MODELO MATEMÁTICO PARA A LOCALIZAÇÃO DE FILTROS DE ÁGUA EM UMA INSTITUIÇÃO PÚBLICA

Matheus da Silva Andrade (UFPE)
matheus_352@hotmail.com
Tatiana Balbi Fraga (UFPE)
tatiana.balbi@ufpe.br

No presente trabalho é apresentado um modelo matemático para o problema de localização de filtros de água no Centro Acadêmico do Agreste - Universidade Federal de Pernambuco. Esse modelo foi desenvolvido buscando otimizar a cobertura dos coorredores da universidade e tendo como base as demandas de cada área específica. Como resultado foi possível verificar que o modelo elaborado é capaz de atingir às demandas e objetivos definidos, propondo soluções razoáveis para os alunos, sem gerar conflitos de interesse políticos e implicações no orçamento da universidade.

Palavras-chave: Pesquisa operacional, problema de cobertura, distribuição, localização

1. Introdução

Um dos problemas comuns que podem ser observados em instituições públicas é a dificuldade existente na definição da localização de objetos que serão destinados a multiusuários, tais como extintores de incêndio, bebedouros, equipamentos de wi-fi, cartazes informativos, televisores publicitários, etc. Estes objetos devem estar localizados de forma a garantir fácil acesso a todos os usuários. Contudo, conforme mencionado por Daskin e Murray (2012), quando se trata do setor público, tais definições estão geralmente sujeitas a limitações de recursos, objetivos conflituosos e alta atmosfera política, fazendo com que a tomada de decisão se torne um processo altamente complexo.

No Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA - UFPE), a localização dos filtros de água se tornou um motivo de reclamações frequentes. Isso se deve à dificuldade de acesso e/ou ao grande deslocamento que geralmente os alunos devem realizar para ter acesso à água, seja pelo filtro estar distante de algum ponto específico ou pela frequente falta de água nos filtros mais próximos.

Conforme pode ser observado nos trabalhos de ReVelle *et al.* (2008) e Farahani *et al.* (2012), na literatura, problemas de localização e/ou cobertura têm sido abordados com frequência. Contudo, a maior parte dos trabalhos trata da localização de instalações tais como fábricas industriais, pontos comerciais, escolas, hospitais, serviços de emergência, etc. De acordo com a pesquisa realizada pelos autores deste trabalho, poucos artigos abordam o problema de localização de objetos destinados a multiusuários em instituições públicas.

Pensando em uma maneira para minimizar o incômodo dos estudantes do CAA, no presente trabalho o problema de localização dos filtros de água é modelado matematicamente e resolvido pela aplicação do método Simplex. Levando em conta as complexidades relacionadas às decisões em instituições públicas, e buscando a maximização da satisfação dos usuários, a modelagem do problema foi desenvolvida de maneira que o resultado ótimo resultasse na melhor distribuição dos filtros em relação aos corredores da universidade assim como à área total avaliada. Como resultado, o trabalho demonstra que o modelo desenvolvido é capaz de apresentar soluções razoáveis apenas modificando a distribuição dos filtros, ou seja, sem que sejam necessários grandes investimentos por parte da universidade.

2. Problemas de Localização e de Cobertura

De acordo com Colombo *et al*. (2016), um problema de localização de facilidades (do inglês *facility location problem*) consiste basicamente em definir a localização geográfica de uma série de facilidades de forma a atender a um conjunto de centros de demanda cujas posições são conhecidas, e buscando otimizar uma determinada função objetivo. O problema admite uma série de variantes de acordo com o objetivo do tomador de decisão e com as configurações de aplicação, motivo pelo qual na literatura são apresentadas uma série de classificações para o problema. Nesse trabalho citaremos a classificação de ReVelle *et al*. (2008) na qual os problemas de localização são distinguidos de acordo com o espaço do modelo aplicado, conforme descrito a seguir:

- **Modelos analíticos,** os quais são baseados em um grande número de hipóteses simplificadoras;
- **Modelos contínuos,** que geralmente assumem que as facilidades podem ser localizadas em qualquer local na área considerada, enquanto que os pontos de demanda são representados por valores discretos;
- **Modelos de redes,** nos quais se assume que o problema de localização é incorporado em uma rede composta por elos e nós;
- **Modelos discretos**, nos quais se considera um conjunto discreto de centros de demanda e um conjunto discreto de localidades candidatas para a instalação das facilidades. Tais problemas são geralmente formulados como problemas de programação inteira ou inteira-mista. Entre os principais modelos discretos distinguem-se os utilizados para representação de problemas de cobertura.

Os problemas de cobertura (do inglês *covering problems*) estão entre os mais populares problemas de localização de facilidades. Segundo Farahani *et al.* (2012), nesses problemas, geralmente, os clientes recebem serviços de uma facilidade apenas se a distância entre os clientes e a facilidade é igual ou menor do que um valor predefinido, geralmente referido como distância ou raio de cobertura. Dentre os problemas de cobertura, podemos destacar:

- Problemas de cobertura de pontos (do inglês *set covering problems*), onde se busca a solução de menor custo na qual todos os clientes são atendidos por pelo menos um ponto de facilidade;

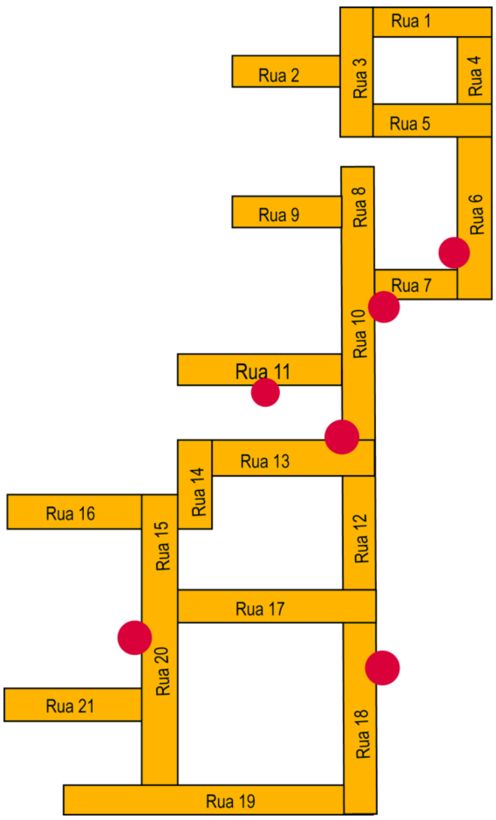
– Problemas de localização de máxima cobertura (do inglês *maximal covering location problems*), onde se busca uma solução na qual a cobertura dos clientes é otimizada.

No presente trabalho o problema tratado será modelado como um problema de cobertura. Para tanto será utilizada de uma técnica de cobertura de corredores, conforme descrito nas próximas seções.

3. Descrição do problema e da metodologia aplicada

Para desenvolvimento do modelo matemático, inicialmente foi realizado um mapeamento de todos os corredores térreos existentes em um dos prédios do Campus Acadêmico do Agreste (CAA). Também foi contabilizado o número de filtros já existentes, conforme pode ser visto na Figura 1, a seguir.

Figura 1 – Distribuição Anterior



Foram contabilizados seis filtros, quantidade que talvez fosse suficiente se todos os filtros fossem sempre abastecidos e estivessem bem distribuídos. Contudo, conforme pode ser observado na Figura 1, a distribuição apresentada concentra os filtros na parte superior do mapa. Tendo em vista que existe um ponto de ônibus fica localizado na parte inferior do mapa, existe um grande fluxo de pessoas nessa região chegando e partindo da universidade. E nessa região são alocados apenas dois filtros. Assim sendo, as pessoas que por ali passam, frequentemente utilizam-se deles por serem os primeiros filtros que podem ser acessados. Portanto, inevitavelmente, esses filtros ficam constantemente sem água. Isso faz com que os estudantes dos blocos da parte inferior do mapa precisem se locomover a uma distância razoável para ter acesso à água, o que os fazem chegar atrasados e perder certo tempo de aula na procura do filtro mais próximo que esteja abastecido.

Conforme citado na introdução deste trabalho, existe uma grande dificuldade inerente ao processo de decisão em instituições públicas. Nesse contexto, essa dificuldade surge pela falta de recursos, assim como em função de interesses conflituosos. Contudo, deve-se observar que uma boa distribuição de filtros permite: a) que os usuários localizados em distintos pontos tenham fácil acesso aos filtros; e b) que regiões de maior demanda tenham maior prioridade. Tendo como base essas observações, no presente trabalho adotou-se como proposta de melhoria a identificação de um modelo de distribuição dos filtros de água, que atende a maior porção possível do terreno, levando em conta os pontos de maior demanda e a quantidade de filtros já existentes no campus.

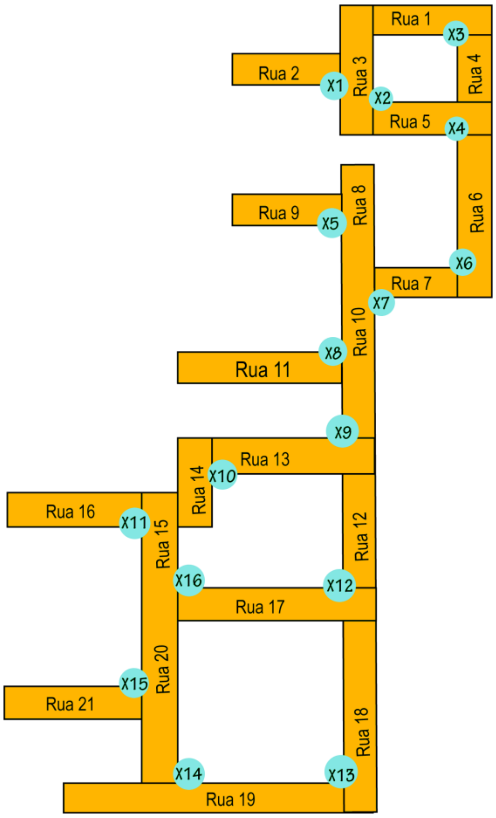
Com base nesses objetivos, adotou-se como premissa que a solução ótima seria aquela que maximizasse o número de vezes em que corredores são cobertos, respeitando as necessidades de cada área. Um corredor é considerado coberto quando possui em algum ponto de sua extensão um filtro de água.

Observe que a solução encontrada, não muda por completo o cenário da falta de água nos filtros, pois isso exigiria um trabalho referente à previsão de demanda e programação da troca dos garrafões vazios pelos colaboradores responsáveis. O nosso foco consiste basicamente em aumentar a acessibilidade e desafogar alguns pontos de alta demanda.

Para a elaboração do modelo matemático, foi observado que a melhor localização para os filtros seria em esquinas, pois essa localização permite que um maior número de corredores seja coberto, tendo em vista uma quantidade fixa de filtros. Com base nessa observação, foi realizada uma distribuição de pontos em cada esquina das ruas, e as variáveis de decisão foram definidas como variáveis binárias associadas à alocação dos filtros em cada ponto, sendo atribuído valor 1, se alocado o filtro em determinada esquina, ou 0, caso contrário.

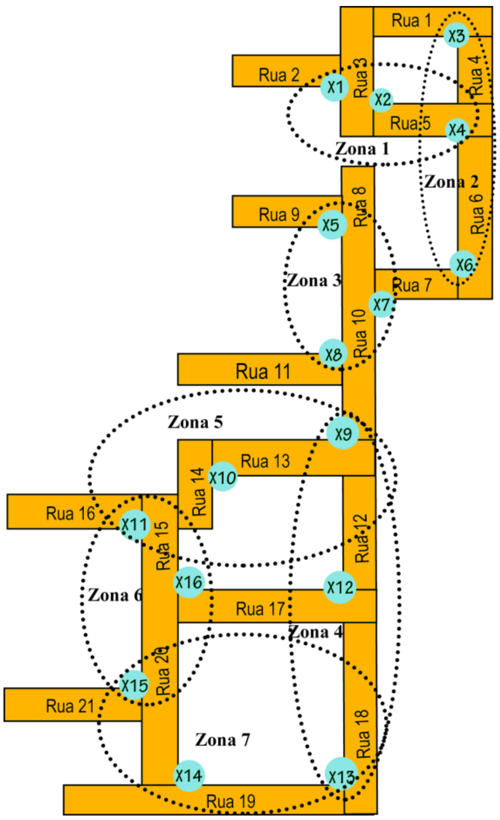
Foi feito um levantamento que resultou em 21 ruas, e as esquinas foram então definidas como possíveis pontos onde os filtros poderiam ser alocados. Contudo não foram marcados todos os pontos em esquinas possíveis. Isso porque considerou-se que algumas esquinas são muito próximas, tornando desnecessárias algumas marcações. Essa consideração foi adotada no intuito de simplificar o processo de solução do problema - usando menos variáveis de decisão - e ao mesmo tempo, melhorar a solução encontrada. Com essa distribuição de possíveis pontos onde os filtros podem ser alocados, o problema apresentou 16 variáveis de decisão, conforme ilustrado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 – Variáveis de Decisão



Buscando atender a objetivos específicos de localização, ou seja, garantir que áreas específicas fossem cobertas de acordo com sua demanda, a área total considerada foi dividida em zonas, tendo cada zona uma demanda específica. Estas zonas consistem em um agrupamento de ruas, para as quais é definida uma quantidade mínima de filtros a serem alocados. As zonas foram escolhidas por proximidade entre elas, de modo que ficassem bem distribuídas por todo o terreno, como pode ser observado na Figura 3, a seguir.

Figura 3 – Zonas de Demanda



4. Modelo matemático

Com base nas considerações apresentadas na seção anterior, foi elaborado um modelo matemático para o problema tratado, conforme descrito a seguir:

Sendo:

n o número de possíveis locais para alocação dos filtros;
m o número de zonas de ruas agrupadas;
I_j o conjunto de ruas da zona j, para $j = 1, \ldots, m$;
NMF_j o número mínimo de filtros a serem alocados na zona j, para $j = 1, \ldots, m$;
FD a quantidade total de filtros disponíveis para alocação;
r_i a quantidade de ruas que são interceptadas pelo local i, para $i = 1, \ldots, n$.

Dado que:

$$x_i = \begin{cases} 1, se\ o\ ponto\ i\ for\ selecionado\ para\ alocação\ de\ um\ filtro \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

$$Maximizar\ Z = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i \in I_j} x_i \geq NMF_j, \quad para\ j = 1, \ldots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq FD \quad (3)$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad para\ i = 1, \ldots, n \quad (4)$$

Onde a função objetivo (1) busca maximizar o número de vezes em que as ruas são cobertas. As restrições em (2) garantem que em cada zona j seja alocado o número mínimo de filtros exigidos (NMF_j). A restrição (3) garante que o número total de filtros alocados não seja maior do que o número de filtros disponíveis. E, finalmente, as restrições em (4) informam a natureza binária das variáveis de decisão consideradas no modelo.

5. Resultados e Discussões

Para validação do modelo foram considerados os dados levantados, conforme descritos na seção 3, e especificados na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Dados utilizados para a validação do modelo

Número de filtros disponíveis (FD)	6
Número mínimo de filtros (NMF_j) cada setor j	1
Número de possíveis locais de filtros (n)	16
Número de setores (m)	7

Observe que o problema foi modelado apenas para a parte térrea do campus, onde existem alguns laboratórios, uma biblioteca e várias salas de aula. Dessa forma pode ser aferido o mesmo grau de importância para todas as zonas, sem priorizações hierárquicas. Isso não aconteceria no caso do mapeamento do andar superior, que contém menos salas, sendo a maioria delas designadas a professores e serviços administrativos. O problema foi resolvido dessa forma porque foi entendido que, caso o andar superior fosse considerado, as priorizações necessárias levariam a uma indução muito alta no resultado do modelo. Observe que, na contagem dos filtros, também não foram considerados os filtros localizados no andar superior, tendo em vista que não se busca aqui a redistribuição dos mesmos.

Para a validação do modelo, o problema matemático em questão foi resolvido com a utilização do Excel 2013, através da ferramenta solver. Com a utilização dos dados apresentados na Tabela 1, foi encontrado o resultado ótimo gerado pela ferramenta para o modelo elaborado, conforme pode ser visto na Tabela 2, a seguir.

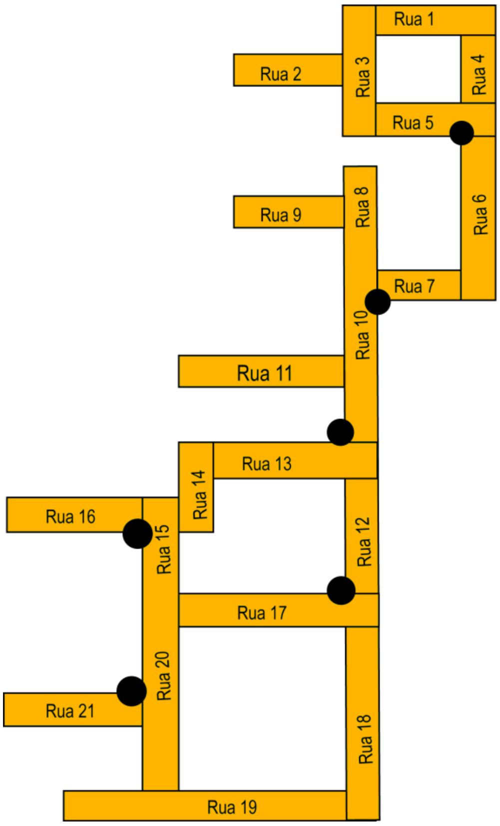
Tabela 2 – Resultado ótimo

Função	Variáveis de Decisão															
Objetivo	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16
Nº de ruas em cada variável	2	2	2	3	2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2	3
Variável Ideal	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
Z =	17															

Essa tabela mostra o resultado dos pontos selecionados matematicamente para que a disposição dos filtros de água seja otimizada segundo o modelo, e os pontos foram: $x_4, x_7, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}$. Com isso, também podemos também verificar a quantidade de ruas que possuem filtros de água em sua extensão, e esse número é 16. Apesar do resultado da função objetivo mostrar 17. Essa diferença ocorre devido à função objetivo buscar a maximização das vezes em que as ruas foram cobertas e não do número de ruas cobertas.

A Figura 4 ilustra graficamente como ficou a nova distribuição dos filtros de água na planta da universidade. Observe que a Rua 10 está coberta por filtros nas suas duas extremidades.

Figura 4 – Distribuição ótima



Essa solução permitiu não apenas melhorar a distribuição dos filtros, mas também aumentar o número de ruas cobertas de 52,38% para 76,19%, ou seja, um aumento de cobertura muito significativo. É um resultado satisfatório para com os objetivos almejados, e mostra o que pode ser alcançado através de uma ferramenta matemática.

Observe que não se buscou aqui priorizar os alunos que participam das aulas nos pontos mais próximos ao ponto de ônibus, contudo os mesmos foram beneficiados com a distribuição proposta, tendo em vista que na região inferior foi posicionado mais um filtro de água, diminuindo, portanto, o problema de falta d’água próximo ao ponto de ônibus.

6. Conclusão

No presente trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para o problema de localização de filtros do Centro Acadêmico do Agreste - UFPE, buscando proporcionar uma melhor distribuição dos filtros e desta forma melhor atender a demanda dos alunos na universidade. O modelo foi resolvido em Excel 2013, através da ferramenta solver. Como resultado foi possível constatar que modelo proposto, assim como as metodologias e ferramentas aplicadas, permitiram a identificação de uma melhor distribuição dos filtros, aumentando significativamente o número de corredores cobertos. Esse resultado comprovou que o modelo elaborado pode propor soluções razoáveis, melhorando a satisfação dos alunos, e lidando de forma efetiva contra os problemas de falta de recursos e conflitos políticos, típicos de instituições públicas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), à PROPESQ - UFPE (Pró-Reitoria para Assuntos de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Federal de Pernambuco) e à PROExC - UFPE (Pró-reitoria de Extensão e Cultura da Universidade Federal de Pernambuco), cujo apoio financeiro vem proporcionando a realização e divulgação de nossos trabalhos.

REFERÊNCIAS

COLOMBO, Fabio, CORDONE, Roberto e LULLI, Guglielmo. The multimode covering location problem. **Computers & Operations Research**, 67, p. 25-33, 2016.

DASKIN, Mark S. e MURRAY, Alan T. Modeling Public Sector Facility Location Problems. **Socio-Economic Planning Sciences**, 46, p. 111, 2012.

FARAHANI, Reza Zanjirani, STEADIESEIFI, Maryam e ASGARI, Nasrin. Multiple criteria facility location problems: A survey. **Applied Mathematical Modelling**, 34, p. 1689-1709, 2010.

REVELLE, C.S., EISELT, H.A. e DASKIN, M.S. A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science. **European Journal of Operational Research**, 184, p. 817-848, 2008.