

Livro em processo de elaboração.

Título: Combinatorial Optimization Problems

Autora: Tatiana Balbi Fraga.

Profa. do Núcleo de Tecnologia da UFPE.

Caso tenha interesse em participar da elaboração deste livro, enviar e-mail para: [tatiana.balbi@ufpe.br](mailto:tatiana.balbi@ufpe.br).

O mesmo endereço de e-mail poderá ser utilizado para críticas e sugestões. Desde já agradeço por qualquer contribuição.

O conteúdo apresentado neste livro estará sendo modificado ao longo de sua elaboração, caso o mesmo seja consultado para elaboração de algum trabalho, favor citar como referência o título, a autora, a data da consulta e o endereço da versão consultada no github.



## Chapter 1

# Problemas de Otimização Combinatória

Quando não é possível desenvolver um método de solução para um determinado problema de otimização combinatória, recorreremos a algoritmos baseados em heurísticas. Neste contexto, há três pontos-chaves que devem ser observados que são: representação da solução; criação de solução inicial / nova solução dentro do espaço viável; e mecanismo de conversão.

Neste livro pretendo apresentar uma revisão da literatura (ou definição própria) focada nestes três tópicos, iniciando a abordagem sobre problemas de designação, depois passando pelos problemas de balanceamento, roteamento, e escalonamento até finalmente chegar aos complexos problemas mistos. Também serão apresentados outros problemas com os quais tenho trabalhado.

Com vista a este propósito, o livro será dividido em seis capítulos, sendo os dois primeiros capítulos voltados à apresentação de importantes classes de problemas de otimização combinatória (problemas de otimização combinatória e modelagem matemática), os três capítulos seguintes voltados aos três pontos-chaves anteriormente discutidos (representação de soluções, construção de soluções viáveis e mecanismos de busca), e o último capítulo será utilizado para a apresentação de algoritmos conhecidos aplicados aos diferentes problemas e uma comparação entre tais algoritmos.

Esse livro partiu da ideia da criação de um solver capaz de solucionar problemas de otimização combinatória de diferentes classes.

Este solver terá como princípio a identificação da natureza do problema, possivelmente através de um algoritmo de rede neural, e posterior solução focando em métodos matemáticos conhecidos ou nos três pontos-chaves anteriormente discutidos.

Assim sendo, este livro será construído em conjunto com o solver (em C++), o qual poderá ser encontrado na pasta solver deste mesmo diretório.

Este projeto estará sendo desenvolvido em conjunto com outros projetos, de forma que não será possível desenvolvê-lo muito rapidamente...

Espero que essa ideia resulte em um material muito útil, relevante e interessante.

## 1.1 Problema de dimensionamento do tempo de processamento de lotes de produção

*PS: Esbarrei neste problema recentemente, quando eu estava desenvolvendo um solver para planejamento da produção em extrusoras. Segue a modelagem matemática e solução analítica desenvolvidos por mim para o problema com um pequeno exemplo de aplicação. Em breve estarei desenvolvendo um solver para este problema com aplicação deste método analítico, para solução de problemas maiores. Também estaremos criando benchmarks. É possível que façamos uma comparação com o método do plano de corte (nesse caso será necessário programar também este último método - parece perda de tempo). Mas certamente poderemos fazer uma comparação com outras formas de solução (solvers) desenvolvidas para problemas de programação linear inteira.*

O problema de dimensionamento do tempo de processamento de lotes de produção surge quando um conjunto de produtos distintos são processados simultaneamente em um mesmo lote de produção, sendo a quantidade produzida de cada produto diretamente proporcional ao tempo de processamento, contudo, com taxa de produção (quantidade/(unidade de tempo)) diferente para cada produto. Neste problema consideramos que há uma quantidade máxima permitida para a produção dos produtos do lote, definida tanto individualmente como para o conjunto, já que existe uma quantidade máxima de produção para cada produto e uma quantidade máxima de produção definida para o conjunto. A quantidade máxima de produção de cada produto é definida de acordo com a demanda do produto. Contudo é ainda possível estocar os produtos e/ou enviá-los para as lojas de fábrica. Tanto no caso do estoque em fábrica quanto no caso das lojas de fábrica, existe um limite para estocagem/envio de cada produto e um limite de estocagem/envio para o conjunto de produtos do lote. O problema consiste em definir o maior tempo de processamento do lote viável considerando um período fixo de planejamento e demanda variável dentro deste período.

### 1.1.1 Exemplo

Determinada máquina deve processar um lote contendo 2 produtos distintos: A e B.

A taxa de produção de A é de 60 g/min enquanto que a taxa de produção de B é de 40 g/min.

A fábrica tem estoque livre para no máximo 3000 g de qualquer produto, sendo que, de acordo com o estoque máximo permitido para cada produto, poderá ser estocado na fábrica mais 3000 g do produto A e 2000 g do produto B.

Existe uma demanda de 1000 g do produto A e 500 g do produto B para entrega no primeiro e segundo dia de planejamento, respectivamente.

A fábrica tem um outlet que tem espaço livre em estoque de 1000 g, podendo receber no máximo 600 g de cada produto.

Um tempo máximo de 300 minutos desta máquina pode ser atribuído para processamento deste lote.

Qual é o tempo de processamento deste lote ?

## 1.2 Modelagem matemática

sendo:

$UD_i$  a demanda referente ao produto  $i$ ;

$I$  a quantidade máxima permitida para estocagem em fábrica de todos os produtos;

$UI_i$  a quantidade máxima permitida para estocagem em fábrica do produto  $i$ ;

$O$  a quantidade máxima permitida para envio de todos os produtos para as lojas de fábrica;

$UO_i$  a quantidade máxima do produto  $i$  que pode ser enviada para as lojas de fábrica;

$p_i$  a taxa de produção do produto  $i$ ;

$Z$  tempo limite para processamento do lote;

queremos definir tempo máximo de processamento do lote,  $T$ .

assim sendo, considerando que:

$P_i$  a quantidade produzida do produto  $i$  (unidades);

$$P_i - p_i * T = 0 \quad \forall i$$

$$P_i - D_i - O_i - I_i = 0 \quad \forall i$$

$D_i$  a quantidade entregue para demanda do produto  $i$ ;

$$D_i \leq UD_i \quad \forall i$$

$O_i$  quantidade do produto  $i$  enviado para as lojas de fábrica;

$$O_i \leq UO_i \quad \forall i$$

$$\sum_i O_i \leq O$$

$I_i$  a quantidade do produto  $i$  que será estocado em fábrica;

$$I_i \leq UI_i \quad \forall i$$

$$\sum_i I_i \leq I$$

e, por ultimo temos as restrições relacionadas às variáveis de decisão:

$$D_i, O_i, I_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i$$

Portanto temos o problema de otimização:

$$\max \quad T$$

*s.t.*

$$P_i - p_i * T = 0 \quad \forall i$$

$$P_i - D_i - O_i - I_i = 0 \quad \forall i$$

$$D_i \leq UD_i \quad \forall i$$

$$O_i \leq UO_i \quad \forall i$$

$$\sum_i O_i \leq O$$

$$I_i \leq UI_i \quad \forall i$$

$$\sum_i I_i \leq I$$

$$T \leq Z$$

$$D_i, O_i, I_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i$$

### 1.3 Solução analítica e matemática

1) Na verdade não há diferença entre a quantidade que será estocada e a quantidade que será enviada para as lojas de fábrica. Assim, podemos considerar o estoque na fábrica e nas lojas de fábrica como sendo um único estoque.

$$E_i = O_i + I_i \quad \forall i$$

$$E_i \leq UO_i + UI_i \quad \forall i$$

$$\sum_i E_i \leq O + I \quad \forall i$$

2) Portanto podemos resolver o problema de uma forma recursiva:

- primeiro resolvemos um problema menor, considerando apenas a quantidade necessária para atender à demanda

- encontramos máximo  $T'$  que atende o conjunto de equações:

$$D_i \leq UD_i \quad \forall i$$

Assim, temos:

$$T' \leq UD_i/p_i \quad \forall i$$

- então calculamos a sobra (quantidade da demanda não atendida)

$$S_i = UD_i - p_i * T' \quad \forall i$$

- em seguida encontramos máximo  $T''$  resolvendo as equações:

$$E_i - S_i \leq UO_i + UI_i \quad \forall i$$

$$\sum_i (E_i - S_i) \leq O + I$$

Portanto, temos:

$$T'' \leq (UO_i + UI_i + S_i)/p_i \quad \forall i$$

$$T'' \leq (O + I + \sum_i (S_i)) / \sum_i (p_i)$$

Assim temos que:

$$T = T' + T''$$

Então se  $T < Z$ ,  $T$  encontrado será a solução ótima.

Caso contrário, teremos então  $T = Z$  como solução ótima.

### 1.3.1 Solução para o exemplo apresentado na seção 1.1.1

Resolvendo o problema apresentado na seção 1.1.1 através do método analítico, temos:

$$T' \leq 1000g/60g/min$$

$$T' \leq 16,67min \quad \text{para o produto A}$$

$$T' \leq 500g/40g/min$$

$$T' \leq 12,50min \quad \text{para o produto B}$$

ou seja:

$$T' = 12$$

Assim, temos:

$$S_A = 1000g - 12min * 60g/min = 280g$$

$$S_B = 500g - 12min * 40g/min = 20g$$

E então, temos:

$$T'' \leq (3000g + 600g + 280g)/60g/min$$

$$T'' \leq 64,67min \quad \text{para o produto A}$$

$$T'' \leq (2000g + 600g + 20g)/40g/min$$

$$T'' \leq 65,50min \quad \text{para o produto B}$$

$$T'' \leq (1000g + 3000g + 300g)/100g/min$$



$$T'' \leq 43min$$

De forma que

$$T'' = 43min$$

Assim temos que:

$$T = 55min$$

Como  $T < Z$ , então essa será certamente a solução ótima.

Nesse caso teremos:

$$P_A = 3300g \text{ e } P_B = 2200g$$

$$D_A = 1000g \text{ e } D_B = 500g$$

$$E_A = 2300g \text{ e } E_B = 1700g$$

Observe que não é importante conhecer os valores de  $O_i$  e  $I_i$  contudo estes valores podem ser encontrados resolvendo o sistema de equações:

$$\sum_i O_i \leq O$$

$$\sum_i I_i \leq I$$

Sendo este um sistema de equações com múltiplas soluções possíveis.