PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

APLICADAS EM CONFIABILIDADE

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE
APLICADAS EM CONFIABILIDADE

De acordo com o tipo de variável

- **Discreta**
  - Assume valores inteiros (enumerável)
  - são obtidas por um processo de contagem
  - Exemplo: nº de falhas observadas
- **Contínua**
  - Assume qualquer valor real dentro de um intervalo (não enumerável)
  - São obtidas por um processo de medição
  - Exemplo: intervalo de tempo entre falhas

Aplica-se a distribuição de probabilidade que melhor reproduza o evento sob estudo

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE
APLICADAS EM CONFIABILIDADE

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETAS

- **BINOMIAL**
- **POISSON**

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

- **EXPONENCIAL**
- **NORMAL**
- **WEIBULL**

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

- ## A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Aplicada quando há dois eventos possíveis (mutuamente exclusivos) com probabilidades mensuráveis e não variáveis no tempo*:

- **O evento de interesse**
- **O evento complementar**

- ## função de probabilidade

$$Pr(X) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

Pr(x) = probabilidade de ocorrer um evento "x" vezes
n = número de repetições do experimento
x = número de ocorrências de um evento particular
(n-x) = número de ocorrências do evento complementar
p = probabilidade de ocorrência de um evento particular
(1-p) = q = probabilidade de ocorrência do evento complementar

Distribuição Binomial

Exemplo: Uma usina geradora dispõe de três máquinas idênticas, cuja confiabilidade para o período de missão é R. Se duas das três máquinas devem operar a fim de que o sistema de potência seja suprido, qual a confiabilidade da usina para o período de missão?

Solução

Pela distribuição Binomial, X é a variável aleatória discreta

X = nº de máquinas que funcionam ou X = nº de máquinas que falham

$R_{Us} = P(X \geq 2) = P(X>1)$ p=R e q=1-R

$R_{Us} = P(X=2) + P(X=3)$

$P(X=2) = 3R^2(1-R)$

$P(X=3) = R^3$

$R_{Us} = 3R^2 - 2R^3$

$R_{Us} = P(X<2) = P(X \leq 1)$ p=1-R e q=R

$R_{Us} = P(X=1) + P(X=0)$

$P(X=1) = 3(1-R)R^2$

$P(X=0) = R^3$

$R_{Us} = 3R^2 - 2R^3$

Distribuição Binomial

- **Resolvendo pela árvore de possibilidades:**

1. $RRR = R^3$
2. $RR(1-R) = R^2(1-R)$
3. $R(1-R)R = R^2(1-R)$ $\quad 3R^2(1-R) \quad R^3 + 3R^2(1-R) = 3R^2 - 2R^3$
4. $(1-R)RR = R^2(1-R)$
5. $R(1-R)(1-R)$
6. $(1-R)R(1-R)$
7. $(1-R)(1-R)R$
8. $(1-R)(1-R)(1-R)$

Que corresponde ao binômio de Newton de ordem 3: $(a+b)^3$

Distribuição Binomial

- **A expansão binomial**

Função probabilidade cumulativa

$$Pr(x \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

$$\textit{Média} \quad \mu = E(X) = np \quad e$$
$$\textit{Variância} \quad \sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$

Um experimento aleatório com n tentativas, de modo que:

1. As tentativas sejam independentes
2. Cada tentativa só admite dois resultados: "*sucesso*" ou "*falha*"
3. A probabilidade de sucesso em cada tentativa permanece constante

É chamado de um ***experimento binomial***

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

- ## A DISTRIBUIÇÃO POISSON

Aplicada quando há apenas um evento de interesse em um intervalo, cuja probabilidade é expressa através de uma taxa de ocorrência.

- **A não ocorrência do evento não tem interesse para o estudo**

- **função de probabilidade**

$$Pr(X) = \frac{e^{-\lambda t}.(\lambda t)^{x}}{x!}$$

Pr(x) = probabilidade de ocorrer um evento "*x*" vezes
λ = taxa de ocorrência de um evento particular
t = intervalo de observação
x = número de ocorrências de um evento particular

Distribuição de Poisson

Exemplo: O número de chamadas telefônicas que chegam a uma central telefônica é freqüentemente modelado como uma variável aleatória de Poisson. Considere que, em média, há 10 chamadas por hora.

a. Qual é a probabilidade de que haja exatamente 5 chamada em uma hora?

b. Qual é a probabilidade de que haja 3 ou menos chamadas em uma hora?

c. Qual é a probabilidade de que haja exatamente 15 chamadas em duas horas?

d. Qual é a probabilidade de que haja exatamente 5 chamadas em 30 minutos?

e. Qual a probabilidade de que haja entre 3 e 5 chamadas em uma hora?

Solução

Pela distribuição de Poisson, X é a variável aleatória discreta

X = nº de chamadas $\quad t_{(a)}$ = 1hora; $t_{(b)}$ = 1hora; $t_{(c)}$ =2horas; $t_{(d)}$ = 0,5hora e

λ= 10 chamadas/hora $\quad t_{(e)}$ = 1hora

Distribuição de Poisson

Calculando:

a. P(X=5) = [exp(-10.1).(10.1)^5] / (5)! = 0,0378

b. P(X≤3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = $\sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-10.1}(10.1)^x}{x!}$

$$= e^{-10} \sum_{x=0}^{3} \frac{10^x}{x!} = 0{,}0103$$

c. P(X=15) = [exp(-10.2).(10.2)^{15}] / (15)! = 0,0516

d. P(X=5) = [exp(-10.0,5).(10.0,5)^5] / (5)! = 0,1755

e. P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = P(X≤ 5) – P (X≤2) = 0,0643

Distribuição de Poisson

- **A expansão de Poisson**

Função probabilidade cumulativa

$$Pr(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \frac{exp(-\lambda t).(\lambda t)^{x}}{x!}$$

$$Média \quad \mu = E(X) = \lambda \quad e$$

$$var\ iância\ \sigma^{2} = V(X) = \lambda$$

Dado um intervalo, suponha que uma contagem ocorra através desse intervalo. Se o intervalo puder ser dividido em subintervalos bastante pequenos tal que:

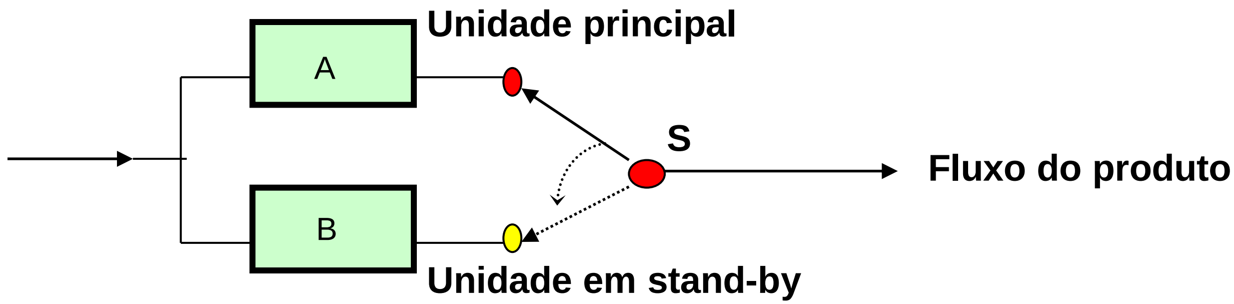
1. A probabilidade de mais de um evento em um subintervalo é zero

2. A probabilidade de um evento seja constante em cada subintervalo e proporcional ao seu tamanho

3. Cada subintervalo seja independente dos outros

Então o experimento aleatório será chamado de processo de Poisson.

Sistema STAND-BY



Sistema com chaveamento perfeito Ps(t)=100%

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{\ \lambda t}}{x!}$$

P(zero falha no sistema) = $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

P(exatamente um componente falhar) = $P_1(t) = \lambda t.e^{-\lambda t}$

Como o sistema admite até uma falha, a confiabilidade é dada por:

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t) \Rightarrow R(t) = (1+\lambda t).e^{-\lambda t}$$

1- Sistemas com chaveamento perfeito

Seja um sistema constituído de dois componentes, cujo tempo até a falha seja exponencialmente distribuído e um elemento de manobra entre eles com 100% de confiabilidade.

Para esse arranjo, o primeiro elemento **A** é denominado de unidade principal e permanece em funcionamento até a ocorrência de uma falha, quando acontece a comutação da chave **S** conectando o segundo elemento **B** que substitui a unidade principal, conforme figura acima. Considerando que os componentes apresentem a mesma taxa de falhas, o sistema permite a análise usando a distribuição de Poisson:

$$\boxed{P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{\ \lambda t}}{x!}}$$

Onde:

P(zero falha no sistema) = $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

P(exatamente um componente falhar) = $P_1(t) = \lambda t \,.\, e^{-\lambda t}$

Como o sistema admite até uma falha, a confiabilidade é dada por:

$R(t) = P_0(t) + P_1(t)$

$R(t) = (1+\lambda t)\, e^{-\lambda t}$

Obs.: Para sistemas com diferentes taxas de falhas, o modelo é mais complexo.

Se o sistema apresentar duas unidades em stand-by, os mesmos princípios se aplicam, sendo agora admitidas até duas falhas individuais:

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t)$$

$$R(t) = [1+\lambda t + (\lambda t)^2/2]\ e^{-\lambda_1 t}$$

Por analogia, se o sistema apresentar n unidades em stand-by, a expressão para a confiabilidade ficará:

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \ldots\ldots\ldots + P_n(t)$$

$$R(t) = [1+\lambda t + (\lambda t)^2/2 + (\lambda t)^3/3 + \ldots\ldots + (\lambda t)^n/n]\ e^{-\lambda_1 t}$$

O tempo médio para a falha (MTTF) de um sistema com uma unidade em stand-by é dado por:

$$\boxed{\text{MTTF} = \int_0^{\infty} (1+\lambda t)\cdot e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}}$$

2- Sistemas com chaveamento imperfeito

Na realidade, a confiabilidade do elemento de manobra para as comutações assume um determinado valor P_s que é a probabilidade de sucesso do sistema composto do sensor e da chave propriamente dita (comutação automática). O valor de P_s pode ser estabelecido por:

$$P_s = \frac{\text{Número de comutações com sucesso}}{\text{Número de vezes que o sistema é solicitado}}$$

Se o elemento de manobra obedece a uma lei de distribuição de probabilidade, o valor médio ou esperado para P_s pode ser utilizado.

No caso do sistema com dois componentes, a operação com sucesso necessita que nenhuma falha ocorra (zero falhas) ou uma falha do componente ocorra e o chaveamento tenha sucesso.

Usando a lógica anterior, temos:

P(zero falhas) = $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

P(exatamente uma falha e chaveamento com sucesso) = $P_1(t).\ P_s$

$$= \lambda t\ .\ e^{-\lambda t}.\ P_s$$

Logo:

$$\boxed{R(t) = (1 + \lambda t\ .\ P_s).\ e^{-\lambda t}}$$

Este resultado pode ser facilmente estendido para sistemas com múltiplos stand-by, ponderando cada termo com P_s. Pode ser introduzida uma complexidade adicional para o caso de se considerar uma probabilidade de sucesso no chaveamento variável $P_s(t)$, que terá diferentes valores para cada termo da equação.

O tempo médio para a falha do sistema com chaveamento imperfeito é:

$$\boxed{MTTF = \int_0^{\infty}(1 + P_s.\lambda t).e^{-\lambda t}dt = \frac{1+P_s}{\lambda}}$$

Exercício

1. Compare a confiabilidade e o MTTF resultantes para um sistema constituído de dois componentes, sendo que cada um tem uma taxa de falha de 0,02 falhas/hora, para um período de 10horas, nas seguintes condições:

(a) O sistema é paralelo redundante;
(b) O sistema é configurado com standy-by (uma das unidades) e 100% de confiabilidade no chaveamento e;
(c) Idem ao item anterior com 90% de confiabilidade no chaveamento.

Efeito dos Componentes de Reposição (Spare Components)

Um modo de operação muito freqüente e fundamental, similar ao stand-by, é o caso em que um determinado número de componentes idênticos aos que estão em operação, são mantidos como peças de reposição para eventual substituição em caso de falha.

Nessa análise, uma hipótese fundamental é que o tempo de reposição necessário às unidades em falha é considerado desprezível. Considera-se também que a unidade em falha não é reparada. Se o reparo das unidades em falha necessita ser considerado, outra técnica deve ser utilizada – modelo de Markov.

Considere um sistema constituído de n componentes idênticos, sendo que todos devem estar em operação para que o sistema opere com sucesso. Assuma que k componentes estão disponíveis ao pessoal de manutenção como peças de reposição. Como conseqüência, temos que k falhas no sistema podem ser toleradas e apenas na falha de ordem (k+1) o sistema irá falhar. Não deve ser esquecido que não é admitido o reparo.

Considerando que os tempos até a falha dos componentes são exponencialmente distribuídos, e assumindo que a taxa de falhas de cada componente seja igual a λ, a taxa de falhas do sistema será igual a:

$$\boxed{\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n.\lambda}$$

Como o sistema admite k falhas:

$$\boxed{R(t) = \left(1 + n\lambda t + \frac{(n\lambda t)^2}{2!} + \frac{(n\lambda t)^3}{3!} + \ldots + \frac{(n\lambda t)^k}{k!}\right).e^{-n\lambda t}}$$

Resultando em:

$$\boxed{\text{MTTF} = \frac{k+1}{n\lambda}}$$

Exercícios Propostos

1. Em um lote de 32 itens defeituosos, cada um pode apresentar 5 tipos de defeitos distintos com igual probabilidade de ocorrência. Considerando que cada item apresenta apenas um tipo de defeito. Qual a probabilidade de um falso especialista diagnosticar mais de 50% dos defeitos corretamente.

2. Um gerente de manutenção recebe um lote de elos fusíveis de um fornecedor pouco conhecido. Para evitar problemas futuros, resolve tomar uma amostra de 20 elos do lote. Se não houver peças defeituosas na amostra, o lote é aceito; do contrário, é rejeitado:

a) Qual a probabilidade de rejeição de um lote com 1% de elos defeituosos

b) Determinar a probabilidade de aceitação de um lote 10% defeituoso

3. Um Dispositivo Composto por 10 itens idênticos é de suma importância para uma Planta Industrial. Esses itens estão dispostos de forma a fornecer redundância ao sistema. Sabendo-se que a confiabilidade de cada um destes itens é de 85%:

a. Qual a Confiabilidade do Dispositivo, se a sua falha se dá quando 4 ou mais dos seus componentes falharem?

b. Com uma mudança de configuração, o dispositivo só falha quando ao menos 6 dos seus componentes falharem, qual a confiabilidade desta nova configuração?

c. Qual a probabilidade de exatamente dois destes itens falharem?

Exercícios Propostos

4. A chance de uma lâmpada queimar ao ser ligada é de 1%. Numa instalação com 100 lâmpadas, qual a probabilidade de 2 lâmpadas queimarem ao serem ligadas. Compare os valores obtidos por meio das distribuições binomial e de Poisson (λ = n.p)

5. A assistência técnica de uma empresa com 30 clientes cadastrados tem uma taxa média de 6 chamadas por dia. Se cada atendimento dura em média 30 minutos, qual o número mínimo de equipes necessárias para pronto atendimento, com risco de 5%?

6. Para o seu reparo, um sistema precisa de 68 componentes idênticos. Se 5% desses itens, em média, apresentam algum tipo de defeito na recepção, optou-se pela compra de 70 unidades. Qual a chance de reparo do sistema?

7 A taxa de falhas observada de uma população de 60 itens é de 0,0003h^{-1} e o tempo de reposição de estoque de 2 dias. Qual a quantidade mínima de peças de reposição com uma margem de segurança de 95%

8. Obtenha a Confiabilidade de um sistema STAND-BY com chaveamento imperfeito constituído por “n” elementos idênticos

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

- ## A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição exponencial está associada ao processo de Poisson.

Se a ocorrência dos eventos é regida por um processo de Poisson, então o tempo entre os eventos segue um modelo exponencial

Observe:

$$\Pr(N = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

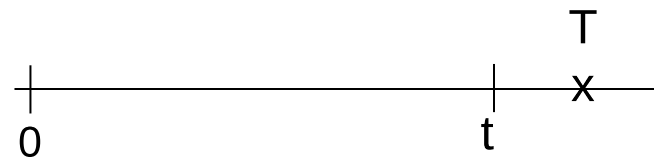
t = tempo de observação

T = v.a contínua

tempo do evento

$$\Pr(N = 0) = \Pr(T > t) = e^{-\lambda t}$$

$$\Pr(T \le t) = 1 - \Pr(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$



Logo: $R(t) = e^{-\lambda t}$ **(Confiabilidade)** e $F(t) = 1-e^{-\lambda t}$ **(Função distribuição acumulada)**

Função densidade de probabilidade $$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$ **para $t \geq 0$**

Distribuição Exponencial

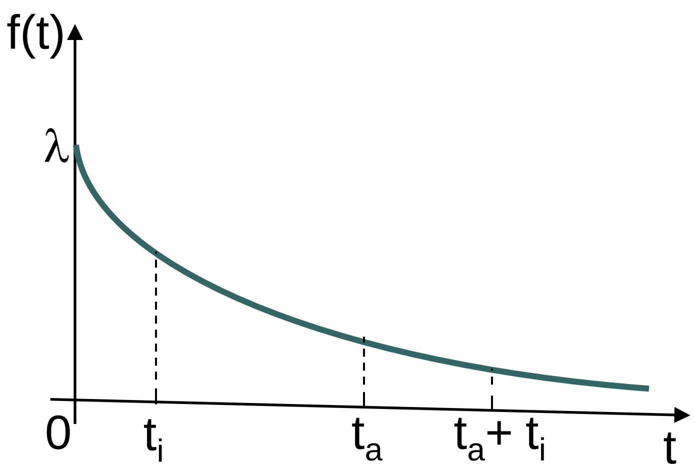
Média ou valor esperado

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty t.f(t)dt = \int_0^\infty t.\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{variância } \sigma^2 = V(T) = 1/\lambda^2$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \quad \text{(Mean Time To Failure)}$$

O MTTF corresponde ao parâmetro **média** da distribuição exponencial



A variável aleatória T igual ao intervalo entre as ocorrências sucessivas de um processo de Poisson, com média $\lambda>0$, tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ.

A Distribuição exponencial apresenta uma propriedade particular que é a **falta de memória**

$$P(T < t_a + t_i \,/\, T > t_a) = P(T < t_i)$$

Distribuição Exponencial

Exemplo: Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas por um processo de Poisson, com média de 25 conexões por hora.

a. Qual é a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

b. Qual a probabilidade de que o tempo até a próxima conexão esteja entre 2 e 3minutos?

c. Determine o intervalo de tempo tal que a chance de nenhuma conexão ocorrer seja 90%

Solução

Pela distribuição exponencial com $\lambda=25h^{-1}$, T é a variável aleatória contínua

a. $P(T> 6min) = P(T> 0,1h) = 1- P(T\leq 0,1h) = 1- F(t) = R(t) = e^{(-25.0,1)} = 0,082$

b. $P(0,033h<T<0,05h) = P(T<0,05h) - P(T<0,033h) = F(0,05h) - F(0,033h) = 0,152$

c. $P(T>\tau) = 0,9 \Rightarrow R(\tau) = 0,9 \Rightarrow e^{(-25\tau)} = 0,9 \Rightarrow \ln[e^{(-25\tau)}] = \ln 0,9 \Rightarrow \tau = 0,00421h = 0,25min$

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

- **A DISTRIBUIÇÃO NORMAL (De Moivre - Laplace - Gauss)**

Esta distribuição é mais empregada em controle de qualidade, sendo de uso restrito em estudos de Confiabilidade

- **Apresenta um valor central que é a média, a moda e a mediana da distribuição em torno do qual estão distribuídos os demais valores, cuja dispersão é verificada pelo desvio padrão**

A função densidade de probabilidade N(μ , σ)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \text{para} -\infty < x < \infty$$

x = variável aleatória
f(x) = função densidade de probabilidade
μ = média da população
σ = desvio padrão da população

Distribuição Normal

A Distribuição Normal reduzida ou Padronizada

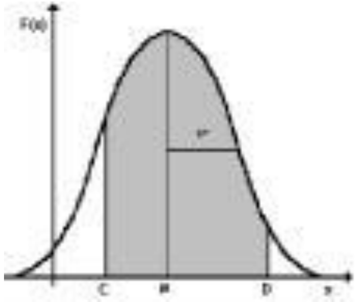
Por ser a função densidade analiticamente complexa, adota-se uma conveniente mudança de variáveis para se obter a função normal reduzida

Fazendo: $z=[(x - \mu)/ \sigma]$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right), \text{para} -\infty < z < \infty$$

Onde N(0,1)

A vantagem da utilização da função normal reduzida se deve à possibilidade do uso de tabelas para a obtenção da área correspondente à probabilidade



Exemplo Ilustrativo

Uma peça é fabricada por um processo industrial, no qual o seu comprimento é distribuído normalmente com média de 500mm e desvio padrão de 1,5mm. Se um cliente especifica uma peça de 500mm com uma tolerância máxima de ± 2mm, responda:

a. Qual a chance da peça atender às especificações do cliente?

b. Qual a chance da peça ser aceita se o cliente não admitir qualquer variação?

Solução

Pela distribuição normal, a variável aleatória contínua X está associada ao comprimento da peça a ser fabricada

Fazendo a mudança de variáveis:

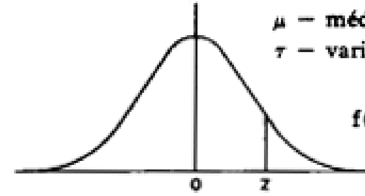
$N(500,1.5) \Rightarrow N(0,1)$

a. $Z = (500\pm2-500)/1,5 \Rightarrow Z = \pm1.33$

$F(-1,33<Z<1,33)=2xF(Z)= 2x0.4082= 0.816$

b. $Z=0 \Rightarrow F(Z) = 0$ (zero)

ÁREA
subtendida pela
CURVA NORMAL
REDUZIDA
de 0 a z



μ — média
σ — variância

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1564	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3809	3869	3888	3947	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4800
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	9955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3,5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

•A DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

A distribuição de Weibull é muito utilizada em estudos de confiabilidade devido à facilidade de se ajustar às diversas conformações de dados

- **Inclusive podendo modelar a curva da banheira**

Função densidade de probabilidade

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta^{\beta}} (t - t_o)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-t_o}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Função Sobrevivência ou Confiabilidade

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_o}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Taxa de Falhas

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \cdot (t - t_o)^{\beta-1}$$

Distribuição Weibull

Modelagem da curva da banheira

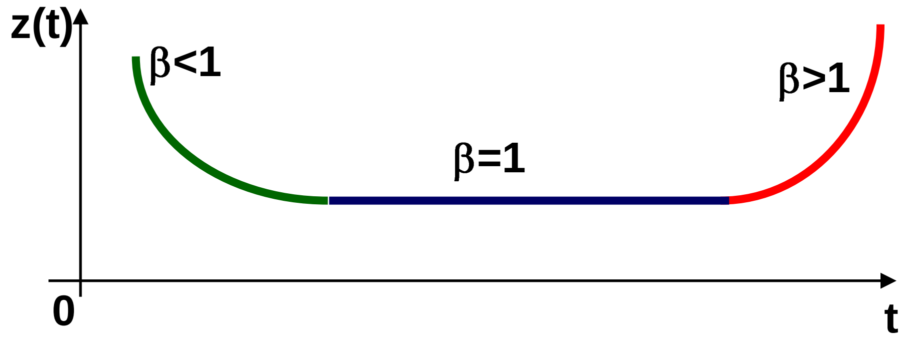
$$z(t) = \frac{\beta}{\eta^{\beta}} \left(t - t_0\right)^{\beta - 1}$$

Onde:

β= fator de forma

- **$\beta<1 \Rightarrow$ z(t) decresce com t $\Rightarrow$ falhas precoces**
- **$\beta=1 \Rightarrow$ z(t) = 1/ η constante $\Rightarrow$ falhas aleatórias**
- **$\beta>1 \Rightarrow$ z(t) cresce com t $\Rightarrow$ falhas por desgaste**

η= fator de escala (vida característica) $\Rightarrow$ Se β=1 $\Rightarrow$ η = MTTF



Exercícios Propostos

1. Ao observar-se a duração das baterias de um sistema, concluiu-se que a mesma nada mais é do que o intervalo entre falhas sucessivas das baterias. Desse modo, o tempo médio entre falhas vem a ser a vida média da bateria. Considere que inúmeras baterias foram testadas pelo fabricante e constatou-se que a cada sete dias havia necessidade de trocá-las. As falhas das baterias são aleatórias e independentes e atendem às condições da distribuição de Poisson; então, para o tempo de vida da bateria, pode-se utilizar a distribuição exponencial. Pede-se determinar:

a. A probabilidade de a bateria durar pelo menos 2 semanas;

b. A probabilidade de uma bateria falhar dentro de 3 dias;

c. A probabilidade de uma bateria durar de 3 a 4 semanas;

d. Se uma bateria já durou uma semana, a chance de que dure pelo menos mais duas

2. A carga de ruptura de uma peça pode ser modelada por uma distribuição de Gauss com média de 165kgf e desvio padrão de 3kgf. Admita que uma amostra seja considerada defeituosa se o valor de sua carga de ruptura for menor que 162kgf. Calcular a probabilidade de que uma peça de material, escolhida ao acaso, seja defeituosa

Exercícios Propostos

3. A suportabilidade do isolamento de um equipamento elétrico está normalmente distribuída com valor médio conhecido por $V_{50\%}$ ou CFO (tensão crítica de descarga ou "critical flashover voltage"). Este é o valor da tensão que o isolamento suporta com 50% de chance de haver descarga. Se a tensão suportável pelo isolamento com 10% de probabilidade de haver descarga, conhecida como tensão de suportabilidade estatística ($V_{d10\%}$) ou BIL (Nível básico de isolamento ou "basic insulation level") é de 350kV. Represente graficamente o modelo e obtenha o valor da tensão crítica de descarga para os seguintes valores de desvio padrão: 20kV, 30kV e 50kV.