İfadeden iki tarafında $x \rightarrow \infty$ limiti alırsak,

$$\|R_n\|_{[0, \infty)} \geq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k}$$

ve ardından $N \rightarrow \infty$ limiti alırsak

$$\|R_n\|_{[0, \infty)} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

buluruz. Son seri harmonik serinin kuyruk kısmı olduğundan iraksar. (Veya Cauchy sıklaştırma teoremi, bize bu serinin karakteri ile $\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n}$ serisinin aynı karakterli olduğunu söyley. $\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \infty$ olduğundan sonuç çıkar.)

Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_{[0, \infty)} \neq 0$ olduğundan yakınsama $[0, \infty)$ üzerinde düzgün olamaz.

Örnek 88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ serisinin noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Çözüm. Seri $x \leq 0$ için tanımsızdır.

$$x \in (0, 1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} = +\infty$$

zira $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+nx) = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$. n. terim testi nedeniyle seri $x \in (0, 1)$ için iraksar.

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Yani seri $x = 1$ için iraksar.

$$x > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{nx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

Yani seri $x > 1$ için yakınsar.

Seri $(1, \infty)$ aralığında düzgün yakınsamaz.

$$\|R_n\| \geq \sup_{x>1} \sum_{k=n+1}^N \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=n+1}^N \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} = \sum_{k=n+1}^N \frac{\ln(1+k)}{k}, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\|R_n\| \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{\ln(1+k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+k)}{k} = \infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Seri her $a > 1$ için $[a, 1)$ aralığında düzgün yakınsar.

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(1+kx)}{kx^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{kx}{kx^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a^k}, \quad \forall x \in [a, \infty)$$

$$\|R_n\|_{[1, \infty)} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a^k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k}$ serisi $p = a > 1$ serisi olduğu için yakınsar. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a^k} = 0$ olur.

10. Hafta. Kuvvet Serileri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

şeklindeki serilere **kuvvet serileri** diyeceğiz. x_0 noktasına kuvvet serisinin merkezi denir.

Kuvvet serilerinin $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ şeklinde bir fonksiyon serisi olduğuna dikkat edilmelidir.

$f(x_0) = a_0$ olduğundan bir kuvvet serisi merkezinde her zaman mutlak yakınsar.

Teorem 15 (Cauchy-Hadamard). $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ve $1/\infty = 0$ ve $1/0 = \infty$ olarak tanımlamak üzere

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$$

olsun. O halde kuvvet serisi $f(x)$,

- i) $0 \leq |x - x_0| < R$ koşulunu sağlayan her x için mutlak yakınsar.
- ii) $|x - x_0| > R$ koşulunu sağlayan her x için iraksar.
- iii) $0 \leq \rho < R$ ise $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ kapalı aralığı üzerinde düzgün yakınsar.

İspat.

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n(x - x_0)|^{1/n} = |x - x_0| \frac{1}{R}$$

olsun. Kök testine göre $r < 1$ ise seri mutlak yakınsak, $r > 1$ ise seri iraksaktır. Yani $|x - x_0| < R$ ise seri mutlak yakınsak, $|x - x_0| > R$ ise seri iraksaktır. (i) ve (ii) ispatlandı.

(iii) için, her $0 \leq \rho < R$ ve her $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\rho + x_0 - x_0|^n$$

olur. Son seri (i) sebebiyle yakınsak olduğunu, Weierstrass-M testi bize $f(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığını verir.

Yukarıdaki teoremdeki R sayısına kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir. Kuvvet serisinin **yakınsaklık aralığı** I serinin yakınsadığı en büyük aralıktır.

1. $R = \infty$ ise $I = \mathbb{R}$,
2. $0 < R < \infty$ ise I , şu dört tip aralıktan birisidir: $(x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $[x_0 - R, x_0 + R]$,
3. $R = 0$ ise $I = \{x_0\}$

Yakınsaklık aralığını bulmak için, önce yakınsaklık yarıçapı hesaplanır. Eğer $0 < R < \infty$ ise serinin $x_0 - R$ ve $x_0 + R$ uç noktalarında yakınsak olup olmadığı kontrol edilmelidir.

Aşağıda verilen oran testini kullanarak yakınsaklık yarıçapını hesaplama, serideki terimler özellikle faktoriyelli ifadeler içeriyorsa işe yarayabilir.

Teorem 16. Eğer

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

ise L sayısı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R 'ye eşit olur.

İspat. Yukarıdaki ispatta, kök testi yerine oran testi kullanılarak gösterilir.

Örnek 89. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 0, yakınsaklık aralığı ise $\{0\}$ olur. Yani seri sadece merkezinde yakınsar.

Örnek 90. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz, yakınsaklık aralığı ise \mathbb{R} olur. Yani seri her yerde yakınsar.

Örnek 91.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} = 2x + 0x^2 + 0x^3 + 2^2 x^4 + 0x^5 + \dots$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulalım.

Birinci yöntem olarak kök testini kullanalım.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |2^n x^{n^2}|^{1/n} = 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 2, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

Buradan $|x| < 1$ ise serinin yakınsak, $|x| \geq 1$ olduğunda ise iraksak olduğu bulunur. Yani yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ olur.

Ikinci yöntem olarak oran testini kullanalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} |x|^{(n+1)^2}}{2^n |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x|^{n^2 + 2n + 1 - n^2} = 2|x| \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2)^n = \begin{cases} 0, & x^2 < 1 \\ 2, & x^2 = 1 \\ \infty, & x^2 > 1 \end{cases}$$

olduğundan oran testine göre seri $x^2 < 1$ yani $-1 < x < 1$ olduğunda yakınsar, $x \geq 1$ olduğunda ise iraksar. Buna göre yakınsaklık yarıçapı 1 olur.

Örnek 92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulalım.

Kök testini kullanalım.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3} \right|^{1/n} = \frac{1}{2} (x-1)^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^{3/n}} \right| = \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Buradan seri $\frac{(x-1)^2}{2} < 1$ yani $|x-1| < \sqrt{2}$ ise yakınsak $|x-1| > \sqrt{2}$ ise iraksak olduğu bulunur. Seri $x = 1 \pm \sqrt{2}$ noktalarında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ yakınsak serisi olur. Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ olur.

Soruyu yukarıdaki gibi oran testi kullanarak çözme işi okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek 93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+1}{x} \right)^n$ serisinin noktasal olarak yakınsadığı kümeyi belirleyelim. (Not: Bu seri bir kuvvet serisi değildir.)

$y = \frac{x+1}{x}$ yazarsak, seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n$ kuvvet serisi haline alır. $\limsup_n \left(\frac{1}{n} \right)^{1/n} = \limsup_n \frac{1}{n^{1/n}} = 1$ olduğundan, seri $|y| < 1$ için yakınsar. $y = 1$ için seri harmonik seridir ve iraksar. $y = -1$ alterne harmonik seridir ve yakınsar. Dolayısıyla seri $-1 \leq y < 1$ aralığında yakınsar. Orijinal seri ise $x \leq -1/2$ aralığında yakınsar.

Örnek 94. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^n} \right)^n x^n$ serisinin yakınsaklık aralığının $(-2, 2)$ olduğunu görelim.

$|a_{2n}|^{1/2n} = \frac{1}{2}$ ve $|a_{2n+1}|^{1/(2n+1)} = \frac{1}{4}$ olduğundan

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \max\{\limsup_n |a_{2n}|^{1/2n}, \limsup_n |a_{2n+1}|^{1/(2n+1)}\} = \frac{1}{2}$$

ve $R = 2$ olur. Seri $-2 < x < 2$ aralığında yakınsar. $x = 2$ için serinin çift terimleri 1 olduğu ve sıfır'a yaklaşmadığı için seri iraksar. Benzer şekilde $x = -2$ için de serinin çift terimleri -1 olur ve seri iraksar.

Bu örnekte oran testi işe yaramaz.

Örnek 95. Aşağıdakileri gösterin.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $[-3, 3]$ olur.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $[0, 2)$ olur.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ olur.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı \mathbb{R} olur.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $(-1, 1)$ olur.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $[-1/2, 1/2]$ olur.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $(-1/3, 1/3)$ olur.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n$ serisinin noktasal olarak $-1 < x < -\frac{1}{3}$ kümesinde yakınsadığını gösterin.

Örnek 96. Yakınsaklık aralığı sırasıyla $(-1, 1)$, $[-1, 1)$, $(-1, 1]$ ve $[-1, 1]$ olan kuvvet serileri belirleyin. Cevap: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^2$.

Örnek 97. Aşağıdaki serileri yakınsaklık aralığını bulun.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k + 2)^k x^{2k}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{k^2} x^{k^2}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) x^k$

Kuvvet Serilerinin Özellikleri

1. Kuvvet Serilerinin Sürekliliği

Teorem 17. Pozitif yakınsaklık yarıçapı olan bir kuvvet serisi, yakınsaklık aralığının iç noktalarda sürekliidir. Yanı $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ise, f fonksiyonu $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında sürekliidir.

İspat. $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ olsun. Kuvvet serisi Cauchy-Hadamard Teoremi nedeniyle $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan ve $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ her yerde sürekli olduğundan kuvvet serisi $[a, b]$ aralığında ve dolayısıyla x 'de süreklidir.

Teorem 18 (Abel Teoremi). *Pozitif yakınsaklık yarıçapı olan bir kuvvet serisi, yakınsaklık aralığının sağ uç noktalasında yakınsaksa o noktada soldan süreklidir. Yani $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $0 < R < \infty$ olsun. Eğer seri yakınsaklık aralığının sağ uç noktası olan $x = x_0 + R$ için yakınsak ise seri $x = x_0 + R$ noktasında soldan süreklidir ve*

$$\lim_{x \rightarrow (x_0+R)-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

olur. Benzer önerme $x = x_0 - R$ sol uç noktası için de geçerlidir.

İspat. İspat için bkz. [Erg15] syf. 72.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık aralığı $[-1, 1]$ olsun ve seri her $|x| < 1$ için $f(x)$ fonksiyonuna yakınsasın. O halde

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olur.

Bu iki teorem şunu söyler:

Bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı üzerinde süreklidir.

Örnek 98. $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ eşitliğinin her $|x| < 1$ için geçerli olduğunu kullanarak (bu-nun geçerli olduğunu ileride göreceğiz) eşitliğin $x = 1$ için de geçerli olduğunu yani

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

sonucunu gösterin.

Çözüm. Serinin $x = 1$ için yakınsak olduğu alterne seri testinden görülür. Logaritmanın sürekli olduğunu kullanarak $\lim_{x \rightarrow 1-} \log(1+x) = \log 2$ sonucunu, Abel Teoremini kullanarak da $\lim_{x \rightarrow 1-} \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ sonucunu buluruz. İlkisini birleştirerek sonuç bulunur.

2. Kuvvet Serilerinin Türetilebilirliği

Teorem 19. *Pozitif yakınsaklık yarıçapı olan bir kuvvet serisi, yakınsaklık aralığının her iç noktasında türetilebilir. Yani $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ise, f fonksiyonu $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında türetilebilirdir ve türevi R yakınsaklık yarıçapına sahip x_0 merkezli bir kuvvet serisi olur. Ayrıca türevi, $f(x)$ kuvvet serisinin terim terim türetilmesi ile elde edilir.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

İspat. Fonksiyon serilerinin bir x noktasında türetilebilmesi için serinin x 'i içeren bir $[a, b]$ aralığı içindeki bir noktada yakınsaması ve türev serisinin $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaması gerektiğini biliyoruz.

$$\limsup_n (n|a_n|)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \limsup_n (|a_n|)^{1/n} = \limsup_n (|a_n|)^{1/n}$$

olduğundan, türev serisinin yakınsaklık yarıçapı da R olur. Dolayısıyla hem kuvvet serisi hem de türev serisi Cauchy-Hadamard Teoremi sebebiyle her $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında düzgün yakınsak olur.

Uyarı 7. Bir kuvvet serisinin türev serisi orijinal seri ile aynı yakınsaklık yarıçapına sahiptir ama yakınsaklık aralığının uç noktalarında orijinal seri yakınsak olsa bile yakınsaklıği kaybedebilir.

Teorem 20. Eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi $R > 0$ yakınsama yarıçapına sahipse f 'in $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında her mertebeden türevi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

olur.

İspat. $a_0 = f(x_0)$ olur. İki tarafında $x = x_0$ noktasında türevini alırsak $a_1 = f'(x_0)$. Genel formüll, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)) (x - x_0)^{n-k}$$

bağıntısından çıkar.

3. Kuvvet Serilerinin İntegrallenmesi

Teorem 21. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ise, her $C \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = C + a_0 (x - x_0) + \frac{a_1}{2} (x - x_0)^2 + \cdots$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı da R olur ve

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

ve

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

olur.

İspat.

$$\limsup_n \left(\frac{a_n}{n+1} \right)^{1/n} = \limsup_n (|a_n|)^{1/n}$$

olduğu ??'de olduğu gibi gösterilir. Dolayısıyla $F(x)$ kuvvet serisi türetilebilirdir ve türevi $f(x)$ olur.

Örnek 99.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

için $\int_0^\pi f(x)dx$ integralini bir seri olarak ifade edin.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)dx &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\pi x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \pi^{2n+1} \end{aligned}$$

Taylor Serileri

Şimdi bu işlemi tersten düşünelim.

Tanım 6. f fonksiyonu bir x_0 noktasında sonsuz kere türevlenebilsin.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

kuvvet serisine f 'in x_0 merkezli **Taylor serisi** denir. $x_0 = 0$ özel durumunda ise Taylor serisine **Maclaurin serisi** denir.

Uyarılar

1. **Teorem 20**, eğer $R > 0$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R$$

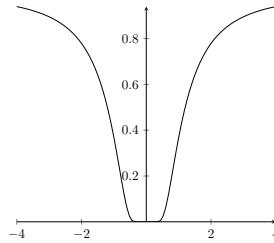
ise sağ taraftaki kuvvet serisinin f fonksiyonunun Taylor serisi olmak zorunda olduğunu söyler.

2. Bir fonksiyonun Taylor serisinin $x = x_0$ 'da $f(x_0)$ 'a yakınsadığını biliyoruz. Eğer bu seri sadece x_0 'da değil aynı zamanda x_0 'ı içeren bir I açık aralığındaki her x için $f(x)$ 'e yakınsarsa, f fonksiyonuna $x = x_0$ 'da **reel-analitik** deriz.
3. Tanım gereği bir x_0 noktasında sonsuz kez türevlenemeyen bir fonksiyon reel-analitik olamaz. Örneğin $f(x) = |x|$ (birinci türevi 0 noktasında yok) veya $f(x) = x^{3/2}$ (ikinci türevi 0 noktasında yok) fonksiyonları $x = 0$ da reel-analitik olamaz.
4. Öte yandan bir fonksiyonun sonsuz kere türevlenebilmesi onun o noktada reel-analitik olması için yeterli değildir. Örnek için bkz. [Örnek 100](#). Yani bir fonksiyonun Taylor serisi o fonksiyona merkezi haricindeki hiçbir noktada yakınsamayabilir.

Örnek 100.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olsun.



Şekil 0.15: $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(0) = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için p_n bir polinom olmak üzere,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olduğunu gösterelim. Bu önermenin (1) $n = 0$ için doğru olduğunu gösterin (bu barizdir), (2) n için kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterebilirsek, tümevarım yöntemi önermenin her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu söyler. Şimdi önermenin doğruluğunu n için kabul edip $n + 1$ için gösterelim. Önce $f^{(n+1)}(0) = 0$ olduğunu görelim.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = 0$$

olur. Zira sağdan ve soldan limitler aşağıdaki gibi bulunur.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p_n(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{p_n(u)u}{e^{u^2}} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{p_n(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{p_n(u)u}{e^{u^2}} = 0$$

Simdi bir p_{n+1} polinomu için ve $x \neq 0$ için $f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2}$ olduğunu görelim. $p_{n+1}(z) = p'_n(z)(-z^2) + p_n(z)(2z^3)$ polinomu olarak tanımlarsak $x \neq 0$ için $f^{(n+1)}(x) = p_{n+1}(1/x)e^{-1/x^2}$ olur. Yani önermenin $n + 1$ için doğru olduğunu göstermiş olduk.

f 'in $x = 0$ daki Taylor serisi açılımına $S(x)$ diyelim. $S(x)$ serisinin tüm katsayıları sıfırdır ve bu yüzden sonsuz yakınsaklık yarıçapına sahip olup, her yerde sıfır fonksiyonuna yakınsar. $f(x) \neq 0$, $x \neq 0$ olduğundan, bu seri f 'e sadece $x = 0$ 'da yakınsar. Yani f $x = 0$ 'da sonsuz kere türetilebilmesine rağmen $x = 0$ 'da reel-analitik değildir.

Teorem 22. $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere f bir (a, b) açık aralığında sonsuz kere türetilebilen bir fonksiyon olsun. Eğer

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \quad \forall x \in (a, b), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

şartını sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa, her $x_0 \in (a, b)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (a, b)$$

olur. Yani f , (a, b) aralığında reel-analitiktir.

İspat. Taylor serisinin kalan kısmını

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

olarak tanımlayalım. f 'in (a, b) üzerinde reel-analitik olması her $x \in (a, b)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ olması anlamına gelir. Daha önceki analiz derslerinde görmüş olduğunuz ünlü Taylor Teoremi sayesinde, her $x \in (a, b)$ için

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

eşitliğini sağlayan ve x ile x_0 arasında kalan bir c sayısının olduğunu biliyoruz. Her $x \in (a, b)$ için

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{(M|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Zira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^n}{n!} = 0, \quad \forall y \geq 0$$

olduğu diziler için oran testi sayesinde görülebilir.

Yukarıdaki teoremde verilen (3) koşulu, Taylor serisinin kalan kısmının sıfıra yakınsaması için yeter bir şarttır. Literatürde bu şart dışında başka yeter şartlarda bulabilirsiniz.

Örnek 101. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm. Öncelikle $\sin x$ fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisinin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ olduğunu gösterin. Şimdi bu Taylor serisinin her x için $\sin x$ fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim. Bunun için [Teorem 22](#)'den yararlanalım. $f(x) = \sin x$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $|f^{(n)}(x)| \leq 1^n$ olur. Dolayısıyla $\sin x$ için yazılıp yukarıdaki serilerin her $a > 0$ için $(-a, a)$ üzerinde yakınsadığı ve dolayısıyla seri açılımının her $x \in \mathbb{R}$ için geçerli olduğu görüldür.

Şimdi e^x için yazılıp serinin her x için e^x fonksiyonuna yakınsadığını görelim. Bir $a > 0$ için,

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^a := M \leq M^n, \quad \forall x \in (-a, a)$$

olur (zira $M > 1$ 'dir). Yukarıdaki teoremin şartı sağlanmıştır. Yani e^x 'in seri açılımı her x için e^x 'e yakınsar.

Kuvvet Serilerinin Kapalı Formları

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \quad (4)$$

ifadesinden yararlanarak, çeşitli kuvvet serilerinin kapalı formlarını bulabiliyoruz. Veya çeşitli fonksiyonların Taylor serisini hesaplayabiliyoruz.

Örnek 102. Denklem 4'de x yerine $-x$ yazarsak

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$$

elde ederiz.

Örnek 103. $\frac{1}{2-x}$ fonksiyonunun MacLaurin serisini yazın ve serinin hangi aralıkta yakınsadığını belirleyin.

$$\frac{1}{2-x} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1-x/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (x/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2$$

Örnek 104. $\frac{6x}{5x^2-4x-1}$ fonksiyonunun MacLaurin serisini yazın ve serinin hangi aralıkta yakınsadığını belirleyin.

Öncelikle

$$\frac{6x}{5x^2-4x-1} = \frac{1}{1+5x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-5x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Birinci seri $|5x| < 1$ için, ikinci seri ise $|x| < 1$ için yakınsar. Yani

$$\frac{6x}{5x^2-4x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((-5)^n - 1)x^n, \quad |x| < \frac{1}{5}$$

olur.

Örnek 105. $\ln(1+x)$ fonksiyonunun MacLaurin serisini yazın ve serinin hangi aralıkta yakınsadığını belirleyin.

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1$$

$x = 0$ konulursa $0 = \ln 1 = C$ bulunur. Yani

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

bulunur.

Yukarıdaki serinin $x = 1$ için de yakınsak, $x = -1$ için iraksak olduğunu dikkat edin. (Neden?) Dolayısıyla Abel Teoremine göre

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

bulunur. Özel olarak

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

olur.

Örnek 106. Geometrik serinin türevini alarak

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

ve iki kere türevini alarak

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

olduğunu gösterin.

Örnek 107. $\arctan x$ fonksiyonun $x = 0$ merkezli kuvvet serisini belirleyin ve

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

bağıntısını elde edin. (Bu bağıntı π sayısını hesaplamak için pek de iyi bir yöntem değildir çünkü yakınsama hızı çok yavaştır.)

Örnek 108. Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin açılımını ve bu açılımın geçerli olduğu aralığı belirleyin.

- $\frac{1-x}{1+x}$
- $\frac{x^3}{1-2x^2}$

11. Hafta. Fourier Serileri

(A)

Tanım 7. $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in [-a, a]$ için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna **çift fonksiyon**, her $x \in [-a, a]$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

Çift fonksiyonların grafikleri y -eksenine göre, tek fonksiyonların grafikleri ise orijine göre simetiktirler. $1, x^2, x^4, \cos x$ çift, $x, x^3, \sin x$ ise tek fonksiyonlara örnektir.

Eğer $[-a, a]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu tek bir fonksiyon ise

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (\text{varsayı})$$

çift bir fonksiyon ise

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (\text{varsayı})$$

olur.

Çift ve tek fonksiyonların toplamı ve çarpımları aşağıdaki gibidir.

çift + çift = çift, çift × çift = çift, tek + tek = tek, tek × tek = çift, çift × tek = tek.

(B)

Lemma 1. Her $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ tam sayıları için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

İspat. İlk integralin sıfır olduğu direkt hesaplanır. İkinci ve üçüncü integrallerde, integranın tek bir fonksiyon olduğu ve bu yüzden simetrik bir aralık üzerinde integralinin sıfır olacağı görülür. Son iki integralin hesabı için ise

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)$$

ve

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)$$

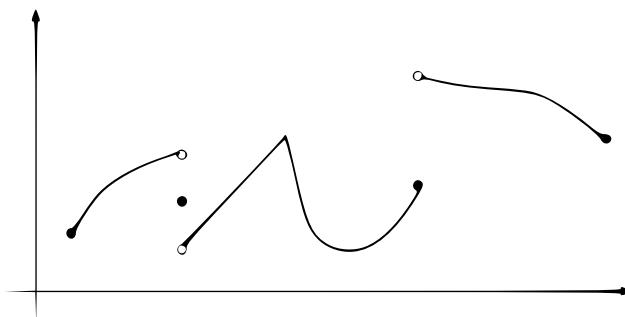
eşitliklerinden yararlanılır.

(C) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ olsun. Eğer f fonksiyonu her (x_i, x_{i+1}) açık aralığında sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x), \quad i = 1, \dots, n$$

'limitleri varsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde **parçalı sürekli bir fonksiyon**² denir ve $f \in PC[a, b]$ yazılır. f fonksiyonunun x_i noktalarında ne tanımlı olmasına ne de tanımlı ise sürekli olmasına gerek vardır.

Notasyon. $f(c+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x), \quad f(c-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x).$



Şekil 0.16: Parçalı sürekli bir fonksiyon.

²Parçalı sürekli fonksiyonların farklı bağlamlarda farklı tanımları olduğunu ekleyelim, bkz. https://proofwiki.org/wiki/Definition:Piecewise_Continuous_Function.

Örnek 109.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ x + 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

ise $f \in PC[0, 2]$ olur. fonksiyonun $x = 1$ noktasında sürekli olduğunu ve $f(1-) = 1$ ve $f(1+) = 2$ olduğunu dikkat edin. Öte yandan

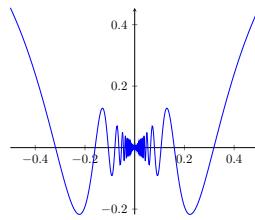
$$f(x) = 1/x, \quad x \in (0, 1)$$

ise f fonksiyonu 0 noktasını içeren bir aralık üzerinde parçalı sürekli olamaz çünkü $f(0+)$ değeri tanımsızdır.

Son olarak

$$f(x) = x \sin(1/x), \quad x \neq 0$$

için $f \in PC[-1, 1]$ fakat $f' \notin PC[-1, 1]$ olduğunu gösterin, bkz [Şekil 0.17](#).



Şekil 0.17: $f(x) = x \sin(1/x)$

Uyarı 8. i) $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki sürekli bir fonksiyon parçalı sürekliidir.

ii) $f \in PC[a, b]$ ise $\int_a^b f(x) dx$ Riemann integrali tanımlıdır.

iii) Parçalı sürekli fonksiyonların toplamları, çarpımları ve kompozisyonları da parçalı sürekli olur.

(D)

Tanım 8. $f \in PC[-\pi, \pi]$ olsun. O halde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

integraleri tanımlıdır ve

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (7)$$

serisine f fonksiyonunun **Fourier serisi** denir. Burada a_n ve b_n sayılarına f fonksiyonunun **Fourier katsayıları** denir.

Uyarı 9. a) Bu tanımda yakınsaklığa ilgili hiçbir bilgi olmadığına dikkat çekelim. Yani $f \in PC[-\pi, \pi]$ olan bir fonksiyonun Fourier serisi herhangi bir $x \in [-\pi, \pi]$ için iraksak olabilir, veya yakınsak ise $f(x)$ değerinden farklı bir değere yakınsayabilir.

- b) *Lemma 9* der ki (7) formundaki bir seri, bir f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsarsa, o seri f fonksiyonunun Fourier serisi olmak zorundadır.
- c) Eğer Fourier serisi bir x için yakınsaksa, $x + 2\pi$ için de aynı değere yakınsar. Dolayısıyla Fourier serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında yakınsak ise tüm \mathbb{R} üzerinde yakınsar ve yakınsadığı fonksiyon 2π periyodik bir fonksiyon olur.
- d) Eğer f tek bir fonksiyon ise, her n için $a_n = 0$, çift bir fonksiyon ise $b_n = 0$ olmak zorundadır.

Fourier Serilerinin Yakınsaklılığı

Tanım 9. $f \in PC[-\pi, \pi]$ olsun. 2π -periyodik $f_{per}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f_{per}(x) = \begin{cases} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}, & x = \pm\pi \\ f_{per}(x + 2n\pi), & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Uyarı 10. f fonksiyonunun sürekli olduğu $x \in (-\pi, \pi)$ değerlerinde

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f_{per}(x)$$

olur. $f \in PC[-\pi, \pi]$ olduğundan, $[-\pi, \pi]$ aralığındaki sonlu nokta hariç her x için f sürekli ve $f_{per}(x) = f(x)$ olur. $[-\pi, \pi]$ üzerinde sadece f fonksiyonunun sıçrama yaptığı x noktalarında veya $x = \pm\pi$ noktalarında $f(x) \neq f_{per}(x)$ olabilir.

Teorem 23 (Dirichlet Teoremi: Fourier Serilerinin Noktasal Yakınsaklılığı). *Hem $f \in PC[-\pi, \pi]$ hem de $f' \in PC[-\pi, \pi]$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Fourier serisi noktasal olarak f_{per} fonksiyonuna yakınsar, yani a_n ve b_n katsayıları (5) ve (6) olmak üzere,*

$$f_{per}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

İspat. Teoremin ispatı bölüm sonunda verilecektir.

Uyarılar:

1. Bir fonksiyonun Fourier katsayılarını hesaplarken fonksiyonun türevi ile ilgili bir bilgi kullanmıyoruz hatta türetilenin olduğunu bile kabul etmemize gerek yok. Ama yine de Fourier serisinin yakınsaklılığı için fonksiyonun türevi üzerine koşul koyuyoruz. Bu ilginç bir durum. Ayrıca eğer türev üzerindeki koşul kaldırılırsa noktasal yakınsama teoreminin geçerli olmadığı gösterilebilir. Örneğin, Fourier serisi bazı noktalarda iraksayan 2π periyotlu sürekli fonksiyonlar vardır. [Erg15]
2. Fourier serileri ve kuvvet serilerinin yakınsaklıklarını kıyaslayalım. Bir kuvvet serisi yakınsaksa yakınsadığı fonksiyonun sonsuz kere türetilen bir fonksiyon olması gereklidir. Öte yandan bir Fourier serisi süreksiz bir fonksiyona bile yakınsayabilir.

3. $f \in PC[-\pi, \pi]$ ise f ve f_{per} fonksiyonlarının Fourier katsayıları ve dolayısıyla serileri aynıdır.
4. Fourier serisinin düzgün yakınsaması için f' nin $[-\pi, \pi]$ üzerinde sürekli ve $f(-\pi) = f(\pi)$ olması zorunludur. ispat. Eğer bu şartlar sağlanmazsa f_{per} $[-\pi, \pi]$ üzerinde sürekli olamaz. Sürekli fonksiyonlardan oluşan Fourier serisi süreksiz bir fonksiyona düzgün yakınsayamaz.

Teorem 24. Eğer $f : [\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f' \in PC[-\pi, \pi]$ ve $f(-\pi) = f(\pi)$ ise f fonksiyonunun Fourier serisi f fonksiyonuna $[-\pi, \pi]$ aralığında düzgün olarak yakınsar.

Yukarıdaki teoremin ispatı için bkz. [Erg15], syf. 141.

Fourier serileriyle ilgili örnekler

Örnek 110.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{eğer } x \in [-\pi, 0] \\ 1, & \text{eğer } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

fonksiyonun Fourier serisini ve serinin noktasal limitini belirleyiniz. Bu yakınsama düzgün olabilir mi?

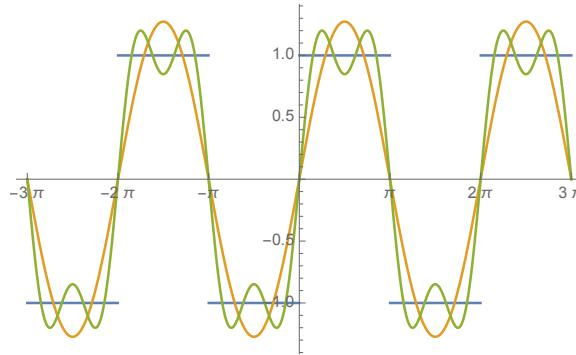
Çözüm. Bu fonksiyon tek fonksiyondur. Dolayısıyla $a_n = 0$ olur.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$

Yani $b_{2n} = 0$ ve $b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$ olur.

Dirichlet Teoremi nedeniyle

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)} = \begin{cases} -1, & \text{eğer } x \in (-\pi, 0) \\ 0, & \text{eğer } x = -\pi, x = 0, x = \pi \\ 1, & \text{eğer } x \in (0, \pi) \end{cases} \quad (8)$$



Şekil 0.18: (8) denklemi ile verilen Fourier serisinin $N = 2$ ve $N = 4$ için kısmi toplamı ve noktasal limiti.

Fourier serisi sürekli fonksiyonlardan oluştugundan, seri süreksiz bir fonksiyona düzgün yakınsayamaz. Yani yukarıdaki yakınsama düzgün olamaz.

Örnek 111. Yukardaki seri açılımında $x = \pi/2$ koyarsak

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

yani

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

açılımını elde ederiz.

Örnek 112. $f(x) = |x|$ fonksiyonun Fourier serisini ve serinin noktasal limitini belirleyiniz. Bu yakınsama düzgün müdür?

Çözüm. Bu fonksiyon çifttir ve bu yüzden $b_n = 0$ olur. $n \geq 1$ ise

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$u = x$, $dv = \cos nx$ yazılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$a_n = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1), \quad n \geq 1$$

Yani

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{-4}{(2n-1)^2 \pi}, \quad n \geq 1$$

ve ayrıca

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi$$

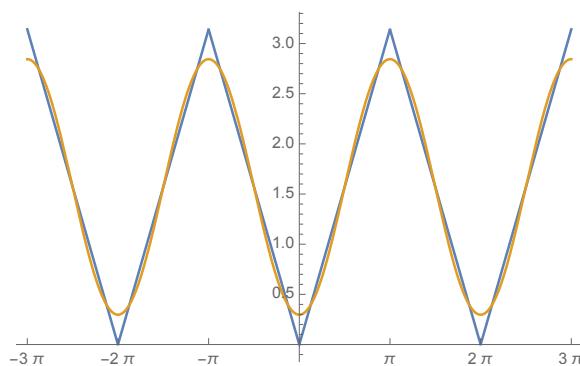
olur. $f(x) = |x|$ için $[-\pi, \pi]$ üzerinde $f_{per} = f$ olduğunu görüp Dirichlet Teoremini kullanırsak

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (9)$$

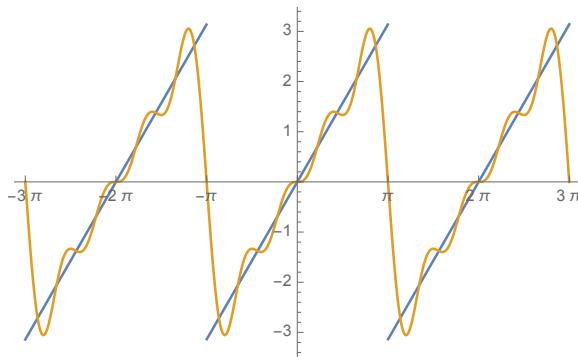
olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(2n-1)^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

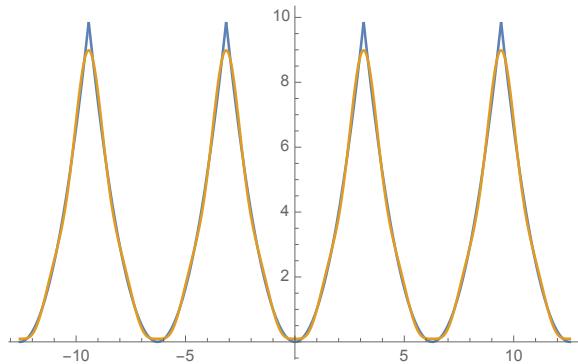
son seri $p = 2$ serisi olduğundan yakınsaktır. Weirstrass-M testi Fourier serisinin $[-\pi, \pi]$ üzerinde düzgün olarak $|x|$ fonksiyonuna yakınsadığını söyler.



Şekil 0.19: (9) denklemi ile verilen Fourier serisinin $N = 2$ kısmı toplamı (yani $\pi/4 - 4 \cos x/\pi$) ve noktasal limiti $|x|$. Kestirimin $N = 2$ için bile ne kadar iyi olduğunu dikkat edin.



Şekil 0.20: $f(x) = x$ fonksiyonun Fourier serisinin $N = 4$ kısmi toplamı ve noktasal limiti.



Şekil 0.21: $f(x) = x^2$ fonksiyonun Fourier serisinin $N = 4$ kısmi toplamı ve noktasal limiti.

Tablo 0.1: Aşağıda verilen Fourier serilerini hesaplayın.

Fonksiyon	Seri	$[-\pi, \pi]$ arasında yakınsadığı fonksiyon
$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - (-1)^n \sin(nx)$	$f_{\text{per}}(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \\ \pi/2, & x = \pm\pi \end{cases}$
$f(x) = x^2$	$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nx)$	$f_{\text{per}}(x) = x^2, x \leq \pi$
$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$	$f_{\text{per}}(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} \pi, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \frac{\sin(nx)}{n}$	$f_{\text{per}}(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$
$f(x) = \sin x $	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$	$f_{\text{per}}(x) = \sin x , -\pi \leq x \leq \pi$
$f(x) = x$	$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$	$f_{\text{per}}(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$
$f(x) = (\pi - x)(\pi + x)$	$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}$	$f_{\text{per}}(x) = (\pi - x)(\pi + x), x \leq \pi$
$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x < 0 \\ x - \pi, & x \geq 0 \end{cases}$	$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$	$f_{\text{per}}(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - \pi, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

Zorunlu Olmayan Bölüm: Fourier Serilerinin Noktasal Yakınsaklı ile ilgili Teoremin İspatı

İspat (Teorem 23.). Öncelikle sonlu nokta dışında f ve f_{per} fonksiyonları eşit olduğundan, Fourier katsayılarının ve dolayısıyla Fourier serilerinin aynı olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsaklı yerine f_{per} fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsaklılığını ispatlamak aynı şevidir. Özel olarak f fonksiyonunun 2π periyodik bir fonksiyon olduğunu kabul edebiliriz.

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlarını göstersin.

Lemma 2 sayesinde her $x \in \mathbb{R}$ için

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt,$$

ve

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

olduğunu göstereceğiz. Daha sonra *Lemma 3* sayesinde, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt = \frac{f(x+)}{2} + \frac{f(x-)}{2}$$

olduğunu bulup ispatı bitireceğiz.

Lemma 2. $f \in PC[-\pi, \pi]$ ve 2π periyodik bir fonksiyon, a_k ve b_k Fourier katsayıları olsun.

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt$$

olmak üzere

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt \quad (10)$$

Her $N \in \mathbb{N}$,

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z} \quad (11)$$

İspat. Öncelikle $f \in PC[-\pi, \pi]$ olduğunudan f fonksiyonunun Fourier katsayılarının tanımlı olduğunu dikkat edelim.

i) Her $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos kt dt$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x) \cos ks ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \cos ks ds \end{aligned}$$

En son eşitlikte T -periyodik bir fonksiyonun integralinin, varsa, her T uzunluğundaki aralık üzerinde aynı olduğu bilgisini kullandık, bkz. [Lemma 4](#).

ii) Yine [Lemma 4](#) kullanılarak olduğunu gösterebiliriz.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) dt$$

iii) İlk iki önerme kullanılarak (10) bağıntısı çıkar.

iv) (11) bağıntısını göstermek için

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=1}^N \cos kt = \sum_{k=1}^N [\sin(k+1/2)t - \sin(k-1/2)t] = \sin((N+1/2)t) - \sin(t/2)$$

olduğuna dikkat etmek yeterlidir.

Lemma 3. $f, f' \in PC[-\pi, \pi]$ ve f , 2π periyodik bir fonksiyon olsun. D_N , (11) de olduğu gibi tanımlansın. O halde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t) dt = \frac{f(x+)}{2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t) dt = \frac{f(x-)}{2}$$

olur.

İspat. Öncelikle

$$\int_0^\pi D_N(t) dt = \int_0^\pi (1/2 + \sum_{k=1}^N \cos kt) dt = \frac{\pi}{2}$$

ve

$$\int_{-\pi}^0 D_N(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu kolaylıkla görülebilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t) dt - \frac{f(x+)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_N(t) dt - \frac{f(x+)}{\pi} \int_0^\pi D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(f(x+t) - f(x+))}{t} t D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(f(x+t) - f(x+))}{t} t \frac{\sin(N+1/2)t}{2 \sin t/2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin(N+1/2)t dt \\ g(t) &= \frac{(f(x+t) - f(x+))}{t} \frac{t}{2 \sin t/2} \end{aligned}$$

Eğer $g \in PC[0, \pi]$ ise Riemann-Lebesgue Lemmasının sonucu olan [Lemma 8](#) kullanılarak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin(Nt + t/2) dt = 0$$

sonucu buluruz.

g fonksiyonunun $PC[0, \pi]$ olduğunu görelim. $t \in (0, \pi]$ aralığında g fonksiyonunu parçalı sürekli fonksiyonların toplamı, çarpımı ve bileşkesinden oluşanundan parçalı sürekli olur. g fonksiyonunun $[0, \pi]$ üzerinde parçalı sürekli olduğunu göstermek için geriye $t = 0$ noktasında g fonksiyonunun sağdan limitinin var olduğunu kontrol etmek kalıyor.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(f(x+t) - f(x+))}{t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t/2}{\sin t/2} = D_+ f(x)$$

Yukarıda $f' \in PC[-\pi, \pi]$ olduğu için $f'(x+)$ değerini vardır. [Lemma 5](#) yukarıdaki limitin de var olması gerektiğini söyler.

Lemma 4. f fonksiyonu T -periyodik olsun, yani tanım kümesindeki her $x \in$ için $f(x+T) = f(x)$ şartını sağlaması. O halde her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

olur.

İspat.

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

Son integralde $u = x - T$ dönüşümü yapıp f fonksiyonunun T -periyodik olduğunu kullanırsak

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u+T) du = \int_0^a f(u) du = - \int_a^0 f(x) dx$$

olduğundan istenilen sonucu buluruz. buluruz.

T -Periyodik fonksiyonların toplamları ve çarpımlarının da T -periyodik olduğuna dikkat edelim.

Lemma 5. $f(x_0+)$ ve $f(x_0-)$ limitleri var olsun.

$$D_+ f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h} \quad D_- f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0-)}{h}$$

limitleri de varsa bu limitlere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **sağdan ve soldan türevi** denir.

Eğer $f'(x_0+)$ varsa yani f' fonksiyonu x_0 noktasında sağdan sürekli ise $D_+ f(x_0)$ de vardır ve

$$D_+ f(x_0) = f'(x_0+)$$

olur. Benzer şekilde $f'(x_0-)$ varsa $D_- f(x_0) = f'(x_0-)$ olur.

İspat. Yeterince küçük bir $\delta > 0$ için $g(x) = f(x)$, $x \in (x_0, x_0 + \delta]$ ve $g(x_0) = f(x_0+)$ olsun. $[x_0, x_0 + \delta]$ aralığında g fonksiyonu sürekli ve $(x_0, x_0 + \delta)$ aralığında türetilebilir olduğundan, ortalama değer teoremi uyarınca her $h \in (0, \delta)$ için öyle bir $c_x \in (x_0, x)$ vardır ki

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(c_x)$$

veya

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h} = f'(c_x)$$

olur. İki tarafın da $\lim_{x \rightarrow x_0+}$ limitini alırsak sağ taraf tanım gereği $f'(x_0+)$ değerine eşit olduğundan sol tarafın limiti de aynı değere eşit olur. Ama sol tarafın limiti aynı zamanda $D_+ f(x_0)$ olduğundan ispat biter.

Örnek 113.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ x + 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu için $D_- f(1) = 2$ ve $D_+ f(1) = 1$ olduğunu gösterin.

Örnek 114. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ fonksiyonu için $D_+ f(0)$ değerinin tanımsız olduğunu gösterin.

Uyarı 11. Eğer f bir x noktasında türetilebilir ise $D_+ f(x) = D_- f(x) = f'(x)$ olduğuna dikkat edin. $D_+ f(x)$ veya $D_f(x)$ yoksa veya varsa ama eşit değilse $f'(x)$ yoktur. $D_+ f(x)$ veya $D_- f(x)$ varsa ve eşitse bile $f'(x)$ tanımsız olabilir.

Örnek 115.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ise $Df_+(0) = Df_-(0) = 0$ olur. Ama f , 0 noktasında sürekli olmadığından 0 noktasında türetilmez.

Lemma 6 (Bessel Eşitsizliği). $f \in PC[-\pi, \pi]$ olsun. f fonksiyonunun Fourier katsayıları olan a_n ve b_n sayıları için

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

İspat.

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

olsun. Öncelikle

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) f(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)^2 dx$$

olduğunu gösterin (ilk ve son integralin ortadaki değere eşit olduğunu gösterin). $(f - S_N)^2 \in PC[-\pi, \pi]$ olduğundan $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrali vardır. Yukarıdaki hesaplardan dolayı

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)^2 - 2S_N(x)f(x) + S_N(x)^2) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)^2 dx \end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

bulunur. Önerme iki tarafın $N \rightarrow \infty$ limitini alarak bulunur.

Lemma 7 (Riemann Lebesgue Lemması). $f \in PC[-\pi, \pi]$ olsun. f fonksiyonunun Fourier katsayıları olan a_n ve b_n sayıları için

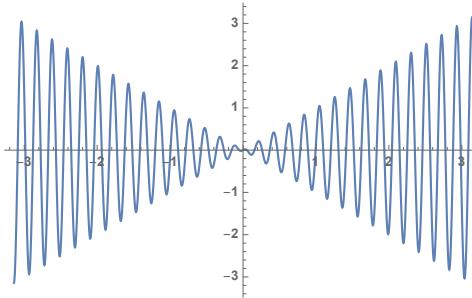
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

olur.

İspat. Bessel eşitsizliğinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ serisi yakınsaktır. Karşılaştırma kriterinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisi yakınsak olur. Buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$ olmalıdır. Limitin tanımından $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olduğu gösterilebilir. Benzer bir şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ olduğu görülür.



Şekil 0.22: $x \cos(30x)$ fonksiyonun grafiği.

Örnek 116. Bessel eşitsizliğine göre hem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hem de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ serileri yakınsaktır. Bu yüzden örneğin $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, bir $f \in PC[-\pi, \pi]$ fonksiyonun Fourier katsayıları olamaz.

Biraz ilerde Riemann-Lebesgue lemmasının aşağıdaki versiyonu lazım olacak.

Lemma 8. $g \in PC[0, \pi]$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx + x/2) dx = 0$$

İspat.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin(x/2), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $f \in PC[-\pi, \pi]$ olduğundan Riemann Lebesgue Lemma gereği

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(x/2) \cos(nx) dx$$

olur. Benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(x) \cos(x/2) \sin(nx) dx = 0$$

olur.

$$g(x) \sin(nx + x/2) = g(x) \sin(x/2) \cos(nx) + g(x) \cos(x/2) \sin(nx)$$

eşitliğinin her iki tarafının sıfırdan pi'ye integralini alıp yukarıdaki sonuçları kullanırsak ispat biter.

Lemma 9.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında düzgün yakınsak ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olur.

Ispat. Teoremin ispatında aşağıdaki bilgiden yararlanılır.

Lemma 10. Bir A kümesi üzerinde $f_n \xrightarrow{d} f$ ve g sınırlı ise $gf_n \xrightarrow{d} gf$ olur. Benzer bir şekilde bir A kümesi üzerinde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $f(x)$ 'e düzgün yakınsarsa ve g sınırlı ise $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x) = g(x)f(x)$ yakınsaması düzgün olur.

Düzgün yakınsaklık altında seri işareti ile integral işaretinin yer değiştirebildiğini ve [Lemma 1](#)'deki sonuçları kullanacağız.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0\pi$$

Öte yandan her $m \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki lemma sebebiyle

$$\cos mx f(x) = \cos mx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx$$

yakınsaması düzgün olduğundan, integral alıp

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx$$

buluruz. Birinci ve sonuncu integralin her zaman sıfır olduğunu ikinci integralin ise sadece $m = n$ olduğunda sıfırdan farklı olduğunu kullanırsak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx f(x)dx = a_m\pi$$

sonucunu buluruz. Benzer bir şekilde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx f(x)dx = b_m\pi$$

bulunur.

Alıştırmalar

Mustafa Balci, Analiz 2, kitabından alıştırmalar:

1. Konu 1.4: 1-6.
2. 1. Bölüm Sonu Soruları: 8-12.
3. Konu 2.1: 1-20.
4. Konu 2.2: 1-8.
5. 2. Bölüm Sonu Soruları: 1-6.
6. 3.1: 1-9.

12 ve 13. Haftalar. Has Olmayan İntegraller

1. Tip Has Olmayan İntegral

Tanım 10. $a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$$

olarak tanımlarız. Eğer bu limit varsa $\int_a^\infty f(x)dx$ integraline yakınsak, yoksa iraksak deriz.

Benzer şekilde $a \in \mathbb{R}$ ve $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x)dx$$

olarak tanımlarız.

İlk tanımda f fonksiyonu, $[a, R]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olduğundan $\int_a^R f(x)dx$ integrali tanımlıdır.

Uyarı 12. $a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Herhangi bir $b > a$ için $\int_b^\infty f(x)dx$ ve $\int_a^\infty f(x)dx$ integrallerinin ya her ikisi de yakınsak ya da her ikisi birden iraksak olur. Zira

$$\int_a^R f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^R f(x)dx$$

olduğundan ve $\int_a^b f(x)dx$ integrali sürekli bir fonksiyonun kapalı bir aralık üzerindeki integrali olduğu için tanımlı olduğundan, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$ ve $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_b^R f(x)dx$ limitlerinin ya her ikisi de vardır ya da her ikisi de yoktur.

Örnek 117. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln 2$ olduğunu gösterin.

Çözüm. $u = e^x + 1$ dönüşümü yapıp, basit kesir yöntemi kullanırsak

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{du}{u(u-1)} = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) dx = \ln|e^x| - \ln|e^x + 1| + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) + C$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) \right|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^R}{e^R + 1}\right) - \ln 1/2 \\ &= \ln\left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^R}{e^R + 1}\right) + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

buluruz.

Örnek 118. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösterin.

Çözüm. $u = e^x$ dönüşümü uygulayarak,

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan e^x + C$$

ve

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \arctan e^R - \arctan e^0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Örnek 119. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$ integralinin iraksak olduğunu gösterin.

Çözüm. Payda çarpanlarına ayrılmadığından basit kesir yöntemini uygulayamayız.

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{x}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \int \frac{u - 1/2}{u^2 + 3/4} du$$

Son integrali ikiye ayırsak

$$\int \frac{u}{u^2 + 3/4} du = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 3/4) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + 3/4} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \arctan t + C = \frac{-1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1/2) + C$$

olur.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(x^2 + x + 1) - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}(x + 1/2)$$

Birinci limit sonsuz, ikincisi ise sonlu olduğundan integral sonsuza iraksar.

Birazdan bu integralin iraksak olduğunu göstermenin çok daha kolay bir yolunu göreceğiz.

Örnek 120. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx$ ve $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ integrallerinin sonsuza iraksadığını gösterin. $\int_0^\infty \cos dx$ integralinin iraksak olduğunu gösterin.

Çözüm. Birinci integral için $u = x^2 + 1$ dönüşümü yapılır. İkinci integral için $x = \tan \theta$ dönüşümü uygularsak

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C = \ln|\sqrt{x^2 + 1} + x| + C$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln|\sqrt{R^2 + 1} + R| - \ln 2 = \infty$$

Örnek 121. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$ olduğunu gösterin.

Çözüm.

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \right) dx = A \ln|x+1| + B \ln|x+2| - \frac{C}{x+2} + \text{sabit}$$

ve $A = 1, B = C = -1$ bulunur.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\ln(R+1) - \ln(R+2) + \frac{1}{R+2} \right) - \left(\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} \right) = \ln \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R+1}{R+2} \right) + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Örnek 122. $\int_0^\infty e^{\alpha x} dx = \begin{cases} \text{yakınsak}, & \alpha < 0 \\ \text{iraksak}, & \alpha \geq 0 \end{cases}$ olduğunu gösterin.

Çözüm. $\alpha \neq 0$ ise $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{\alpha R}$ olduğunuandan

$$\int_0^\infty e^{\alpha x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha R} - 1}{\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ \frac{-1}{\alpha}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

olur. $\alpha = 0$ ise sonuç rahatlıkla görülür.

Örnek 123. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p > 1 \\ \text{iraksak}, & p \leq 1 \end{cases}$ olduğunu gösterin.

Çözüm. $p \neq 1$ ise

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} \infty, & -p+1 > 0 \\ \frac{-1}{-p+1}, & -p+1 < 0 \end{cases}$$

olur.

Tanım 11. $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer hem $\int_0^\infty f(x)dx$ hem de $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ integralleri yakınsak ise, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ integrali de yakınsaktır ve

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Aksi takdirde $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ iraksaktır.

Uyarı 13. $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ ve $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$ değerleri aynı olmayabilir. Örneğin $\int_{-\infty}^\infty xdx$ integrali iraksaktır çünkü, $\int_0^\infty xdx = \infty$ integrali iraksar. Öte yandan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0$$

olur.

2. Tip Has Olmayan İntegral

Tanım 12. $a, b \in \mathbb{R}$ için $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ olsun.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

olarak tanımlarız. Eğer bu limit varsa $\int_a^b f(x) dx$ integraline yakınsak, yoksa iraksak deriz.

Benzer şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ olsun.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Uyarı 14. Eğer $f : (a, b]$ aralığında sürekli ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ limiti varsa, f , $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olur ve $\int_a^b f(x) dx$ integrali sıradan bir Riemann integrali olur (has olmayan bir Riemann integrali değildir) ve tanımlıdır. Örneğin $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ integrali sıradan bir Riemann integralidir ve tanımlıdır.

Örnek 124. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p < 1 \\ \text{iraksak}, & p \geq 1 \end{cases}$

olduğunu gösterin. Bu davranışın $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ davranışıyla $p \neq 1$ iken zit olduğuna dikkat edin.

Az

önceki örneği genelleştirebiliriz.

Örnek 125. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p < 1 \\ \text{iraksak}, & p \geq 1 \end{cases}$ ve $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \text{yakınsak}, & p < 1 \\ \text{iraksak}, & p \geq 1 \end{cases}$.

Teorem 25 (Kıyaslama Kriteri). $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, ve her $x \in [a, \infty)$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. O halde $\int_a^\infty g(x) dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x) dx$ yakınsak, $\int_a^\infty f(x) dx$ iraksak ise $\int_a^\infty g(x) dx$ iraksak olur.

İspat. $\int_a^\infty g(x) dx$ yakınsak olsun. Her $R \geq a$ için

$$F(R) := \int_a^R f(x) dx \leq \int_a^R g(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$$

olduğundan $F(R)$ üstten sınırlı ve R 'ye göre monoton artan bir fonksiyondur ve dolayısıyla $\lim_{R \rightarrow \infty} F(R)$ vardır. Yani $\int_a^\infty f(x) dx$ yakınsar. Diğer önerme de benzer şekilde çıkar.

Teorem 26 (Limit Kiyaslama Kriteri). $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, ve her $x \in [a, \infty)$ için $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ olsun.

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

olsun.

- $0 < L < \infty$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ ve $\int_a^\infty g(x)dx$ integrallerinin ya her ikisi de yakınsak ya her ikisi de iraksaktır.
- $L = 0$ ise $\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de yakınsaktır.
- $L = \infty$ ise $\int_a^\infty g(x)dx$ iraksak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ de iraksaktır.

İspat. $0 < L < \infty$ ve $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsak olsun. Limit tanımından her $L > \epsilon > 0$ için öyle bir $M > a$ vardır ki,

$$0 < L - \epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \epsilon, \quad \forall x \geq M$$

olur. Yani

$$0 < (L - \epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (L + \epsilon)g(x), \quad \forall x \geq M$$

olur. Karşılaştırma kriterine göre $(L - \epsilon) \int_M^\infty g(x)dx$ integrali ve dolayısıyla $\int_M^\infty g(x)dx$ integrali ve [Uyarı 12](#) dolayısıyla da $\int_a^\infty g(x)dx$ integrali yakınsak olur.

Uyarı 15. Kiyaslama ve limit kiyaslama kriterleri $\int_{-\infty}^a$ tipindeki 1. tip has olmayan integraller ve 2. tip has olmayan integraller içinde geçerlidir.

Tanım 13. $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $\int_a^\infty |f(x)|$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ integraline **mutlak yakınsak** denir. Eğer $\int_a^\infty |f(x)|$ integrali yakınsaksa ama mutlak yakınsak değilse **koşullu yakınsak** olur. Bu tanımları diğer tipteki has olmayan integrallere de genelleştirebiliriz.

Teorem 27. $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $\int_a^\infty f(x)dx$ mutlak yakınsak ise yakınsaktır

İspat. $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$ ve $2 \int_a^\infty |f(x)| dx$ yakınsak olduğundan kiyaslama kriteri nedeniyle $\int_a^\infty (f(x) + |f(x)|) dx$ integrali de yakınsak olur.

$$\int_a^R f(x)dx = \int_a^R (f(x) + |f(x)|)dx - \int_a^R |f(x)|dx$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R (f(x) + |f(x)|)dx$ ve $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R |f(x)|dx$ limitleri var olduğundan $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$ limiti de vardır. Yani $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

Örnek 126. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ integralinin yakınsak olduğunu görelim.

Çözüm. İntegralin mutlak yakınsak olduğunu görmek yeterlidir.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

Son integral yakınsak olduğundan sonuç çıkar.

Yukarıdaki teoremin tersinin doğru olmadığını görelim.

Örnek 127. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integrali koşullu yakınsaktır.

Çözüm. Kismi integrasyon kullanarak

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx$$

olur. $R \rightarrow \infty$ limiti alarak

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$$

bulunur. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğu ve dolayısıyla yakınsak olduğu karşılaşturma testi sayesinde görülür. Yani $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integrali de yakınsaktır.

Şimdi mutlak yakınsak olmadığını görelim.

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi}$$

İki tarafın da $n \rightarrow \infty$ limitini alırsak sağ tarafda toplamı sonsuz olan harmonik seriyi elde ederiz. Karşılaştırma testi sonucu verir.

Teorem 28 (Seriler için integral testi). Bir $N \in \mathbb{N}$ için $f : [N, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu sürekli ve azalan olsun. Bu durumda, $\int_N^\infty f(x) dx$ ve $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ aynı karakterlidir.

Ispat. Genellikten kaybetmeksızın $N = 1$ alalım. Riemann toplamını kullanarak,

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

olduğuna dikkat edip $n \rightarrow \infty$ limitini alırsak

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

buluruz. Karşılaştırma teoreminden sonuç çıkar.

Örnek 128. $\sum_{n=3}^\infty \frac{\ln n}{n}$ serisinin iraksadığını gösterin.

Ispat. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ olsun. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ olduğundan, fonksiyon $[e, \infty)$ aralığında azalan olur. Fonksiyon $[e, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli olduğundan yukarıdaki teoremin şartları $[3, \infty)$ aralığında sağlanır. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$ olduğundan

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(\ln R)^2 - (\ln 3)^2}{2} = \infty$$

olur. Yani hem integral hem de verilen seri iraksar.

Örnekler

Örnek 129. $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5} dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Yakınsaklığını bildiğimiz $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ integraliyle kıyaslamak için integrali iki parçaya ayralım.

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 5} dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5} dx$$

$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 5} dx$ integrali sürekli bir fonksiyonun kapalı bir aralık üzerindeki integrali olduğu için tanımlı yani yakınsaktır. $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5} dx$ integralinin de yakınsak olduğunu görelim.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2/(x^4 + 5)}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4/(x^4 + 5) = 1$$

buluruz. $\int_1^\infty 1/x^2 dx$ yakınsak olduğundan limit kıyaslama kriteri $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5} dx$ integralinin de yakınsak olduğunu söyleyelim.

Örnek 130. $\int_1^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. $x \geq 1$ için $0 \leq \left| \frac{1 - \cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1+1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$ olur. $\int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx$ integrali yakınsadığından kıyaslama kriteri nedeniyle $\int_1^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ integrali mutlak yakınsak yani yakınsaktır.

Örnek 131. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}$ fonksiyonun $[1, \infty)$ üzerinde integrallenebildiğini gösterin.

Çözüm. f , $(0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğundan, her $R > 1$ için $[1, R]$ üzerinde integre edilebilir. Her $x > 0$ ve $\alpha > 0$ için $\ln x \leq \frac{1}{\alpha} x^\alpha$ olduğundan, $\alpha = \frac{1}{2}$ seçenek

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^{5/2}} \leq \frac{2x^{1/2}}{x^{5/2}} = \frac{2}{x^2}, \quad \forall x > 1$$

olur. Son fonksiyon $[1, \infty)$ üzerinde integrallenebildiğiinden sonuç karşılaştırma testi sayesinde çıkar.

Örnek 132. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ fonksiyonun $(0, 1]$ üzerinde integrallenebildiğini gösterin.

Çözüm. Her $x \in (0, 1]$ için

$$0 \leq f(x) \leq \frac{|x|}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

olduğuna dikkat edelim. Son integral $(0, 1]$ üzerinde integrallenebildiğinden, karşılaştırma testi sonucu çıkar.

Örnek 133. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+1} dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. Bu integralin iraksak olduğunu görelim. $x \geq e$ için $\frac{\ln x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$ olduğundan

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x+1} dx \geq \int_e^\infty \frac{1}{x+1} dx$$

Sağdaki integralin iraksadığını görmek için $1/x$ ile limit kıyaslama testi yapabilir veya integre ederek direk olarak bu integralin sonsuza iraksadığını görebilirsiniz. Sağdaki integral iraksadığı için kıyaslama kriteri nedeniyle soldaki integral ve [Uyarı 12](#) nedeniyle de $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+1} dx$ integrali iraksar.

Örnek 134. $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x+e^{-2x}} dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm. $x \geq a$ için eğer a yeterince büyükse integrand $1/x$ gibi davranışacak ve $\int_a^\infty 1/x dx$ iraksak olduğundan orjinal integral de iraksayacak. Bunu gösterelim. $x \geq 1$ ise $2x \geq 1$ ve $e^{2x} \geq e^1 \geq 1$ ve $\frac{1}{e^{2x}} \leq 1 \leq x$ olur. Yani $e^{-2x} \leq x$ olur. Ayrıca $e^{-x} \geq 0$ olduğundan

$$\frac{1+e^{-x}}{x+e^{-2x}} \geq \frac{1+0}{x+e^{-2x}} \geq \frac{1}{x+x}$$

olur. $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ iraksak olduğundan kıyaslama kriteri sebebiyle $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x+e^{-2x}} dx$ integrali de iraksar.

3. Tip Has Olmayan İntegral

Örnek 135. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin. Bu örnekte verilen integral, sonsuz bir aralık üzerinde olduğundan 1. tip, fonksiyon aralığın sol uç noktasında sonsuza gittiği için ise 2. tip bir integral olarak düşünülebilir. Böyle integrallere **3. tip has olmayan integral** denir.

Çözüm. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ integralinin yakınsaması $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ integralinin yakınsamasını gerektirmez. Bu durum [Uyarı 12](#) ile bir çelişki içermez. Zira bu örnekte verilen integrand fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olmadığından ($x = 0$ noktasına yaklaşıırken fonksiyon sonsuza gidiyor) [Uyarı 12](#) geçerli değildir.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx := I_1 + I_2$$

yazıp sağdaki her iki integralin de yakınsadığını gösterirsek soldaki integral de yakınsar.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/(x^2 + x^{1/2})}{1/x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{3/2} + 1} = 1$$

ve $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ yakınsak olduğundan (bkz [Örnek 124](#)) limit kıyaslama kriterine göre I_1 integrali yakınsar.

I_2 integralinin yakınsak olduğunu göstermek için yakınsak olduğunu bildiğimiz $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ integrali ile (bkz [Örnek 123](#)) limit kıyaslama kriteri uygularız.

Örnek 136. $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ integrali hiçbir $p \in \mathbb{R}$ için yakınsamaz. Zira

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

yazarsak 1. integral sadece $p < 1$ için yakınsarken, 2. integral sadece $p > 1$ için yakınsar.

Örnek 137.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

integralinin $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsak, aksi takdirde iraksak olduğunu görelim.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}} \frac{1}{(1-x)^{1-n}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^{1-m}} \frac{1}{(1-x)^{1-n}} dx$$

olarak yazalım. Soldaki integralin yakınsak olması için sağdaki iki integralin de yakınsak olması gereklidir. Sağdaki birinci integral,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x^{1-m}} \frac{1}{(1-x)^{1-n}}}{\frac{1}{x^{1-m}}} = 1$$

olduğundan $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}} dx$ integrali ile aynı karakterlidir. Yani $1 - m < 1$ (veya $m > 0$ ise) ise yakınsak, değilse iraksaktır. Benzer şekilde sağdaki ikinci integral $n > 0$ ise yakınsak, aksi takdirde iraksaktır.

Örnek 138. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklıklarını inceleyin. (Cevaplar için bkz N.E. ders notları syf 153-155)

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 6}} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

$(\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ integralinde kısmi integrasyon uygulayın)

Bazı Notlar

1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve pozitif olsun ve $\int_0^\infty f(x) dx$ yakınsak olsun. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ve $0 \leq L \leq \infty$ ise $L = 0$ olmalıdır.

Cevap. Fonksiyon pozitif olduğundan $L \geq 0$ olmalıdır. Varsayılmı $0 < L < \infty$ olsun. Bu durumda öyle bir $b > a$ vardır ki her $x \in [b, \infty)$ için $f(x) \geq L/2$ olur. O halde

$$\int_b^\infty f(x) dx \geq L/2 \int_b^\infty dx = \infty$$

olur. Yani $\int_b^\infty f(x) dx$ ve bu yüzden $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali iraksar.

2. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve pozitif olsun ve $\int_0^\infty f(x) dx$ yakınsak olsun. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ olmalı mıdır? (Yani serilerdeki n. terim testi has olmayan integraller için de geçerli midir?)

Cevap. Hayır. $g(x)$ fonksiyonunu öyle bir şekilde tanımlayalım ki grafiği, her $x = n$ pozitif tam sayısını içeren $1/(n2^n)$ genişliğinde bir açık aralıkta yüksekliği n olan bir üçgen olsun, geri kalan x değerleri için ise sıfır olsun. Bu durumda $\int_0^\infty g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{1}{2} = 2$ olur. $f(x) = g(x) + e^{-x}$ olsun. $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty (g(x) + e^{-x}) dx = 2 + 1 = 3$ olur. Ama $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tanımsız olur. Zira $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ve $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ olur. Ayrıca f fonksiyonunun sınırsız olduğuna da dikkat edin.

Alıştırmalar

Mustafa Balcı, Analiz 2, kitabından alıştırmalar:

1. 4.1: 1-2.
2. 4.2: 1-2.
3. 4.3: 1-3.
4. 4. Bölüm Sonu Soruları: 1, 2, 4, 5, 7, 14
5. Aşağıdaki integrallerin yakınsadığı değeri belirleyin.
 - a) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ (cevap: 6)
6. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklığını inceleyin.
 - a) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ (yakınsak. sol uç noktada $1/(x-1)^{1/2}$ ile sağ uç noktada $1/(5-x)^{1/2}$ ile kıyaslayın.)

- b) $\int_{-1}^1 \frac{2^{\sin^{-1} x}}{1-x} dx$ (ıraksak. $1/(1-x)$ ile limit kıyaslama testi uygulayın.)
- c) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} dx$ (ıraksak. sol uçta $1/x^2$ ile kıyaslayın.)
- d) $\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$ (ıraksak.)
- e) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (yakınsak. $1/x^2$ ile limit karşılaştırma uygulayın.)

14. Hafta. Final Öncesi Genel Tekrar

Kaynakça

[Erg15] Nurettin Ergun, Analiz 3 notları, 2015.