IMU 应用讲解 (第二期)

唐宝芳 李文涛 肖斯凯

2020 年 12 月 3 日

主要内容

1. IMU 确定性误差模型及标定
2. IMU 随机误差模型及标定

IMU 应用讲解目录

- 第一期: 旋转运动学; IMU 测量模型
- 第二期:IMU 误差模型; IMU 标定
- 第三期: 预积分 (上)
- 第四期: 预积分 (下)

Bright Dream Robotics 博智林机器人

IMU 误差分类

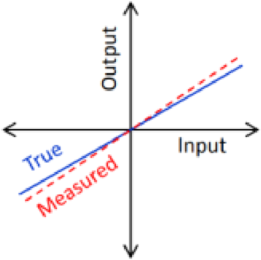
- 加速度计和陀螺仪的误差可以分为:确定性误差和随机误差.
- 确定性误差可以事先通过标定确定, 包括:bias,scale,misalignment...
- 随机误差通常假设噪声服从高斯分布, 包括: 高斯白噪声,bias 随机游走...

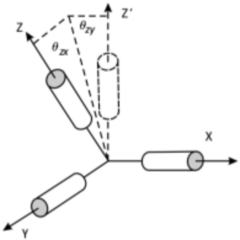
确定性误差分类

1. Bias　理论上, 当没有外界作用时,IMU 的输出应该为 0. 但是, 实际数据存在一个偏置 b, 加速度计 bias 对位姿估计的影响:

$$v_{err} = b^a t, \quad p_{err} = \frac{1}{2} b^a t^2 \tag{1}$$

2. Scale　scale 可以看成是理论数值和输出值之间的比值, 如下图所示.
3. Misalignment/Nonorthogonality Errors　多轴 IMU 传感器制作的时候, 由于制作工艺的问题, 会使得 xyz 轴可能不垂直, 如下图所示.





确定性误差标定 (六面法)

六面法: 将加速度计的 3 个轴分别朝上或朝下水平放置一段时间, 采集 6 个面的数据完成标定.

1. 如果各个轴是正交的, 那么很容易得到 bias 和 scale:

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{l_z^{up} + l_z^{down}}{2} \\
s &= \frac{l_z^{up} - l_z^{down}}{2 \cdot ||g||}
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中,l 为加速度计某个轴的测量值,g 为当地的重力加速度.

确定性误差标定 (六面法)

2. 考虑轴间误差的时候, 实际加速度和测量值之间的关系为:

$$\begin{bmatrix} l_{ax} \\ l_{ay} \\ l_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ax} \\ b_{ay} \\ b_{az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & s_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

水平静止放置 6 面的时候, 加速度的理论值为:

$$a1 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a2 = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a3 = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, a4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}, a5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, a6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中,l 为加速度计某个轴的测量值,g 为当地的重力加速度.

对应的测量值矩阵 L:

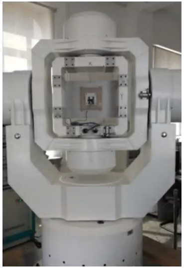
$$L = [I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6] \tag{5}$$

利用最小二乘就能够把 12 个变量求出来.

确定性误差标定 (六面法)

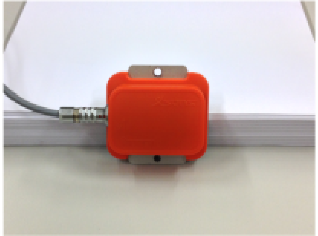
六面法标定陀螺的 bias,scale 和 misalignment.

- 和加速度计六面法不同的是, 陀螺仪的真实值由高精度转台提供, 这里的 6 面是指各个轴顺时针和逆时针旋转.



IMU 确定性误差标定 (不依托额外设备法)

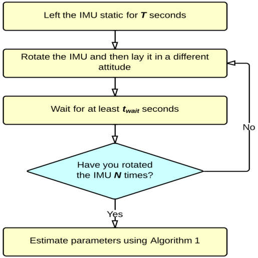
- 参考论文:A Robust and Easy to Implement Method for IMU Calibration without External Equipments
- DEMO 链接:https://bitbucket.org/alberto_pretto/imu_tk



IMU 确定性误差标定 (不依托额外设备法)

IMU 数据录制步骤:

1. Left the IMU static for 50 seconds.
2. Rotate the IMU and then lay it in a different attitude.
3. Wait for at least 1 seconds.
4. Have you rotated the IMU 36 - 50 times? If not, go back to step 2.
5. Done.



博智林机器人 Bright Dream Robotics

IMU 确定性误差标定 (不依托额外设备法)

(IG1) 加速度计确定性误差标定结果:

```
Misalignment matrix:
           1  0.000216415 -0.000907317
           0            1 -0.000415176
          -0            0            1
Scale matrix:
0.998844        0        0
       0 0.998912        0
       0        0 0.998909
Bias vector:
0.00755047
 -0.038109
-0.0122145
```

(IG1) 陀螺仪确定性误差标定结果:

```
Misalignment matrix:
          1  -0.0534044   -0.0105652
  0.0267086           1  -0.00765912
  0.0177619  -0.0324614            1
Scale matrix:
0.983548        0        0
       0  1.02306        0
       0        0  1.00226
Bias vector:
 2.93412e-05
-0.000137077
 0.000157532
```

IMU 随机误差分类

博智林机器人 Bright Dream Robotics

1. 高斯白噪声　IMU 数据连续时间上受到一个均值为 0, 方差为 σ, 各时刻之间相互独立的高斯过程 $n(t)$:

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= 0 \\ E[n(t_1)n(t_2)] &= \sigma^2\delta(t1 - t2) \end{aligned} \tag{6}$$

   其中,$\delta()$ 表示狄拉克函数.

2. Bias 随机游走 通常用维纳过程 (wiener process) 来建模 bias 随时间连续变化的过程, 离散时间下称之为随机游走.

$$\dot{b}(t) = n_b(t) = \sigma_b w(t) \tag{7}$$

   其中,w 是方差为 1 的白噪声.

问题: 实际上,IMU 传感器产生的原始数据是连续的, 而输出数据是离散的, 离散和连续高斯白噪声存在何种关系?

高斯白噪声的离散化

博智林机器人 Bright Dream Robotics

只考虑高斯白噪声的积分

$$n_d[k] \triangleq n(t_0 + \Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)dt \tag{8}$$

协方差为:

$$\begin{aligned} E(n_d^2[k]) &= E(\frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau)n(t))d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} E(n(\tau)n(t))d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau)d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t} \end{aligned} \tag{9}$$

高斯白噪声的离散化

即:

$$n_d[k] = \sigma w[k] \tag{10}$$

其中,

$$\begin{aligned} w[k] &\sim N(0,1) \\ \sigma_d &= \sigma \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \tag{11}$$

也就是说高斯白噪声的连续时间表示到离散时间表示相差一个 $\frac{1}{\Delta t}$, $\sqrt{\Delta t}$ 是传感器的采样时间.

bias 随机游走的离散化

提取 bias 积分部分

$$b(t_0 + \Delta t) = b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(t)dt \tag{12}$$

由此可得离散化下的 bias 协方差:

$$E\{b^2(t_0 + \Delta t)\} = E\{[b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(t)dt][b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n_b(\tau)d\tau]\} \tag{13}$$

由于 $E\{n_b(t)n_b(\tau)\} = \sigma_b^2\delta(t-\tau)$ 有:

$$E\{b^2(t_0 + \Delta t)\} = E\{b^2(t_0)\} + \sigma_b^2\Delta t \tag{14}$$

bias 随机游走的离散化

即:

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bd} w[k] \tag{15}$$

其中,

$$\begin{aligned} w[k] &\sim N(0,1) \\ \sigma_{bd} &= \sigma_b \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \tag{16}$$

bias 随机游走的噪声方差从连续时间到离散之间需要乘以 $\sqrt{\Delta t}$

高斯白噪声的离散化

博智林机器人 Bright Dream Robotics

只考虑高斯白噪声的积分

$$n_d[k] \triangleq n(t_0+\Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)dt \tag{17}$$

协方差为:

$$\begin{aligned} E(n_d^2[k]) &= E\left(\frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau)n(t)\right)d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} E(n(\tau)n(t))d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t^2}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau)d\tau dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\Delta t} \end{aligned} \tag{18}$$

IMU 随机误差标定

博智林机器人
Bright Dream Robotics

- 参考
  1. An introduction to inertial navigation
  2. Allan Variance: Noise Analysis for Gyroscopes
  3. DEMO:https://github.com/gaowenliang/imu_utils
- IMU 数据录制步骤:
  1. 保持 imu 静止不动至少 2 个小时.

IMU 随机误差标定

(IG1) 加速度计随机性误差标定结果:

```
Gyr:
   unit: " rad/s"
   avg-axis:
      gyr_n: 2.3519241717850545e-04
      gyr_w: 9.5275242645633063e-06
   x-axis:
      gyr_n: 2.3204246400353865e-04
      gyr_w: 8.5516116737001937e-06
   y-axis:
      gyr_n: 2.3628528710049616e-04
      gyr_w: 1.2195936150567697e-05
   z-axis:
      gyr_n: 2.3724950043148158e-04
      gyr_w: 7.8350249694220280e-06
```

(IG1) 陀螺仪随机性误差标定结果:

```
Acc:
   unit: " m/s^2"
   avg-axis:
      acc_n: 9.0999846507334552e-03
      acc_w: 1.9795086290731590e-04
   x-axis:
      acc_n: 9.1741196108414830e-03
      acc_w: 2.1210965413484255e-04
   y-axis:
      acc_n: 9.5965562298242022e-03
      acc_w: 2.2037104825859265e-04
   z-axis:
      acc_n: 8.5292781115346820e-03
      acc_w: 1.6137188632851253e-04
```

Reference

[1] 贺一家, 高翔 IMU 传感器 讲义.

[2] A Robust and Easy to Implement Method for IMU Calibration without External Equipments.

[3] An introduction to inertial navigation.

...