Livro em processo de elaboração.

Título: Combinatorial Optimization Problems

Autora: Tatiana Balbi Fraga.

Profa. do Núcleo de Tecnologia da UFPE.

Caso tenha interesse em participar da elaboração deste livro, enviar e-mail para: tatiana.balbi@ufpe.br.

O mesmo endereço de e-mail poderá ser utilizado para críticas e sugestões. Desde já agradeço por qualquer contribuição.

O conteúdo apresentado neste livro estará sendo modificado ao longo de sua elaboração, caso o mesmo seja consultado para elaboração de algum trabalho, favor citar como referência o título, a autora, a data da consulta e o endereço da versão consultada no github.

Chapter 1

Problemas de Otimização Combinatória

Quando não é possível desenvolver um método de solução para um determinado problema de otimização combinatória, recorremos a algoritmos baseados em heurísticas. Neste contexto, há três pontos chaves que devem ser observados que são: representação da solução; criação de solução inicial / nova solução dentro do espaço viável; e mecanismo de conversão.

Neste livro pretendo apresentar uma revisão da literatura (ou definição própria) focada nestes três tópicos, iniciando a abordagem sobre problemas de designação, depois passando pelos problemas de balanceamento, roteamento, e escalonamento até finalmente chegar aos complexos problemas mistos. Também serão apresentados outros problemas com os quais tenho trabalhado.

Com vista a este propósito, o livro será dividido em seis capítulos, sendo os dois primeiros capítulos voltados à apresentação de importantes classes de problemas de otimização combinatória (problemas de otimização combinatória e modelagem matemática), os três capítulos seguintes voltados aos três pontos chaves anteriormente discutidos (representação de soluções, construção de soluções viáveis e mecanismos de busca), e o último capítulo será utilizado para a apresentação de algoritmos conhecidos aplicados aos diferentes problemas e uma comparação entre tais algoritmos.

Esse livro partiu da ideia da criação de um solver capaz de solucionar problemas de otimização combinatória de diferentes classes.

Este solver terá como princípio a identificação da natureza do problema, possivelmente através de um algoritmo de rede neural, e posterior solução focando em métodos matemáticos conhecidos ou nos três pontos chaves anteriormente discutidos.

Assim sendo, este livro será construído em conjunto com o solver (em C++), o qual poderá ser encontrado na pasta solver deste mesmo diretório.

Este projeto estará sendo desenvolvido em conjunto com outros projetos, de forma que não será possível desenvolvê-lo muito rapidamente...

Espero que essa ideia resulte em um material muito útil, relevante e interessante.

1.1 Problema de dimensionamento do tempo de processamento de lotes de produção

PS: Esbarrei neste problema recentemente, quando eu estava desenvolvendo um solver para planejamento da produção em extrusoras. Segue a modelagem matemática e solução analítica desenvolvidos por mim para o problema com um pequeno exemplo de aplicação. Em breve estarei desenvolvendo um solver para este problema com aplicação deste método analítico, para solução de problemas maiores. Também estaremos criando benchmarks. É possível que façamos uma comparação com o método do plano de corte (nesse caso será necessário programar também este ultimo método - parece perda de tempo). Mas certamente poderemos fazer uma comparação com outras formas de solução (solvers) desenvolvidas para problemas de programação linear inteira.

O problema de dimensionamento do tempo de processamento de lotes de produção surge quando um conjunto de produtos distintos são processados simultaneamente em um mesmo lote de produção, sendo a quantidade produzida de cada produto diretamente proporcional ao tempo de processamento, contudo, com taxa de produção (quantidade/(unidade de tempo)) diferente para cada produto. Neste problema consideramos que há uma quantidade máxima permitida para a produção dos produtos do lote, definida tanto individualmente como para o conjunto, já que existe uma quantida máxima de produção para cada produto e uma quantida máxima de produção definida para o conjunto. A quantidade máxima de produção de cada produto é definida de acordo com a demanda do produto. Contudo é ainda possível estocar os produtos e/ou enviá-los para as lojas de fábrica. Tanto no caso do estoque em fábrica quanto no caso das lojas de fábrica, existe um limite para estocagem/envio de cada produto e um limite de estocagem/envio para o conjunto de produtos do lote. O problema consiste em definir o maior tempo de processamento do lote viável considerando um período fixo de planejamento e demanda variável dentro deste período.

1.1.1 Exemplo

Determinada máquina deve processar um lote contendo 2 produtos distintos: A e B.

A taxa de produção de A é de 60 g/min enquanto que a taxa de produção de B é de 40 g/min.

A fábrica tem estoque livre para no máximo 3000 g de qualquer produto, sendo que, de acordo com o estoque máximo permitido para cada produto, poderá ser estocado na fábrica mais 3000 g do produto A e 2000 g do produto B.

Existe uma demanda de 1000 g do produto A e 500 g do produto B para entrega no primeiro e segundo dia de planejamento, respectivamente.

A fábrica tem um outlet que tem espaço livre em estoque de 1000 g, poderendo receber no máximo 600 g de cada produto.

Um tempo máximo de 300 minutos desta máquina pode ser atribuído para processamento deste lote.

Qual é o tempo máximo possível para processamento deste lote ?

1.2 Modelagem matemática

sendo:

UD_i a demanda referente ao produto i;

I a quantidade máxima permitida para estocagem em fábrica de todos os produtos;

UI_i a quantidade máxima permitida para estocagem em fábrica do produto i;

O a quantidade máxima permitida para envio de todos os produtos para as lojas de fábrica;

UO_i a quantidade máxima do produto i que pode ser enviada para as lojas de fábrica;

p_i a taxa de produção do produto i;

Z tempo limite para processamento do lote;

queremos definir tempo máximo de processamento do lote, T.

assim sendo, considerando que:

P_i a quantidade produzida do produto i (unidades);

$P_i - \mathrm{p}_i * T = 0 \quad \forall i$

$P_i - D_i - O_i - I_i = 0 \quad \forall i$

D_i a quantidade entregue para demanda do produto i;

$D_i \leq \mathrm{UD}_i \quad \forall i$

O_i quantidade do produto i enviado para as lojas de fábrica;

$O_i \leq \mathrm{UO}_i \quad \forall i$

$\sum_i O_i \leq \mathrm{O}$

I_i a quantidade do produto i que será estocado em fábrica;

$I_i \leq \mathrm{UI}_i \quad \forall i$

$\sum_i I_i \leq \mathrm{I}$

e, por ultimo temos as restrições relacionadas às variáveis de decisão:

$D_i, O_i, I_i \in \mathrm{Z}^+ \quad \forall i$

Portanto temos o problema de otimização:

$max \quad T$

$s.t.$

$P_i - \mathrm{p}_i * T = 0 \quad \forall i$

$P_i - D_i - O_i - I_i = 0 \quad \forall i$

$D_i \leq \mathrm{UD}_i \quad \forall i$

$O_i \leq \mathrm{UO}_i \quad \forall i$

$\sum_i O_i \leq \mathrm{O}$

$I_i \leq \mathrm{UI}_i \quad \forall i$

$\sum_i I_i \leq \mathrm{I}$

$T \leq \mathrm{Z}$

$D_i, O_i, I_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i$

1.3 Solução analítica e matemática

1) Na verdade não há diferença entre a quantidade que será estocada e a quantidade que será enviada para as lojas de fábrica. Assim, podemos considerar o estoque na fábrica e nas lojas de fábrica como sendo um único estoque.

$E_i = O_i + I_i \quad \forall i$

$E_i \leq \mathrm{UO}_i + \mathrm{UI}_i \quad \forall i$

$\sum_i E_i \leq \mathrm{O} + \mathrm{I}$

2) Portanto podemos resolver o problema de uma forma recursiva:

- primeiro resolvemos um problema menor, considerando apenas a quantidade necessária para atender à demanda

– encontramos máximo T' que atende o conjunto de equações:

$D_i \leq \mathrm{UD}_i \quad \forall i$

Assim, temos:

$T' \leq \mathrm{UD}_i/\mathrm{p}_i \quad \forall i$

– então calculamos a sobra (quantidade da demanda não atendida para cada produto)

$S_i = \mathrm{UD}_i - \mathrm{p}_i * T' \quad \forall i$

- em seguida encontramos máximo T" resolvendo as equações:

$E_i - S_i \leq \mathrm{UO}_i + \mathrm{UI}_i \quad \forall i$

$\sum_i (E_i - S_i) \leq \mathrm{O} + \mathrm{I}$

De onde, temos:

$T'' \leq (\mathrm{UO}_i + \mathrm{UI}_i + S_i)/\mathrm{p}_i \quad \forall i$

$T'' \leq (\mathrm{O} + \mathrm{I} + \sum_i (S_i))/\sum_i (\mathrm{p}_i)$

Assim temos que:

$T = T' + T''$

Então se $T <$ Z, T encontrado será a solução ótima.

Caso contrário, teremos então $T = Z$ como solução ótima.

1.3.1 Solução para o exemplo apresentado na seção 1.1.1

Resolvendo o problema apresentado na seção 1.1.1 através do método analítico, temos:

$T' \leq 1000g/60g/min$

$T' \leq 16,67min$ para o produto A

$T' \leq 500g/40g/min$

$T' \leq 12,50min$ para o produto B

ou seja:

$T' = 12$

Assim, temos:

$S_A = 1000g - 12min * 60g/min = 280g$

$S_B = 500g - 12min * 40g/min = 20g$

E então, temos:

$T'' \leq (3000g + 600g + 280g)/60g/min$

$T'' \leq 64,67min$ para o produto A

$T'' \leq (2000g + 600g + 20g)/40g/min$

$T'' \leq 65,50min$ para o produto B

$T'' \leq (1000g + 3000g + 300g)/100g/min$

$T'' \leq 43min$

De forma que

$T'' = 43min$

Assim temos que:

$T = 55min$

Como $T <$ Z, então essa será certamente a solução ótima.

Nesse caso teremos:

$P_A = 3300g$ e $P_B = 2200g$

$D_A = 1000g$ e $D_B = 500g$

$E_A = 2300g$ e $E_B = 1700g$

Observe que não é importante conhecer os valores de O_i e I_i contudo estes valores podem ser encontrados resolvendo o sistema de equações:

$\sum_i O_i \leq \mathrm{O}$

$\sum_i I_i \leq \mathrm{I}$

Sendo este um sistema de equações com múltiplas soluções possíveis.