

Transformée de Fourier discrète

Pierre Chainais - Centrale Lille

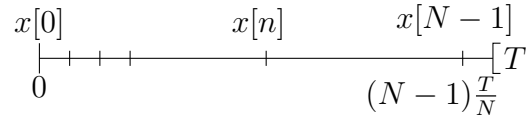
1 Vers une discrétisation en temps et en fréquence

Les calculs numériques sur ordinateur ne peuvent être effectués dans le domaine continu avec les signaux $x(t)$ et leurs transformées de Fourier continues $X(\nu)$. En pratique, on doit manipuler des signaux numériques, échantillonnés donc discrets en temps et en fréquence. Il faut pour cela définir la **transformée de Fourier discrète** que l'on calcule rapidement grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide ou **Fast Fourier Transform (FFT)** en anglais : ce sera aussi le nom de la fonction `fft` et son inverse `ifft` utilisées dans divers environnements logiciels ou de programmation dont Python.

Dans le package `numpy`,

voir <https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.fft.html>.

On suppose qu'on dispose de N échantillons $x[n], 0 \leq n \leq N - 1$.



En démontrant le théorème de Shannon, on a vu qu'on pouvait reconstruire exactement la transformée de Fourier continue $X(\nu)$ d'un signal à bande limitée $x(t)$ dans $[0, F_e/2]$ à partir de ses échantillons $x[n]$

$$x[n] = \begin{cases} x(nT_e), & \forall n, 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

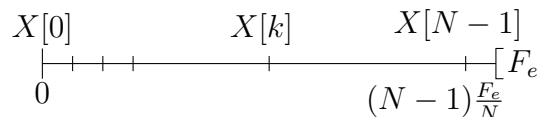
grâce à :

$$X(\nu) = \frac{1}{F_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi\nu/F_e} \quad (2)$$

Dans ce cas, $X(\nu)$ est périodique de période F_e et correspond bien à $\mathcal{F}[x]$ sur un intervalle de taille F_e , par exemple $[-F_e/2, +F_e/2]$ ou $[0, F_e]$. Ainsi on sait passer des N échantillons en temps $x[n]$ d'un signal $x(t)$ à sa transformée de Fourier continue $X(\nu)$.

On souhaite aussi disposer d'une discrétisation en fréquence sous la forme d'échantillons $X[k]$ qui permettraient d'accéder à $x(t)$. Pour cela on considère N échantillons de $X(\nu)$ sur l'intervalle de taille F_e en posant

$$X[k] = X\left(\frac{kF_e}{N}\right) = \frac{1}{F_e} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad \forall k, 0 \leq k \leq N - 1. \quad (3)$$



Par analogie à $X(\nu) \propto \sum x[n]e^{-j\nu n}$, on s'intéresse au polynôme trigonométrique (et donc périodique) :

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad (4)$$

A-t-on $p(nT_e) = x[n]$? ... et par conséquent une transformée de Fourier discrète inverse qui permettrait de passer directement de $x[n]$ à $X[k]$ et réciproquement. Calcul :

$$\begin{aligned} p(nT_e) &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{F_e T} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x[q] e^{-j2\pi \frac{kq}{N}} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x[q] \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N}(n-q)}}_{N\delta_{nq}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} x[q] N\delta_{nq} \\ &= x[n] \end{aligned} \quad (5)$$

La réponse est affirmative, d'où :

$$X[k] = \frac{1}{F_e} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad (6)$$

et

$$x[n] = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad \forall 0 \leq n \leq N-1, \quad (7)$$

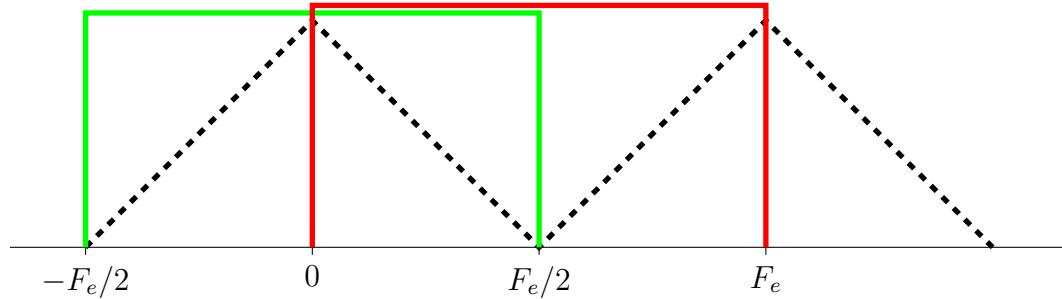
Pour éviter des problèmes de normalisation et d'unité physique dans le cadre d'une implémentation numérique (sans dimension par nature), on définit plutôt les quantités : (rappelons que $F_e T = F_e N T_e = N$) :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \quad (8)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad \forall 0 \leq n \leq N-1. \quad (9)$$

2 Propriétés de la TFD

1. $x[n]$ et $X[k]$ sont périodiques de période N (le nb. d'échantillons) ;
2. $X[k]$, $0 \leq k \leq N - 1$ correspond aux fréquences allant de 0 à $(N - 1)\frac{F_e}{N} = F_e - \frac{F_e}{N}$ avec un pas de $\frac{F_e}{N}$.
3. La transformée de Fourier des signaux réels présente une symétrie hermitienne $X(-\nu) = X^*(\nu)$ donc on représente souvent $X[k]$ pour $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$.
La fonction `fftshift` de Matlab échange la 1ère et la 2ème moitié du vecteur $X[k]$, $0 \leq k \leq N - 1$, pour plutôt représenter $X[k]$ pour $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$.



4. En réalité, on a utilisé une somme infinie pour des échantillons $x[n] = x(nT_e)$ pour $0 \leq n \leq N - 1$ et 0 partout ailleurs ce qui revient à considérer le signal

$$x_T(t) = \mathbb{I}_{[0,T]}(t)x(t), \quad T = NT_e$$

Par conséquent, les $X[k]$ sont plutôt les échantillons de $T \text{sinc}(\pi\nu T) * X(\nu)$: l'estimateur est biaisé.

5. L'observation précédente met en évidence **l'importance du choix d'une fenêtre d'analyse** $w(t)$ (ou sa version discrète $w[n]$) puisque nous travaillerons de fait à partir des échantillons $w[n] \cdot x[n]$ avec w éventuellement $\neq \mathbb{I}_{[0,T]}(t) \Rightarrow$ Hann (souvent abusivement appelée Hanning par homonymie vec Hamming), Gaussienne,... En effet, dans le domaine fréquentiel, on aura :

$$X_T(\nu) = W * X(\nu)$$

Si l'on choisit une **fenêtre rectangulaire** $w(t) = \mathbb{I}_{[0,T]}(t)$, alors $W(\nu) = T \text{sinc}(\pi\nu T)$: des pics fréquentiels de $X(\nu)$ en ν_0 , par exemple des distributions de Dirac $\delta_{\nu_0}(\nu)$, seront remplacés par des $\text{sinc}(\pi(\nu - \nu_0)T)$ dont le lobe principal est de largeur $1/T$, avec de nombreux lobes secondaires.

Si l'on choisit une **fenêtre gaussienne** $w(t) \propto \exp(-t^2/2\sigma^2)$, $\sigma < T/2$, alors $W(\nu) \propto \exp(-2\pi\sigma^2\nu^2)$: des distributions de Dirac $\delta_{\nu_0}(\nu)$, seront remplacés par des fonctions en $\exp(-2\pi\sigma^2(\nu - \nu_0)^2)$ sans aucun lobe secondaire ; cette fonction "bosse" aura une largeur de $1/4\sigma = 1/T$. Par contre, cette fenêtre est à support infini, ce qui n'est pas pratique numériquement.

Si l'on choisit une fenêtre telle que la **fenêtre de Hann(ing)** (une arche de sinusoïde) $w(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \times [1 + \cos(2\pi t/T)]$, on combine les avantages d'une *localisation fréquentielle* proche de celle de la gaussienne, des *lobes secondaires de faible amplitude*, et un *support compact* pour l'implémentation numérique.

6. Il existe **de nombreuses autres fenêtres** qui peuvent être choisies en fonction de la qualité et de la résolution souhaitée lors d'une analyse spectrale. Les critères classiques de choix portent sur la transformée de Fourier de la fenêtre. Il s'agit de la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ du lobe principal, l'atténuation A [dB] du premier lobe secondaire et de la rapidité de la décroissance lorsque $\omega \rightarrow \infty$ en $1/\omega^p$:

| nom | $g(t)$ | $\Delta\omega$ | A | p |
|------------|--|----------------|--------|---|
| Rectangle | 1 | 0,89 | -13 dB | 0 |
| Hamming | $0,54 + 0,46\cos(2\pi t)$ | 1,36 | -43 dB | 0 |
| Gaussienne | $\exp(-0,18t^2)$ | 1,55 | -55 dB | 0 |
| Hann(ing) | $\cos^2(\pi t)$ | 1,44 | -32 dB | 2 |
| Blackman | $0,42 + 0,5 \cos(2\pi t) + 0,08\cos(4\pi t)$ | 1,68 | -58 dB | 2 |

Fenêtres à support dans $[-1/2, 1/2]$.

Ces fenêtres sont normalisées pour que $g(0) = 1$ (mais $\|g\|_2 \neq 1$).

