Représentation des signaux et problèmes inverses - 2

P.-A. Thouvenin

École Centrale Lille - CRIStAL UMR 9189 CNRS

Plan

1. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \Longleftrightarrow X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$
2. $x(t) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow X(-\nu) = X^*(\nu)$ (symétrie hermitienne)
3. **Théorème de Parseval-Plancherel :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu$$

4. **Thérorème de Gabor :** boîte d'Heisenberg, compromis temps-fréquence

$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

5. **En dimension 2 :**

$$F(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) e^{-j2\pi[\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2]} dx_1 dx_2$$

1. Les exponentielles complexes sont fonctions propres des systèmes linéaires : pour un opérateur linéaire L,

$$L[e^{j\omega t}] = H(\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

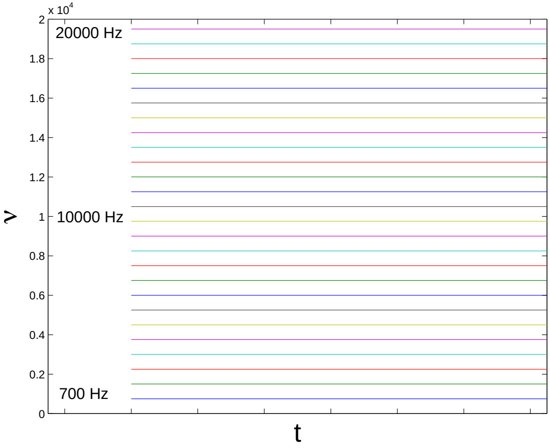
2. Filtrage linéaire: $Y(\nu) = H(\nu) \cdot X(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = h * x(t)$

3. **Représentation en fréquence :** localisation en fréquence idéale,
   MAIS **aucune localistation en temps**,

4. **Représentation temporelle :** localisation en temps idéale, (cf. $x(t_o) = \int \delta_{t_o}(u)x(u)du$),
   MAIS **aucune localistation en fréquence**.

Transformée de Fourier: le paradis du stationnaire

Découpage du plan temps-fréquence :

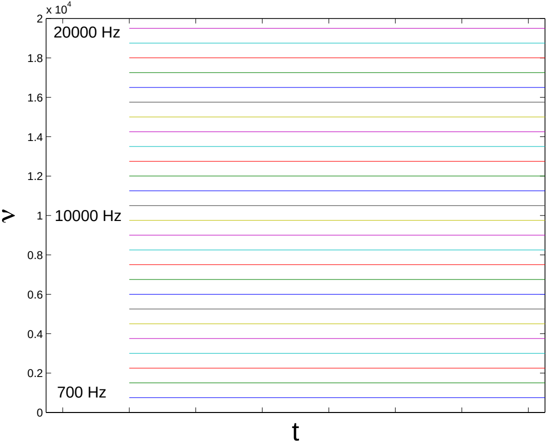


Principal inconvénient : pas de localisation en temps (espace).

(cf. notion d'espace vectoriel normé, espace de Hilbert)

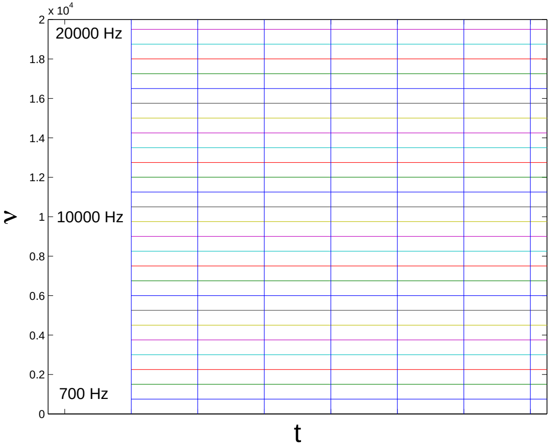
Bases : décomposition du plan temps-fréquence

Short-time Transformée de Fourier (STFT, Gabor 1946)



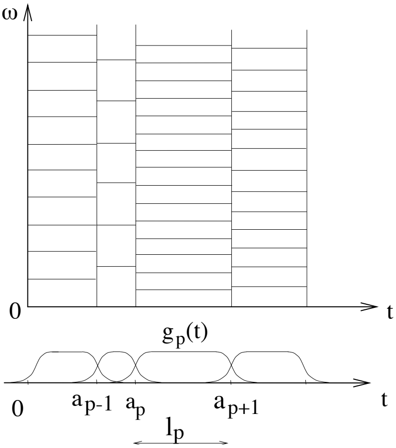
Bases : décomposition du plan temps-fréquence

Short-time Transformée de Fourier (STFT, Gabor 1946)

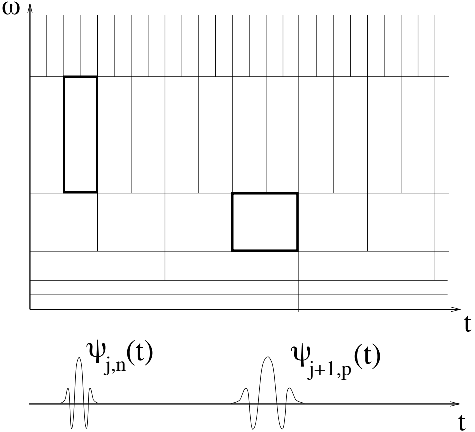


Bases : décompositions du plan temps-fréquence

Atomes adaptatifs temps-fréquence (cf. MP3)



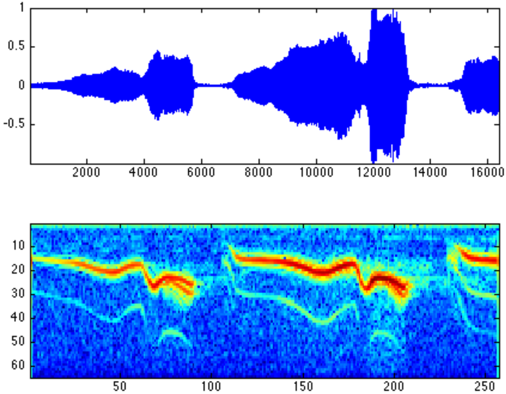
+++ Localisation en temps et en fréquence, adaptatif.



Localisation temps-fréquence & résolution : $\frac{\Delta\nu}{\nu} = Cst$.

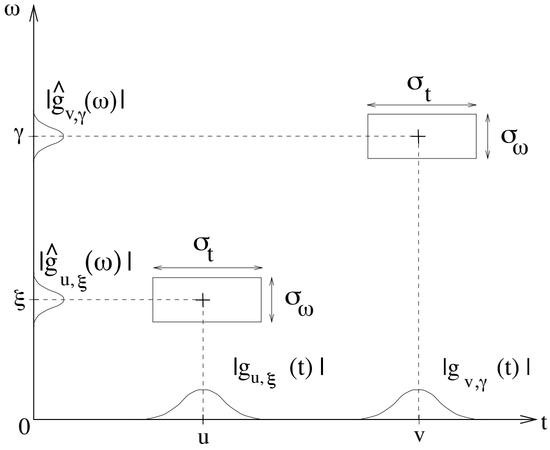
Plan

Analyse temps-fréquence : le spectrogramme



Spectrogramme du chant d'un merle

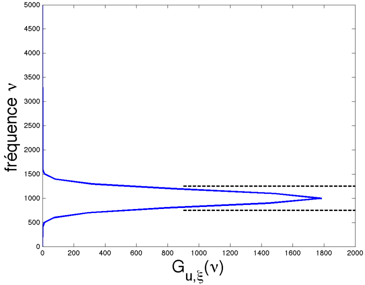
Atomes temps-fréquence

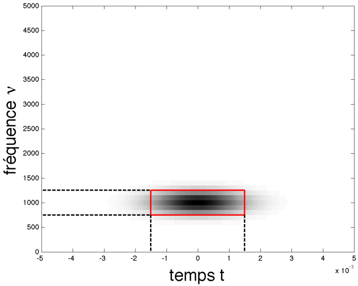


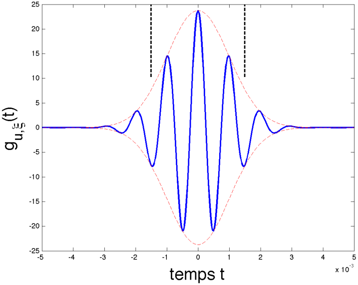
Construction de $g_{u,\xi}$:

oscillations à fréquence ξ pendant σ_t autour de $t = u$.

Atomes temps-fréquence : atomes de Gabor



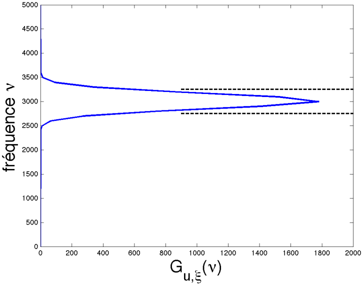


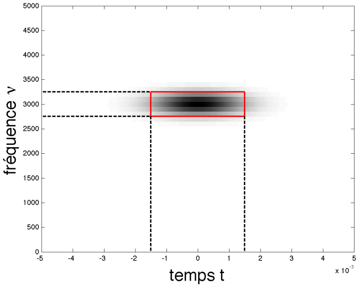


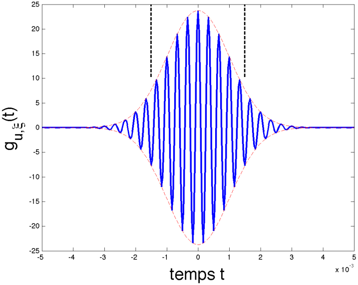
$$g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$$

$$g(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

Atomes temps-fréquence : atomes de Gabor



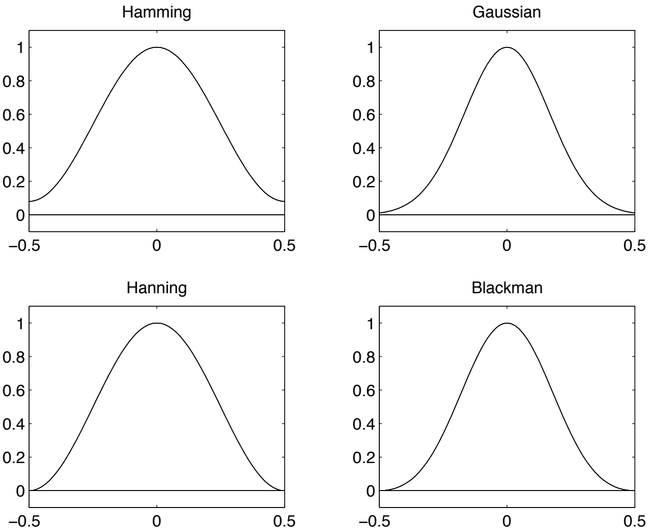




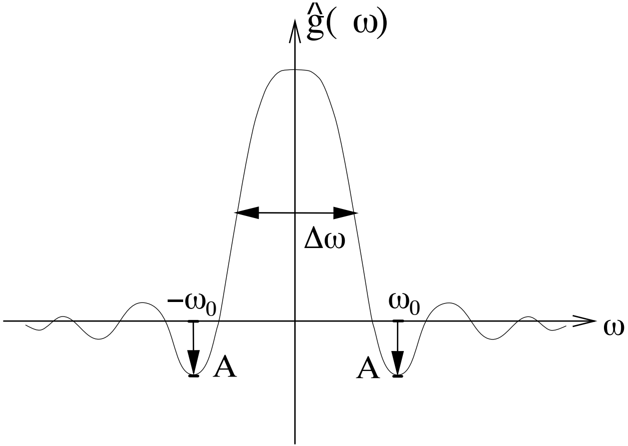
$$g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$$

$$g(t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

Choix de la fenêtre



Choix de la fenêtre

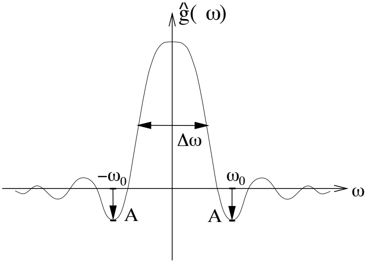


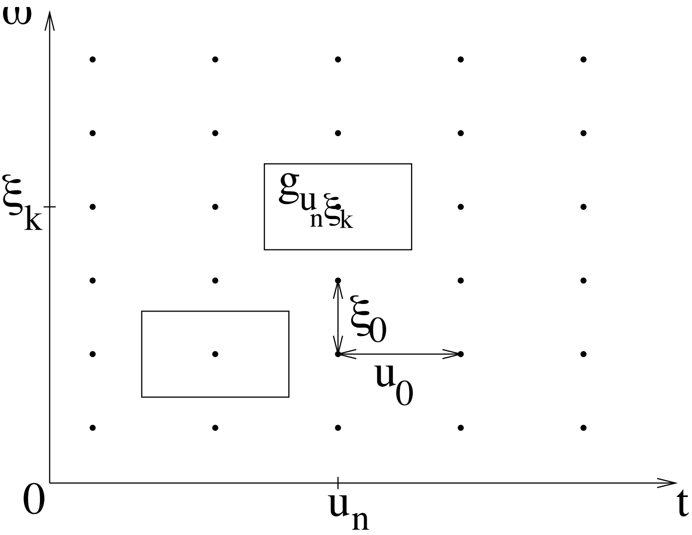
Choix de la fenêtre

nom	$g(t)$	$\Delta\omega$	A	p
Rectangle	1	0,89	-13 dB	0
Hamming	$0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi t)$	1,36	-43 dB	0
Gaussienne	$\exp(-0{,}18t^2)$	1,55	-55 dB	0
Hanning	$\cos^2(\pi t)$	1,44	-32 dB	2
Blackman	$0{,}42 + 0.5\cos(2\pi t) + 0{,}08\cos(4\pi t)$	1,68	-58 dB	2

Fenêtres à support dans $[-1/2, 1/2]$.

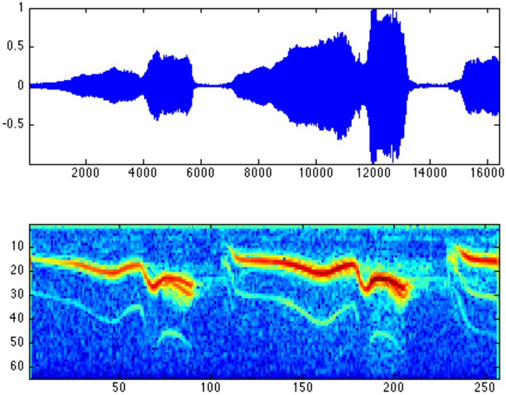
Ces fenêtres sont normalisées pour que $g(0) = 1$ mais $\|g\| \neq 1$.





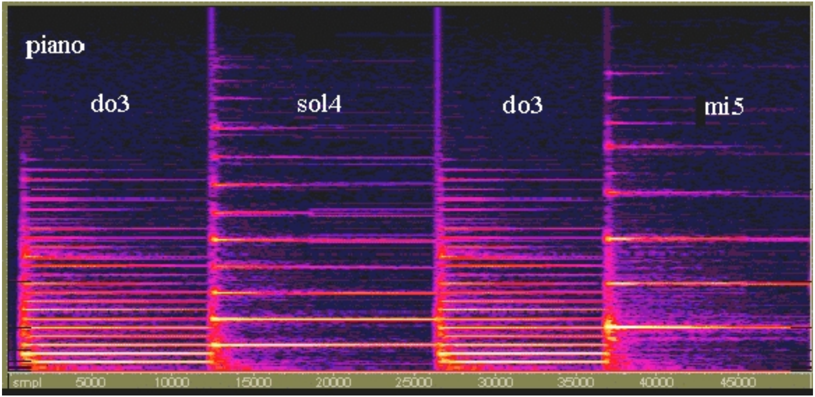
ω
ξk
g un ξk
ξ0
u0
0
un
t

Analyse temps-fréquence : le spectrogramme



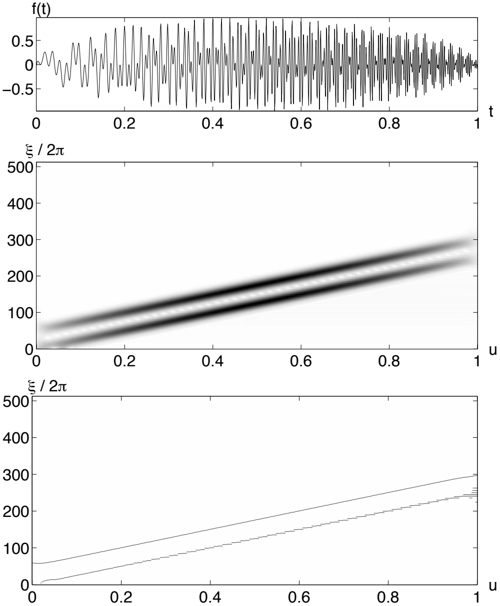
Spectrogramme du chant d'un merle

Spectrogramme

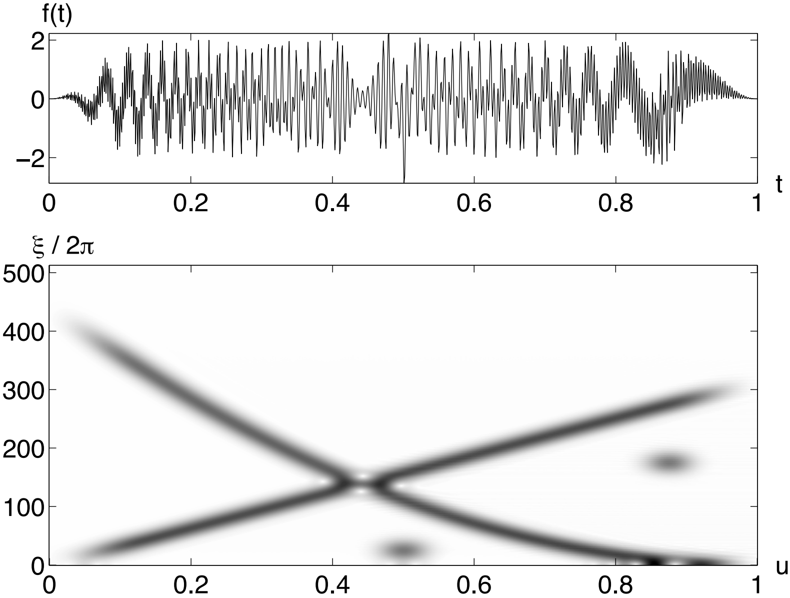


Spectrogramme d'une suite de notes jouées au piano

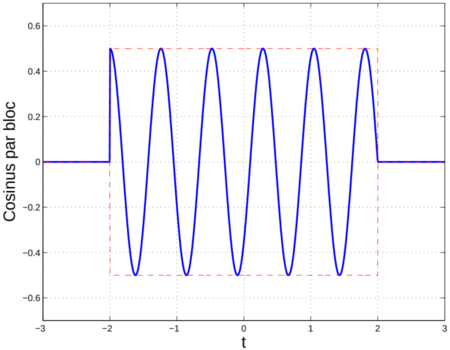
Combinaison de 2 sons (1)



Combinaison de 2 sons (2)



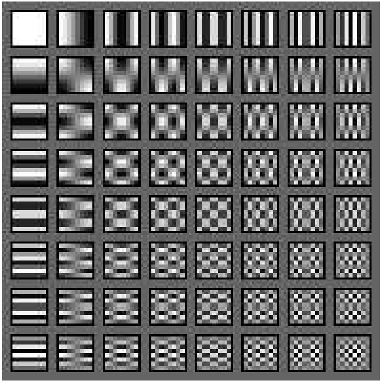
Pour les images, passage en 2D : cosinus par blocs



$$\left\{ g_{p,k}(t) = \mathbb{1}_{[a_p, a_p+\ell_p]}(t) \frac{2}{\ell_p} \cos\left[\pi(k+\frac{1}{2}) \left(\frac{t-a_p}{\ell_p} \right) \right] \right\}_{p,k\in\mathbb{Z}}$$

Compression JPEG : cosinus par blocs en 2D

motifs de base 8×8 :



$$\left\{ g_{k,j}[n,m] = \lambda_k \lambda_j \frac{2}{L} \cos\left[\frac{k\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{j\pi}{L}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] \right\}_{0 \leq k,j < L}$$

Cosinus par bloc 2D pour JPEG

Compression d'image