

# Erklärung zum modified Yao-Step angewandt auf den Delaunay Graphen

Tim Budweg

**Zusammenfassung**— Diese Arbeit erläutert die Spannerbildung mithilfe der Delaunay-Triangulation und dem modified Yao-Step aus [1]. Der *stretch-factor* liegt bei 3.54 in Bezug zum Euklidischen Graphen und beschränkt den Ausgangsgrad der Knoten auf 14.

**Index Terms**— Spanner, ad-hoc Netze, Delaunay Graph, Modified Yao-Step

## I. EINLEITUNG

Es gibt viele Anwendungsbereiche für drahtlose Sensornetze. Zum Beispiel können Waldbrände oder Tsunamis durch ein Sensornetz-Frühwarnsystem schneller erkannt werden. Sowohl in diesem Beispiel als auch in anderen Anwendungsgebieten ist es gewünscht, dass alle gesendeten Nachrichten ankommen. Garantierte Nachrichtenauslieferung wird von mehreren Algorithmen bereits erreicht (z.B.: Face-Routing: siehe [2]). Jedoch müssen dafür bestimmte Voraussetzungen an das Sensornetz erfüllt sein. Die wichtigste Voraussetzung ist die Planarität des Netzes, das heißt, dass keine *Kantenschnitte* (siehe II-B) existieren dürfen. Diese Planarität zu erreichen ist ein wichtiges Ziel von *Topologiekontrollen*.

Ein weiterer Punkt ist, dass diese Netze willkürlich groß werden können. Deshalb führt ein *zentralisierter* Algorithmus zu einer sehr langen Laufzeit mit hohem Energieverbrauch, weil die Menge der versendeten Nachrichten in Abhängigkeit zu der globalen Netzgröße steht.

Damit die Nachrichten nicht über beliebig lange Pfade geroutet werden müssen, wird eine Beschränkung der Pfadverlängerung gewünscht. Pfadverlängerungen entstehen, wenn (spezielle) kantenlöschende Algorithmen auf Graphen angewendet werden. Der hier behandelte Algorithmus ist streng lokal, was die Anzahl der gesendeten Nachrichten minimiert. Außerdem produziert dieser einen *t-Spanner* des euklidischen Graphen. Diese Thematik wird im Folgenden anhand des Artikels von [1] erläutert. Dort wurde ein streng lokaler Algorithmus aufbauend auf den *Delaunay Graphen* angewandt. Das Ergebnis ist ein Graph, welcher im Bezug zum euklidischen Graphen einen stretch-factor von  $t = 3.54$  und zusätzlich eine Beschränkung des Ausgangsgrad eines Knoten von  $k = 14$  hat.

## II. BEGRIFFE UND NOTATIONEN

Im Folgenden werden die zum Verständnis der Arbeit nötigen Grundbegriffe und abkürzende Notationen erklärt.

### A. Graphen

1) *Euklidischer Graph*: Ein euklidischer Graph ist ein spezieller Graph. Alle Knoten sind mit allen anderen Knoten

verbunden (Clique) und die Kantengewichte entsprechen der euklidischen Distanz beider Eckpunkte. Ein Beispiel finden Sie in Abbildung 1.

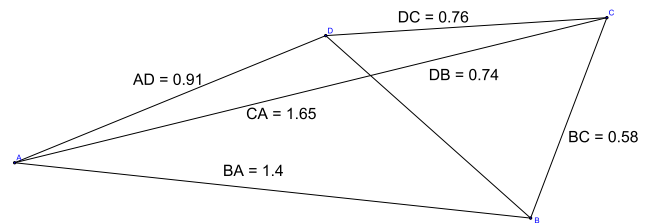


Abbildung 1. Ein euklidischer Graph

2) *Unit Disk Graph*: Der Unit Disk Graph ist ein euklidischer Graph ohne alle Kanten, die länger als ein konstantes  $c \in \mathbb{R}$  sind. In Abbildung 2 sehen Sie den euklidischen Graph aus Abbildung 1 als Unit Disk Graph mit  $c = 1$ .

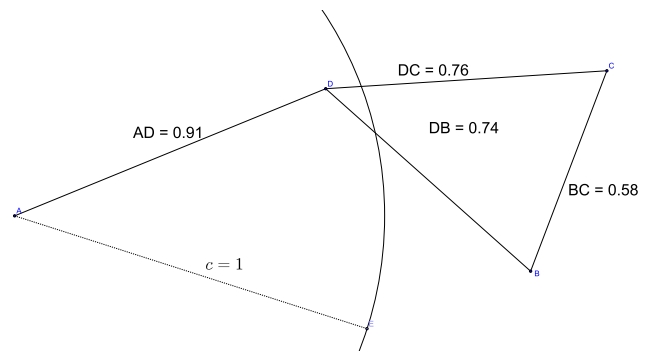


Abbildung 2. Der Unit-Disk-Graph zu Abbildung 1 mit  $c = 1$

### B. Kantenschnitte

Ein Kantenschnitt ist ein Punkt, in dem sich zwei oder mehr Kanten desselben Graphen schneiden.

### C. Spanner

Gegeben ist ein Graph  $G$ , welcher ein Subgraph vom euklidischen Graphen  $E$  ist.  $G$  enthält alle Knoten von  $E$ , aber nicht alle Kanten. Die Umwege, die durch das Löschen von Kanten entstehen, dürfen nur um einen konstanten Faktor ansteigen.

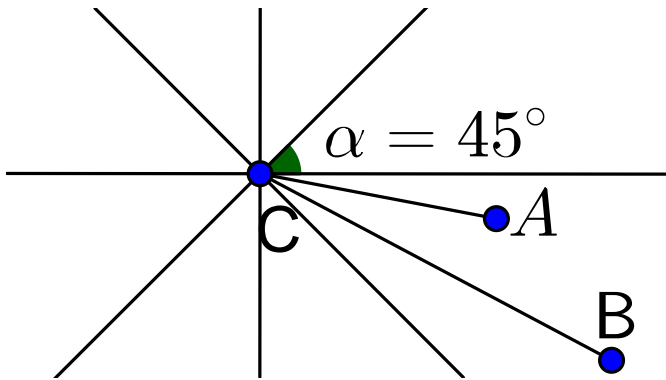


Abbildung 3. Punkt C mit acht  $45^\circ$  großen Kegeln. Kürzeste Kante  $AC$  wird ausgewählt

1) *Euklidischer Spanner*:  $H$  ist genau dann ein euklidischer Spanner von  $G$ , wenn die kürzesten Pfade zwischen allen Knoten maximal um einen konstanten Faktor  $t$  vergrößert werden. Die Notation  $c_G(A, B)$  bedeutet: der kürzeste Pfad zwischen  $A$  und  $B$  im Graphen  $G$ . Formal bedeutet das:

$$c_H(A, B) \leq t \cdot c_G(A, B) \quad (1)$$

(Formel entnommen aus [1] und angepasst)

#### D. Yao Step

Gegeben ist ein Graph  $G$ . Für alle Knoten  $A \in G$  wird folgender Algorithmus ausgeführt:

- Erzeuge  $k$  gleich große Kegel um  $A$ .  $k \in \mathbb{N} > 6$
- Bestimme die kürzeste Kante in jedem Kegel ausgehend von  $C$ .
- Lösche alle Kanten, die nicht von beiden Endpunkten ausgewählt wurden.

Ein Beispiel ist in Abbildung 3 gegeben.

#### E. Delaunay Triangulation

Die Delaunay Triangulation erzeugt aus einem beliebigen zusammenhängenden Graphen einen geometrischen (= euklidischen) Spanner mit dem Streckungsfaktor  $c_{del} \approx 2.42$  und einem beliebig hohen Ausgangsgrad eines Knotens. Dazu werden alle Dreiecke betrachtet. Wenn der Kreis durch alle Eckpunkte des Dreiecks keine weiteren Punkte des Graphen enthält, sind diese drei Kanten auch im Delaunay Graphen. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird angenommen, dass keine vier Punkte auf einem Kreis liegen.

#### F. Synchronizität

Bei einem synchronen Algorithmus ist die Arbeitsweise der Knoten in Runden und diese in Phasen eingeteilt. Eine Runde sieht beispielsweise wie folgt aus:

- Zuerst erhalten alle Knoten ihre Nachrichten, falls es welche gibt.
- Danach verarbeiten sie die Nachrichten und stellen ggf. weitere Berechnungen an.
- Am Ende der Runde werden Nachrichten an andere Knoten verschickt.

Hier ist zu beachten, dass alle gesendeten Nachrichten zu Beginn der Folgerunde bereits angekommen sind.

#### G. Lokale Algorithmen

Ein Algorithmus ist genau dann lokal, wenn jeder Knoten ausschließlich mit seiner  $k$ -Hop Nachbarschaft kommuniziert. ( $k \in \mathbb{N}$ ) Formal reicht dies aus, um einen Algorithmus lokal zu nennen. Das Problem, dass der Algorithmus eine lange Laufzeit hat (siehe Einleitung), ist dadurch jedoch nicht gelöst. Anhand des *Maximal Independent Set* (Fortan: *MIS*) Algorithmus lässt sich ein Beispiel konstruieren, welches dieses Problem veranschaulicht. Ein Independent Set, ist eine Menge  $K$  von Knoten über einem Graphen  $G$ , sodass keine zwei Knoten nebeneinander liegen, bzw. keine Kante zwei Knoten von  $K$  verbindet.  $K$  ist genau dann ein Maximal Independent Set, wenn kein Knoten zu  $K$  hinzugefügt werden kann ohne die Independent Set Eigenschaft zu verletzen. Dieser Vorgang wird jetzt exemplarisch erläutert. Betrachten Sie dazu Abbildung 4.

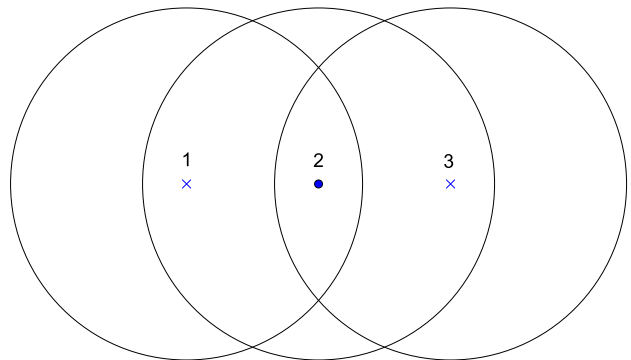


Abbildung 4.  $\times$  sind Knoten im Maximal Independent Set,  $\bullet$  sind keine Knoten des MIS, Die Kreise um die Knoten sind die jeweiligen Sendebereiche.

- **Runde 1:** Knoten 1 wird MIS-Knoten, da er von allen seinen Nachbarn, welche noch keine Rolle haben, derjenige mit der kleinsten ID ist. Knoten 2 und 3 warten, da es Knoten gibt, welche noch keine Rolle und eine kleinere ID haben.
- **Runde 2:** Knoten 2 entscheidet, dass er kein MIS-Knoten ist, da er in seiner Nachbarschaft Knoten 1 kennt, der schon MIS-Knoten ist. Knoten 3 wartet.
- **Runde 3:** Knoten 3 wird MIS-Knoten, da Knoten 2 kein MIS-Knoten ist und somit 3 die kleinste ID hat.

Diese Schritte lassen sich durch den gesamten Graphen sukzessiv durchführen. Der Algorithmus hat demnach eine Laufzeit in der Größenordnung von

$$\theta(\text{dia}(G))$$

wobei  $\text{dia}(G)$  für den Durchmesser (längster kürzester Pfad) des Graphen steht.

Die Definition des lokalen Algorithmus trifft hier zu, weil jeder Knoten nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn, der 1-Hop-Nachbarschaft, kommuniziert.

### H. Strenge Lokalität

Wie im Abschnitt II-G beschrieben, sind lokale Algorithmen noch nicht ausreichend, um den Nachrichtenaufwand zu verringern. Strenge Lokalität ist gegeben, wenn ein *synchroner* Algorithmus unabhängig von der Netzgröße in konstanter Zeit terminiert (siehe [3]).

### III. MODIFIED YAO STEP

Im Folgenden wird der Algorithmus anhand eines Beispiels verfolgt. Der Graph  $E$ , welchen wir für dieses Beispiel verwenden, ist in Abbildung 5 zu sehen.

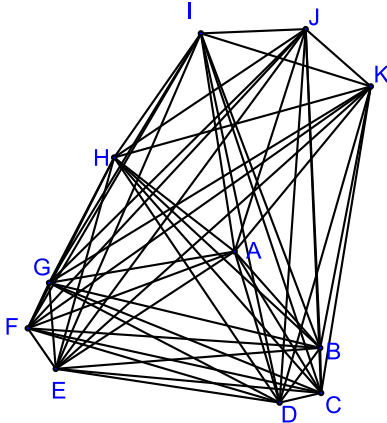


Abbildung 5. Ein euklidischer Graph, welchen wir als Beispiel nutzen.

Daraus wird zuerst der Delaunay Graph gebildet, indem durch die Eckpunkte aller Dreiecke ein Kreis gebildet wird. Genau dann, wenn in einem Umkreis  $\odot KLM$  kein Punkt des Graphen enthalten ist, sind die drei Kanten, welche  $KLM$  verbinden, im Delaunay Graphen vorhanden. Das Ergebnis ist in Abbildung 6 zu sehen.

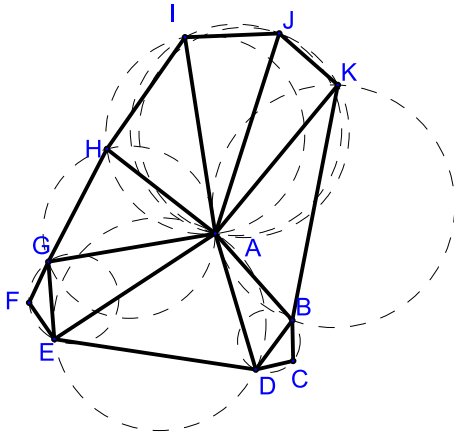


Abbildung 6. Ein Delaunaygraph mit den Umkreisen, welche keinen weiteren Punkt beinhalten.

Der Umkreis durch  $\triangle ABC$  beinhaltet beispielsweise den Punkt  $D$  und deshalb werden die drei Kanten  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  vorerst nicht in den Delaunay-Graphen übernommen. Für die Kanten  $AB$  und  $BC$  gibt es jedoch einen anderen Umkreis,

der keine weiteren Punkte enthält und deshalb sind diese Kanten im Delaunay-Graphen enthalten (Umkreis durch die drei Punkte  $BCD$  für die Kante  $BC$  und  $\odot ABD$  für die Kante  $AB$ .)

Des Weiteren legen wir einen Integer Parameter  $k = 8$  fest. Um die Spanneigenschaften zu gewährleisten, muss  $k \geq 14$  gelten, aber wir ignorieren diese Bedingung, da sie für das Verständnis des Algorithmus keine Rolle spielt. Der Vorteil, den wir durch diese Vereinfachung erhalten, ist, dass die Übersichtlichkeit der Abbildungen verbessert wird.

Wir betrachten Punkt  $A$ . Um diesen Punkt müssen  $k$  Strahlen gebildet werden, die von  $A$  ausgehen. Dabei spielt es keine Rolle, wie der erste Strahl angeordnet wird. (Im Beispiel verläuft er horizontal nach rechts.) Die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Strahlen müssen alle gleich groß sein. Durch diesen Vorgang bilden sich  $k$  gleich große Kegel, deren Spitzen in  $A$  liegen. Abbildung 7 zeigt diesen Vorgang.

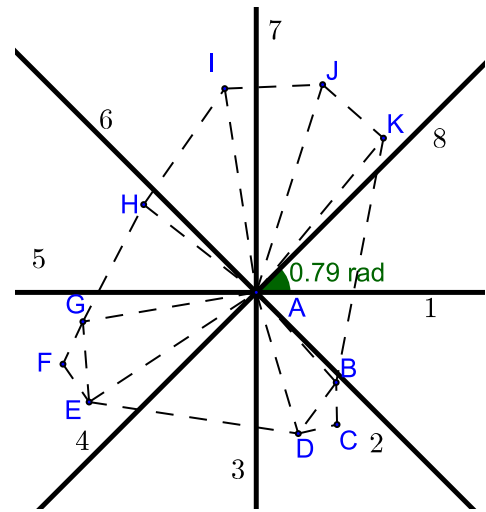


Abbildung 7.  $k$  gleich große Kegel um  $A$ . Jeder Kegel hat einen Öffnungswinkel von  $0.79$  rad.

Als Nächstes wählen wir in jedem - nicht leeren - Kegel die von  $A$  ausgehende, kürzeste Kante aus. Das sind in diesem Beispiel die Kanten  $AB$ ,  $AG$ ,  $AH$ ,  $AI$  und  $AK$  (vgl. Abbildung 8). Die Nummerierung in der Abbildung bezieht sich sowohl auf die am nächsten stehende Kante als auch auf den Kegel, in welchem die Zahl enthalten ist. Kante 1 und Kegel 1 sind somit eindeutig durch die 1 definiert.

Im nächsten Schritt iteriert der Algorithmus über alle Kegel, welche keinen Knoten enthalten. Zwei oder mehr aufeinander folgende leere Kegel, werden nur einmal behandelt. Kegel 1 und 8 sind leer. Da beide Kegel aneinander liegen, werden diese zusammengefasst und als ein Iterationsschritt interpretiert. Für die Anzahl der aufeinander folgenden leeren Kegel  $l$  werden zwei unterschiedliche Fälle unterschieden: Fall 1 wird behandelt, wenn  $l > 1$  und sonst Fall 2 ( $l = 1$ ). Da momentan  $l = 2$  ist (Kegel 1 und 8), wird Fall 1 ausgeführt. Jetzt werden diejenigen Kanten betrachtet, welche von  $A$  ausgehen und noch nicht ausgewählt wurden. Das sind die Kanten  $AD$ ,  $AE$  und  $AJ$  (, denn die anderen von  $A$  ausgehenden Kanten, wurde bereits im Schritt zuvor ausgewählt.) Von dem durch Kegel 1 und Kegel 2 bestimmten Segment wählt der Algorithmus

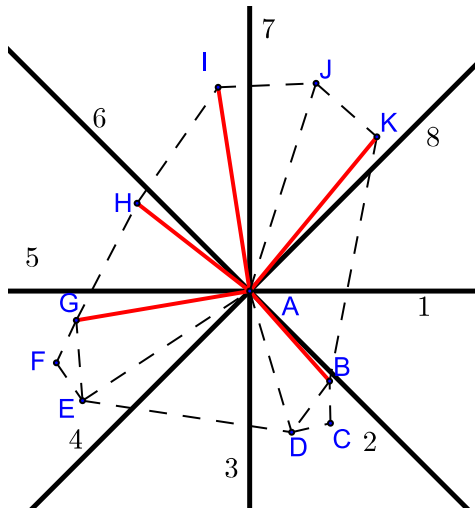


Abbildung 8. Auswahl der Kanten  $AB, AG, AH, AI$  und  $AK$  und Nummerierung der Kanten und Kegel.

die im Uhrzeigersinn ersten  $\frac{l}{2}$ , noch nicht selektierten Kanten ausgehend von  $A$  aus. In diesem Fall wird *eine* nächste Kante ausgewählt (, da  $\frac{l}{2} = 1$  ist). Dies ist die Kante  $AD$  (,da  $AB$  bereits ausgewählt wurde).

Dieser Vorgang wird ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn ausgeführt. Dort wird die Kante  $AJ$  ausgewählt. (vgl.: Abbildung 9)

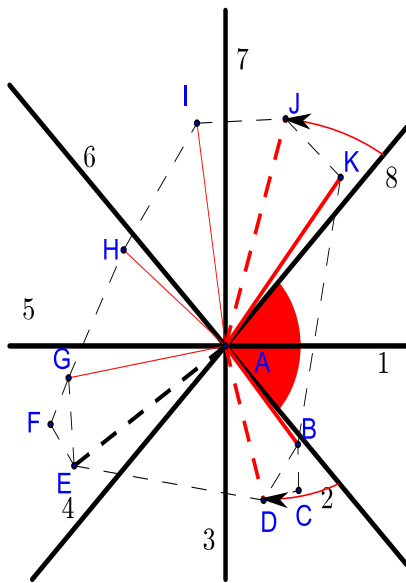


Abbildung 9. Auswahl der Kanten  $AJ$  und  $AD$ .

Der darauf folgende leere Kegel 3 wird als Nächstes behandelt. In diesem Fall ist  $l = 1$ , weil genau ein leerer Kegel zwischen zwei nicht leeren liegt. Hier greift der oben erwähnte Fall 2. Es werden die nächste Kante im Uhrzeigersinn ( $AE$ ) und die nächste Kante gegen den Uhrzeigersinn ( $AD$ ) betrachtet. Es gibt eine weitere Fallunterscheidung:

- Wenn keine der Kanten  $AE$  und  $AD$  ausgewählt sind, dann wähle die kürzere Kante aus.
- Wenn mindestens eine der beiden Kanten bereits aus-

gewählt ist, dann wird auch die andere ausgewählt.

Da  $AD$  bereits ausgewählt ist, wähle - dem obigen System folgend -  $AE$  aus.

Die fertige Auswahl von Knoten  $A$  lautet:

$$\{AB, AD, AE, AG, AH, AI, AJ, AK\}$$

(vgl.: Abbildung 10)

Der oben beschriebene Vorgang wird parallel von jedem anderen Knoten durchgeführt. Es sind bereits alle Fälle abgedeckt bzw. genannt worden und deshalb wird dieser Vorgang abgekürzt. Zum Nachvollziehen befinden sich die fertigen Auswahlbilder im Anhang. Hier ist die Liste aller anderen Punkte mit ihrer Auswahlliste:

- Punkt B  $\{BA, BC, BD, BK\}$
- Punkt C  $\{CB, CD\}$
- Punkt D  $\{DA, DB, DC, DE\}$
- Punkt E  $\{EA, ED, EF, EG\}$
- Punkt F  $\{FE, FG\}$
- Punkt G  $\{GA, GE, GF, GH\}$
- Punkt H  $\{HA, HG, HI\}$
- Punkt I  $\{IA, IH, IJ\}$
- Punkt J  $\{JA, JI, JK\}$
- Punkt K  $\{KA, KB, KJ\}$

Der fertige Graph enthält alle Kanten, welche von beiden Endpunkten gewählt wurden.

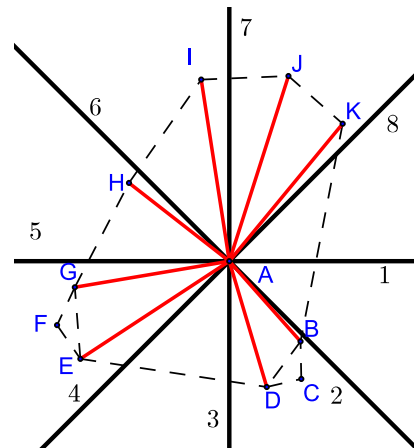


Abbildung 10. Die fertige Auswahl aller Kanten von Punkt  $A$  sind in rot markiert.

#### IV. GEOMETRISCHE SPANNER

Es gilt folgendes Theorem zu beweisen:

**Theorem IV.1.** Für jedes  $k \geq 14$  existiert ein Subgraph  $G'$  vom Delaunay-Graph  $G$ , sodass  $G'$  einen maximalen Ausgangsgrad von  $k$  und einen stretch-factor von  $1 + 2\pi(k \cos \frac{\pi}{k})^{-1}$  hat.

Gegeben sind zwei Kanten  $CA$  und  $CB$  im Delaunay-Graph  $G$  vom Euklidischen Graph  $E$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $CA$  die kürzeste Kante. Die Autoren von [1] beweisen dieses Theorem mithilfe des *outward* und des *inward* Path. Der outward Path kann gebildet werden, wenn kein Knoten von  $G$  innerhalb von  $\triangle ABC$  liegt. Der inward

Path verbindet die Knoten A und B, wenn Knoten innerhalb von  $\triangle ABC$  liegen.

#### A. Der outward Path

Die Autoren von [1] benutzen eine rekursive Definition um den Pfad von A nach B zu definieren. Es gilt zu beweisen, dass dieser Pfad in jedem Fall existiert, weil anderenfalls der Graph nicht zwingend verbunden ist. Dieser Fall darf nicht eintreten. Außerdem muss nachgewiesen werden, dass die Länge dieses Pfades maximal  $1 + 2\pi(k \cos \frac{\pi}{k})^{-1}$  länger ist als der vorherige Pfad von A nach B.

- **Basisfall:** Die Rekursion endet, wenn  $AB \in G$ . (vgl. Abbildung 3: AB müssen verbunden sein, weil B der einzige Knoten in einem Kegel von A ist.)
- **Rekursionsfall:**  $AB \notin G$

Aufgrund der Delaunay-Eigenschaft, dass eine Kante nur dann nicht in  $G$  enthalten ist, wenn im Kreis  $\odot ABC$  ein weiterer Punkt liegt, muss deshalb ein weiterer Punkt in  $\odot ABC$  liegen. Diesen Punkt nennen die Autoren von [1] einen *intermediate Point*. Um den Pfad von A nach B zu erhalten, wird ein Pfad von A zum intermediate Point T und von diesem zu B erstellt und konkateniert (siehe Abbildung 11). Dieser Rekursionsfall kann öfter eintreten, da es bezüglich A und T oder B und T einen weiteren intermediate Point  $T'$  geben kann und dazwischen rekursiv fortführend bis der Basisfall eintritt. Der Rekursionsfall bewahrt immer folgende Eigenschaften:

- $(O_1)$  und  $(O_2)$  sind vollständig innerhalb von  $(O)$  (vgl. Abbildung 12)
- $\alpha$  und  $\beta$  sind beide kleiner als der Winkel  $\angle AOB$  (vgl. Abbildung 13)
- Alle drei Winkel sind kleiner als  $\frac{4\pi}{k}$

Abbildung 14 zeigt ein Beispiel eines kompletten outward Path.

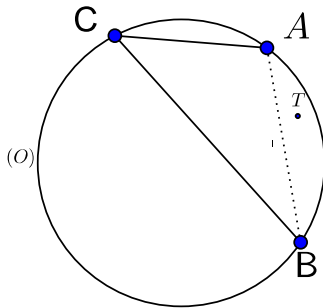


Abbildung 11.  $T \in G$  ist ein Knoten. Dieser Knoten wird intermediate Point mit Bezug zu A und B genannt.

#### B. Beweis

Es wird behauptet, dass von A nach B ein Pfad  $p$  existiert, sodass:

$$|CA| + |p| \leq (1 + 2\pi(\cos \frac{\pi}{k})^{-1})|CB| \quad (2)$$

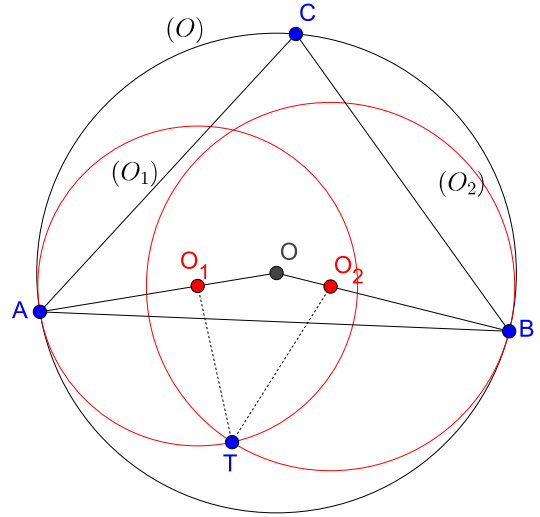


Abbildung 12.  $(O_1)$  und  $(O_2)$  sind vollständig innerhalb von  $(O)$ ,  $(O_1)$  ist der Kreis durch A und T mit Mittelpunkt auf dem Segment AO,  $(O_2)$  verläuft durch B und T und der Mittelpunkt liegt auf dem Segment BO

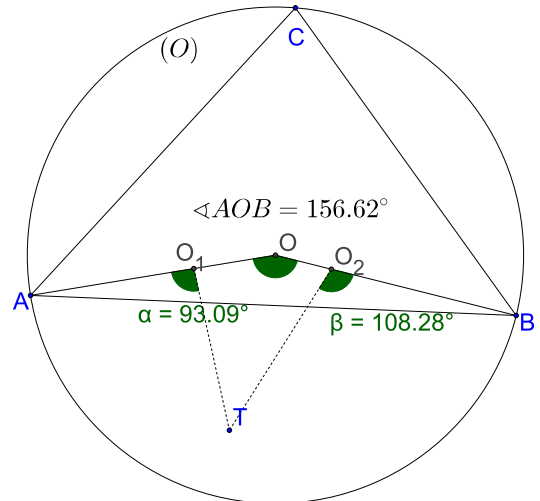


Abbildung 13.  $\alpha$  und  $\beta$  sind beide kleiner als  $AOB$ , gleiche Konstruktion wie in Abbildung 12, A und B liegen im selben Kegel ausgehend von C.

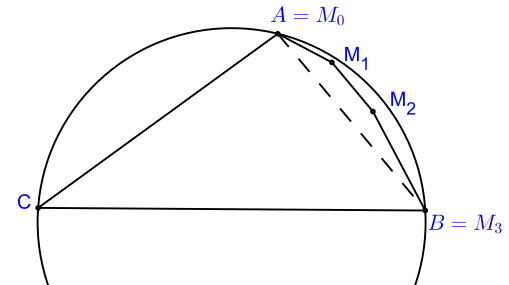


Abbildung 14. Zwischen A und B ist ein fertiger Outward Path mit den Intermediate Points  $M_1$  und  $M_2$

In Worten: Die Länge des Pfades  $p$  plus den Wert  $|CA|$  darf nicht größer sein als eine Konstante ( $t \approx 1.45$  für  $k = 14$ )

multipliziert mit der Länge der Kante  $CB$ . Es gelten folgende Bedingungen und Formeln:

- $|AB| = 2 \cdot \angle BCA \cdot |OA|$  mit  $O$  als Mittelpunkt des Kreises  $\odot ABC$  (siehe Abbildung 15 für ein Beispiel)
- $\sin \theta = \frac{|AB|}{2|OA|}$
- $|CA| = |CB|$  Denn dadurch ist  $|CA| + |AB|$  maximal

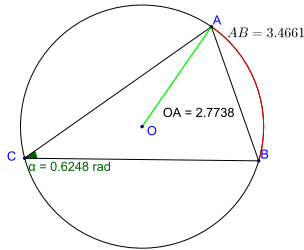


Abbildung 15. Beispiel zu Formel IV-B:  $|AB| = 2 \cdot 0.6248 \cdot 2.7738 \approx 3.4661$

## LITERATUR

- [1] I. A. Kanj and L. Perkovic, "On geometric spanners of euclidean and unit disk graphs," *CoRR*, 2008.
- [2] H. Frey and I. Stojmenovic, "On delivery guarantees of face and combined greedy-face routing in ad hoc and sensor networks," *MobiCom 2006*, pp. 390–401.
- [3] J. Suomela, "Survey of local algorithms," *ACM Comput. Surv.*, 2013, pp. 24:1–24:40.

### C. Der inward Path

Die Menge  $S$  besteht aus allen Punkten innerhalb von  $\triangle ABC$ , Punkt  $A$  und Punkt  $B$ . In Abbildung 16 ist ein Beispiel eines Inward Path.  $CH(S)$  sind alle Punkte der Konvexen Hülle von  $S$ . Folgende drei Voraussetzungen gelten:

**Proposition 1.** •  $CN_i \in G$

- $|CN_i| \leq |CN_{i+1}|$
- $\angle N_{i-1}N_iN_{i+1} \geq \pi$  (Winkel Richtung  $C$ )

Abbildung 16 zeigt, dass alle Winkel  $\angle N_{i-1}N_iN_{i+1}$  größer als  $\pi$  sind. Außerdem ist jede Kante  $CN_i$  kürzer als  $CN_{i+1}$ . Da  $CA (= CN_0)$  die kürzeste Kante in diesem Kegel ist, muss  $CN_1$  länger sein. Für  $CN_1$  gilt dieselbe Bedingung. Folglich muss  $CN_2$  länger sein, etc.

Hinzu kommt die Voraussetzung  $\angle N_iCN_{i+1} \leq \angle BCA$ . Dies sind genau die Bedingungen, welche im Voraus bewiesen wurden, um einen outward Path zu konstruieren. Zwischen jedem Paar  $N_iN_{i+1}$  gibt es einen outward Path, der dieses Paar verbindet. Diese gesamte Konstruktion, der Pfad von  $A$  nach  $B$ , wird inward Path genannt.

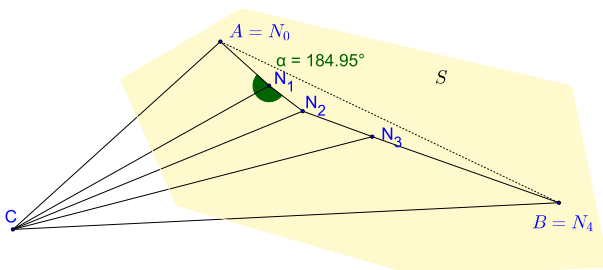


Abbildung 16. Voraussetzungen für den inward Path und Beispiel eines inward Path  $N_0N_1N_2N_3N_4$

1) Beweis: