

Physik Kompendium – Klassische Mechanik bis Quantenphysik

Till Blaha

2016

Vorwort

Lizenzen

Dokument

Der Autor übernimmt keine Garantie, in welchem Zusammenhang auch immer, für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Verständlichkeit dieses Dokuments. Es ist nur als Zusammenfassung und Unterstützung beim Lernen gedacht, nicht als alleiniges Lehrmaterial.

Dieses Dokument ist unter der GNU FREE DOCUMENTATION LICENSE¹ lizenziert. Diese stellt es jedem frei, dieses Dokument unter gewissen Auflagen zu vertreiben oder zu ändern. Diese Auflagen beinhalten zum Beispiel, dass das weitervertriebene Produkt auch frei sein muss und dass bei einer Änderung des Dokumentes der Name des Autors und ein Beschreibung der Änderung beigefügt werden muss. Für genauere Details ziehen Sie bitte den originalen Lizenztext heran.

Der L^AT_EX-Quellcode dieses Buches ist hier verfügbar: <https://www.github.com/tblaha/phybuch>.

Der Autor ist außerdem für jegliche Meinungen, Korrekturen und Anregungen offen:
till.blaha@web.de

Illustrationen und Zitate

Die Autoren und Lizenzen der in diesem Dokument benutzten Illustration und Zitate wurden mit Endnoten angegeben. Diese finden sich ab Seite 120.

Der Orginaltext der oft verwendeten „Creative-Commons“-Lizenz CC BY-SA 3.0 liegt ebenfalls bei oder ist Online erhältlich²

Umfang

Dieses Material basiert auf dem Umfang des „Regionalcurriculum für das Fach Physik, Prüfungsregion 12“³ mit Ausnahme der Rubrik „Herz’sche Wellen“, „Quantenphysik der Elektronenhülle“ und „Physik des Atomkerns“.

Dank

Besonderer Dank geht an Leonard Geilen, der viel zu den Kapiteln Optik und Quanten beigetragen hat! Außerdem möchte ich Herrn Kunz herzlich für den hervorragenden Physikunterricht danken, der mich zum Schreiben dieser Zusammenfassung inspiriert hat.

¹Englischer Orginaltext zu GFDL liegt bei oder ist hier erhältlich: <https://www.gnu.org/licenses/fdl.txt>

²Englischer Orginaltext zu CC BY-SA 3.0: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>

³Orginaltext: <http://www.idsbe.eu/intranet/teamworks.dll/Internal/document/0xD4A9A3187641B24EB79D9320B3060289/SC-RC%20Physik%2010-12.pdf>

Version

Bei diesem Dokument handelt es sich um die Version 1.2 Beta, A5 Größe, kompiliert am 15. Januar 2023.

Inhaltsverzeichnis

1 Mechanik	9
1.1 Newton'sche Axiome	9
1.2 Kräfte	10
1.3 Energien	13
1.4 Goldene Regel der Mechanik	16
1.5 Stöße	17
1.6 Bewegungsgesetze	18
1.7 Würfe	21
1.8 Kreisbewegung	24
2 Elektrisches Feld	27
2.1 Beweis für die Existenz	27
2.2 Modellierung und Mathematisierung	28
2.3 Phänomene	30
2.4 Plattenkondensator	31
2.5 Elektronenbewegung im Elektrischen Feld	37
2.6 Bewegungsgesetze für Elektronen	37
2.7 Millikanversuch	39
2.8 Braun'sche Röhre	42
3 Magnetisches Feld	47
3.1 Beweis für die Existenz	47
3.2 Modellierung und Mathematisierung	47
3.3 Ursachen und Eigenschaften eines Magnetfeldes	48
3.4 Feldlinienbilder	48
3.5 Lorentzkraft	51
3.6 Fadenstrahlrohr	53
3.7 Wien'scher Geschwindigkeitsfilter	55

3.8 Massenspektrometer	56
3.9 Zyklotron	57
4 Induktion	61
4.1 Grundprinzip	61
4.2 Induktionsgesetz	61
4.3 Verlauf der Induktionsspannung	61
4.4 Lenz'sche Regel	62
4.5 Lange Spulen	62
4.6 Selbstinduktion	62
4.7 Induktivität	63
4.8 Energie in Spulen	64
4.9 Induktion im Alltag	64
5 Wechselstrom	67
5.1 Erläuterungen zum Wechselstromkreis	67
5.2 Prinzip des Wechselstromgenerators	69
5.3 Widerstände im Wechselstromkreis	71
5.4 Schwingkreise	75
5.5 Leistungen im Wechselstromkreis	78
6 Schwingungen	81
6.1 Definitionen	81
6.2 Diagramm einer Schwingung	82
6.3 Kenngrößen	82
6.4 Schwingungsgleichungen	84
6.5 Weitere Gleichungen und Gesetze	84
7 Wellen	87
7.1 Definitionen	87
7.2 Diagramme von Wellen	87
7.3 Kenngrößen	88
7.4 Wellengleichung	90
7.5 Weitere Gleichungen und Gesetze	91
7.6 Wellenphänomene	91
8 Optik	97
8.1 Elektromagnetische Wellen	97
8.2 Brechung	98
8.3 Optische Interferenz am Doppelspalt	99

8.4 Optische Interferenz an dünnen Schichten	102
8.5 Polarisation	106
9 Quanten	109
9.1 Hallwachs-Experiment	109
9.2 Fotoeffekt	109
9.3 Ist Licht ein Teilchen oder eine Welle?	112
9.4 Photonenimpuls	113
9.5 De Broglie Wellenlänge	114
9.6 Interferenzen von Quantenobjekten	114
9.7 Compton Wellenlänge	117
9.8 Beschreibung von Quantenobjekten	118
9.9 Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation	119

Kapitel 1

Mechanik

1.1 Newton'sche Axiome

Axiome sind grundlegende Annahmen, die nicht bewiesen wurden, eventuell sogar nicht bewiesen werden können, aber trotzdem die Grundlage einer These bilden. Man nimmt also an, dass diese wahr sind.

Die bekanntesten Axiome lieferte Isaac Newton um 1687, welche wiederum die Grundlage für die klassische Mechanik bilden. Bis heute gab es keinen Einspruch betreffend ihrer Gültigkeit.

1.1.1 1. Axiom – Trägheitsprinzip

„Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung (Siehe: 1.6.1), sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.“¹

Es wird deutlich, dass ein Körper nicht von sich selbst aus seine Bewegungsrichtung oder Geschwindigkeit ändern kann, sondern dazu eine äußere Kraft notwendig ist.

Beispiel: Auf eine Rakete, die im Weltraum in der völligen Luftleere und völliger Schwerelosigkeit schwebt, wirkt keine Kraft ein, welcher Natur auch immer, sodass sie sich immerfort mit der selben Geschwindigkeit in die selbe Richtung bewegt. Gesteuert würde sie über das „Abwerfen“ von Masse, beispielsweise durch Gase, die unter Druck stehen und dann aus einer bestimmten Öffnung in aus der Rakete strömen.

1.1.2 2. Axiom – Aktionsprinzip

„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“²

Eine Änderung einer Bewegung, also die Änderung der Geschwindigkeit, ist in physikalischen Termen auch die „Beschleunigung“ mit Formelzeichen a . Daher gilt:

$$F \sim a \quad (1.1)$$

Hierbei steht das Zeichen \sim für „proportional zu“.

Leonard Euler formulierte erst 60 Jahre später die Gleichung, die man heute mit dem 2. Axiom verbindet und gleichzeitig ein extrem wichtiger Grundsatz für unzählige physikalische Gesetzmäßigkeiten ist: „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“:

$$F = m \cdot a \quad (1.2)$$

1.1.3 3. Axiom – Actio und Reactio

„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“³

Oder, mathematisch ausgedrückt: Wenn Körper A eine Kraft auf Körper B auswirkt, dann gilt:

$$F_{A \text{ auf } B} = -F_{B \text{ auf } A} \quad (1.3)$$

Beispiel: Wenn die Rakete aus dem Beispiel des ersten Axioms gesteuert werden soll, wird Masse abgeworfen. Dieses Abwerfen erfordert eine Kraft, die sich aus dem 2. Axiom ergibt (die Masse wird ja beschleunigt, wenn sie abgeworfen wird. Daraus ergibt sich dann, gemäß $F = m \cdot a$ eine Kraft). Auf die Rakete wirkt dann dieselbe Kraft, allerdings in die andere Richtung, sodass sie durch diese Kraft beschleunigt wird und ihre Bewegungsrichtung ändert.

1.2 Kräfte

Eine Kraft gibt an, wie stark ein Körper mit einer definierten Masse beschleunigt wird, wenn diese Kraft auf ihn einwirkt.

1.2.1 Sichtbarkeit

Kräfte sind unsichtbar. Man kann allein deren Auswirkung, beispielsweise das Beschleunigen eines Körpers oder Verformung beobachten und auf eine Kraftwirkung schließen.

1.2.2 Einheit

Kräfte haben die Einheit N (sprich: „Newton“), welche, ausgeschrieben in SI-Basiseinheiten, $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ entspricht. Dies lässt sich aus Newtons 2. Axiom ableiten:

Da die Basiseinheit für Masse kg und die Einheit für Beschleunigung $\frac{m}{s^2}$ ist (Geschwindigkeit pro Zeit: Meter pro Sekunde pro Sekunde: $\frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$), folgt die Definition des Newtons direkt aus $F = m \cdot a$.

1.2.3 Richtung

Da Kräfte gerichtete Größen sind, geben sie nicht nur den Betrag der Kraft sondern auch eine Richtung an, in welche sie auf einen Körper wirken, weshalb sie in Formeln oft als Vektor \vec{F} geschrieben werden, um diese Eigenschaft anzuzeigen.

Anmerkung: In der Schulphysik ist es allerdings nur wichtig, diese Eigenschaft zu kennen, um Kräfteparallelogramme zu begründen, Vektorrechnungen werden nicht vollzogen. Sollte die Richtung einer Kraft für eine Aufgabe von Bedeutung sein, wird mit Winkelbeziehungen hergeleitet.

1.2.4 Kräfteaddition

Wenn mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, dann gibt es eine resultierende Kraft (F_{res} oder F_{ges} geschrieben), welche die Addition der beiden ist. Diese Addition muss aber grafisch vollzogen werden, da nicht nur die Beträge, sondern auch deren Richtungen zählen; zwei gleich große Kräfte, die einander entgegengesetzt sind, sind in der Addition 0.

Entgegengesetzte Kräfte

In einem Kräftediagramm, auch Kräfteparallelogramm genannt, werden die Kräfte so eingezeichnet, dass deren Richtung durch die Richtung der Pfeile und deren Betrag durch die Länge der Pfeile angegeben wird. Zudem greifen die Kräfte immer im Mittelpunkt des (hier blauen) Körpers an. So wird die Addition zweier entgegengesetzter Kräfte klar:



Abbildung 1.1: Gleich große, entgegengesetzte Kräfte: Es gibt keine resultierende Kraft.

Bei zwei Kräften mit unterschiedlichem Betrag, die entgegengesetzt sind, müssen für den Betrag der Resultierenden die beiden Kräfte von einander abgezogen werden:



Abbildung 1.2: Entgegengesetzte Kräfte, mit unterschiedlichem Betrag.

Kräfte im rechten Winkel

Die Pfeile von Kräften dürfen, z.B. zur erleichterten Herleitung von Gesetzen, verschoben werden, wenn ihre Länge und Richtung gewahrt werden. Dann wird kann der Fuß des einen Kraftpfeils an die Spitze des anderen Kraftpfeils angelegt und die Spitze zeigt dann die Spitze der Resultierenden an.

Dadurch ergibt sich aus dem Diagramm 1.3 für zwei im rechten Winkel angreifende Kräfte mit dem Satz des Pythagoras:

$$F_{\text{Res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (1.4)$$

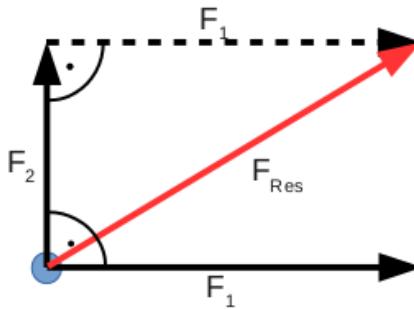


Abbildung 1.3: Kräfte im rechten Winkel

Kräfte im beliebigen Winkel

Für einen beliebigen Winkel zwischen den Pfeilen muss mit dem Kosinussatz der Betrag der übrigen Seite F_{Res} ermittelt werden, wie hier in Grafik 1.4⁴:

$$F_{\text{Res}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos \alpha'} \quad (1.5)$$

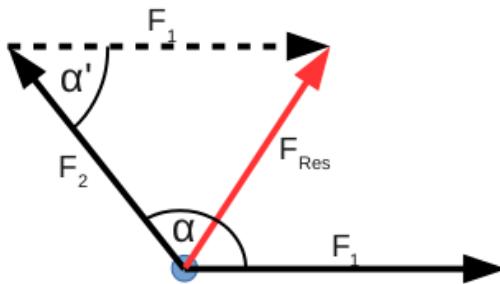


Abbildung 1.4: Kräfte im beliebigen Winkel.

1.2.5 Kräftesystem

Aus dem dritten Newton'schen Axiom kann gefolgert werden, dass in einem abgeschlossenen Kräftesystem die Summe aller Kräfte 0 sein muss, da jede Kraft eine gleich große und exakt entgegengesetzte Gegenkraft provoziert.

Dies ist wichtig für einige Herleitungen, z.B. am Federpendel (Siehe: Sektion 6.5.2 auf Seite 84: Gesetze am Federpendel).

1.2.6 Gewichtskraft

Die Gewichtskraft F_G ist die Kraft, die in der Mechanik besondere Bedeutung hat. Sie ist die Kraft, die ein Gravitationsfeld auf einen Körper auswirkt. Sie ist gemäß $F = m \cdot a$ abhängig von einer Beschleunigung, in diesem Fall der Gravitation (Schwerkraft) g , auf der Erde $\approx 9,81 \frac{m}{s^2}$, und von der Masse des Körpers:

$$F_G = m \cdot g \quad (1.6)$$

Die Einheit bleibt logischerweise das Newton.

1.3 Energien

„Energie ist eine Zustandsgröße von Körpern, die dessen Potential angibt, Arbeit zu verrichten.“

1.3.1 Arbeit

Die physikalische „Arbeit“ (Formelzeichen W von engl. „Work“) ist definiert als Kraft mal Strecke, also wird Arbeit verrichtet wenn ein Körper über eine bestimmte Strecke hinweg von einer Kraft bewegt wird:

$$W = F \cdot s \quad (1.7)$$

Damit ergibt sich als Einheit der Nm (sprich: „Newtonmeter“) welcher meistens als J (sprich: „Joule“) geschrieben wird.

Anmerkung: Der Newtonmeter wird auch als Einheit für das Drehmoment verwendet, welches bei einer Drehbewegung die Kraft unter Berücksichtigung der Länge des Hebelarms angibt. Das Drehmoment hat aber als Größe nichts mit der Arbeit oder der Energie zu tun.

1.3.2 Energie

„Arbeit verrichten“ heißt Energie von einer Form in eine andere umzuwandeln. Daraus folgt, dass Energie nicht verloren gehen oder gewonnen werden kann, sie kann nur umgewandelt werden. Als „verlorene Energie“ sieht man Energie an, die nicht in eine Form umgewandelt wurde, die nicht weiter genutzt werden kann, also unerwünscht ist.

Die mathematische Definition der Energie ist daher dieselbe wie bei der Arbeit, nur dass das Formelzeichen E ist; der Unterschied ist also eine rein philosophische Frage:

$$E = F \cdot s \quad (1.8)$$

Die Einheit ist ebenfalls J , in SI-Basiseinheiten $J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$.

1.3.3 Energieerhaltung

Aus dem Fakt, dass Energie nur in andere Formen umgewandelt werden kann, ergibt sich der Energieerhaltungssatz, der besagt, dass die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System konstant sein muss, egal wie viele Umwandlungen sich vollziehen, also egal, wie viel Arbeit verrichtet wird.

1.3.4 Energieformen

Es gibt zwei wichtige Energieformen in der Mechanik:

Potentielle Energie

Die potentielle Energie, auch Lageenergie oder Höhenenergie genannt, besitzen Körper, die sich in einer Höhe, relativ zu einem Referenzsystem (beispielsweise die Höhe eines Körpers relativ

zum Fußboden), befinden. Wenn die Masse des Körpers bekannt ist, ist die Energie nur noch abhängig von der Fallbeschleunigung, auch Gravität oder Schwerkraft genannt (Formelzeichen g) und der Höhe h . Auf der Erde beträgt die Fallbeschleunigung $\approx 9,81 \frac{m}{s^2}$.

Aus der allgemeinen Form für die Energie (Siehe Gleichung 1.8 auf Seite 14) und der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ (Siehe Sektion 1.2.6 auf Seite 13: Gewichtskraft) ergibt sich für E_{pot} :

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \quad (1.9)$$

Wenn dieser Körper nun fallen gelassen wird, wird diese potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt; Arbeit wurde verrichtet.

Kinetische Energie

Kinetische Energie besitzen Körper, die bewegt sind. Sie ist abhängig von der Masse und von der Geschwindigkeit v des Körpers:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (1.10)$$

Nice to know: Die kinetische Energie ist das Integral nach der Geschwindigkeit des Impulses (Siehe: Sektion 1.5.1 auf Seite 17: Impuls): $E_{kin} = \int p \, dv = \int m \cdot v \, dv = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

1.3.5 Beispiel: Vorgänge beim Fall

Fragestellung: Wenn ein Körper in einem luftleeren Raum (damit jegliche Luftreibung vernachlässigt werden kann) auf der Erde (damit gilt $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$) aus 10m Höhe auf den Boden fällt, wie hoch ist seine Geschwindigkeit mit der er auf den Boden auftrifft?

Ansatz: Bei diesem Vorgang wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Wenn der Körper bei Beginn des Falls ruhte, also keine Geschwindigkeit hatte, war dort die kinetische Energie 0. Auf dem Boden angekommen, ist die Höhe des Körpers 0, sodass die potentielle Energie dort ebenfalls 0 ist. Daraus geht hervor, dass die potentielle Energie vollständig in kinetische umgewandelt wurde. Der Ansatz ist also, die beiden Gleichungen einander gleichzusetzen und dann nach v umzustellen.

Anmerkung: Bei anfänglichem Betrachten der Gleichungen fällt auf, dass sie beide von m abhängig sind, welches in der Fragestellung allerdings nicht gegeben ist. Das macht aber nichts, weil sich die Masse „rauskürzt“, wie man in der Umstellung sieht:

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= E_{kin} \\
 mgh &= \frac{1}{2}m \cdot v^2 \\
 gh &= \frac{1}{2} \cdot v^2 \\
 2gh &= v^2 \\
 v &= \sqrt{2gh}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Mit eingesetzten Größen für g und h :

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10} \cdot \sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot m} \\
 v &\approx 14 \frac{m}{s}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Die Einheitenrechnung, bei der Einheiten fast wie Variablen betrachtet werden (bloß, dass für jede Einheit gilt: $U + U = U \neq 2U$) ergibt die Richtige Einheit $\frac{m}{s}$, was nochmal ein weiterer Ausschlag dafür ist, dass die Rechnung richtig war.

1.4 Goldene Regel der Mechanik

„Was man an Kraft spart, muss man an Weg zulegen.“

Diese einfache Regel bezieht sich auf jegliche mechanische Vorgänge bei denen Körper bewegt werden. Wenn man weniger Kraft aufwenden möchte, muss man den Körper über eine längere Strecke bewegen.

Das einfachste Beispiel ist das heben eines Körpers. Dieser kann direkt hochgehoben werden, was eine Kraft erfordert, die größer ist, als die Kraft, die die Schwerkraft auf den Körper ausübt. Beispielsweise könnte der Körper aber auch über ein Rampe geschoben werden, welche dann den Weg, über welchen eine Kraft angewendet werden muss, vergrößert, aber die Kraft verkleinert.

Wenn die Kraft F ist und s der Weg über welchen sie angewendet wird, gilt:

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2 \tag{1.13}$$

Dies folgt direkt aus der Definition der Energie und dem Energieerhaltungssatz, da $E = F \cdot s$ (Siehe Sektion 1.3 auf Seite 13: Energien).

1.4.1 Flaschenzug

Der Flaschenzug eignet sich sehr gut um diese Beziehung zu zeigen. Man betrachte folgende Abbildung⁵:

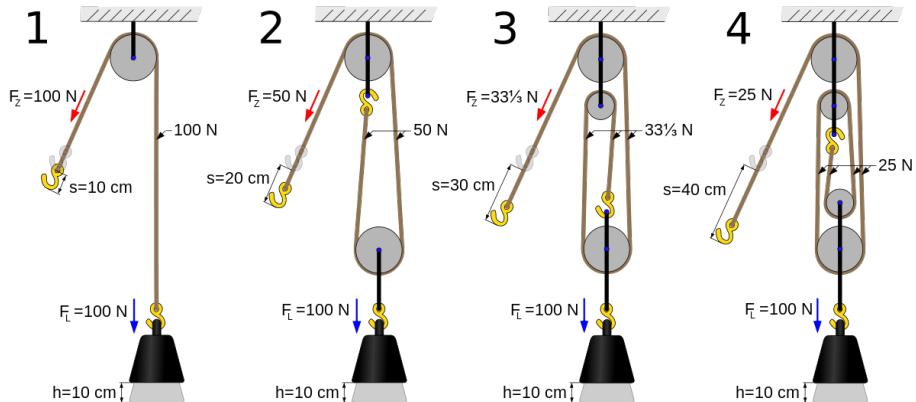


Abbildung 1.5: 4 Flaschenzüge, die, unter verschiedenen Konfigurationen, dieselbe Last heben

Die Last, die eine Gewichtskraft von 100 N aufbringt, wird jedes Mal um 10 cm angehoben, das heißt, dass die jeweilige Arbeit, die verrichtet wurde, konstant ist ($W = 100 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} = 10 \text{ J}$).

Allerdings wird beim Addieren einer weiteren Rolle die Zahl der Seilstrecken, an denen quasi gleichzeitig gezogen wird, größer. Dadurch wird die zu ziehende Strecke s proportional größer und die aufzuwendende Kraft F_Z kleiner.

1.5 Stöße

Als Stöße bezeichnet man das Aufeinandertreffen von zwei Körpern unterschiedlicher Geschwindigkeiten. Das Ziel ist es, aus deren Massen und Geschwindigkeiten und der Art des Stoßes auf die Geschwindigkeiten *nach dem Stoß* zu schließen.

1.5.1 Impuls

Zur Beschreibung von Stößen muss vorerst noch eine weitere mechanische Größe eingeführt werden; der Impuls p . Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (1.14)$$

Damit ist die Einheit des Impulses $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$ (sprich: „Newtonsekunde“).

Nice to know: Der Impuls ist das zeitliche Integral der Kraft: $\int F dt = \int m \cdot a dt = m \cdot v$

1.5.2 Elastischer Stoß

Aus den zwei Stoßarten (elastisch und unelastisch) ist der elastische Stoß der ideale Stoß, bei dem keine Reibung oder Verformung zwischen den beiden aufeinandertreffenden Körpern stattfindet. In der Praxis geschieht das natürlich trotzdem, aber bspw. sind Stahlkugeln in guter Näherung reibungsfrei, sodass bei diesen und ähnlichen Versuchen von einem elastischen Stoß ausgegangen werden kann.

Da keine Energie durch Reibung in Wärme oder Verformung umgewandelt wird und somit „verloren geht“, muss neben dem Impuls auch die Energie erhalten bleiben, also während des Versuches konstant sein. Daher gestaltet sich die Herleitung für eine Gleichung, die die Geschwindigkeiten nach dem Stoß voraussagt, recht komplex; beide Sätze (Energie- und Impulssatz) müssen berücksichtigt werden. Daher wird hier das Gesetz nur genannt:

Wenn ein Körper mit der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v_1 auf einen zweiten Körper mit der Masse m_2 und der Geschwindigkeit v_2 unter den Voraussetzungen eines elastischen Stoßes trifft, gilt für die Geschwindigkeit des zweiten Körpers nach dem Stoß v'_2 :

$$v'_2 = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1(2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (1.15)$$

Für v'_1 , also Körper 1, gilt dann:

$$v'_1 = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2(2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad (1.16)$$

1.5.3 Unelastischer Stoß

Bei einem unelastischen Stoß geht ein Teil der kinetischen Energie der zwei Stoßkörper in Wärme oder Verformung „verloren“, dass heißt sie steckt nachher nicht mehr in der kinetischen Energie der Körper.

Bei einem perfekt unelastischen Stoß, bei dem die beiden Körper sich „verkeilt“ zusammen mit der selben Geschwindigkeit fortbewegen, muss der Impulserhaltungssatz trotzdem erhalten bleiben. Aus diesem geht für v' nach dem Stoß hervor:

$$\begin{aligned} p' &= p_1 + p_2 \\ v'(m_1 + m_2) &= v_1 \cdot m_1 + v_2 \cdot m_2 \\ v' &= \frac{v_1 \cdot m_1 + v_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.6 Bewegungsgesetze

Die Gesetze der Bewegung, auch Translation genannt, ist ein wiederkehrendes Thema in der Physik. Die Gesetze beschreiben die Bewegung von Körpern und geben deren Ort in Abhängigkeit einer Variablen, meistens der Zeit, an:

1.6.1 Gleichförmige Bewegung

Die gleichförmige Bewegung ist eine Bewegung, die nicht beschleunigt ist; der Körper bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit fort. Daher gilt für die insgesamt zurückgelegte Strecke s :

$$s(t) = v \cdot t + s_0 \quad (1.18)$$

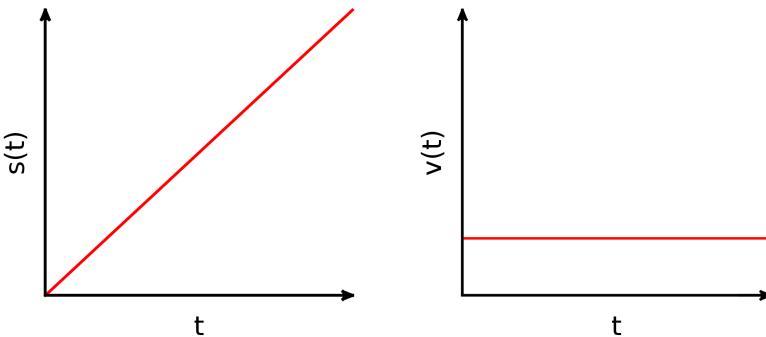


Abbildung 1.6: Gleichförmige Bewegung: Beziehung zwischen Weg und Geschwindigkeit

Wichtig: v ist konstant!

Dabei ist s_0 die Anfangsstrecke, die schon zu Beginn, bevor die Translation betrachtet wird, zurückgelegt wurde.

1.6.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Eine Bewegung kann auch mit einer sich ändernden Geschwindigkeit von statthen gehen. Sollte diese Beschleunigung konstant sein, nennt man diese Bewegung gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Gesamtstrecke

Bei dieser Bewegung lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit über den Zeitraum t mit $\frac{1}{2}a \cdot t$ berechnen, da die Endgeschwindigkeit $a \cdot t$ ist: Die Änderung der Geschwindigkeit a , angewandt über den Zeitraum t , resultiert in der Endgeschwindigkeit. Da die Beschleunigung konstant ist und damit die Geschwindigkeit proportional zur Zeit, ist der Faktor, der zur gemittelten Geschwindigkeit führt $\frac{1}{2}$.

Dann kann dieses $\frac{1}{2}a \cdot t$ für das v im ersten Glied der Gleichung 1.18 eingesetzt werden und man erhält die Bewegungsgleichung für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

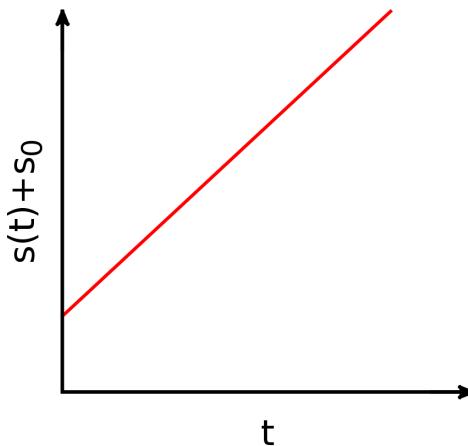


Abbildung 1.7: Mit Anfangsgeschwindigkeit: Der Graph ist verschoben

$$s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (1.19)$$

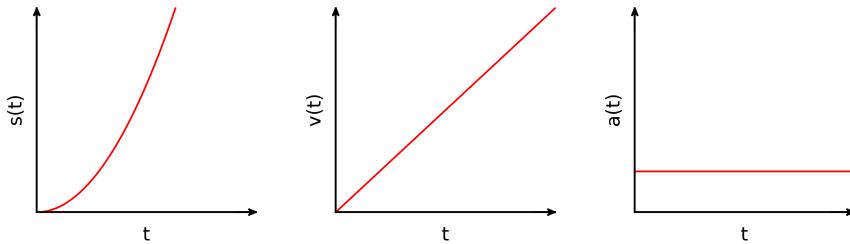


Abbildung 1.8: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Beziehung zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Neben der Anfangsstrecke s_0 kommt nun aber noch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 dazu, die von Belang ist, wenn man einen Fall hat, bei dem der Körper vor Einwirkung der Beschleunigung schon eine Geschwindigkeit > 0 hatte.

Endgeschwindigkeit

Wie schon angesprochen, ist die Endgeschwindigkeit proportional zur verstrichenen Zeit. Was aber dort noch nicht berücksichtigt wurde, ist, dass auch für die Endgeschwindigkeit nach der verstrichenen Zeit t die Anfangsgeschwindigkeit v_0 eine Rolle spielt:

$$v(t) = a \cdot t + v_0 \quad (1.20)$$

Dies ist die zeitliche Ableitung der Gleichung 1.19

Beziehungen über die Ableitungen

Würde man noch eine Ableitung der Gleichung 1.20 machen bekäme man die Gleichung für die Beschleunigung. Das wäre aber witzlos, da die Beschleunigung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung konstant ist und damit $s''(t) = v'(t) = a(t) = a = \text{const.}$ ist. Vergleiche mit Abbildung 1.8⁶.

Dennoch ist es hilfreich, diese Beziehungen im Kopf zu haben (Man beziehe auch Abbildung 1.8):

$$\begin{aligned} s'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= a \\ s''(t) &= v'(t) = a \end{aligned} \quad (1.21)$$

Die Ableitung des Weges, also die zeitliche Änderung des Weges, ist die Geschwindigkeit. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. Daher ist die zeitliche Änderung der zeitlichen Änderung des Weges, die Beschleunigung.

1.7 Würfe

Bei der Beschreibung von Würfen, also von Flugbahnen von Körpern, wendet man die Bewegungsgesetze an und kombiniert diese falls notwendig.

1.7.1 Vertikaler Wurf

Der vertikale Wurf ist eine eindimensionale Bewegung, bei der ein Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen wird und durch die Erdbeschleunigung wieder nach unten beschleunigt wird.

Daher lässt sich die Höhe des Körpers in Abhängigkeit der Zeit mit der Gleichung 1.19 auf Seite 20 beschreiben:

$$h(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0 \quad (1.22)$$

Diese Gleichung kann gleich 0 gesetzt werden um den Zeitpunkt zu erhalten, bei dem der Körper wieder auf der Erde aufschlägt. Um die Geschwindigkeit, mit der der Körper auftrifft zu erhalten, muss der errechnete Zeitpunkt in die Gleichung für die Geschwindigkeit (Siehe: Gleichung 1.20 auf Seite 21) für t und die negative Erdbeschleunigung ($-g$) für a eingesetzt werden.

1.7.2 Waagerechter Wurf

Der waagerechte Wurf tritt bspw. ein, wenn ein Flugzeug Ladung abwirft.

Die Bewegung des Ladungskörpers in x-Richtung, also entlang der Flugrichtung, verläuft gleichförmig (Luftreibung wird ignoriert), also mit konstanter Geschwindigkeit v_x . Die Bewegung in y-Richtung ist, wie beim vertikalen Wurf eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Erdbeschleunigung.

Folgende zwei Gleichungen sind zur Beschreibung nötig, wobei nicht mehr nur h , sondern x und y für die Strecken verwendet werden, da es ja nun 2 Richtungen gibt:

$$x(t) = v_x \cdot t \quad (1.23)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + y_0 \quad (1.24)$$

Bei $x(t)$ wurde absichtlich die mögliche Anfangsstrecke weggelassen, zur Vereinfachung der weiteren Rechnung.

Nun ist es praktisch, nur eine Gleichung für die Beschreibung einer Bewegung zu haben. Dafür wird $x(t)$ nach t umgestellt und dieses t dann in $y(t)$ eingesetzt, sodass man eine Gleichung für die Höhe in Abhängigkeit von der Strecke in x-Richtung hat, was oft deutlich handlicher ist, als eine Gleichung für y in Abhängigkeit der Zeit:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x \cdot t \\ t(x) &= \frac{x}{v_x} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Eingesetzt in $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + y_0 \\ y(x) &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v_x^2} + y_0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.7.3 Schiefer Wurf

Beim schießen Wurf wird ein Körper unter einem Winkel geworfen, sodass dieser eine Wurfparabel beschreibt.

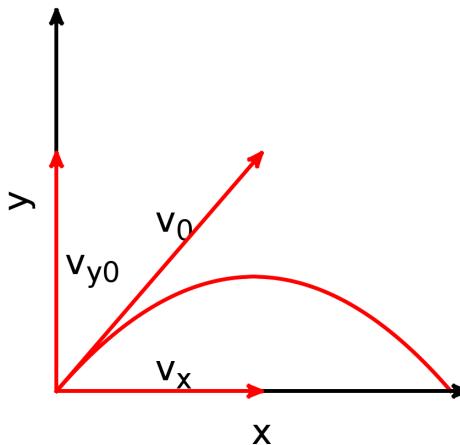


Abbildung 1.9: Geschwindigkeitsbeziehungen beim schrägen Wurf

Der schiefe Wurf ist prinzipiell dieselbe Kombination aus beiden Bewegungsarten wie beim waagerechten Wurf, aber mit der Schwierigkeit, dass aus dem Abwurfwinkel α und der Abwurfgeschwindigkeit v_0 erst die Anfangsgeschwindigkeiten in die beiden Richtungen, v_x in Richtung des Wurfes und v_{y0} in die Höhe, berechnet werden müssen. Die Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung wird deshalb nicht einfach v_y genannt, weil sie, im Gegensatz von v_x , im Laufe des Wurfes variiert, wie in Grafik 1.9⁷.

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v_0} \quad (1.27)$$

$$v_x = \cos \alpha \cdot v_0$$

$$\sin \alpha = \frac{v_{y0}}{v_0} \quad (1.28)$$

$$v_{y0} = \sin \alpha \cdot v_0$$

Damit können die Bewegungsgesetze eingefüllt werden:

$$x(t) = v_x \cdot t \quad (1.29)$$

$$x(t) = \cos \alpha \cdot v_0 \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t + y_0 \quad (1.30)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + \sin \alpha \cdot v_0 \cdot t + y_0$$

Gesamtgleichung

Jetzt kann wieder in $y(t)$ mit der nach t umgestellten Gleichung für $x(t)$ ersetzt werden und man erhält die Gesamtgleichung.

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \alpha \cdot v_0 \cdot t \\ t(x) &= \frac{x}{\cos \alpha \cdot v_0} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + \sin \alpha \cdot v_0 \cdot t + y_0 \\ y(x) &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \alpha \cdot v_0^2} + \sin \alpha \cdot v_0 \cdot \frac{x}{\cos \alpha \cdot v_0} + y_0 \\ y(x) &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \alpha \cdot v_0^2} + \frac{\sin \alpha \cdot v_0 \cdot x}{\cos \alpha \cdot v_0} + y_0 \\ y(x) &= -\frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \alpha \cdot v_0^2} + \tan \alpha \cdot x + y_0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Diese Gesamtgleichung kann nun zu Berechnungen benutzt werden, z.B. muss zur Wurfweitenbestimmung die Gleichung gleich 0 gesetzt werden.

Die fertig gekürzte Gleichung lautet:

$$y(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cos^2 \alpha \cdot v_0^2} + y_0 \tag{1.33}$$

1.8 Kreisbewegung

Die Gesetze der Kreisbewegung beschreiben einen Körper, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius bewegt.

1.8.1 Frequenz

Die Frequenz f bezeichnet die Anzahl an Kreisumläufen pro Zeiteinheit. Die Einheit ist Hz (sprich: „Hertz“): $\text{Hz} = \frac{1}{s}$.

Die Dauer eines Kreisumlaufes nennt man auch die Periodendauer T . Es gilt:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.34}$$

1.8.2 Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit gibt an, wie groß der Umfangsabschnitt ist, der in einer bestimmten Zeit absolviert wird:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.35)$$

Die Einheit ist $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (sprich: „Radian pro Sekunde“) und ein Umlauf entspricht 2π .

Wichtig: Das Formelzeichen ω ist „klein Omega“ und nicht „w“.

1.8.3 Bahngeschwindigkeit im Kreis

Die Bahngeschwindigkeit gibt in absoluten Einheiten ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) an, wie schnell sich das Objekt auf der Bahn fortbewegt. Zusätzlich zur Winkelgeschwindigkeit, muss bei der Kreisbahn daher noch der Radius bekannt sein:

$$v_{\text{Bahn}} = \omega r = 2r\pi f = \frac{2r\pi}{T} \quad (1.36)$$

Eine andere Herleitung aus dem Kreisumfang $U = 2r\pi$, der Periodendauer T und der generellen Formel für Bahngeschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ könnte wie folgt Aussehen:

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ v &= \frac{2r\pi}{T} = \omega r \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.8.4 Zentripetalbeschleunigung

Um auf einer Kreisbahn zu bleiben, muss eine Zentripetalbeschleunigung auf den Körper wirken, die zum Kreiszentrum hin zeigt. Die Formel lautet:

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (1.38)$$

Eine tolle Herleitung findet sich [hier¹](#).

¹http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/physik/online_material/mechanik2/kreis/zentripetalkraft.htm

1.8.5 Zentripetalkraft

Dies ist die Kraft, die auf einen Körper ausgewirkt werden muss, damit er auf einer Kreisbahn bleibt. Zusätzlich zur Zentripetalbeschleunigung muss nun also noch gemäß Newtons zweiten Axiom $F = a \cdot m$ die Masse als Faktor in die Gleichung aufgenommen werden:

$$\begin{aligned}F_z &= a_z \cdot m \\F_z &= \frac{v^2 m}{r}\end{aligned}\tag{1.39}$$

Kapitel 2

Elektrisches Feld

2.1 Beweis für die Existenz

2.1.1 Elektrostatik

Wenn ein Körper geladen ist, bedeutet das, dass auf diesem positive und negative Ladungen in ungleich großen Mengen vorhanden sind. Daraus folgt, dass sich gleichgroße Mengen ungleichnamiger (positiv und negativ) Ladungen neutralisieren.

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, während ungleichnamige Ladung sich anziehen. Dies ähnelt sehr dem magnetischen Feld (Siehe Kapitel 3 ab Seite 47: [Magnetisches Feld](#)) und steht Gravitationsfeldern entgegen, welche sich ausschließlich gegenseitig anziehen.

In Metallen sind die negativen Ladungen beweglich, sie heißen Elektronen. Diese Eigenschaft macht Metalle zu „Leitern“.

Nice to know: Der Begriff Elektron (und alle davon abgeleitete Begriffe) kommt vom altgriechischen Wort „élektron“ und bedeutet „Bernstein“. Der Effekt der Ladung wurde schon im alten Griechenland an Bernstein entdeckt.

2.1.2 Elektroskop

Eine mögliche Bauweise eines Elektroskopes besteht im Kern aus einer Schnecke aus Metallband. Ein Zeiger, der an der Schnecke befestigt ist, schlägt aus, sobald es einen Überschuss an positiver oder negativer Ladung gibt, da sich dann durch die gleichnamige Ladungen die vielen Wicklungen gegenseitig voneinander abstoßen.

2.1.3 Influenz

Nun ist es logisch, dass bei Berührung eines Elektroskops mit einem negativ geladenen Körper, die Nadel ausschlägt, da das Metallband diese Elektronen leitet und ein Überschuss an negativer Ladung in der Schnecke zum Ausschlag führt.

Aber auch wenn ein beliebig geladener Körper (beispielsweise ein positiv geladener Kunststoffstab) nur über das Elektroskop gehalten wird, ohne es zu berühren, schlägt die Nadel aus. Dies nennt man *Influenz* und das Phänomen beruht darauf, dass sich ungleichnamige Ladungen anziehen. Die beweglichen negativen Ladungen wandern durch die Anziehung des positiven Kunststoffstabs weg von der Schnecke und hinterlassen dort einen Überschuss an positiven Ladungen, sodass die Nadel ausschlägt. Entfernt man den Stab wieder, gelangt der Zeiger wieder in die Ausgangslage.

Das Besondere dabei ist, dass diese Influenz kein Medium benötigt, also auch im Vakuum über Distanzen auftritt. Damit ist ein Feldcharakter bewiesen.

Anmerkung: Eigentlich sind nur negative Ladungen in einem Leiter beweglich, nämlich die Elektronen. Trotzdem spricht man manchmal davon, dass sich positive Ladungen von A nach B bewegen. Grundsätzlich bewegen sich dabei aber die negativen Ladungen von B nach A, sodass auf der Seite von B ein Defizit negativer Ladungen auftritt, diese Seite also positiv geladen ist.

Daher kann man von wandernden positiven Ladungen sprechen, da das Ergebnis dasselbe ist; die Mechanik dahinter ist jedoch eine Andere.

2.2 Modellierung und Mathematisierung

Um das Phänomen der Influenz und vieles Weitere rund um die Elektrizität zu beschreiben, wurde das Modell des elektrischen Feldes entwickelt.

Nice to know: Generell geht es in der Physik nicht unbedingt darum, zu erläutern, wie etwas genau funktioniert, da vieles, wie zum Beispiel die eigentliche Beschaffenheit von Feldern, (noch) gar nicht genau zu erklären ist. Es geht darum, Modelle zu entwickeln, mit deren Hilfe sich mathematische Ausdrücke zur Beschreibung von diesen Phänomenen ableiten lassen.

2.2.1 Feldlinien

Feldlinien⁸ sind ein Modell zur Verdeutlichung von grundlegenden Eigenschaften eines elektrischen Feldes. Sie schneiden sich nie und haben eine Richtung, die durch Pfeile angezeigt wird. Sollten sie von einem Körper ausgehen oder auf einen Körper auftreffen, stehen sie senkrecht auf dessen Oberfläche. Außerdem gibt die Dichte der Linien die Stärke des Feldes an.⁹ Die Pfeile der Feldlinien zeigen immer zum negativen Pol.

Bei der Wechselwirkung zweier Körper gibt es eine abstoßende Kraftwirkung bei gegenläufigen Feldlinien und eine anziehende Kraftwirkung, wenn die Feldlinien in dieselbe Richtung zeigen.

2.2.2 Coulomb'sches Gesetz

Wenn nun klar ist, dass sich Ladungen beeinflussen, ist der nächste Schritt diesen „Einfluss“ mathematisch auszudrücken. Dazu gibt es das Coulomb'sche Gesetz, welches die Kraft, die zwei

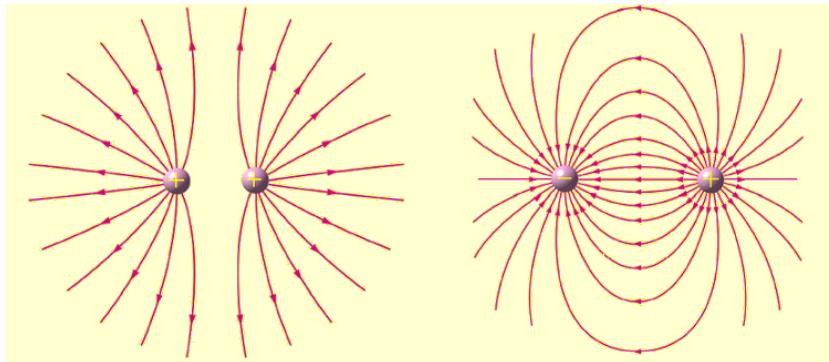


Abbildung 2.1: Feldlinien zwischen zwei geladenen Teilchen

kugelförmige (sphärische) Körper aufeinander auswirken, in Abhängigkeit von deren Ladungen und dem Abstand, angibt:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} \quad (2.1)$$

Die Gleichung besteht aus einem konstanten Faktor, der die sogenannte „Permittivität“ („elektrische Feldkonstante“) ϵ_0 beinhaltet (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 32), und einem variablen Teil der die Beträge der beiden Ladungen Q_1 und Q_2 , und den Abstand der Mittelpunkte d enthält.

Die Einheit Ladung ist C (sprich: „Coulomb“), was gleich $A \cdot s$ ist. Dies folgt daraus, dass Stromstärke als Ladung pro Zeit ($\frac{Q}{t}$) definiert ist; daher kann man Ladung als Stromstärke *mal* Zeit ($A \cdot t$).

Eine Einheitenrechnung sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{As \cdot As}{m^2} \\ \frac{kg \cdot m}{s^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{A^2 \cdot s^2}{m^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Daraus ergibt sich als Einheit für die Feldkonstante ϵ_0 :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{A^2 \cdot s^2}{m^2} \cdot \frac{s^2}{kg \cdot m} \\ \epsilon_0 &= \frac{A^2 \cdot s^4}{m^3 \cdot kg} \\ \epsilon_0 &= \frac{As}{Vm} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aufgabe: Versuche über die Definition des Volts ($V = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$) von der vorletzten auf die letzte Umformung zu kommen! Einheitenrechnungen sind wichtig!

Nice to know: Diese Form der Gleichung ist analog zu Newtons Gravitationsgesetz: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$. Hierbei ist G ebenfalls eine Konstante, nämlich die Gravitationskonstante.

2.2.3 Homogenes Feld

Das elektrische Feld zwischen zwei geladenen Körpern ist meistens inhomogen. Das heißt, dass die Feldstärke, also die Dichte der Feldlinien nicht überall gleich ist. Für Berechnungen würde dies das Lösen von komplexen Differentialgleichungen voraussetzen. Daher wird in der Schulphysik fast immer von einem homogenen Feld ausgegangen, wenn Berechnungen an einem elektrischen Feld anstehen:

- Die Feldlinien sind alle parallel.
- Die Feldlinien zeigen alle in dieselbe Richtung.
- Die Feldlinien haben alle denselben Abstand zueinander.

Eine Möglichkeit, so ein Feld zu generieren, ist der Plattenkondensator (Sektion 2.4 auf Seite 31: [Plattenkondensator](#)).

2.2.4 Feldstärke

In einem homogenen Feld ist die Feldstärke (Formelzeichen: E) also an jedem Punkt gleich. Sie ordnet jedem geladenen Körper eine Kraft und, würde man mit Vektoren rechnen, eine Richtung zu:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.4)$$

q ist hierbei die *vorzeichenbehaftete* Ladung des Probekörpers im Feld. Als Einheit ergibt sich $\frac{N}{C}$ für die Feldstärke E .

Umgeformt für F ergibt sich aus der Gleichung:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (2.5)$$

2.3 Phänomene

2.3.1 Abschirmung

In einem zweidimensionalen elektrischen Feld kann durch einen geschlossenen Ring aus Metall ein elektrisches Feld abgeschirmt werden. Dies passiert, da die beweglichen negativen Ladungen im Metallring zur positiven Seite des äußeren Feldes wandern (entgegen der Feldlinien) und auf

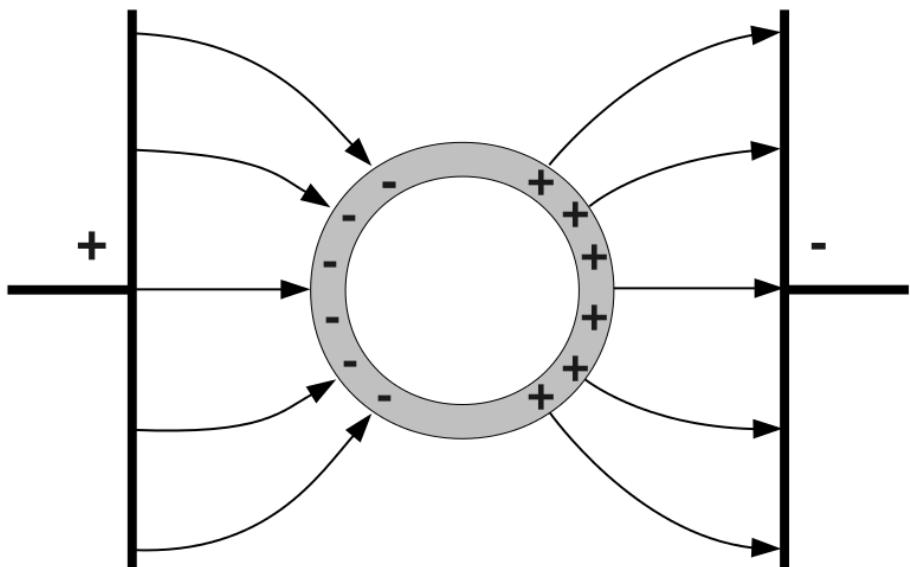


Abbildung 2.2: Abschirmung eines elektrischen Feldes durch einen Metallring

der anderen Seite des Ringes eine positive Ladung hinterlassen. Diese Ladungstrennung führt ihrerseits zum Aufbau eines elektrischen Feldes, welches in die entgegengesetzte Richtung zeigt und das „äußere“ Feld im Inneren des Rings neutralisiert.¹⁰

Im dreidimensionalen Raum ist dafür eine Hülle nötig, die man dann „Faradayischer Käfig“ nennt.

2.4 Plattenkondensator

Der Plattenkondensator (im Folgenden nur noch Kondensator genannt) ist ein wichtiges Element der Elektrotechnik. Auch eignet er sich sehr gut, um in der Schulphysik verschiedene Aspekte von elektrischen Feldern zu zeigen.

2.4.1 Definition

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei ungleichnamig geladenen Platten, die sich parallel gegenüberstehen. Sie sind an eine Spannungsquelle angeschlossen. In einem Schaltplan wird ein Kondensator wie in Abbildung 2.3¹¹ notiert.

Wichtig: An sich fließt kein Strom durch den Kondensator! Die Platten sind elektrisch getrennt; das Dielektrikum, also das nicht-leitende Material zwischen den Platten (z.B. Luft), isoliert.

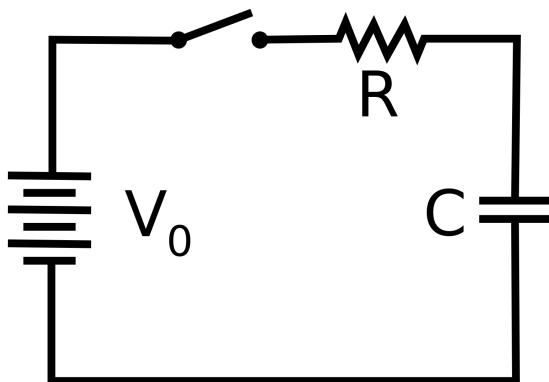


Abbildung 2.3: Ein Schaltkreis mit Kondensator C und Widerstand R

2.4.2 Elektrisches Feld im Inneren des Kondensators

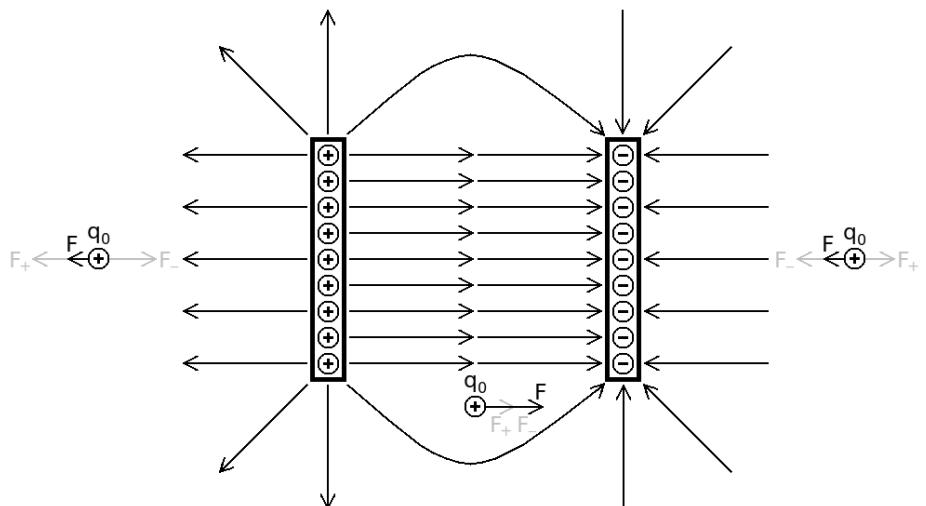


Abbildung 2.4: Das elektrische Feld in und um einen Plattenkondensator

Durch den Überschuss positiver Ladungen auf der einen Seite und negativer Ladungen auf der Anderen, ergibt sich ein homogenes Magnetfeld zwischen den parallelen Platten.¹²

Feldstärke

Die Stärke des Feldes im Inneren lässt sich auf recht einfach Art aus der anliegenden Spannung U und dem Plattenabstand d berechnen:

$$E = \frac{U}{d} \quad (2.6)$$

Die resultierende Einheit $\frac{V}{m}$ ist äquivalent zu $\frac{N}{C}$, der generellen Einheit für die Feldstärke (Siehe Sektion 2.2.4 auf Seite 30: Feldstärke).

Aufgabe: Zeige, dass $\frac{V}{m}$ äquivalent zu $\frac{N}{C}$ ist, indem du die Definitionen der Einheiten Volt $V = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$, Newton und Coulomb einsetzt.

Einheitenrechnungen sind praktisch, um Ansätze für Herleitungen zu verifizieren. Am Ende muss auch immer die richtige Einheit für eine Größe aus den Größen in der Formel herauskommen.

Der Leser fühle sich hiermit eingeladen bis aufgefordert, eine Einheitenrechnung für jede hier aufgeführte Gleichung anzustellen.

Kraft auf Körper

In die allgemeine Gleichung für eine Kraft auf einen geladenen Körpern im elektrischen Feld (Gleichung 2.5 auf Seite 30: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$) kann nun die obige Gleichung für E im Kondensator eingesetzt werden (Gleichung 2.6):

$$F = q \cdot \frac{U}{d} \quad (2.7)$$

In diesem Fall kann sowieso auf eine Vektorrechnung verzichtet werden, da die Richtung des elektrischen Feldes klar ist; es ist ja homogen.

Energieumsatz bei einer Bewegung eines Körpers

Wenn ein Körper in einem Kondensator bewegt wird, wird dabei Energie umgesetzt. Eine äquivalente Ausdrucksweise wäre, es wird „Arbeit verrichtet“. Das geschieht gemäß der allgemeinen Formel (Siehe: Gleichung 1.7 auf Seite 14) für die Arbeit, bei der s die Strecke ist, um die der Körper verschoben wird:

$$W = F \cdot s \quad (2.8)$$

Die Kraft F kann durch Umstellen mit $F = q \cdot E$ zu

$$W = q \cdot E \cdot s \quad (2.9)$$

ersetzt werden.

Nice to know: $W = q \cdot E \cdot s$ ist analog zur Lagearbeit aus der Mechanik: $W_{pot} = m \cdot g \cdot h$

2.4.3 Flächenladungsdichte

Die elektrische Feldstärke im Inneren eines Kondensators lässt sich auch über die Flächenladungsdichte berechnen. Die Flächenladungsdichte σ (Sprich: „klein Sigma“) gibt an, wie *dicht* Ladungen auf den Kondensatorplatten verteilt sind:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (2.10)$$

Nice to know: Man schreibt q für eine spezifische, unveränderbare Ladung eines Probekörpers und Q für z.B. die Ladung von Kondensatorplatten oder den Betrag eines Ladungsflusses durch einen Leiter.

Die Flächenladungsdichte ist bei Betrachtung des homogenen Feldes zwischen den Platten proportional zur Feldstärke ($\sigma \sim E$). Die Proportionalitätskonstante hierbei ist $\frac{1}{\epsilon_0}$ (Siehe Sektion 2.2.2 auf Seite 28: Coulomb'sches Gesetz), sodass sich ergibt:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} \quad (2.11)$$

Exkurs: Flächenladungsdichte bei Kugeln

Die Oberfläche von Kugeln ist als $A = 4\pi \cdot r^2$ definiert. Daher ergibt sich ein Spezialfall für die Feldstärke:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (2.12)$$

Es fällt eine Ähnlichkeit mit dem Coulomb-Gesetz (Gleichung Gleichung 2.1 auf Seite 29) auf, welches die Kraft zwischen zwei geladenen, sphärischen Körpern angibt.

2.4.4 Kapazität des Kondensators

Die wichtigste elektrische Größe eines Kondensators ist die Kapazität C mit Einheit „Farad“, Zeichen $F = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2} = \frac{A^2 \cdot s^2}{N \cdot m}$:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.13)$$

Die Kapazität gibt also an, wie viel Ladung ein Kondensator bei einer definierten Spannung fasst, bzw. wie hoch die Spannung sein muss, damit die definierte Ladung Q auf den Kondensator „geht“.

Nice to know: Natürlich gibt es in der Realität eine Obergrenze für die Spannung, die sogenannte „Durchschlagsspannung“, bei der der Kondensator durchschlägt, das heißt, dass nun *doch* Ladungen unter einem relativ niedrigen Widerstand von einer zur anderen Platte wandern können. Damit ergibt sich ein Stromfluss, der meist so hoch ist, dass er den Kondensator oder andere Komponenten beschädigt.

Für eine Bestimmungsgleichung für die Kapazität eines Kondensators, welche nur aus Kenngrößen besteht, muss Q ersetzt werden. Mit den beiden Definitionen für die Feldstärke ($E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ und $E = \frac{U}{d}$) ergibt sich für Q :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \\ \frac{U}{d} &= \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} \\ Q &= \epsilon_0 \cdot \frac{U \cdot A}{d} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dieses Q lässt sich in die Gleichung für C einsetzen:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \cdot \frac{U \cdot A}{d \cdot U} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \tag{2.15}$$

Die Spannung U kürzt sich und es wurde ein weitere Konstante ϵ_r eingeführt. Die einheitenlose „relative Permittivität“ (auch „relative Feldkonstante“) charakterisiert die verstärkenden oder schwächenden Eigenschaften des Dielektrikum (Sektion 2.4.1 auf Seite 31: [Definition](#)). Für Luft und Vakuum ist sie ≈ 1 . Es gibt jedoch Materialien, die durch eine hohe relative Feldkonstante die Kapazität um Faktoren bis ca. $50 \cdot 10^3$ erhöhen.

Nice to know: *BaTiO₃*, Bariumthiooxid, hat eine ϵ_r von $10^2 - 10^{13}$

2.4.5 Verschaltung von Kondensatoren

Parallel

Wenn Kondensatoren in einem Stromkreis parallel¹⁴ geschaltet werden, addieren sich die Kapazitäten. Man kann sagen, dass die effektive Platte größer wird und daher mehr Ladung pro Spannung tragen kann (Siehe Gleichung 2.13 auf Seite 34 und 2.15):

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n \tag{2.16}$$

Die Spannung bleibt dann aufgrund derselben Beziehung an jedem Element konstant:

$$U_{ges} = U_1 = U_2 = \dots = U_n \tag{2.17}$$

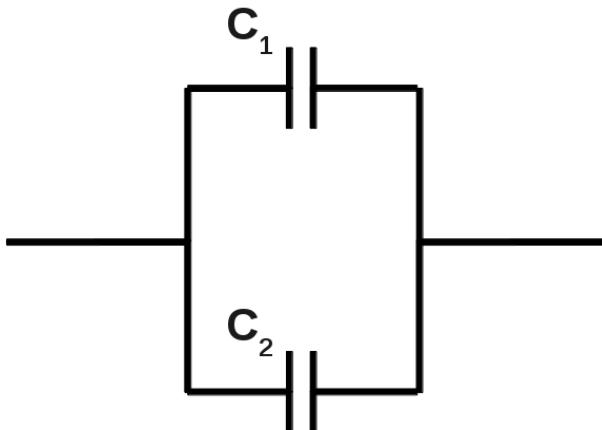


Abbildung 2.5: Parallelschaltung zweier Kapazitäten (= Kondensatoren) C_1 und C_2

In Reihe



Abbildung 2.6: Reihenschaltung zweier Kapazitäten (= Kondensatoren) C_1 und C_2

Wenn Kondensatoren in einem Stromkreis in Reihe¹⁵ geschaltet werden, ist die Summe der Kehrwerte der einzelnen Kapazitäten der Kehrwert der Gesamtkapazität. Das liegt daran, dass das „Mittelstück“, also die positive Platte von C_1 und die negative Platte von C_2 , eine definierte Ladung trägt. Daraus folgt, dass die positiven und negativen Ladungen an den Platten nur durch Influenz (Siehe Sektion 2.1.3 auf Seite 27: Influenz) auftreten können, da dieses Stück elektrisch vom Rest des Schaltkreises getrennt ist, also auch von einer möglichen Ladungsquelle.

Daher ist die Gesamtkapazität der Schaltung $0F$, wenn einer der beiden Kondensatoren die Kapazität $0F$ hat; $0,5F$, wenn beide Kondensatoren die Kapazität $1F$ haben; und die Gesamtkapazität kann nie größer sein als die niedrigste Einzelkapazität in der Kondensatorschaltung.

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.18)$$

Wie auch bei der Reihenschaltung von Widerständen oder Spannungsquellen, addieren sich die

Spannungen an den einzelnen Elementen zur Gesamtspannung:

$$U_{ges} = \sum_{i=1}^n U_i = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (2.19)$$

2.5 Elektronenbewegung im Elektrischen Feld

Da Elektronen negativ geladen sind (es *sind* negative Ladungen), werden sie im elektrischen Feld zur positiven Seite hin beschleunigt, das heißt entgegen der Feldlinien.

2.5.1 Einwirkende Kraft

Die Kraft ist abhängig von der Feldstärke und der Elektronenladung:

$$F_{el} = E \cdot q_e \quad (2.20)$$

Die Elektronenladung q_e ist die konstante Ladung *eines* Elektrons (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 23). Zur experimentellen Bestimmung dieser, siehe Sektion 2.7 auf Seite 39: [Millikanversuch](#).

Im Kondensator gilt dann mit $E = \frac{U}{d}$:

$$F_{el} = \frac{U}{d} \cdot q_e \quad (2.21)$$

2.6 Bewegungsgesetze für Elektronen

Wichtig: Diese Bewegungsgesetze und Bewegungsgesetze allgemein sind wiederkehrendes Grundmaterial in der Schulphysik und sollten daher „aus dem FF“ beherrscht werden. Siehe: [1.6](#).

2.6.1 Bewegung parallel zu den Feldlinien

Auf ruhende Elektronen, oder Elektronen, die sich parallel zu den Feldlinien des elektrischen Feldes bewegen, wirkt eine Kraft, welche sie ebenfalls parallel zu den Feldlinien beschleunigt. Daher ist und bleibt diese Bewegung eindimensional und sie lässt sich durch *ein* Weg-Zeit Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ausdrücken (vgl. vertikaler Wurf):

Nach Newton gilt $F = m \cdot a$, was sich zu $a = \frac{F}{m}$ umstellen lässt. F_{el} (Siehe: Gleichung 2.21 auf Seite 37) lässt sich nun für F einsetzen und die Elektronenmasse m_e , welche konstant ist (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 03), für m :

$$a = \frac{q_e \cdot E}{m_e} \quad (2.22)$$

Folgendes Weg-Zeit-Gesetz für den Weg der Feldlinien entgegen, lässt sich aufstellen:

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \\ s(t) &= \frac{q_e \cdot E}{2m_e} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}\quad (2.23)$$

In diesem Fall steht v_0 für die angesprochene mögliche Anfangsgeschwindigkeit, die das Elektron bereits „drauf hatte“ und s_0 für eine mögliche Anfangsstrecke, die das Elektron vor Beeinflussung durch das elektrische Feld schon zurückgelegt hatte.

Wichtig: Beim Einsetzen von v_0 auf das Vorzeichen achten! Z.B. muss eine Geschwindigkeit, die der Beschleunigungsrichtung entgegengesetzt ist, also in Richtung der Feldlinien verläuft, mit negativem Vorzeichen notiert werden.

Dieses Gesetz kann spezifischer für die Bewegung in einem Plattenkondensator mit eingesetztem $E = \frac{U}{d}$ (Siehe Gleichung 2.6 auf Seite 33) ausgedrückt werden:

$$s(t) = \frac{q_e \cdot U}{2d \cdot m_e} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (2.24)$$

2.6.2 Bewegung senkrecht zu den Feldlinien

Etwas komplexer wird es, wenn sich ein Elektron senkrecht zu den Feldlinien eines elektrischen Feldes bewegt. Analog zu den Berechnungen eines horizontalen Wurfs (z.B. Abwurf von Ladung von einem Flugzeug) muss auch hier die Bewegung in eine horizontale Bewegung („in x-Richtung“) und eine vertikale Bewegung („in y-Richtung“) aufgeteilt werden.

Die Bewegung in x-Richtung ist als einfache gleichförmige Bewegung nach $x(t) = v \cdot t + x_0$ zu beschreiben.

Die Bewegung in y-Richtung kann aus Gleichung 2.23 oder 2.24 übernommen werden.

Um beide Bewegungen in einer einzigen Gleichung zusammenzufassen, also den y-Weg in Abhängigkeit der x-Position anzugeben und damit die Position des Elektrons eindeutig zu bestimmen, muss $x(t)$ nach t umgestellt werden und dieses t in die Gleichung von $s(t)$ eingesetzt werden.

Nice to know: Zur Vereinfachung wird in den allermeisten Aufgaben zu diesem Thema auf einen Anfangswert, also auf v_0, y_0 o.ä. verzichtet. So auch in dieser Herleitung.

Zudem wird die Funktion für den Weg in y-Richtung nicht mehr $s(t)$, sondern $y(t)$ genannt, um sie besser von $x(t)$ abzugrenzen.

$$\begin{aligned}x(t) &= v_x \cdot t \\ t(x) &= \frac{x}{v}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Es folgt das Einsetzen in die allgemeine Form von $y(t)$ (Siehe: Gleichung 2.23 auf Seite 38):

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{q_e \cdot E}{2m_e} \cdot t^2 \\y(x) &= \frac{q_e \cdot E}{2m_e} \cdot \frac{x^2}{v_x^2}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Spezifisch in einem Kondensator:

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{q_e \cdot U}{2d \cdot m_e} \cdot t^2 \\y(x) &= \frac{q_e \cdot U}{2d \cdot m_e} \cdot \frac{x^2}{v_x^2}\end{aligned}\tag{2.27}$$

2.7 Millikanversuch

Der Millikanversuch war ein Experiment des amerikanischen Physikers Robert Millikan von 1910, dessen Ergebnisse ihm 1923 den Nobelpreis einbrachten. Mit diesem Versuch konnte die Existenz einer kleinsten Elementarladung nachgewiesen werden und diese Elektronenladung recht genau bestimmt werden.

2.7.1 Vorgehensweise

Millikans Ansatz war recht simpel. Er zerstäubte flüssiges Öl mit einer Pumpe so, dass die Tropfen extrem klein und durch Reibung mit der Pumpendüse negativ geladen wurden. Diese wurden in einen Plattenkondensator geleitet und mit einem Mikroskop deren Bahn beobachtet. Mittels Einstellen der Spannung am horizontal zur Erdoberfläche ausgerichteten Kondensator wurde ein Tröpfchen zum Schweben gebracht, indem das elektrische Feld entgegen der Fallbeschleunigung der Erde wirkte.

Damit ergab sich der Ansatz, die elektrische Kraft $F_{el} = q \cdot E$ (Gleichung 2.5 auf Seite 30) gleich der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ zu setzen. Wie schon so oft kann dann für E die homogene Feldstärke im Kondensator eingesetzt werden: $E = \frac{U}{d}$:

$$\begin{aligned}F_{el} &= F_G \\q \cdot E &= m \cdot g \\q &= \frac{m \cdot g}{E} \\q &= \frac{m \cdot g \cdot d}{U}\end{aligned}\tag{2.28}$$

2.7.2 Umgehung der direkten Massebestimmung

Bis auf die Masse sind in der obigen Gleichung alle Größen gegeben bzw. messbar. Das bestimmen der Masse stellte allerdings ein Problem dar, da die Tröpfchen viel zu klein waren um ihre Masse

auf klassische Art zu bestimmen (z.B. wiegen). Auch die Bestimmung über das Volumen und die Dichte des Öls erwiesen sich als unpraktisch, da der Durchmesser eines Tröpfchens aufgrund der optischen Eigenschaften der Mikroskoplinsen nur sehr unpräzise gemessen werden konnte.

Daher hat sich Robert Millikan dem Gesetz von Stokes¹⁶ zur Reibung von spärlichen („kugelförmigen“) Körpern in Gasen oder Flüssigkeiten bedient:

Mit dem Gesetz lässt sich der Radius eines Ölträpfchens über dessen Fallgeschwindigkeit berechnen, welche im selben Experiment bestimmt werden kann: Durch Abschalten der Kondensatorspannung und Stoppen der Zeit, die der Tropfen für das Zurücklegen einer bestimmten Strecke benötigte, die in Form eines Rasters auf dem Mikroskop erkennbar war, konnte die Fallgeschwindigkeit berechnet werden. Zudem war diese Geschwindigkeit nach einer kurzen Beschleunigungsphase durch die Luftreibung konstant, da die Luftreibung enorm ist.

Die Stokesreibung ist, wenn sich das Ölträpfchen mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, gleich der Differenz aus Gewichtskraft und Auftrieb des Träpfchens: $F_R = F_G - F_A$.

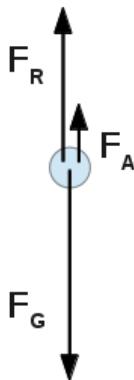


Abbildung 2.7: Kräftebeziehungen beim Fall des Ölträpfchens

Setzt man die entsprechenden Teilgleichungen (Gewichtskraft einer Kugel $F_G = V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_O g$ und Auftrieb einer Kugel in der Luft $F_A = V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L g$) ein, erhält man für r :

$$\begin{aligned} F_R &= F_G - F_A \\ 6\pi\eta v_0 r &= \frac{4}{3}r^3\pi\rho_O g - \frac{4}{3}r^3\pi\rho_L g \\ r &= \sqrt{\frac{9v_0\eta}{2(\rho_O - \rho_L) \cdot g}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Hierbei ist v_0 besagte Fallgeschwindigkeit, η (sprich: „klein Eta“) die Viskosität der Luft, ρ (sprich: „klein Rho“) jeweils die Dichte des Öls (ρ_O), respektive von Luft (ρ_L) und g die Fallbeschleunigung.

Da man nun den Radius r bestimmen kann, kann man auch das Volumen und dann, über die Dichte, auch die Masse des Ölkörpers berechnen:

2.7.3 Bestimmung von q

Die eigentlich Bestimmung von q ergibt sich aus dem Gleichsetzen von F_{el} und F_G , wie schon angesprochen. Allerdings muss hier auch noch die Auftriebskraft F_A in der Luft mit eingerechnet werden, welche in der gegebenen Größenordnung nicht zu vernachlässigen ist.

Anstelle von $F_{el} = F_G$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_G - F_A \\ \frac{qU}{d} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_O g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L g \\ \frac{qU}{d} &= \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_O - \rho_L) g \\ q &= \frac{d}{U} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_O - \rho_L) g \end{aligned} \quad (2.30)$$

Jetzt noch den Radius r von der Stokesreibung einsetzen:

$$\begin{aligned} q &= \frac{d}{U} \cdot \frac{4}{3}\pi \sqrt{\frac{9v_O\eta}{2(\rho_O - \rho_L) \cdot g}}^3 (\rho_O - \rho_L) g \\ q &= \frac{d}{U} \cdot 9\sqrt{2}\pi \cdot \sqrt{\frac{v_O^3 \cdot \eta^3}{(\rho_O - \rho_L) \cdot g}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Damit existiert eine Gleichung für die Ladung q eines Ölropfchen, die nur aus messbaren Größen besteht.

Anmerkung: Natürlich kann und muss die Herleitung als Schüler nicht komplett nachvollzogen werden. Wichtig sind ist der Ansatz und das Auftreten des Masseproblems. Wie genau dieses gelöst würde, ist nicht von unabdingbarer Bedeutung. Das Curriculum legt den Fokus mehr auf die richtige Interpretation der Ergebnisse; beschrieben im nächsten Abschnitt.

2.7.4 Ergebnisse

Wenn man die Ergebnisse wie in Grafik 2.8¹⁷ aufführt, fällt auf, dass sich eine sogenannte Quantisierung einstellt. Das heißt, dass die Ladung nicht „Stufenlos“ sondern in „Sprüngen“ existiert. Mathematisch heißt das, dass die Ladungen der Tröpfchen Vielfache einer kleinsten Einheit sind, Vielfache der „Elementarladung“.

Diese Elementarladung (in Coulomb C) mit Formelzeichen q_e oder e (seltener auch einfach q , wobei Verwechslungsgefahr mit der generellen Ladung eines Körpers, ebenfalls q , besteht)

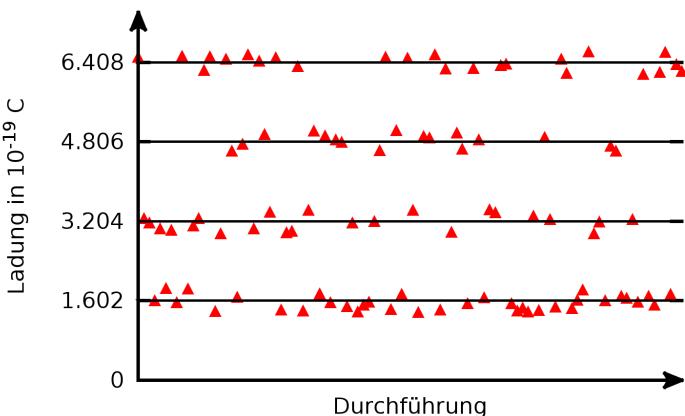


Abbildung 2.8: Auswertung via Graph: Ladung über der Nummer der Durchführung

wurde von den Forschern als Ladung eines einzelnen Elektrons interpretiert¹⁸. Auf dem Casio fx991xx Taschenrechner existiert die Konstante Nr. 23:

$$q_e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} C \quad (2.32)$$

Alle Ladungen, die uns begegnen sind also Vielfache dieser Elementarladung. Dies war eine ziemlich bahnbrechende Entdeckung, die Millikan schließlich auch den Nobelpreis einbrachte. Man kann mit ihr z.B. berechnen, wie groß der Überschuss an Elektronen über Protonen auf einem Körper ist, wenn man dessen Ladung kennt:

$$n_{ueberschuss} = \frac{q}{q_e} \quad (2.33)$$

2.7.5 Applet

Es gibt online eine Vielzahl Applets¹⁹ mit denen man selbst den Versuch durchführen kann, empfohlene Werte für die Dichten und Viskositäten sind ebenfalls auf genannter Website zu finden.

2.8 Braun'sche Röhre

Eine Braun'sche Röhre wird z.B. im Bildschirm eines Oszilloskopes verwendet. Ihre Aufgabe ist es, beschleunigte Elektronen seitlich so abzulenken, dass diese auf einer bestimmten Stelle auf einem dahinter liegenden Schirm auftreffen und dort durch eine Leuchtschicht, die durch das Auftreffen von Elektronen zum Leuchten angeregt wird, sichtbar gemacht werden.

2.8.1 Aufbau und Funktionsweise

Zu Beginn müssen zunächst freie Elektronen erzeugt werden. Dies geschieht über einen Glühwendeln, ein gewickelter Draht durch den ein hoher Strom fließt. Dadurch glüht er und sondert, gemäß dem glühelektrischen Effekt²⁰, Elektronen ab.

Diese Elektronen werden nun mit dem elektrischen Feld einer positiv geladenen Platte beschleunigt und durch eine Loch in dieser Platte in einen oder mehrere Kondensatoren geleitet.

In diesen Kondensatoren erfolgt die eigentliche Ablenkung, gemäß der Elektronenbewegung in elektrischen Feldern (Siehe: Sektion 2.6 auf Seite 37: [Bewegungsgesetze für Elektronen](#)). Um einen zwei-dimensionalen Schirm zu bestrahlen, müssen zwei Kondensatoren interagieren, die senkrecht zueinander stehen. Für jegliche Berechnung spart man sich dies allerdings und betrachtet nur die Ablenkung in *einem* Kondensator. Siehe dazu die Abbildung 2.9²¹.

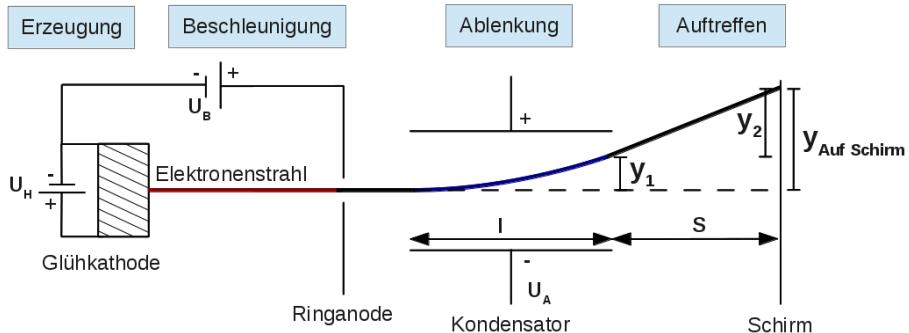


Abbildung 2.9: Schema einer Braun'schen Röhre

2.8.2 Mathematisierung

Beschleunigungsphase

Um auf die endgültige Geschwindigkeit der beschleunigten Elektronen in x-Richtung zu schließen, lässt sich ein Energieansatz vollziehen. Die generelle kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ (wichtige Formel, die allgemein bekannt sein sollte) lässt sich der Energie des elektrischen Feldes $E_{el} = q \cdot U_B$, welches von der Platte ausgeht, gleichsetzen. Dabei ist zudem $q = q_e$ und $m = m_e$, da wir es mit Elektronen zu tun haben (Siehe Sektion 2.7 auf Seite 39: [Millikanversuch](#) und Sektion 3.6 auf Seite 53: [Fadenstrahlrohr](#)):

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= E_{el} \\
 \frac{1}{2} m_e \cdot v_x^2 &= q_e \cdot U_B \\
 v_x &= \sqrt{\frac{2q_e \cdot U_B}{m_e}}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Aufgabe: Oft ist die Endgeschwindigkeit gegeben und es ist nach der Spannung gefragt. Stelle die Gleichung nach der Beschleunigungsspannung U_B um! Solche Umformungen sind fast das Wichtigste in der Schulphysik.

Ablenkungsphase

Diese Bewegung wird wieder aufgeteilt in eine gleichförmige Bewegung in x-Richtung und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y-Richtung. Da sich dies zudem in einem Kondensator abspielt können wir exakt die Gleichung 2.27 heranziehen. Allerdings muss „zur Abgrenzung von der Beschleunigungsspannung, zum Formelzeichen der Ablenkspannung der Index A hinzugefügt werden:

$$y_1(x) = \frac{q_e \cdot U_A}{2d \cdot m_e} \cdot \frac{x^2}{v_x^2} \tag{2.35}$$

Jetzt kann noch die Geschwindigkeit v_x mit der Gleichung 2.34 ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= \frac{q_e \cdot U_A}{2d \cdot m_e} \cdot \frac{x^2 \cdot m_e}{2q_e \cdot U_B} \\
 y_1(x) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{U_A \cdot x^2}{d \cdot U_B}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Exkurs: Nach Austritt aus dem Kondensator

Die Bewegung *nach* dem homogenen elektrischen Feld bis zum Auftreffen auf dem Schirm ist die letzte Phase. Sie ist ebenfalls eine gleichförmige Bewegung, da die Elektronen in keiner Weise mehr beschleunigt werden. Allerdings besteht die Schwierigkeit hierbei, dass sie trotzdem in x- und y-Richtung unterteilt werden muss (Das Elektron wurde in Phase 2 ja schon vertikal abgelenkt). Daher muss neben der Geschwindigkeit in x-Richtung v_x , welche über die gesamte Bahn des Elektrons konstant ist (Siehe: Gleichung 2.34 auf Seite 44), auch die Geschwindigkeit in y-Richtung v_y , *Austritt*, die am Ende der Ablenkphase erreicht wird, errechnet werden.

Die Geschwindigkeit für gleichförmig beschleunigte Bewegungen allgemein (Bewegungsgesetze!) ist die Ableitung des Wegs:

$$v_y(t) = a \cdot t \tag{2.37}$$

Auf den Kontext angewendet gilt mit $a = \frac{q_e \cdot U}{d \cdot m_e}$ (Vergleiche: Gleichung 2.35) und $t = \frac{x}{v_x}$:

$$v_y(x) = \frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{x}{v_x} \quad (2.38)$$

Um die Geschwindigkeit in y-Richtung beim Austritt aus dem Kondensator zu berechnen, also bei dem Weg in x-Richtung, bei dem keine Beschleunigung mehr auf das Elektron wirkt, muss also die Länge des Kondensators gekannt werden und in die obige Gleichung eingesetzt werden. Sie wird hier mit l abgekürzt:

$$v_{y,Austritt} = \frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{l}{v_x} \quad (2.39)$$

Mit dieser Geschwindigkeit kann man das Bewegungsgesetz für das Elektron nach dem Austritt $y_2(x)$ aus dem Kondensator aufstellen. Dafür kommt die gleichförmige Bewegung ($y(t) = v \cdot t$) zum Einsatz:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= v_{y,Austritt} \cdot t \\ y_2(t) &= \left(\frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{l}{v_x} \right) \cdot t \\ y_2(x) &= \left(\frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{l}{v_x} \right) \cdot \frac{x}{v_x} \\ y_2(x) &= \frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{l \cdot x}{v_x^2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Exkurs: Gesamtgleichung

Mit dem Abstand des Schirmes von dem Ende des Kondensators s und der Beziehung für die Zeit $t = \frac{s}{v_x}$ vom Verlassen des Feldes bis zum Auftreffen auf den Schirm, kann eine Gesamtgleichung erstellt werden, die aus zwei Teilen besteht. Sie ist die Addition der Wege in y-Richtung, erstens zwischen dem Verlassen des Kondensators und dem Auftreffen auf den Schirm ($y_2(x = s)$, siehe Gleichung 2.40) und zweitens des Weges in y-Richtung, der bereits beim Verlassen des Kondensators absolviert wurde ($y_1(x = l)$, siehe Gleichung 2.35).

$$\begin{aligned} y_{Auf\ Schirm} &= y_1(x = l) + y_2(x = s) \\ y_{Auf\ Schirm} &= \frac{q_e \cdot U_A}{2d \cdot m_e} \cdot \frac{l^2}{v_x^2} + \frac{q_e \cdot U_A}{d \cdot m_e} \cdot \frac{l \cdot s}{v_x^2} \\ y_{Auf\ Schirm} &= \frac{q_e \cdot U_A \cdot l}{d \cdot m_e \cdot v_x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}l + s \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Als letzter Schritt wird noch für v_x die direkte Bestimmung über die Beschleunigungsspannung $\sqrt{\frac{2q_e \cdot U_B}{m_e}}$ aus Gleichung 2.34 eingesetzt:

$$y_{Auf\ Schirm} = \frac{q_e \cdot U_A \cdot m_e}{d \cdot m_e \cdot 2q_e \cdot U_B} \cdot \left(\frac{1}{2}l + s\right) \quad (2.42)$$

$$y_{Auf\ Schirm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_A \cdot l}{d \cdot U_B} \cdot \left(\frac{1}{2}l + s\right)$$

Anmerkung: Dieser Exkurs ist zwar interessant und das gekonnte Herleiten und Umstellen von Gleichungen ist in der Physik generell extrem wichtig, der Inhalt dieser Herleitung ist aber nicht klausurrelevant, dass heißt, es müssen keine Formel gelernt werden oder ähnliches. Trotzdem ist es eine anspruchsvolle und lehrreiche Aufgabe, diese Herleitung nachzuvollziehen und gegebenenfalls selbst zu vollführen.

Kapitel 3

Magnetisches Feld

3.1 Beweis für die Existenz

Man hat festgestellt, dass es noch ein weiteres Etwas mit Feldeigenschaften gibt, das Ähnlichkeiten mit dem Gravitationsfeld und dem Elektrischen Feld zeigt. Die wichtigste gemeinsame Eigenschaft ist, dass Kräfte auf bestimmte Körper ausgewirkt werden können, ohne dass es ein erkennbares Medium gibt: Der magnetische Effekt ist auch im Vakuum zu beobachten.

Dieser Effekt kann durch eine Mehrzahl Ereignisse ausgelöst werden. (Siehe: Sektion 3.3 auf Seite 48: Ursachen und Eigenschaften eines Magnetfeldes)

3.2 Modellierung und Mathematisierung

3.2.1 Feldlinien

Wie schon beim elektrischen Feld wird hier ein Feldlinienmodell genutzt um Eigenschaften wie Ausrichtung (Polung) oder Stärke darzustellen.

Magnetische Felder haben 2 Pole, die nicht negativ oder positiv, wie beim elektrischen Feld, sondern Nord- und Südpol genannt werden. Ungleichnamige Pole ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab. Im Feldlinienmodell zeigen die Pfeile immer zum Südpol. Bei der Wechselwirkung zweier Körper gibt es eine abstoßende Kraftwirkung bei gegenläufigen Feldlinien und eine anziehende Kraftwirkung, wenn die Feldlinien in dieselbe Richtung zeigen.

Charakteristische Bilder von Feldlinien sowie Erklärungen zu diesen finden sich in Sektion 3.4 auf Seite 48: Feldlinienbilder.

3.2.2 Magnetische Flussdichte

Auch beim magnetischen Feld gibt die Dichte der Feldlinien eine Größe für die Stärke des Feldes an. Diese Größe heißt aber nicht Feldstärke sondern „magnetische Flussdichte“ (Formelzeichen B , Einheit „Telsa“: $T = \frac{kg}{As^2} = \frac{Vs}{m^2}$) (die magnetische Feldstärke gibt es auch, bezeichnet

aber etwas anderes!). Diese ist also äquivalent zur Feldstärke des elektrischen Feldes und ordnet über die Lorentzkraft (Siehe: Sektion 3.5 auf Seite 51: [Lorentzkraft](#)) jedem bewegten, geladenen Teilchen eine Kraft zu (Siehe Sektion 3.5.3 auf Seite 51: [Gleichung](#)).

3.2.3 Homogenes Feld

Ein homogenes Magnetfeld hat die Eigenschaft, dass die Flussdichte in jedem Punkt gleich ist, was Berechnungen erheblich einfacher macht (Vergleiche: Sektion 2.2.3 auf Seite 30: [Homogenes Feld](#)). Homogene Felder treten zum Beispiel im Inneren von Spulen oder zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagneten auf. Mehr dazu in Sektion 3.4 auf Seite 48: [Feldlinienbilder](#).

3.3 Ursachen und Eigenschaften eines Magnetfeldes

3.3.1 Ferromagnetisches Metall

Ein magnetisches Feld wird im klassischsten Sinne ausgelöst, wenn ein ferromagnetisches Metall „magnetisiert“ wird, was heißtt, dass sich sogenannte Elementarmagnete ausrichten.²²

3.3.2 Elektromagnet

Jegliche Leiter, auch nicht-ferromagnetischer Natur, lösen ein magnetisches Feld aus, wenn Strom durch sie fließt.

Wenn Strom (also Elektronen, die kleinste Einheit der negativen Ladung) durch einen Leiter fließt, ergibt sich ein magnetisches Feld, dessen Ausrichtung gemäß verschiedener Handregeln erfolgt. Siehe dazu Sektion 3.4.1 auf Seite 48: [Faustregel](#).

3.3.3 Erdmagnetfeld

Auch von der Erde geht ein magnetisches Feld aus, welches z.B. für Kompassen genutzt wird.

3.4 Feldlinienbilder

3.4.1 Faustregel

Als Eselsbrücke zur Bestimmung der Richtung der Feldlinien um den stromdurchflossenen Leiter kann die „Faustregel“ herangezogen werden. Diese besagt, dass bei der physikalischen Stromrichtung (auch Elektronenflussrichtung genannt) die Feldlinien in Richtung der Fingerspitzen der linken Hand verlaufen, wenn nur der Daumen von der Faust abgespreizt wird und die Flussrichtung angibt.

Für die technische Stromrichtung gilt dieselbe Regel, bloß, dass mit der rechten Faust verfahren wird.

Wichtig! Die physikalische Stromrichtung geht von der Bewegung der Elektronen, also der negativen Ladung aus. Diese fließen vom Minuspol zum Pluspol. Die technische Stromrichtung dagegen geht davon aus, dass die positiven Ladungen sich vom Pluspol zum Minuspol bewegen. Durch die Verwendung gespiegelter Handregeln (die jeweils andere Hand wird genommen) bleiben die Effekte jedoch dieselben.

Allgemein wird in der Physik die physikalische Stromrichtung und damit die *linken* Handregeln bevorzugt, da es auch wirklich die Elektronen sind, die sich in einem Leiter bewegen.

3.4.2 Dauermagneten

23 24

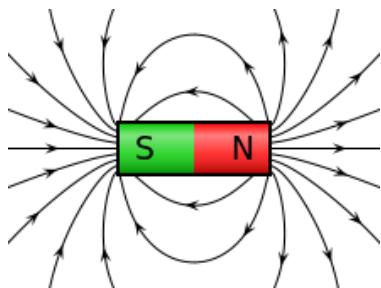


Abbildung 3.1: Stabmagnet

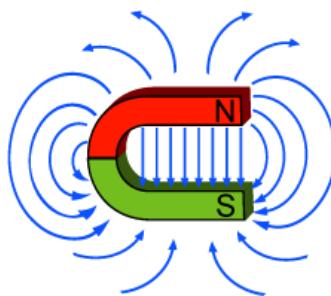


Abbildung 3.2: Hufeisen: homogener Bereich zwischen den Schenkeln.

3.4.3 Gerader Leiter

25 26

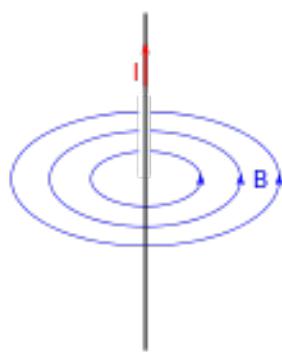
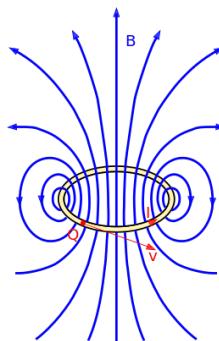
Abbildung 3.3: Geraden Leitern: I zeigt die technische Stromrichtung an.

Abbildung 3.4: Leiterschleife (Spule mit einer Windung): Akkumulation zu einem Bündel Feldlinien. Technische Stromrichtung

3.4.4 Spule

27

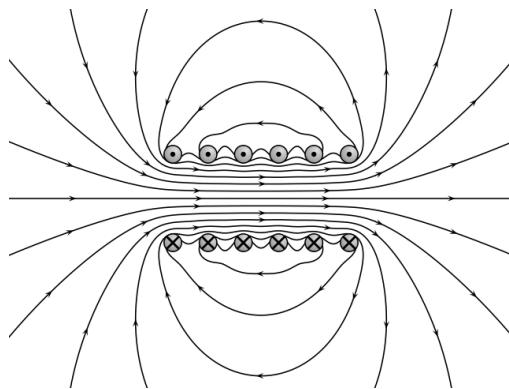


Abbildung 3.5: Spule: Im Querschnitt zeigt \otimes den technischen Stromfluss in die Blattebene an. Vergleich mit Leiterschleife: homogener Fluss im Inneren.

3.5 Lorentzkraft

3.5.1 Geladenes Teilchen

Die Lorentzkraft wirkt auf jedes geladene, in einem Magnetfeld bewegte Teilchen, wenn sich dieses Teilchen nicht parallel zu den Feldlinien bewegt. Die Lorentzkraft ist abhängig von der Flussdichte des Magnetfeldes, der Ladung und Geschwindigkeit des Teilchens und von dem Winkel zu den Feldlinien. Im Folgenden werden jedoch nur noch Fälle betrachtet, bei denen sich Teilchen senkrecht zu den Feldlinien bewegen, was Berechnungen vereinfacht.

3.5.2 Handregeln

Bei der Richtung der Lorentzkraft auf ein negativ geladenes Teilchen, das sich senkrecht zu den Feldlinien eines magnetischen Feldes bewegt, gilt die linke Handregel. Bei dieser werden Daumen, Zeige- und Mittelfinger der linken Hand abgespreizt, sodass sie der Zeichnung 3.6²⁸ entsprechen. Dann bezeichnet der Daumen die Richtung des Teilchens, der Zeigefinger folgt der Richtung des Magnetfeldes und der Mittelfinger zeigt schlussendlich die Richtung der Lorentzkraft an. Für die Kraft auf einen Leiter, der senkrecht in einem Magnetfeld steht, gilt dieselbe Regel wobei der Daumen die physikalische Stromrichtung anzeigt.

Für ein positives Teilchen oder die technische Stromrichtung in einem Leiter kommt die rechte Hand zum Einsatz; die Regel für die Bezeichnung der Finger bleibt gleich.

3.5.3 Gleichung

Der Betrag der Lorentzkraft lässt sich wie folgt berechnen:

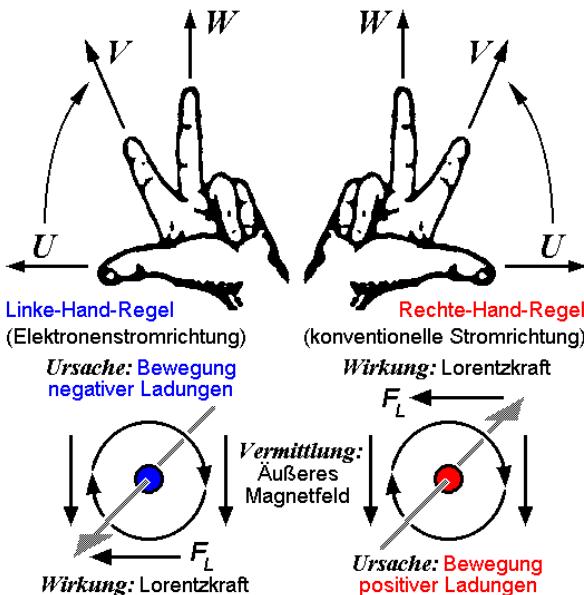


Abbildung 3.6: Die beiden Handregeln für negative und die positive Teilchen. Die Linke gilt zudem für die physikalische und die Rechte für die Technische Stromrichtung. U: Ursache, V: Vermittlung, W: Wirkung

$$F_{Lr} = q \cdot B \cdot v \quad (3.1)$$

Nice to know: Es wird zwar im Unterricht nicht, behandelt, ist aber eventuell ein Fall für eine Transferaufgabe im Abitur: Die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen, welches sich nicht senkrecht zu den Feldlinien bewegt, ist abhängig vom Sinus aus dem Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Feldlinien, also der Magnetfeldrichtung:

$$F_{Lr} = q \cdot B \cdot v \cdot \sin(\angle \vec{v}, \vec{B}) \quad (3.2)$$

Mit dem Kreuzprodukt geschrieben:

$$F_{Lr} = q \cdot (\vec{B} \times \vec{v}) \quad (3.3)$$

Interessant ist, dass die Lorentzkraft nicht nur von der Ladung, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängig ist. Dies macht man sich z.B. im Massenspektrometer (Siehe: Sektion 3.8 auf Seite 56: Massenspektrometer) oder im Wien'schen Filter (Siehe: Sektion 3.7 auf Seite 55: Wien'scher Geschwindigkeitsfilter) zu Nutze.

3.5.4 Stromdurchflossener Leiter

Durch einen stromdurchflossenen Leiter fließen Elektronen vom Minuspol zum Pluspol. Da Elektronen negativ geladene Teilchen sind (es *sind* negative Ladungen), wirkt auch in diesem Fall die Lorentzkraft auf den Leiter, wenn sich der Leiter in einem magnetischen Feld, nichtparallel zu den Feldlinien, befindet.

Die Kraft verhält sich gemäß folgender Formel, wobei l die Länge des Leiterstücks, welches sich senkrecht zu den Feldlinien befindet und I die Stromstärke ist:

$$F_{Lr} = l \cdot I \cdot B \quad (3.4)$$

3.5.5 Relation zur Flussdichte

Aus der Lorentzkraft lässt sich auch die Flussdichte B definieren: Die Flussdichte ordnet jedem bewegten, geladenen Körper eine Kraft (die Lorentzkraft) zu:

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{Lr}}{q \cdot \vec{v}} \quad (3.5)$$

Daraus folgt auch die Einheit Tesla der Flussdichte:

$$\begin{aligned} T &= N \cdot \frac{1}{C \cdot \frac{m}{s}} \\ T &= \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{s}{As \cdot m} \\ T &= \frac{kg}{As^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.6 Spezifische Ladung und Elektronenmasse per Fadenstrahlrohr

Das Fadenstrahlrohr illustriert die Lorentzkraft und diente zur Bestimmung der spezifischen Elektronenladung ($\frac{qe}{me}$). Zusammen mit den Ergebnissen des Millikanversuchs (siehe: Sektion 2.7 auf Seite 39: [Millikanversuch](#)) kann sogar die Masse eines Elektrons bestimmt werden.

3.6.1 Aufbau

Ein Fadenstrahlrohr besteht aus einem Glaskolben in dem sich ein Gas befindet, welches beim Kontakt mit Elektronen zum Leuchten angeregt wird. Siehe Abbildung 3.7²⁹

Im Inneren befindet sich eine Elektronenkanone, die beschleunigte Elektronen absondert (Siehe: Sektion 2.8 auf Seite 42: [Braun'sche Röhre](#)). Durch ein *Helmholzspulenpaar* (2 kurze Spulen mit großem Radius) die parallel zur Richtung der beschleunigten Elektronen stehen, wird ein homogenes Magnetfeld erreicht, welches senkrecht auf der Elektronenrichtung steht.

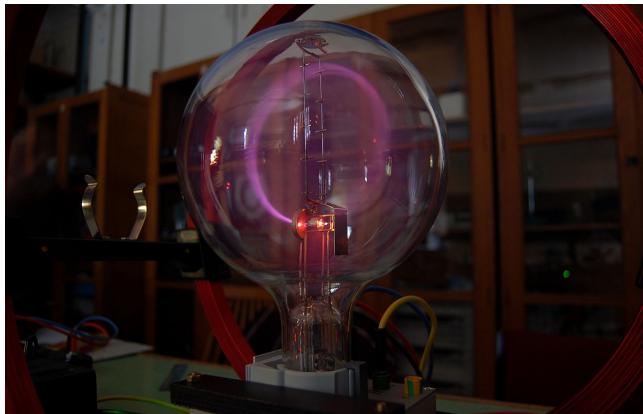


Abbildung 3.7: Ein Fadenstrahlrohr: Das leuchtende Gas zeigt die Elektronenbahn an.

3.6.2 Beobachtung

Die Elektronen beschreiben eine Kreisbahn, was am leuchtenden Gas zu sehen ist. Damit ist die Existenz einer Kraft auf bewegte, geladene Teilchen im Magnetfeld illustriert.

3.6.3 Mathematisierung

Wenn die Geschwindigkeit der Elektronen bekannt, bzw. errechnet wurde, kann über den Radius, welcher auch gemessen werden kann, die spezifische Elektronenladung bestimmt werden. Der Ansatz ist das Gleichsetzen der allgemeinen Zentripetalkraft $F_{Zp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$, also die Kraft, die aufgewendet werden muss, um ein Elektron auf der Bahn zu halten, mit der Lorentzkraft $F_{Lr} = q \cdot B \cdot v$, welche ja genau diese Bahn bewirkt:

$$\begin{aligned} F_{Zp} &= F_{Lr} \\ m_e \cdot \frac{v^2}{r} &= q_e \cdot B \cdot v \\ \frac{q_e}{m_e} &= \frac{v}{B \cdot r} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da es 2 Variablen in der Gleichung gibt (m_e und q_e), kann man mit diesem Versuch nur auf das *Verhältnis* der Ladung und Masse schließen, die „spezifische Elektronenmasse“.

Über den Millikanversuch (siehe: Sektion 2.7 auf Seite 39: [Millikanversuch](#)) konnte jedoch die Elektronenladung q_e direkt bestimmt werden, sodass durch den Versuch mit dem Fadenstrahlrohr die Masse bestimmt werden konnte:

$$\frac{q_e}{m_e} = \frac{v}{B \cdot r}$$

$$m_e = \frac{q_e \cdot B \cdot r}{v} \quad (3.8)$$

3.7 Wien'scher Geschwindigkeitsfilter

Der Wien'sche Geschwindigkeitsfilter ist eine Möglichkeit, einen Elektronenstrahl nach seiner Geschwindigkeit zu filtern, das heißt, nur Elektronen mit einer gewissen Geschwindigkeit passieren zu lassen.

3.7.1 Aufbau

Grundbaustein bildet eine Ablenkeinheit mit einem Kondensator, wie sie in der Braun'schen Röhre (Siehe: Sektion 2.8 auf Seite 42: [Braun'sche Röhre](#)) verwendet wird. Allerdings wird nun ein homogenes Magnetfeld so über den Kondensator gelegt, dass die Feldlinien dieses Feldes senkrecht auf der Elektronenrichtung *und* den Feldlinien des elektrischen Feldes stehen.

Abbildung 3.8³⁰ zeigt den schematischen Aufbau und die grobe Funktionsweise für einen Versuch mit Elektronen.

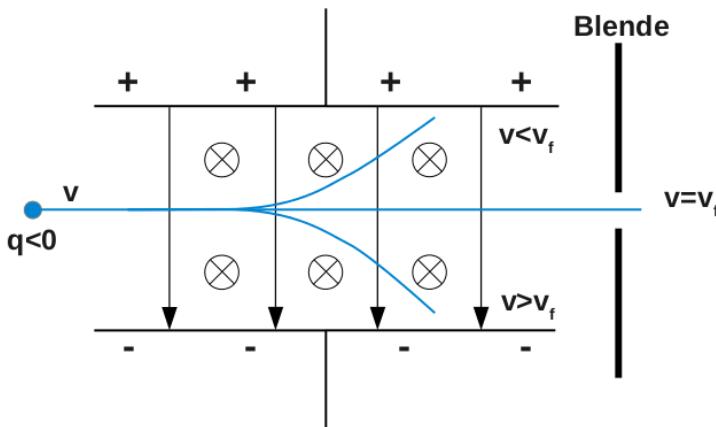


Abbildung 3.8: Der Geschwindigkeitsfilter nach Wien. Die Pfeile charakterisieren die Richtung des elektrischen Feldes, die Kreuze zeigen an, dass die Richtung des Magnetfeldes in die Blattebene verläuft.

Anmerkung: Die magnetischen Feldlinien sind nicht direkt zeichenbar, da sie „in die Papierebene“ gehen. Es wird \odot verwendet, um Anzuzeigen, dass der Pfeil aus der Ebene hinaus verläuft und \otimes um Anzuzeigen, dass der Pfeil in die Ebene hinein verläuft.

Eselsbrücke: Wenn man mit einem Bogen einen Pfeil verschießt, sieht man das Kreuz der Federn; im letzten Moment, bevor man von einem getroffen wird, sieht man den Punkt der Pfeilspitze.

3.7.2 Funktionsweise

Das Magnetfeld und der Kondensator werden so gepolt, dass die, gemäß linker Handregel resultierende, Lorentzkraft F_{Lr} der Coulombkraft F_{el} entgegenwirkt. Da die Lorentzkraft abhängig von der Geschwindigkeit des Elektrons ist und die elektrische Kraft nicht, gibt es eine Geschwindigkeit v_f , bei der sich die beiden Kräfte die Waage halten. Dies ist die Geschwindigkeit, die vom Filter durchgelassen wird:

$$\begin{aligned} F_{Lr} &= F_{el} \\ q_e \cdot B \cdot v_f &= q_e \cdot E \\ v_f &= \frac{E}{B} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Man nehme Notiz von dieser simplen und unglaublich schönen Beziehung!

Eine Einheitenrechnung folgt und zeigt, dass die Einheiten aufgehen:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{E}{B} \\ \frac{m}{s} &= \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{T} \\ \frac{m}{s} &= \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot As} \cdot \frac{As^2}{kg} \\ \frac{m}{s} &= \frac{m}{s} \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.8 Massenspektrometer

Beim Massenspektrometer macht man sich zur Identifikation von chemischen Elementen und deren Isotopen die unterschiedlichen Atommassen zu Nutze. Die ersten funktionstüchtigen Massenspektrometer gibt es seit dem frühen 20. Jahrhundert.

3.8.1 Aufbau

In der Ionenquelle werden Atome aus der Probe gelöst und ionisiert. Das heißt, sie sind nun im gasförmigen Zustand und zudem positiv geladen.

Nach einer Beschleunigungseinheit und einem Wien'schen Filter werden sie in ein homogenes Magnetfeld geleitet in welchem sie dann, gemäß der Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen werden.

3.8.2 Mathematisierung

Da man absolute Gewissheit über Ladung und Geschwindigkeit hat und auch die Flussdichte des Magnetfeldes kennt, ist die einzige Variable, die den Auftreffpunkt auf der Indikatorplatte bestimmt, die Masse des Atoms m_a . Wie beim Fadenstrahlrohr (Siehe Sektion 3.6 auf Seite 53: [Fadenstrahlrohr](#)) wird der Ansatz $F_{Zp} = F_{Lr}$ vollzogen:

$$\begin{aligned} F_{Zp} &= F_{Lr} \\ m_a \cdot \frac{v^2}{r} &= q \cdot B \cdot v \\ m_a &= \frac{q \cdot B \cdot r}{v} \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.9 Zyklotron

3.9.1 Prinzip

Ein Zyklotron besteht aus 2 hohlen, halbzylindrischen Duanden, an denen eine Spannung mit unterschiedlichem Vorzeichen anliegt. Zwischen den Duanden befindet sich ein kleiner Zwischenraum, in welchem dann ein homogenes elektrisches Feld entsteht, dessen Feldlinien von der einen zur anderen Duande verlaufen (Siehe Sektion 2.2.3 auf Seite 30: [Homogenes Feld](#)). Aus 2 darüber bzw. darunter liegenden Magneten ergibt sich ein homogenes Magnetfeld (Siehe Sektion 3.2.3 auf Seite 48: [Homogenes Feld](#)).

Darüber hinaus gibt es einen Einlass und einen Auslass für Teilchen. In der Abbildung 3.9³¹ ist der Einlass blau und der Auslass mit einem Pfeil dargestellt.

Die Teilchenquelle im Inneren des Zyklotrons setzt Elektronen oder Protonen frei, welche durch den Einlass in das elektrische Feld zwischen den Duanden eintreten und durch dieses Feld zu einer der Beiden hin beschleunigt werden. Diese Teilchen werden gleichzeitig durch das Magnetfeld, über die Lorentzkraft, auf eine Kreisbahn gezwungen (Siehe Sektion 3.5 auf Seite 51: [Lorentzkraft](#)), sodass sie im hohlen Duanden eine 180° Kurve beschreiben. Sobald wieder der Spalt zwischen den Duanden erreicht ist, wird die Spannung umgepolt, sodass die Teilchen nun zum anderen Duanden hingezogen werden. Diese Umpolungsfrequenz bleibt über den ganzen Versuch konstant.

In dem Spalt werden die Teilchen abermals und abermals beschleunigt bis der Radius so groß ist, dass die Teilchen aus dem Zyklotron austreten.

3.9.2 Gesetze

Für die Beschleunigung für *Elektronen* gelten folgende Gesetzmäßigkeiten.

Radius

Aus der Gleichsetzung der Zentrifugalkraft und der Lorentzkraft ergibt sich:

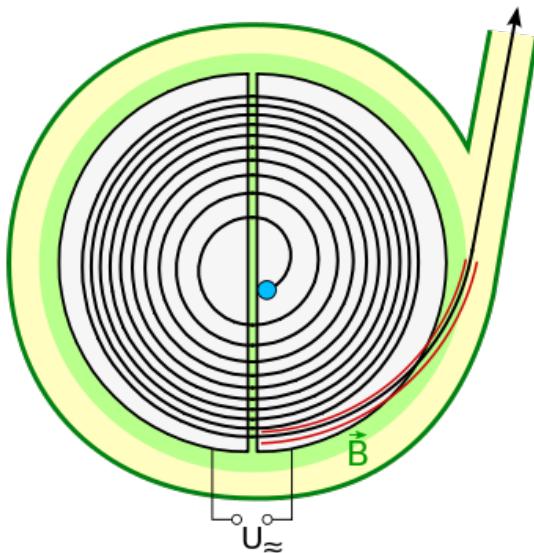


Abbildung 3.9: Prinzipskizze eines Zyklotrons

$$\begin{aligned} F_{Zf} &= F_{Lr} \\ \frac{m \cdot v^2}{r} &= q_e \cdot v \cdot B \end{aligned} \tag{3.12}$$

Daher gilt für den Radius:

$$r = \frac{m_e \cdot v}{B \cdot q_e} \tag{3.13}$$

Frequenz

Aus den Betrachtungen der Umlaufzeit $T = \frac{s_{Umlauf}}{v} = \frac{2\pi r}{v}$ und des Radius (Siehe Gleichung 3.13) ergibt sich für die Frequenz der Umpolung mit $f = \frac{1}{T}$:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ f &= \frac{v}{2\pi r} \\ f &= \frac{v \cdot q_e \cdot B}{2\pi \cdot m_e \cdot v} \\ f &= \frac{q_e \cdot B}{2\pi \cdot m_e} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Damit ist gezeigt, dass die Frequenz nicht abhängig von der Geschwindigkeit der Teilchen ist und auch sonst nur von konstanten Größen abhängig ist. Daher ist die Frequenz über den gesamten Versuch konstant.

Kapitel 4

Induktion

4.1 Grundprinzip

Induktion bezeichnet die Entstehung einer elektrischen Spannung, durch die Änderung eines Magnetfeldes. Das heißt, wenn sich die Flussdichte eines Magnetfeldes ändert, ist in einem elektrischen Leiter, der sich in diesem Feld befindet, eine Spannung messbar. Obwohl die Induktivität einer Spule deutlich höher ist, kann auch in einem beliebig geformten Leiter Spannung induziert werden.

4.2 Induktionsgesetz

In einer Spule: Wenn N die Anzahl der Windungen einer Spule ist und ϕ das Produkt aus der Flussdichte B des Magnetfeldes und der Fläche A des Spulenquerschnitts, welche vom Magnetfeld durchsetzt ist (also $\phi = B \cdot A$), gilt für die Induktionsspannung U_{Ind} :

$$U_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (4.1)$$

Für die Induktionsspannung gilt für bewegte, gerade, nicht geschlossene Leiter der Länge l mit $\vec{l} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$ (Längsachse des Leiters senkrecht zu den Feldlinien und zur Bewegungsrichtung; Bewegungsrichtung senkrecht zu den Feldlinien)(Siehe: Sektion 3.5.2 auf Seite 51: Handregeln):

$$U_{ind} = -l \cdot B \cdot v \quad (4.2)$$

4.3 Verlauf der Induktionsspannung

Sollte sich bei einem Experiment ein Permanentmagnet durch eine Spule bewegen, die länger ist als er selbst, steigt die Induktionsspannung beim Eintritt schnell an. Sobald sich mehr als

die Hälfte der Fläche des Magneten in der Spule befindet, nimmt die Spannung ab und solange er vollständig in der Spule ist beträgt die Spannung 0V, da sich das Magnetfeld in der Spule nun nicht mehr ändert. Beim Austreten nimmt die Spannung wieder zu, diesmal jedoch in der entgegengesetzten Richtung, da die Änderung des Magnetfeldes ΔB nun ein anderes Vorzeichen besitzt ist.

4.4 Lenz'sche Regel

Die Lenz'sche Regel besagt, dass eine Spannung immer dem induzierenden Magnetfeld entgegengesetzt induziert wird. Daher stammen auch die Negationen in den Induktionsgesetzen.

Da eine Spule, die sich in einem geschlossenen Stromkreis befindet, und in der eine Spannung induziert wurde, ein Strom fließt, der selbst ein Magnetfeld erzeugt, muss dieses Magnetfeld, gemäß der Energieerhaltung dem *induzierenden* Magnetfeld entgegengesetzt sein. Beispielsweise würde sonst ein Magnet, der sich durch eine Spule bewegt, durch das Magnetfeld der Spule, das er selbst induzierte, noch immer weiter beschleunigt werden; ein unmögliches *Perpetuum mobile*.

4.5 Magnetischer Fluss in Langen Spulen

4.5.1 Definition

Lange Spulen sind gerade und deren Länge ist größer als deren Durchmesser. Damit ist im Inneren ein homogenes Magnetfeld zu beobachten, siehe Sektion 3.4 auf Seite 48: [Feldlinienbilder](#).

4.5.2 Gesetze

Die magnetische Flussdichte im Inneren einer stromdurchflossenen Spule ist definiert als:

$$B = \mu_0 \mu_r \cdot N \cdot \frac{I}{l} \quad (4.3)$$

Hierbei ist μ_0 die magnetische Permeabilitätskonstante und μ_r die relative Permeabilitätszahl, welche für Luft und Vakuum ≈ 1 ist.

Nice to know: Mit speziellen Legierungen können relative Permeabilitäten von über $9 \cdot 10^5$ erreicht werden, was die Flussdichte um den selben Faktor erhöhen würde.

4.6 Selbstinduktion

4.6.1 Grundprinzip

Wenn Elektronen durch einen Leiter fließen, erzeugen sie einen Strom, der in einer Spule ein Magnetfeld aufbaut (Siehe Sektion 3.4.4 auf Seite 50: [Spule](#)). Beim Aufbau dieses Magnetfeldes ändert sich dieses, logischerweise. Diese Änderung erzeugt allerdings in der selben Spule auch

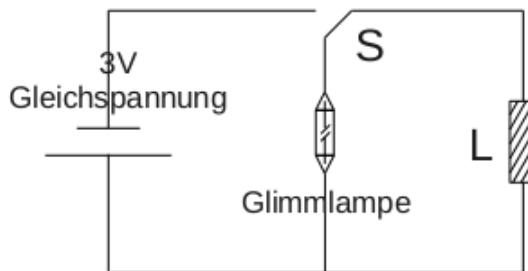


Abbildung 4.1: Möglicher Schaltkreis mit einer Glimmlampe, die eine hohe Auslösespannung benötigt. S ist ein Schalter der Wahlweise die Gleichspannungsquelle oder die Glimmlampe mit der Spule verbindet.

wieder eine Induktion, die sogenannte Selbstinduktion, deren Strom gemäß der Lenz'schen Regel (Siehe Sektion 4.4 auf Seite 62: Lenz'sche Regel) entgegengesetzt der eigentlichen Stromrichtung gerichtet ist.

Dies führt dazu, dass der Stromfluss „gebremst“ wird und eine zur Spule in Reihe geschaltete Lampe im Gleichspannungskreis deutlich später aufleuchtet als ohne die Spule.

4.6.2 Verhalten beim Unterbrechen eines Stromkreises

Wenn in einem Stromkreis (z.B. Abbildung 4.1³²) eine Spule mit Strom durchflossen ist und sich in ihr das Magnetfeld vollständig aufgebaut hat, wird bei einer abrupten Unterbrechung des Stromkreises das Magnetfeld zusammenbrechen und aufgrund dieser starken Änderung (Δt ist sehr klein) eine hohe, entgegengesetzte gepolte Spannung induziert.

Dies lässt sich mit einer parallel zur Spule geschalteten Glimmlampe veranschaulichen, die eine Auslösespannung von ca. 60 - 70 Volt besitzt. Sie wird beim Ausschalten des Stromkreises leuchten, auch wenn die Spannung bisher nur wenige Volt betrug.

4.7 Induktivität

Die Induktivität beschreibt die Größe des Vermögens von elektrischen Leitern, insbesondere Spulen, zu Induzieren.

4.7.1 Definition und Gesetz

Für lange Spulen gilt mit der Querschnittsfläche A :

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \cdot A}{l} \quad (4.4)$$

4.7.2 Induktionsgesetz mit der Induktivität

Nach Einsetzen der magnetischen Flussdichte (siehe Gleichung 4.3 auf Seite 62) in die Formel für Induktionsspannung (siehe Gleichung 4.1 auf Seite 61) ergibt sich:

$$U_{ind} = -\mu_0 \mu_r \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A \cdot \frac{dI}{dt} \quad (4.5)$$

Auffallend ist, dass der Teil $\mu_0 \mu_r \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A$ eben benannte Induktivität ist (siehe Gleichung 4.4). Daher kann die Induktionsspannung auch wie folgt berechnet werden:

$$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (4.6)$$

4.8 Energie in Spulen

Die Energie, die in Form eines Magnetfeldes in einer Spule gespeichert ist und durch Selbstinduktion wieder in elektrische Energie umgewandelt werden kann, ist wie folgt zu berechnen:

$$E = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad (4.7)$$

Eine mögliche Herleitung, die eventuell interessant, aber sicher nicht klausurrelevant ist, ist diese: Sie beruht auf der allgemeinen und der elektrischen Leistung ($P = \frac{dE}{dt}$ und $P = |U| \cdot I$) sowie auf der Induktivitätsbeziehung $|U| = L \cdot \frac{dI}{dt} \iff L = |U| \cdot \frac{dt}{dI}$:

$$\begin{aligned} P &= |U| \cdot I = \frac{dE}{dt} \\ dE &= |U| \cdot I \cdot dt \\ \frac{dE}{dI} &= |U| \cdot \frac{dt}{dI} \cdot I \\ \frac{dE}{dI} &= L \cdot I \\ E &= \int L \cdot I \, dI \\ E &= \frac{1}{2} L \cdot I^2 \end{aligned}$$

4.9 Induktion im Alltag

4.9.1 Wirbelstrombremse

Funktionsprinzip

In einer Wirbelstrombremse induziert ein magnetisches Feld eine Spannung in einen, sich durch dieses Feld bewegenden ferromagnetischen Körper. Diese Spannung bildet wiederum in diesem

Körper einen Wirbelstrom. Dieser baut seinerseits ein Magnetfeld auf, welches, gemäß Lenz'scher Regel, in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Damit ziehen sich das sogenannte Bremsschwert und der induzierende Magnet an.

Die Wirkung der Bremse ist proportional abhängig von der Fläche, Induktivität und Geschwindigkeit des Schwertes sowie von der Flussdichte des Magnetfeldes.

Merkmale

- Geschwindigkeitsabhängig

Da in der Formel für die Induktionsspannung ($U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$) die Zeit für die Änderung der Flussdichte im Nenner steht, ist die Bremswirkung bei höheren Geschwindigkeiten höher, gesetzt dem Fall, dass sich die Fläche des Bremsswertes und die Stromstärke nicht ändert.

Vorteile

- Verschleiß- und Wartungsfreiheit

Da bei einer Wirbelstrombremse keine Teile aufeinander Schleifen, ist diese weitgehend frei von Verschleiß und auch deutlich Wartungsfreundlicher.

Lediglich eine zu hohe Hitzeentwicklung sollte verhindert werden.

- Ausfallsicherheit

Während herkömmliche Bremsen abhängig von Hydraulik oder Kabelzügen etc. sind, funktionieren Wirbelstrombremsen allein mit Strom, oder, wenn sie mit Permanentmagneten statt Elektromagneten ausgestattet sind, komplett Ausfallsicher.

Nachteile

- Kein vollständiges Abbremsen möglich

Aufgrund der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, ist es theoretisch nicht möglich, allein mit einer Wirbelstrombremse einen Gegenstand zum Stillstand zu bringen.

Typische Anwendungen

Die Wirbelstrombremse findet als klassische Bremse für Fahrzeuge häufig Anwendung in Achterbahnen und Straßenbahnen, da diese oft mit einer vorhersehbaren Geschwindigkeit unterwegs sind, und daher die Bremswirkung genau berechnet werden kann. Dies ist für die Wirbelstrombremse recht wichtig, da, wie schon erwähnt, die Bremswirkung von der Geschwindigkeit abhängig ist.

In Freefalltowern werden Wirbelstrombremsen mit Permanentmagneten eingesetzt, um Sicherheit auch bei einem plötzlichen Stromausfall zu gewährleisten.

In LKWs unterstützen sie manchmal die herkömmliche Bremse.

In Hometrainern hält eine induktionsbasierte Bremse das Gerät wartungsfreier und leiser.

4.9.2 Induktionsherd

Funktionsprinzip

Unter der Herdplatte sitzt eine Spule, durch die ein hochfrequenter Wechselstrom fließt. Dadurch entsteht ein sich ständig änderndes Magnetfeld, welches dann ständig eine Spannung in den Boden des Topfes induziert und in diesem für Wärmeentwicklung sorgt.

Die Stärke ist in der Regel proportional abhängig von der gewählten Frequenz und Stärke des Magnetfeldes, sowie des Materials des Topfes.

Vorteile

- Bessere Regelbarkeit und Ansprache

Die Wärmeentwicklung lässt sich sehr gut steuern und der Herd spricht sehr schnell an, was ihn optimal für große Küchen macht, in denen dies erforderlich ist.

- Geringe Wärmeentwicklung auf der Herdplatte

Da die Hitze sich erst im Topf entwickelt, ist die Herdplatte deutlich weniger heiß als bei einem herkömmlichen Herd, was vor Verbrennungen schützt.

- Effizienz

Ein Induktionsherd ist deutlich effizienter als ein herkömmlicher Elektroherd, da keine Energie in die Aufheizung der Platte gesteckt werden muss.

Nachteile

- Neue Töpfe

Natürlich benötigen die Töpfe bzw. Pfannen einen ferromagnetischen Boden, was bei herkömmlichen Töpfen häufig nicht gegeben ist. Daher muss eventuell viel Geld für ein neues Topf-/Pfannenset ausgegeben werden.

Kapitel 5

Wechselstrom

5.1 Erläuterungen zum Wechselstromkreis

5.1.1 Grundlegende Begriffe

Wechselstrom

Mit Wechselstrom bezeichnet man einen Strom, der nicht nur von einem Punkt zum anderen fließt, sondern mit einer Frequenz die Fließrichtung wechselt. Interessant ist, dass obwohl unter dem Strich keine Elektronen vollständig „überlaufen“, trotzdem Energie umgesetzt werden kann.

Im Idealfall, von dem auch bei allen folgenden Betrachtungen ausgegangen wird, weist die Spannungs- und Stromkurve, über der Zeit, den Verlauf einer Sinuskurve auf.

Amplitude

Die Amplitude ist die maximale Auslenkung der Spannung oder der Stromstärke, also der Scheitelwert (y -Wert). Oft mit \hat{U} bzw. \hat{I} , U_0 bzw. I_0 oder U_{max} bzw. I_{max} angegeben.

Periode

Dauer, bis eine volle Sinuskurve der Spannung vollendet ist, also die Spannung wieder den Nullpunkt aus der selben Richtung passiert, wie beim ersten Durchlauf.

Bei einem Wechselstromgenerator (siehe Sektion 5.2 auf Seite 69: Prinzip des Wechselstromgenerators) ist dies die Dauer, bis sich die Spule einmal um 360° gedreht hat.

Frequenz

Bezeichnet die Anzahl Perioden pro Zeiteinheit.

Aus der Periodendauer ist die Formel $f = \frac{1}{T}$, wobei T die Periodendauer, die Zeit für eine Periode, ist. Die Einheit ist Hz (spricht: „Hertz“), also $\frac{1}{s}$.

Winkelgeschwindigkeit

Die Länge einer Periode einer Sinuskurve kann man auch mit 360° ausdrücken, was praktisch ist, wenn man keine absolute Zeitspanne benötigt, sondern mit Anteilen bzw. Abschnitten rechnet oder argumentiert. Obwohl sich 360° recht gut teilen lässt, rechnet man in der Physik meistens im Bogenmaß. 360° entsprechen dann 2π .

Nice to know: Umrechnung des Winkels α von Grad ins Bogenmaß: $\frac{\alpha}{180} \cdot \pi$

Die Winkelgeschwindigkeit gibt nun an, wie groß der Abschnitt ist, der pro Zeit absolviert wird:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.1)$$

Wichtig: Daran Denken, dass der Taschenrechner bei Winkelfunktionen (\sin , \cos usw.) und Rechnung im Bogenmaß auf „Radian“ stehen muss. Beim Casio-fx991xx [SHIFT] + [SET UP] + [4] drücken. [SHIFT] + [SET UP] + [4] stellt wieder auf Gradmaß um.

5.1.2 Weitere Begriffe

Effektive Spannung

Diese beschreibt die durchschnittliche Spannung im Wechselstromkreis, die zum weiteren Rechnen wie eine Spannung im Gleichstromkreis behandelt werden kann.

Für eine Sinuskurve lässt sie sich wie folgt, in Abhängigkeit der maximalen Spannung, berechnen:

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (5.2)$$

Effektive Stromstärke

Diese beschreibt die durchschnittliche Stromstärke im Wechselstromkreis, die zum weiteren Rechnen wie eine Stromstärke im Gleichstromkreis behandelt werden kann.

Für eine Sinuskurve lässt sie sich wie folgt, in Abhängigkeit der maximalen Stromstärke, berechnen:

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad (5.3)$$

Phasenverschiebung

Eine Phasenverschiebung ist die Verschiebung einer Kurve entlang der x-Achsen, typischerweise die Verschiebung der Kurve des Stroms relativ zur Kurve der Spannung. Sie wird in Grad oder im Bogenmaß angegeben. Siehe folgende Abbildung³³:

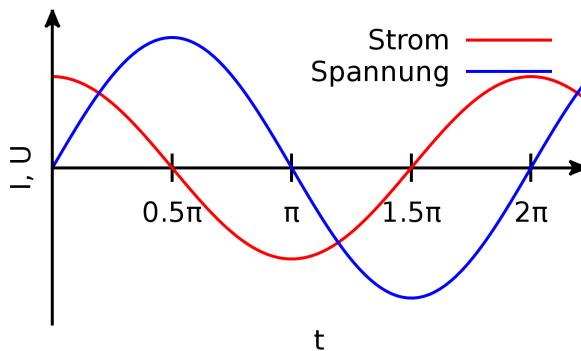


Abbildung 5.1: „Der Strom hinkt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ bzw. 90° hinterher.“

Impedanz

Die Impedanz Z ist der effektive Gesamtwiderstand im Wechselstromkreis. Die Impedanz trägt wie der Ohm'sche Widerstand die Einheit *Ohm* mit Zeichen Ω . Sie ist der Quotient aus der Spannung und der Stromstärke:

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \quad (5.4)$$

Kapazitiver Widerstand

Für den kapazitiven Widerstand X_C , der von Kondensatoren im Wechselstromkreis ausgeht, siehe Sektion 5.3.2 auf Seite 72: Kapazitive Widerstände.

Induktiver Widerstand

Für den induktiven Widerstand X_L , der von Spulen im Wechselstromkreis ausgeht, siehe Sektion 5.3.3 auf Seite 72: Induktive Widerstände.

5.2 Prinzip des Wechselstromgenerators

5.2.1 Funktionsprinzip

Eine Spule, oder der Anschaulichkeit halber, eine Leiterschleife, befindet sich in einem magnetischen Feld (Siehe Abbildung).³⁴ Die Abbildung gibt es auch als animiertes .gif¹.

¹<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dynamo.pul.gleich.wiki.v.1.00.gif>

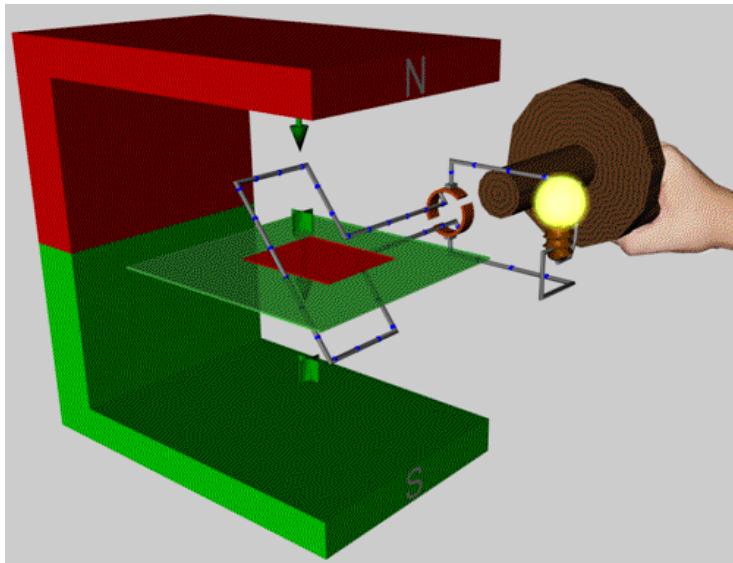


Abbildung 5.2: Schema eines Wechselstromgenerators mit Kommutator

Die Leiterschleife wird angedreht und der sich in der Grafik oben befindende Teil der Schleife bewegt sich senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfeldes. Somit wirkt auf die Teilchen die Lorentzkraft, gemäß Linker-Hand-Regel (Siehe Sektion 3.5 auf Seite 51: [Lorentzkraft](#)). Im Beispiel ist der Plus-Pol am oberen Ende und der Minus-Pol am unteren Ende.

Wenn sich die Schleife nun um 90° gedreht hat, bewegen sich beide Pole kurzzeitig parallel zu den Feldlinien; die Elektronen in der Schleife werden nicht mehr beeinflusst und es liegt keine Spannung mehr an. Der sinusförmige Spannungsgraph resultiert aus der Bewegung dazwischen.

Nach weiteren 90° ist das ursprünglich obige Stück Schleife unten und nun der Minus-Pol. Das ist der Grund für die negativen Passagen der Spannungskurve.

Ebenfalls korrekt wäre eine Herleitung über das Induktionsgesetz (Siehe: Gleichung 4.1 auf Seite 61), welche unter anderem aussagt, dass eine Flächenänderung der Fläche der Spule (hier Leiterschleife, also Spule mit nur *einer* Windung) die von den Feldlinien durchsetzt wird (in der Abbildung rot gekennzeichnet) eine Induktion bewirkt.

Kommutator

Ein Kommutator, wie in der Abbildung, kehrt die Polarität der Leiterschleifenteile bei jeder halben Umdrehung um, sodass es nie eine negative Spannung gibt. Der schwarze Teil ist ein Isolator und die Backen, die oben und unten liegen, schließen über Bürsten am sich drehenden Kommutator.

Die Spannungskurve³⁵ ist dann der Betrag: $|\sin x|$:

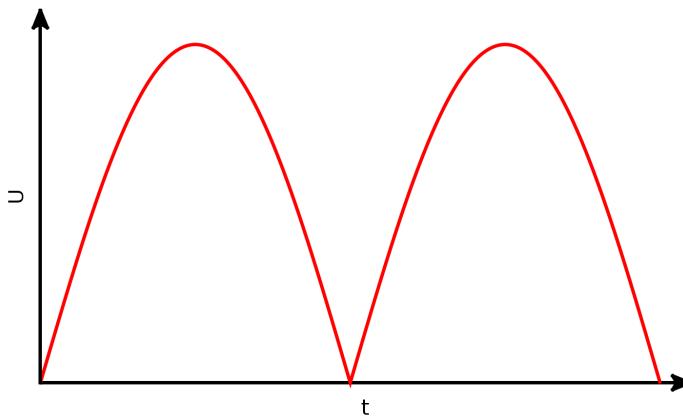


Abbildung 5.3: Ideale Spannungskurve mit einem Kommutator.

5.2.2 Induktionsspannung bestimmen

Um die maximale Spannung (Amplitude), zu bestimmen, muss die Feldstärke des Magnetfeldes, die Windungszahl, Fläche und Induktivität der Spule sowie die Drehfrequenz bekannt sein. Die Gleichung ist analog zur generellen Induktionsspannung (Siehe Gleichung 4.1 auf Seite 61) $U_{ind} = -N \frac{d(B \cdot A)}{dt}$:

$$\hat{U} = NBA \cdot \omega \quad (5.5)$$

Daraus folgt für einen beliebigen Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} U(t) &= \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ U(t) &= NBA \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3 Widerstände im Wechselstromkreis

Während es im Gleichstromkreis nur den Ohm'schen Widerstand gibt, verfügt man im Wechselstromkreis über drei Typen.

Die restlichen zwei Arten, der kapazitive und der induktive Widerstand, generieren Phasenverschiebungen, welche in sogenannten Blindwiderständen resultieren.

5.3.1 Ohm'sche Widerstände

Wenn in einem Wechselstromkreis nur Ohm'sche Widerstände verbaut sind, ist die Impedanz Z , also der Gesamtwiderstand des Kreises, gleich der Summe der Widerstände.

Das bedeutet, er verursacht keine Phasenverschiebung und kann wie ein Widerstand im Gleichstromkreises behandelt werden.

5.3.2 Kapazitive Widerstände

Kondensatoren verursachen kapazitive Widerstände. Da Kondensatoren keinen Durchfluss erlauben, wäre ihr Widerstand im Gleichstromkreis unendlich. Im Wechselstromkreis verursacht er aber eine Phasenverschiebung des Stromes um $+\frac{\pi}{2}$.

Beim Wechselstrom schwingen die elektrischen Ladungen aber lediglich hin und her. Ein Kondensator im Wechselstromkreis wird also abwechselnd geladen und wieder entladen. Die Spannung zwischen den Kondensatorpolen baut sich während des Ladevorgangs auf und erreicht ihr Maximum dann, wenn der Kondensator vollständig aufgeladen und der Stromfluss zum Erliegen gekommen ist. Beim Entladevorgang sind die Verhältnisse umgekehrt: Die Stromstärke ist dann am größten, wenn der Kondensator vollständig entladen ist. („BLINDELEISTUNG-ADE094210“ herausgegeben von SMA SOLAR TECHNOLOGY AG, Seite 8³⁶)

„Der Strom eilt der Spannung voraus.“

Dieser sogenannte „Kapazitive Blindwiderstand“ ist antiproportional abhängig von der Kapazität des Kondensators, da der Anteil der Zeit, in der der Kondensator vollständig oder annähernd vollständig geladen ist, größer ist, da eine kleinere Kapazität dafür sorgt, dass mit weniger Ladung schon eine hohe Spannung erreicht wird (Siehe: Gleichung 2.13 auf Seite 34). Damit ist der Stromfluss bei einer kleinen Kapazität stärker gehemmt als bei einer großen Kapazität.

X_C ist außerdem antiproportional abhängig von der Winkelgeschwindigkeit (Siehe: Sektion 5.1.1 auf Seite 67: Grundlegende Begriffe), da bei einer raschen Umpolung der Wechselspannung (also f und demnach auch ω recht groß) die Zeit in der der Stromfluss durch einen vollständig geladenen Kondensator gehemmt ist, kleiner wird.

Daraus folgt:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (5.7)$$

5.3.3 Induktive Widerstände

Eine Spule leitet Gleichstrom wie ein normaler Draht. Nur beim Ein- und Ausschalten gibt es jeweils eine Zeitverzögerung im Stromfluss, die durch den Auf- und Abbau des Magnetfeldes verursacht wird. Unter Wechselstrombedingungen kommt es bei jedem Wechsel der Stromrichtung zu diesen Verzögerungen. („BLINDELEISTUNG-ADE094210“ herausgegeben von SMA SOLAR TECHNOLOGY AG, Seite 8³⁷)

„Die Spannung eilt dem Strom voraus.“

Der „Induktive Widerstand“ ist proportional abhängig von der Induktivität der Spule, da ein höheres Vermögen, bei jedem Umpolen Spannung in sich selbst zu induzieren, sich in einer stärkeren Hemmung des Stromflusses äußert.

X_L ist ebenfalls proportional zur Winkelgeschwindigkeit, da bei einer höheren Winkelgeschwindigkeit öfters umgepolzt wird und der Prozess der Selbstinduktion häufiger den Stromfluss hemmt und die Zeit in der der Strom ungehindert fließen kann (nach vollständigem Aufbau des Magnetfeldes) kürzer wird.

Daraus folgt:

$$X_L = \omega \cdot L \quad (5.8)$$

5.3.4 Auswirkungen von Blindwiderständen auf die Stromstärke

Man kann die Gleichung für die Impedanz (Gleichung 5.4 auf Seite 69) nach I umstellen, um sich zu verdeutlichen, dass eine erhöhte Impedanz, in welcher der Blindwiderstand steckt, eine niedrigere Stromstärke zur Folge hat, genau wie der Ohm'sche Widerstand im Wechselstromkreis:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} \quad (5.9)$$

5.3.5 Frequenzabhängigkeit

Die Größe der Blindwiderstände ist sowohl beim Kondensator als auch bei der Spule abhängig von der Frequenz des Wechselstromes (diese Steckt im ω).

Der kapazitive Blindwiderstand ist antiproportional abhängig (Siehe Gleichung 5.7) von der Frequenz, was bedeutet: „Ein Kondensator erhöht die Impedanz, je niedriger die Frequenz ist.“ Man sagt auch „High-Pass-Filter“ oder „Low-Cut-Filter“.

Der induktive Blindwiderstand ist proportional abhängig (Siehe Gleichung 5.8) von der Frequenz, was bedeutet: „Eine Spule erhöht die Impedanz, je höher die Frequenz ist.“ Man sagt auch „Low-Pass-Filter“ oder „High-Cut-Filter“.

Diese Eigenschaften macht man sich in der Audiotechnik bei Frequenzweichen oder Equalisern zu Nutze. Siehe auch Sektion 5.4.2 auf Seite 77: [Siebkreis](#).

5.3.6 Zeigerdiagramm

Die Impedanz ist auch berechenbar, wenn der Ohm'sche Widerstand und der Blindwiderstand bekannt sind. Bevor Gesetze betrachtet werden, ist das Zeigerdiagramm³⁸ eine gute Veranschaulichung für die Beziehungen und den Phasenverschiebungswinkel.

Das Diagramm veranschaulicht den Zusammenhang zwischen dem Verhältnis des Blindwiderstandes und dem Ohm'schen Widerstand. Dieses Verhältnis ist nämlich immer gleich dem Tangens des Winkels φ .

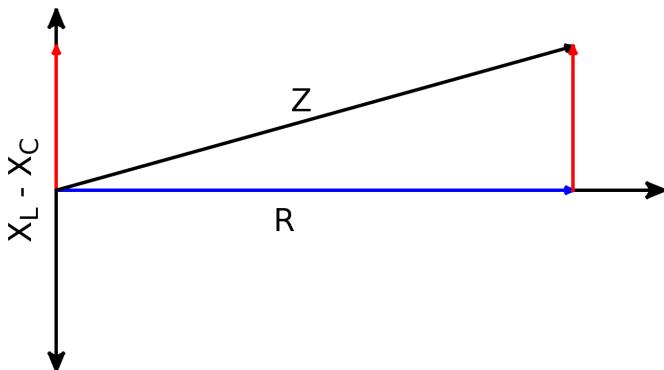


Abbildung 5.4: Zeigerdiagramm mit Widerständen: Blau: Ohm'scher Widerstand, Rot: Blindwiderstand, Schwarz: Impedanz, Der Phasenverschiebungswinkel ist der Winkel zwischen der Impedanz (Hypotenuse) und dem Ohm'schen Widerstand (Kathete)

Anmerkung: Sollten in einem Schaltkreis beide Blindwiderstände (eine Spule und ein Kondensator) verbaut sein, muss für die Differenz für X_{Ges} angenommen werden, da beide eine Phasenverschiebung in die jeweils andere Richtung verursachen.

Für X_{Ges} gilt dann:

$$X_{ges} = X_L - X_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (5.10)$$

5.3.7 Gesetze

Nun ist auch die Betrachtung der Gesetze, angelehnt an diese Darstellungsform, deutlich einfacher.

Für die Impedanz können nun, zusätzlich zur Gleichung 5.4 auf Seite 69, noch andere Betrachtungen gefunden werden:

In Abhängigkeit von X und R mit dem Satz des Pythagoras:

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2} \quad (5.11)$$

In Abhängigkeit von X und φ mit weiteren Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck:

$$Z = \frac{X}{\sin \varphi} \quad (5.12)$$

In Abhängigkeit von R und φ :

$$Z = \frac{R}{\cos \varphi} \quad (5.13)$$

5.4 Schwingkreise

Schwingkreise sind Schaltkreise, die aus den zwei Wechselstromwiderständen Spule und Kondensator sowie (in der Theorie) aus einem Ohm'schen Widerstand bestehen. Daher nennt man sie auch LC- oder LCR-Schaltungen. In der Praxis könnte auf einen Ohm'schen Widerstand verzichtet werden, da eine reelle Spule immer auch einen Ohm'schen Widerstand besitzt, denn sie besteht aus Draht.

Diese Stromkreise haben in der Wechselstromumgebung frequenzabhängige Eigenschaften (Siehe Sektion 5.3.5 auf Seite 73: Frequenzabhängigkeit), sowie eine Resonanzfrequenz, bei der sich die Größe der beiden Wechselstromwiderstände die Waage halten und der Blindwiderstand folglich 0 ist (Siehe Gleichung 5.10 auf Seite 74).

5.4.1 Natürliche Schwingkreis

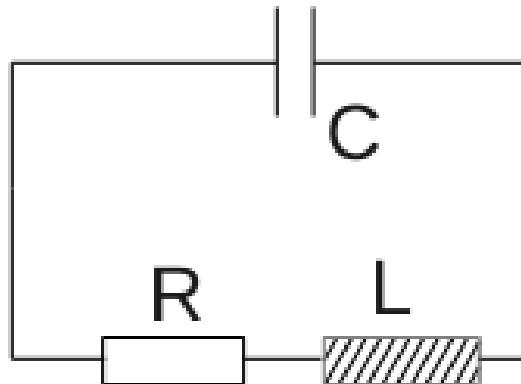


Abbildung 5.5: Diagramm des Schwingkreises

Der Schwingkreis³⁹ ist ein essentieller Bestandteil von Oszillatoren, also Schwingungsgeneratoren.

Im Stromkreis sind alle Bauteile in Reihe geschaltet und es gibt keine externe Spannungsquelle. Jedoch ist der Kondensator zu Anfang geladen; er trägt anfangs die gesamte Energie des Aufbaus.

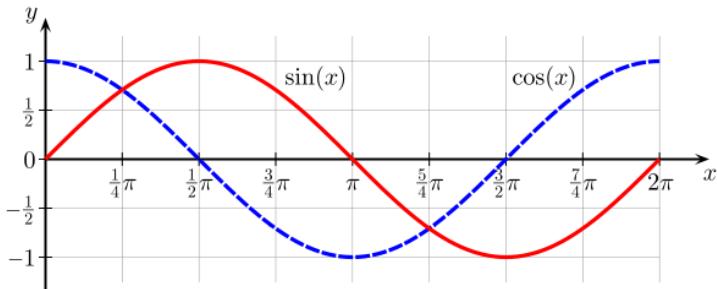


Abbildung 5.6: Spannung (blau) und Stromstärke (rot) in einem Schwingkreis über der Zeit

Sobald der Kreis, beispielsweise über einen Schalter, geschlossen wurde, entlädt sich der Kondensator; die Spannung fällt. Durch die Selbstinduktion an der Spule steigt die Stromstärke jedoch langsam an, welche ohne diesen induktiven Widerstand sofort nach dem schließen des Schalters auf ihrem Maximum gewesen wäre.

Auch wenn der Kondensator vollständig entladen ist (Stelle $\frac{1}{2}\pi$ im Diagramm⁴⁰), also die Spannung 0V beträgt, ist immer noch eine Stromstärke messbar, da der Ladungsfluss durch die Selbstinduktion in der Spule verzögert ist. Allerdings ist der Verlauf der Stromstärke fallend, da keine weitere Ladung mehr in die Spule fließt (der Kondensator ist entladen). An der Stelle $\frac{1}{2}\pi$ trägt der Kondensator keine Ladung und die maximale Stromstärke ist erreicht, was bedeutet, dass zu diesem Zeitpunkt die gesamte Energie der Schaltung im Magnetfeld der Spule gespeichert ist.

Im Abschnitt zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π ist die Spannung negativ, das heißt die Kondensatorplatten wurden und werden mit anderer Polung als am Anfang des Versuches geladen. Trotzdem fließen immer noch weitere Ladungen auf die Kondensatorplatten, da der Stromfluss durch die Spule verzögert wurde. Sobald der Kondensator vollständig geladen wurde (π), fließt kein Strom mehr (Stromstärke ist 0A), das heißt, es gibt kein Magnetfeld mehr und die gesamte Energie ist, wie zu Beginn, im Kondensator gespeichert.

Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, bis die Ladungen durch den Verbraucher (in diesem Fall den Ohm'schen Widerstand) verbraucht wurden, in diesem Fall in Wärme umgewandelt wurden.

Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der die Impedanz so klein wie möglich ist, das heißt, die angestrebte Frequenz, die oszilliert wird.

Um eine kleinstmögliche Impedanz zu erreichen, muss der Blindwiderstand 0 sein, woraus folgt, der reelle Teil des Gesamtwiderstands (der Ohm'sche Widerstand) die gesamte Impedanz ausmacht. Aus Gleichung 5.10 abgeleitet, gilt:

$$\begin{aligned}
 X_L - X_C &= 0 \\
 X_L &= X_C \\
 \omega \cdot L &= \frac{1}{\omega \cdot C} \\
 \omega^2 &= \frac{1}{C \cdot L} \\
 \omega &= \frac{1}{\sqrt{CL}} \\
 f &= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{CL}}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

5.4.2 Siebkreis

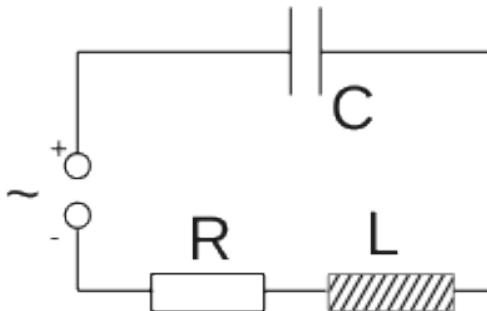


Abbildung 5.7: Diagramm eines Siebkreises

Der Siebkreis (manchmal auch LCR-Schaltung oder Reihenschwingkreis genannt) ist eine bekannte technische Anwendung, deren Aufgabe es ist, aus einem bestehenden Signal (angedeutet im Diagramm⁴¹⁾) einen bestimmten Frequenzbereich „herauszufiltern“, will sagen, dort die geringste Impedanz und folglich die höchste Stromstärke aufzuweisen.

Der Kondensator „schneidet“ die hohen Frequenzen „ab“, die Spule die tiefen. Siehe Sektionen Sektion 5.3.5 auf Seite 73: [Frequenzabhängigkeit](#) und Sektion 5.3.4 auf Seite 73: [Auswirkungen von Blindwiderständen auf die Stromstärke](#) für weitere Erläuterungen.

Der Frequenzbereich, also dessen Lage im Spektrum und dessen Breite, wird durch die Daten der Bauteile bestimmt.

Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz, also die Frequenz mit dem geringsten Gesamtwiderstand, lässt sich genauso berechnen wie beim Schwingkreis:

$$X_L - X_C = 0 \quad f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{C \cdot L}} \quad (5.15)$$

Ist die Frequenz des Wechselstroms nun höher als die Resonanzfrequenz ist die Impedanz höher, da der induktive Widerstand größer wird; bei niedrigerer Frequenz nimmt der kapazitive Widerstand zu. Dieses Diagramm⁴² zeigt eine mögliche Stromstärke/Widerstand-über-Frequenz-Kurve:

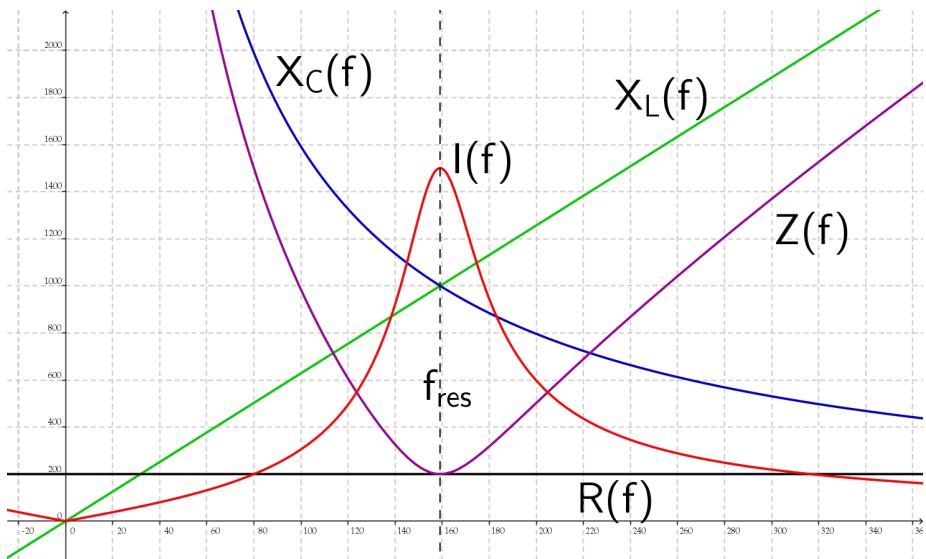


Abbildung 5.8: Die 3 Widerstände, Impedanz und Stromstärke mit fiktiver y-Skalierung. Frequenz auf der x-Achse. Man beachte die Schnittstelle von X_L und X_C die Gleichzeitigkeit der Tiefpunkt der Impedanz Z und damit der Hochpunkt der Stromstärke I ist.

5.5 Leistungen und deren Auswirkungen im Wechselstromkreis

5.5.1 Wirkleistung und Blindleistung

Auch und vor allem bei der Leistung muss im Wechselstromkreis zwischen Wirk- und Blindleistung unterschieden werden. Die Wirkleistung ist am Ende nutzbar, während die Blindleistung

allein die Bauteile belastet und nicht genutzt werden kann. Das bedeutet, dass es sein kann, dass ein Stromkreis nur eine bestimmte effektive Wirkleistung umsetzt, aber durch Phasenverschiebungen die Bauteile deutlich stärker belastet werden.

5.5.2 Scheinleistung

Diese ist, analog zur Impedanz (Siehe Sektion 5.3.6 auf Seite 73: Zeigerdiagramm), die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, deren Katheten die Wirkleistung und die Blindleistung sind. Der Winkel φ ist ebenfalls der Phasenverschiebungswinkel.

5.5.3 Gleichungen

Die Wirkleistung sowie Blindleistung lassen sich auf viele Arten bestimmen.

Abhängig von der effektiven Spannung und der effektiven Stromstärke:

$$\begin{aligned} P_{Schein} &= U_{eff} \cdot I_{eff} \\ P_{Wirk} &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi \\ P_{Blind} &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \tag{5.16}$$

Abhängig von der Blindleistung und der Wirkleistung:

$$P_{Schein} = \sqrt{P_{Wirk}^2 + P_{Blind}^2} \tag{5.17}$$

Kapitel 6

Schwingungen

6.1 Definitionen

Als Schwingung bezeichnet man eine periodische Energieumwandlung von einer Energieform in eine andere und umgekehrt. Im einfachsten Fall ist eine Feder zu betrachten, an der ein Massestück hängt. Wird diese beispielsweise nach unten ausgelenkt (an ihr gezogen und dann losgelassen), schwingt sie periodisch und wandelt dabei immerfort kinetische Energie in potentielle Energie um, beziehungsweise umgekehrt.

6.1.1 Auslenkung

Den Abstand des Schwingkörpers von seiner Ruhelage nennt man Auslenkung oder Elongation.
Oft wird sie in Formel mit s geschrieben.

6.1.2 Amplitude

Die Amplitude ist die maximale Auslenkung, die während der Schwingung in jeder der beiden Schwingungsrichtungen auftritt.

6.1.3 Rückstellkraft

Die Kraft, die immer der Auslenkungsrichtung entgegen wirkt, also den Körper in Richtung der Ruheposition beschleunigt und so überhaupt erst eine Schwingung ermöglicht, nennt man Rückstellkraft.

In Formeln wird oft F_r verwendet.

6.1.4 Harmonische Schwingung

Der zeitliche Verlauf einer harmonischen Schwingung kann mit einer Sinuswelle beschrieben werden. Das mathematische Kriterium ist die Proportionalität der Rückstellkraft F_r zum Betrag der Auslenkung l :

$$F_r \sim l \quad (6.1)$$

6.1.5 Gedämpfte Schwingung

Bei einer gedämpften Schwingung nimmt die Amplitude über der Zeit ab. Außerhalb des im Physikunterricht angenommenen Modells sind alle Schwingung gedämpft, da Energie auch an die Umgebung abgegeben wird, beispielsweise, durch Reibung, in Form von thermischer Energie.

6.2 Diagramm einer Schwingung

43

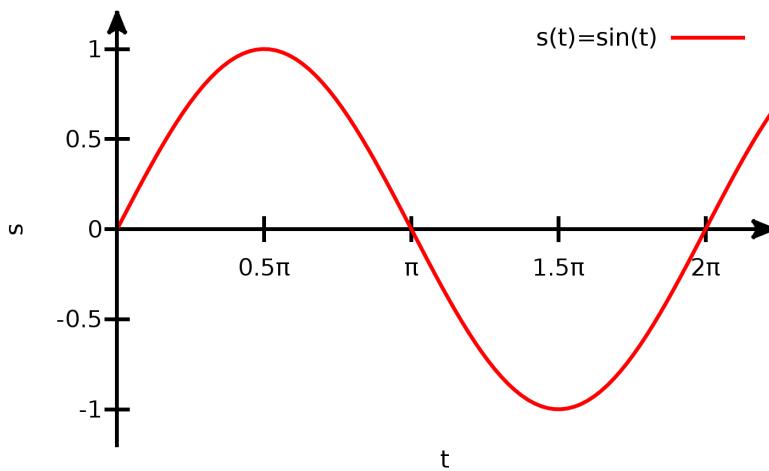


Abbildung 6.1: Diagramm einer Schwingung: Elongation über der Zeit

6.3 Kenngrößen

6.3.1 Amplitude: y_{max} o. s_{max} o. \hat{y} o. \hat{s} (Basiseinheit: m)

Die schon angesprochene maximale Elongation der Schwingung.

6.3.2 Periodendauer: T (Basiseinheit: s)

Die Zeit, die es dauert, bis der schwindende Körper an der selben Stelle von der selben Richtung aus angelangt ist. Beispielsweise vom positiven Schwingungsmaximum („Berg“) zum nächsten oder von der Nullstelle („Ruhelage“) zur 2. darauffolgenden Nullstelle.

Davon abgeleitet:

- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ (Basiseinheit: $Hz = \frac{1}{s}$)

Anzahl der Perioden pro Sekunde.

- Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (Basiseinheit: $\frac{rad}{s}$)

Änderung des Winkels über der Zeit, wobei eine ganze Periode mit 360° im Grad oder, im Physikunterricht verwendet, mit 2π im Bogenmaß (eng: „Radian“) bezeichnet wird.¹

6.3.3 Phasenverschiebung: ϕ (Basiseinheit: rad)

Wenn sich der Schwingungskörper zum Startzeitpunkt $t = 0$ nicht in der Ruhelage $y = 0$ befindet muss die Phasenverschiebung, z.B. zur Aufstellung der Schwingungsgleichung (Sektion 6.4 auf Seite 84: Schwingungsgleichungen), berücksichtigt werden. Die Phasenverschiebung gibt den Abstand von der y -Achse zum nächsten Durchlauf der Ruhelage von der negativen Seite.

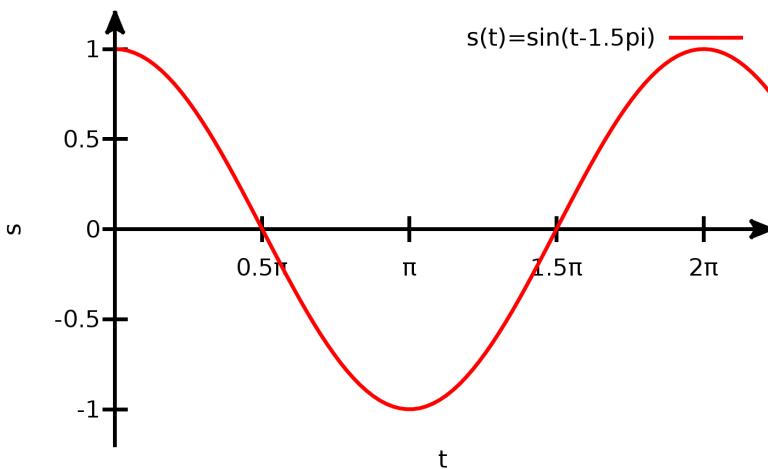


Abbildung 6.2: Phasenverschiebung um $+\frac{3\pi}{2}$

Im nebenstehenden Diagramm⁴⁴ beträgt die Phasenverschiebung $\phi = +\frac{3\pi}{2}$, also ein Dreiviertel der Periode. Man könnte ebenfalls sagen, die Phasenverschiebung beträgt $\phi = -\frac{\pi}{2}$, also

¹Umrechnung des Winkels α von Grad nach Bogenmaß: $\alpha_{rad} = \alpha_{deg} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \alpha_{deg} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$

minus Ein-Viertel der Periode. Beides ist äquivalent, jedoch ist es leichter mit einer positiven Phasenverschiebung zu rechnen.

6.4 Schwingungsgleichungen

Aus den obigen Größen ergibt sich folgende Schwingungsgleichung, beziehungsweise Schwingungsfunktion, für eine harmonische Schwingung (Sektion 6.1.4 auf Seite 82: Harmonische Schwingung), die die Elongation in Abhängigkeit eines Zeitpunktes t angibt:

$$y(t) = y_{max} \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (6.2)$$

Die erste Ableitung dieser Gleichung nach t gibt die Geschwindigkeit v der Umwandlung zum Zeitpunkt t an:

$$y'(t) = v(t) = y_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (6.3)$$

Die zweite Ableitung gibt die Beschleunigung zum Zeitpunkt t an:

$$y''(t) = v'(t) = a(t) = y_{max} \cdot \omega^2 \cdot -\sin(\omega t + \phi) \quad (6.4)$$

6.5 Weitere Gleichungen und Gesetze

6.5.1 Gesetze bei Geschwindigkeiten

Aus der maximalen Geschwindigkeit und der Frequenz, Periodendauer oder Winkelgeschwindigkeit lässt sich sofort auf die Amplitude schließen, da in der Funktion für die Geschwindigkeit bei einer Schwingung (Sektion 6.4 auf Seite 84: Schwingungsgleichungen) $v(t) = \omega \cdot y_{max} \cdot \cos(\omega t)$ das Maxima dann erreicht ist, wenn der Cosinus seinen Maximalwert 1 annimmt. Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned} v_{max} &= \omega \cdot y_{max} \\ v_{max} &= 2\pi f \cdot y_{max} \\ y_{max} &= \frac{v_{max}}{2\pi f} \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.5.2 Gesetze am Federpendel

Hooke'sches Gesetz

Das Hooke'sche Gesetz gibt die Federhärte einer Feder, also dessen Kenngröße, an. Die Einheit $\frac{N}{m}$ erklärt selbst die Formel:

$$D = \frac{F}{l} \quad (6.6)$$

Mit dem Gesetz ist gezeigt, dass an einem Federpendel die Rückstellkraft F proportional zur Auslenkung l ist, da D konstant ist. Damit handelt es sich um eine harmonische Schwingung (Sektion 6.1.4 auf Seite 82: [Harmonische Schwingung](#)).

Periodendauer beim Federpendel

Die Periodendauer beim Federpendel ist abhängig von der Masse m und der Federkonstante D :

$$T_{Feder} = 2\pi \cdot \frac{m}{D} \quad (6.7)$$

Die Herleitung gestaltet sich folgendermaßen: Die zur Auslenkung y proportionale Kraft F ist die Rückstellende Kraft; beschrieben durch eine Umformung des Hooke'schen Gesetzes: $F_r = D \cdot y$.

In einem geschlossenen System ist die Summe aller Kräfte 0. Es ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned} F_a + F_r &= 0 \\ F_a &= -F_r \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die auslenkende Kraft F_a kann wie jede Kraft mit Newtons zweitem Gesetz als $F_a = m \cdot a$ beschrieben werden. Die Beschleunigung in a kann dann als zweite Ableitung der Auslenkung y nach der Zeit beschrieben werden. Aus den Schwingungsgleichungen (Sektion 6.4 auf Seite 84: [Schwingungsgleichungen](#)) geht hervor, dass $y'' = -\omega^2 \cdot y$ ist. Daher kann man wie folgt einsetzen:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= -D \cdot y \\ m \cdot y'' &= -D \cdot y \\ m \cdot -\omega^2 \cdot y &= -D \cdot y \\ -m \cdot \omega^2 &= -D \\ \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Für aus $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt für T :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (6.10)$$

Kapitel 7

Wellen

7.1 Definitionen

Als Welle bezeichnet man einen Vorgang, bei dem Energie, aber keine Masse transportiert wird. Es handelt sich um ein System gekoppelter Oszillatoren, also schwingungsfähige Körper, bei dem die Energie, die bei der Anregung der Schwingung *eines* Oszillators aufgewendet wird, vom diesem an andere, angrenzende Oszillatoren abgegeben wird. Daher wird die Energie räumlich transportiert, obwohl, absolut gesehen, sich jeder Oszillator noch stets an seinem Platz befindet.

7.1.1 Transversalwelle

Eine Transversalwelle ist eine Welle, deren Auslenkungsvektoren (= Richtung der Auslenkung) senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen.

Bsp.: Seilwelle, elektromagnetische Wellen (bei $400\text{nm} \leq \lambda \leq 700\text{nm}$: Licht, Siehe: 8.1)

7.1.2 Longitudinalwelle

Eine Longitudinalwelle ist eine Welle, deren Auslenkungsvektoren (= Richtung der Auslenkung) parallel auf der Ausbreitungsrichtung stehen.

Bsp.: Schallwellen

7.2 Diagramme von Wellen

Bei einer Welle reicht *ein* Diagramm zur Darstellung nicht aus. Da es mehrere Oszillatoren gibt, die alle zu unterschiedlichen Zeiten zu schwingen beginnen, bräuchte man ein Elongation-Zeit-Diagramm (Sektion 6.2 auf Seite 82: [Diagramm einer Schwingung](#)) für jedes Teilchen, oder ein 3-dimensionales Diagramm, um die Schwingung aller Teilchen in Abhängigkeit *eines* Zeitpunktes darzustellen.

Allerdings reichen zwei Diagramme um alle Kenngrößen der Welle erfassen und ablesen zu können: Ein Elongation-Zeit-Diagramm eines beliebigen Teilchens, welches die Schwingung dieses Teilchens über der Zeit darstellt und ein Elongation-Strecke-Diagramm (ein „Standbild“) zu einem beliebigen Zeitpunkt, welches die Auslenkung der Oszillatoren über der x-Position dieser Oszillatoren darstellt.

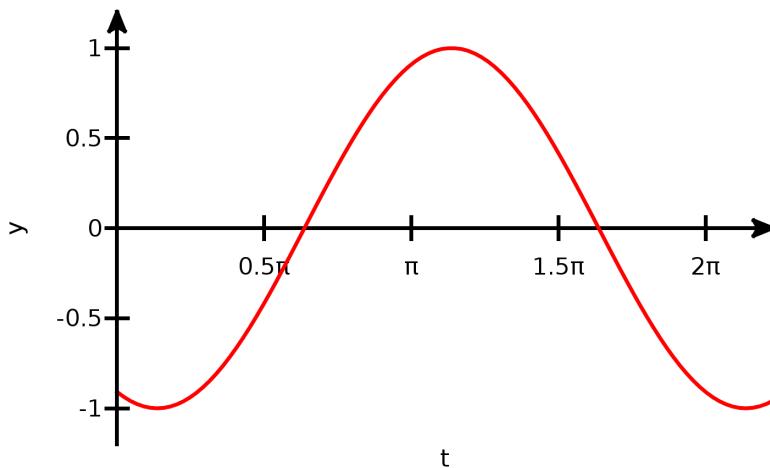


Abbildung 7.1: Elongation-Zeit-Diagramm des Teilchens mit Abstand $x = 1$ zum Ursprung.

Dazu muss angemerkt werden, dass hierbei nur eine Dimension betrachtet wird, eigentlich müsste die komplette räumliche Ausbreitung bei einem Elongation-Strecke-Diagramm berücksichtigt werden, in alle 3 Dimensionen. Zur Vereinfachung, damit man statt einem 4-Dimensionalen Diagramm ein 2-Dimensionales (x,y) Diagramm benutzen, wird nur *eine* Ausbreitungsrichtung berücksichtigt.

7.3 Kenngrößen

7.3.1 Amplitude: y_{max} o. s_{max} o. \hat{y} o. \hat{s} (Basiseinheit: m)

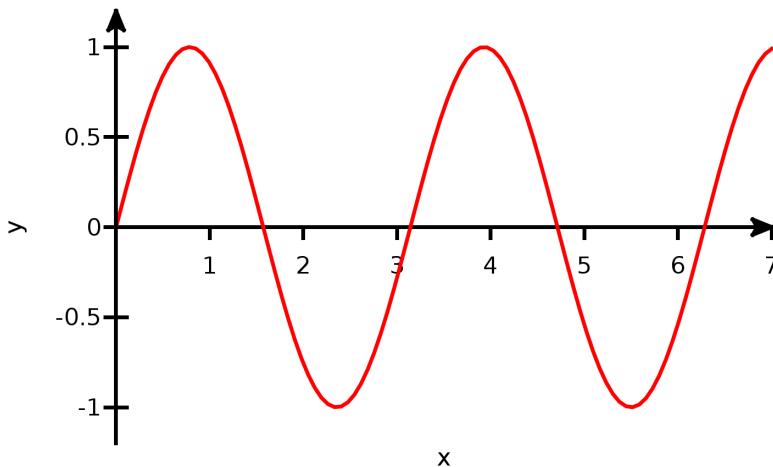
Kategorie: Schwingung eines Oszillators

Die maximale Elongation (= „Auslenkung“) der Schwingungen der einzelnen Oszillatoren.

7.3.2 Periodendauer: T (Basiseinheit: s)

Kategorie: Schwingung eines Oszillators

Die Zeit, die es dauert, bis *einer* der schwindenden Körper an der selben Stelle von der selben Richtung aus angelangt ist. Beispielsweise vom positiven Schwingungsmaximum („Berg“) zum

Abbildung 7.2: Elongation-Abstand-Diagramm („Standbild“) zum Zeitpunkt $t = \pi$

nächsten oder von der Nullstelle („Ruhelage“) zur 2. darauffolgenden Nullstelle.

Davon abgeleitet:

- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$ (Basiseinheit: $\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$)

Anzahl der Perioden pro Sekunde.

- Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (Basiseinheit: $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

Änderung des Winkels über der Zeit, wobei eine ganze Periode mit 360° im Grad oder, im Physikunterricht verwendet, mit 2π im Bogenmaß (eng: „Radian“) bezeichnet wird.¹

7.3.3 Wellenlänge: λ (Basiseinheit: m)

Kategorie: Oszillatorsystem zu einem Zeitpunkt

Der räumliche Abstand zwischen 2 Wellenbergen im Elongation-Strecke-Diagramm, der Abstand eines Nulldurchlaufs mit dem zweiten darauffolgenden.

7.3.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit: c (Basiseinheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist eigentlich keine echte Kenngroße, da sie nicht in der Wellengleichung auftaucht. Trotzdem ist sie hilfreich um λ oder f zu berechnen. Da eine Geschwindigkeit generell als Strecke pro Zeit ($v = \frac{s}{t}$) definiert ist, ist die Wellenlänge die Strecke, die die

¹Umrechnung des Winkels α von Grad nach Bogenmaß: $\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \alpha_{\text{deg}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$

Wellenfront nach einer Periode (T) zurückgelegt hat.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad (7.1)$$

Aufgabe: Stelle alle Kenngrößen sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Beispielwelle in den Diagrammen 7.1 und 7.2 heraus.

7.4 Wellengleichung

Die Wellengleichung gibt die Elongation des Teilchens mit dem Abstand x zum Ausgangspunkt beim Zeitpunkt t an:

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \quad (7.2)$$

Zur Herleitung aus der Schwingungsgleichung muss Folgendes beachtet werden. Die Zeit t_x bis das räumliche Teilchen x von der Front der Welle erfasst wird, lässt sich recht einfach berechnen. Gebraucht wird dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T}$ und die generelle Formulierung der Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{s}{v} \\ t_x &= \frac{x}{c} \\ t_x &= \frac{x \cdot T}{\lambda} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Analog zur Verschiebung nach rechts von beispielsweise einer Parabel, muss der Term für t_x von t in der Schwingungsgleichung abgezogen werden. Damit ist die Variable x mit in der Gleichung und der Term „kompensiert“ den „Offset“, der sich durch das spätere Erfassen ergibt:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_{max} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{\lambda} \cdot T\right)\right] \\ y(x, t) &= y_{max} \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{\lambda} \cdot T\right)\right] \\ y(x, t) &= y_{max} \cdot \sin\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda \cdot T}\right) \cdot T\right] \\ y(x, t) &= y_{max} \cdot \sin\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.5 Weitere Gleichungen und Gesetze

7.5.1 Wellenfront

Erreichen eines beliebigen Teilchens

Analog zu $v = \frac{s}{t}$:

$$t = \frac{x}{c} \quad (7.5)$$

7.6 Wellenphänomene

Im Folgenden werden bei der Nennung von „Wellen“ immer Transversalwellen gemeint, wenn es keine weitere Anmerkung gibt.

7.6.1 Ausbreitung in Elementarwellen (Huygens'sches Prinzip)

Das Huygens'sche Prinzip macht eine wichtige Aussage zur Ausbreitung von Wellen:

„Jedes Teilchen (Oszillator), das von einer Wellenfront erfasst wird, löst von sich aus eine zirkulare Welle nach allen Seiten aus.“ Die eigentlich sichtbare Wellenfront ist nach Huygens eine Eihüllende aller „Elementarwellen“. Dadurch ist es Wellen unter anderem möglich, in den geometrischen Schattenraum zu propagieren (Siehe: Sektion 8.3 auf Seite 99: [Optische Interferenz am Doppelspalt](#)).

7.6.2 Reflexion

Fixiertes Ende

Wenn eine Welle von einem fixierten Ende (eingespannt) reflektiert wird, dann gibt es einen Phasensprung von 180° oder π , bzw $\frac{\lambda}{2}$.

Loses Ende

Trifft eine Welle auf ein loses Ende, dann wird sie ohne Phasensprung reflektiert.

7.6.3 Überlagerung

Wenn sich Wellen in einem räumlichen Punkt treffen, dann überlagern sie sich und bilden eine summierte Schwingung. Wenn also ein Wellenberg auf einen Wellenberg trifft, addieren sich beide Wellen und das Teilchen in welchem sich die Wellen überlagern wird höher ausgelenkt, als wenn nur eine Welle das Teilchen auslenkt.

Sollte auf einen Wellenberg ein Wellental treffen, wird ebenfalls addiert, wobei dann das Resultat eine kleinere Amplitude ist.

Nachdem sich die Wellen in diesem Punkt überlagert haben, laufen beide weiter ohne die andere zu beeinflussen, so als hätte es die Überlagerung nie gegeben.

7.6.4 Interferenzen

Wenn sich Wellen, die eine identische Wellenlänge besitzen, in einem Punkt überlagern, dann kommt es zu zeitlich stabilen Interferenzen, weil nun die beiden Wellen aus den unterschiedlichen Richtungen mit der selben Frequenz Wellenberge und Wellentäler „nachliefern“ und damit die Interferenz aufrecht erhalten bleibt.

Der Gangunterschied der beiden Wellen ist δ : die Differenz der Strecken vom jeweiligen Ursprungspunkt (zwei Punkte, in denen die Wellen nicht phasenverschoben sind, also zum selben Zeitpunkt Maxima oder Minima, etc. auftreten) zu dem in Frage stehenden Überlagerungspunkt. Siehe Abbildung 7.3⁴⁵.

Für die beiden extremen Arten der Interferenz (konstruktiv und destruktiv) muss für δ eine bestimmte Interferenzbedingungen erfüllt sein.

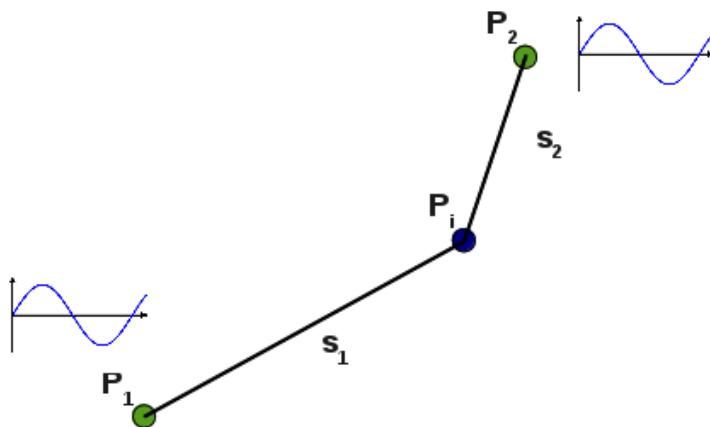


Abbildung 7.3: P_1 und P_2 sind die Ursprungspunkte in denen Phasengleichheit herrscht. Die Differenz der Strecken s_1 und s_2 ist der Gangunterschied δ . Die beiden Elongation-Zeit-Diagramme sollen die zeitliche Phasengleichheit in den beiden Ausgangspunkten zeigen.

Konstruktive Interferenz

Bei der konstruktiven Interferenz ist die resultierende Amplitude genau die Addition der Amplituden der Ausgangswellen; das doppelte einer Amplitude, wenn beide Ausgangswellen identische Amplituden besitzen.

Dazu müssen die Wellen im Interferenzpunkt zur selben Zeit Maxima und Minima aufweisen, also muss der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad \text{wobei } k \in 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Destruktive Interferenz

Bei der destruktiven Interferenz ist die resultierende Amplitude 0, wenn man davon ausgeht, dass die einfallenden Wellen die gleiche Amplitude haben

Der Gangunterschied δ muss daher die Summe eines ganzzahligen Vielfachen Wellenlänge und der halben Wellenlänge sein, sodass sich immer ein Schwingungsberg und Schwingungstal überlagern und auslöschen.

$$\begin{aligned} \delta &= k \cdot \lambda - \frac{\lambda}{2} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3, \dots \\ \delta &= \lambda \cdot (k - \frac{1}{2}) \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.6.5 Stehende Welle

Wenn sich gegenläufige Wellen, das heißt parallel und identisch, aber sich in die entgegengesetzte Richtung ausbreitende Wellen, mit derselben Wellenlänge überlagern, entsteht eine stehende Welle.

Das heißt, dass es mindestens 2 Punkte auf gibt, in denen sich die Oszillatoren gar nicht bewegen („stehen“), die sogenannten Knotenpunkte, in welchen destruktive Interferenz herrscht. Gleichzeitig gibt es auch immer mindestens einen Punkt, in welchem konstruktive Interferenz herrscht.

Eine stehende Welle kann zum Beispiel ausgelöst werden, wenn bei einer Reflexion am festen Ende die Hälfte der Wellenlänge λ ein ganzzahliges Vielfaches der Abstands l der beiden Enden ist. k ist in diesem Fall eine Variable, die nur positive ganze Zahlen annehmen kann:

$$l = \frac{k \cdot \lambda}{2} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3, \dots \quad (7.8)$$

Beispiel

Wer Gitarre spielt, erlebt, idealisiert, eine stehende Welle mit $k = 0$, wenn er eine offene Saite anschlägt. (Abbildung 7.4)

Legt man nun beim Anschlagt einen Finger auf die Saite bei der Hälfte der Länge ohne die Saite herunter zu drücken, erhält man eine stehende Welle mit $k = 1$; über dem 12. Bund, wo der Finger die Saite dämpft ist der 3. Knotenpunkt und es gibt 2 Stellen mit konstruktiver Interferenz. (Abbildung 7.5)

Sollte man die Saite „dritteln“, also den Finger über dem 7. Bund (oder 24. Bund) auf die Saite legen, erhält man eine stehende Welle mit $k = 2$; es gibt nun insgesamt 4 Knotenpunkte (an Sattel und Brücke, also da, wo die Saite eingespannt ist, unter dem Finger am 7. Bund und



Abbildung 7.4: Der Grundton auf der zweiten Saite von unten: $A2 \cong 110\text{Hz}$

am leeren 24. Bund) und 3 konstruktive Interferenzen (Zwischen dem Satten und dem 7. Bund; zwischen dem 7. und 24. Bund; zwischen dem 24. Bund und der Brücke). (Abbildung 7.6⁴⁶)

Aufgabe: Die Mensur einer Gitarre ist an jeder Saite annähernd gleich. Warum ergeben sich trotzdem die unterschiedlichen Tonhöhen (Frequenzen) an den einzelnen Saiten, wenn man sie offen spielt (nur anzupft, ohne etwas zu greifen)?

Hinweis 1: Die Mensur, also die Länge der Saite, ist in diesem Fall die Wellenlänge.

Hinweis 2: Gleichung 7.1 auf Seite 90

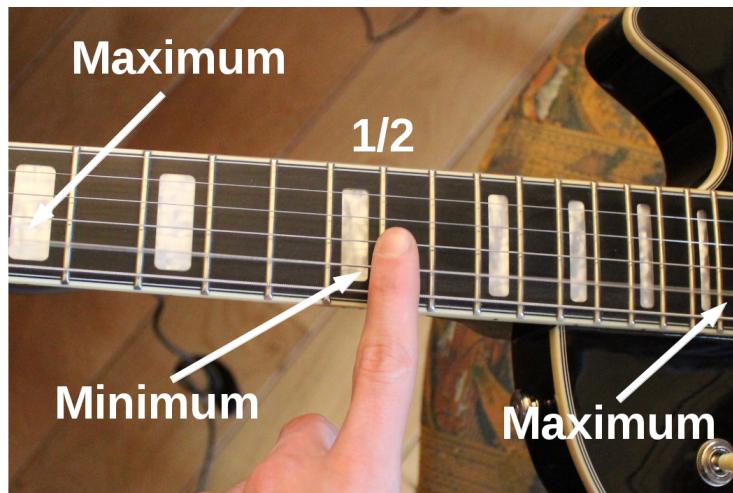


Abbildung 7.5: Der 1. Oberton auf der zweiten Saite von unten: $A3 \hat{=} 220\text{Hz}$; eine Oktave über dem Grundton

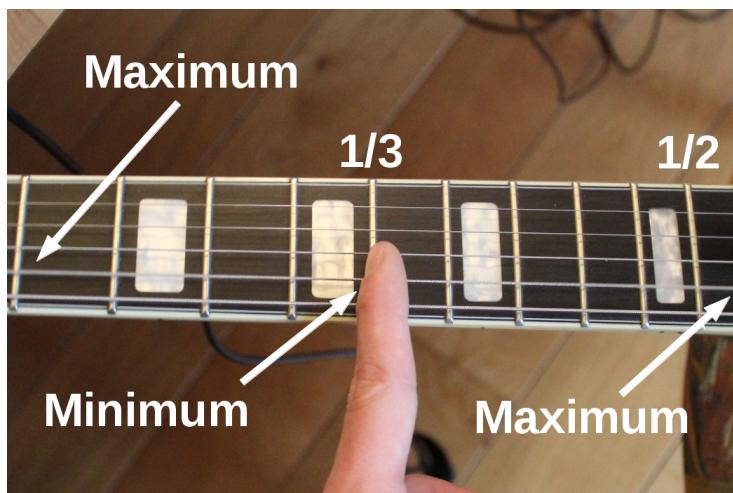


Abbildung 7.6: Der 2. Oberton auf der zweiten Saite von unten: $E4 \hat{=} 330\text{Hz}$; eine Oktave und eine Quinte über dem Grundton

Kapitel 8

Optik

8.1 Elektromagnetische Wellen

In der Optik geht man von Licht als Welle aus. Genauer gesagt wird Licht als elektromagnetische Welle betrachtet. Ein Gegensatz dazu wäre die Betrachtung von Lichtquanten, auch Lichtteilchen oder Photonen genannt. (Siehe Sektion 9.3 auf Seite 112: Ist Licht ein Teilchen oder eine Welle? für eine Gegenüberstellung.)

Als elektromagnetische Wellen bezeichnet man alle Wellen, bei denen gekoppelte elektrische und magnetische Felder schwingen. Die Schwingungsverktoren der beiden Felder stehen jeweils senkrecht aufeinander und senkrecht auf dem Vektor der Ausbreitungsrichtung.⁴⁷

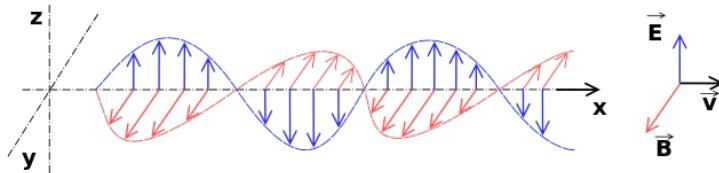


Abbildung 8.1: Eine elektromagnetische Welle

Im Vakuum, beziehungsweise in der Luft, bewegen sich alle elektromagnetischen Wellen mit einer konstanten Geschwindigkeit fort, der Vakuumlichtgeschwindigkeit. (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 28: $c_0 = 299.792.458 \frac{m}{s}$)

8.1.1 Spektrum

Name	f	λ	Kommentar
Längstwellen	$15 - 200\text{Hz}$	$10^6 - 10^7\text{m}$	Strom; Nur Nahfeld
Radiowellen	$10^4 - 10^8\text{Hz}$	$10^0 - 10^4\text{m}$	
Mikrowellen	$10^8 - 10^{11}\text{Hz}$	$10^{-3} - 10^0\text{m}$	
Infrarotes Licht	$> 10^{12}\text{Hz}$	$< 10^{-4}\text{m}$	„Wärmestrahlung“
Sichtbares Licht	$\approx 10^{15}\text{Hz}$	$400 - 800\text{nm}$	sichtbar
Röntgenstrahlung	$10^{16} - 10^{20}\text{Hz}$	$10^{-12} - 10^{-8}\text{m}$	Erzeugung: e^- auf Metall
Gammastrahlung	$> 10^{20}\text{Hz}$	$< 10^{-12}\text{m}$	

8.2 Brechung

Wenn Licht von einem Medium in ein anderes übergeht, wird es gebrochen, das heißt, es ändert seine Ausbreitungsrichtung. Die Brechung ist hauptsächlich vom Quotienten der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Materialien abhängig.

Allerdings spielt auch die Wellenlänge des Lichtes eine Rolle, da kurzwelliges Licht etwas stärker gebrochen wird als langwelliges. Diese Eigenschaft beruht jedoch auf komplexen Quantenphänomenen und wird nicht näher erläutert oder hergeleitet.

Das Phänomen der Brechung ist an Diagramm 8.2⁴⁸ mit dem Huygens'schen Prinzip (Sektion 7.6.1 auf Seite 91: [Ausbreitung in Elementarwellen](#)) zu erklären.

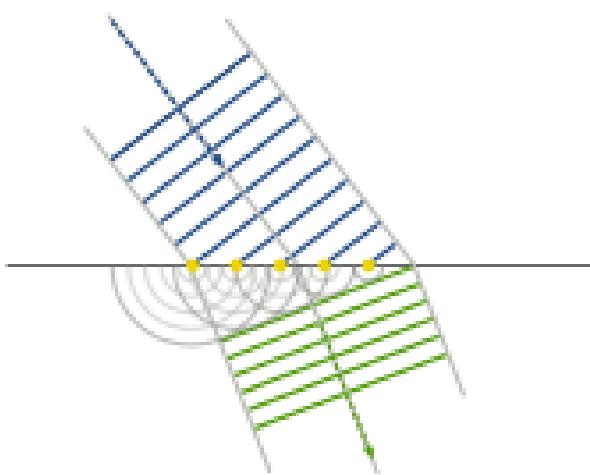


Abbildung 8.2: Brechung mit dem Huygens'schen Prinzip

Die Abbildung zeigt den Übergang eines schmalen, monochromatischen (nur eine Farbe/Wellenlänge) und kohärenten (alle Elementarwellen sind Phasengleich: Siehe: Sektion 7.6.4

auf Seite 92: Interferenzen) Lichtbündels in ein Material mit einer niedrigeren Lichtgeschwindigkeit. Ein Wellenberg löst auf der linken Seite früher Elementarwellen im neuen Medium aus als auf der rechten Seite. Da die Elementarwellen im neuen Medium langsamer sind als im alten, wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen.

Dazu kommt eine Wellenlängenänderung im neuen Medium, da die Frequenz gewahrt wird und sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit ändert (Siehe: Gleichung 7.1 auf Seite 90).

8.2.1 Mathematisierung

Man denke sich nun ein senkreiches Lot an die Kante des Materialübergangs. Die Winkel α sei der Winkel des Stahls im ersten Medium zum Lot und β der Winkel des Strahls im neuen Medium zum Lot hin. Dann gilt folgendes:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} \quad (8.1)$$

Unter Berücksichtigung der Änderung der Brechung verschiedener Wellenlängen muss eine neue Größe eingeführt werden, die Brechezahl n , welche die Wellenlänge des Lichtes miteinbezieht. Folgendes ergibt sich:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.2)$$

Die Wellenlängenänderung lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.3)$$

8.3 Optische Interferenz am Doppelspalt

Wenn nun ein Bündel mit jeweils räumlich und zeitlich kohärenten Wellen (Vergleiche Abbildung 8.2 und Sektion 7.6.4 auf Seite 92: Interferenzen) auf ein Hindernis mit 2 schmalen Spalten trifft, bilden sich dahinter auf einem dort aufgestellten Schirm zeitlich stabile Interferenzen.

Die Interferenzen werden durch die Überlagerung von Wellen verursacht, in diesem Fall von den zwei Wellen, die, gemäß dem Huygen'schen Prinzip, von den Spalten ausgehen. Ein beliebiger Punkt hinter dem Spalt hat einen unterschiedlichen Abstand zu den beiden Schlitzten, das heißt es kann sein, dass sich an diesem Punkt sowohl ein Wellenberg von der einen Welle als auch ein Wellenberg der anderen Welle treffen und zu einem noch höheren Maximum addieren. Allerdings ist auch das umgekehrte Extrem und jedes Dazwischen möglich.

Diese Ausbreitung (man betrachte Grafik 8.3⁴⁹) der zwei Wellen hinter den Spalten ist mit dem Huygens'schen Prinzip (Sektion 7.6.1 auf Seite 91: Ausbreitung in Elementarwellen) zu erklären: Angenommen, in jedem Spalt gäbe es nur ein schwingendes Teilchen. Dieses wird von der Wellenfront erfasst und ist selber Auslöser einer zirkularen Welle. Da dieser Oszillatator an

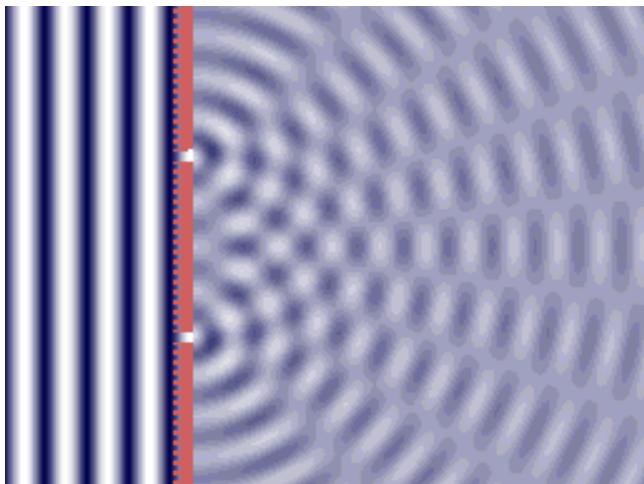


Abbildung 8.3: Kohärente Welle am Doppelspalt, man kann sie sich als Wasserwellen vorstellen.

dieser Stelle der einzige ist, gibt es keine gerade Wellenfront als Einhüllende, sondern einzig die Zirkularwelle des angeregten Oszillators.

Natürlich gibt es immer mehr als nur ein Teilchen im Spalt, aber wenn der Spalt einigermaßen klein ist, ist die resultierende Welle immer noch annähernd kreisförmig, mit Toleranzen, die bei der Mathematisierung zu vernachlässigen sind.

8.3.1 Mathematisierung

Der Versuch ist mit Laserlicht durchführbar, welches monochromatisch (eine einzige Wellenlänge) und kohärent ist. Das Licht wird durch einen schmalen Doppelspalt mit dem Spaltabstand $d \leq 2\text{mm}$ hinter dem sich im Abstand a ein Schirm befindet.

Auf dem Schirm ist das Interferenzmuster zu beobachten. In der Mitte ist ein heller Streifen, links und rechts davon, symmetrisch, sind weniger intensive Lichtpunkte. Alle diese hellen Punkte werden Maxima genannt, da in diesen Punkten konstruktive Interferenz herrscht (Sektion 7.6.4 auf Seite 92: Interferenzen). An den Minimalstellen herrschen destruktive Interferenzen. Der Gangunterschied ergibt sich hier durch den unterschiedlichen Abstand der Punkte auf dem Schirm zu dem beiden Schlitzten.

Eine Zeichnung⁵⁰:

Der helle Punkt in der Mitte ist das 0. Maximum, welches sich durch den exakt gleichen Abstand von *beiden* Spalten ergibt. k in der Gleichung 7.6 auf Seite 93.

Die Winkel α und α' sind gleich und werden im Folgenden schlicht als α bezeichnet. Für α ergeben sich aus den trigonometrischen Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck 2 Gleichungen: $\sin(\alpha) = \frac{\delta}{d}$ und $\tan(\alpha) = \frac{d_k}{a}$. Da $a \gg d_k$ ist $\alpha < 10^\circ$ und die Kleinwinkel Näherung $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$ kann verwendet werden.

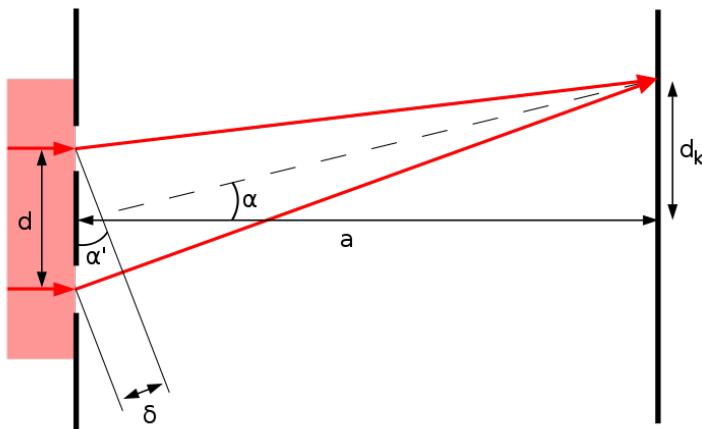


Abbildung 8.4: Zeichnung zur Herleitung

Der Gangunterschied δ muss der Bedingung für konstruktive Interferenz $\delta = k \cdot \lambda$ genügen (Siehe Gleichung 7.6 auf Seite 93). Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \tan(\alpha) \\ \frac{\delta}{d} &= \frac{d_k}{a} \\ \frac{k \cdot \lambda}{d} &= \frac{d_k}{a} \\ \lambda &= \frac{d_k \cdot d}{a \cdot k} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \tag{8.4}$$

Für k muss die Ordnung des betrachteten Maxima eingesetzt werden.

Ohne Kleinwinkelnäherung

Um die Wellenlänge präziser bestimmen zu können, kann der Spaltabstand verringert werden. Dann ist der Abstand zwischen den Maxima größer und man kann, relativ gesehen, den Abstand genauer bestimmen. Wenn man aber den Spaltabstand verringert, wird die Intensität des Lichtes kleiner, sodass man die Maxima kaum mehr erkennen kann. Dabei hilft man sich, indem man mehr als 2 Spalte verwendet, ein Gitter mit ca. 1000 Spalten und einem Spaltabstand in der Größenordnung von $\frac{1}{600} \text{ mm}$.

Das Hinzufügen der Schlitzte ändert allerdings nichts an den mathematischen Grundlagen des Versuchs.

Allerdings geht mit dem größeren Abstand der Punkte auf dem Schirm die Gültigkeit der

Kleinwinkelnäherung verloren. Allerdings kann die Größe des Winkels α über $\arctan(\frac{d_k}{a})$ berechnet werden und in die Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{\delta}{d}$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{d} &= \sin(\alpha) \\ \delta &= \sin(\arctan(\frac{d_k}{a})) \cdot d \\ \lambda \cdot k &= \sin(\arctan(\frac{d_k}{a})) \cdot d \\ \lambda &= \frac{\sin(\arctan(\frac{d_k}{a})) \cdot d}{k} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{8.5}$$

8.3.2 Lichtspektrum am Doppelspalt

Wenn ein Lichtspektrum (z.B. weißes Licht von einer Glühbirne) auf einen Doppelspalt oder ein Gitter trifft, welches weder monochromatisch noch kohärent ist, dann tritt ein ähnliches Phänomen wie bei monochromatischem Licht auf, das sich dahingehend unterscheidet, dass die unterschiedlichen Wellenlängen im Spektrum ihren eigenen, von der Wellenlänge abhängigen, Abstand d_k haben. Dadurch wird das Lichtspektrum von violett bis rot aufgefächert („Dispersion“).

Aufgabe: Wird violettes Licht in einer Dispersion, vom Mittelpunkt des Schirmes aus gesehen, außen oder innen im Spektrum liegen?

8.4 Optische Interferenz an dünnen Schichten

Wenn Licht an sehr dünnen Schichten, die einen Teil des Lichtes durchlassen und dabei brechen, aber auch einen Teil reflektieren, kann es zur destruktiven Interferenz zwischen den direkt reflektierten Strahlen und den Strahlen, die zunächst gebrochen, aber dann an der unteren Kante der Schicht reflektiert werden, kommen. Dann ist ein Minimum in der Reflexion zu beobachten. Häufig werden Seifenblasen oder Glimmerplättchen als Beispiel genannt, das Prinzip ist jedoch das gleiche. Für eine Durchführung des Versuchs mit Spektrallicht folgt, dass in der Reflexion eine Wellenlänge, also eine Farbe, „aus dem Spektrum gezogen wird“ und das reflektierte Licht diese nun nicht mehr enthält.

8.4.1 Mathematisierung

Abbildung 8.5 zeigt eine generelle Prinzipskizze einer dünnen Schicht und beherbergt die drei Variablen n_1 , n_2 und n_3 als Brechzahlen, wobei im Folgenden für das Medium n_1 Luft angenommen wird, also $n_1 = 0$ gilt. Die anderen Indices sind größer als n_1 .

Zwischen den beiden reflektierten Strahlen a und b herrscht ein Gangunterschied $\delta = \overline{AR} + \overline{RB}$, da b einen längeren Weg zurücklegt. Die Strahlen sind zwar in der Skizze parallel, werden sich aber in der Realität nach einer gewissen Strecke trotzdem überlagern, beispielsweise durch Materialunebenheiten. Außerdem ist es ebenfalls wahrscheinlich, dass direkt neben dem Strahl,

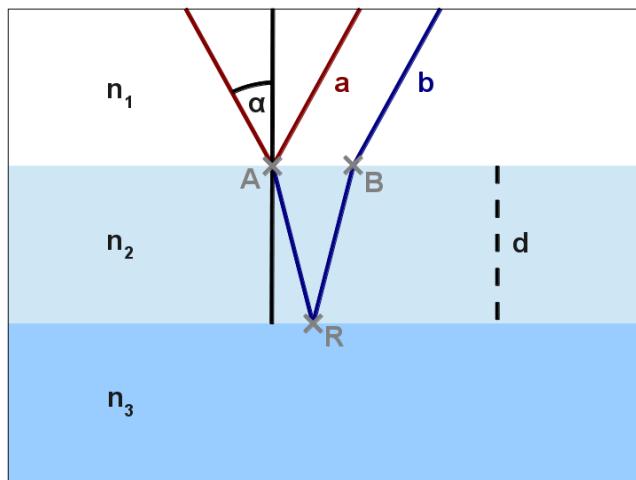


Abbildung 8.5: Reflexion und Brechung an einer doppelreflektierenden, dünnen Schicht

im Punkt B ein zum Strahl a kohärenter Lichtstrahl auftrifft und reflektiert und auf diese Art sich mit b überlagert.

Es werden destruktive Interferenzen in der Reflexion ausgebildet, wenn für die Schichtdicke bestimmte Bedingungen gelten. Diese Interferenzbedingungen sind abhängig von dem Aufbau der Schichten, da bei der Reflexion von Wellen (Siehe: Sektion 7.6.2 auf Seite 91: **Reflexion**) Phasensprünge auftreten können.

Bei Licht ist die Regel, dass der Phasensprung um $\pi = \frac{\lambda}{2}$ bei der Reflexion auftritt, wenn an einem optisch dichteren Medium, also an einem Medium mit höherer Brechzahl, reflektiert wird. Wenn an einem Medium mit geringerer Brechzahl reflektiert wird, tritt kein Phasensprung auf. Bei Brechung tritt generell nie ein Phasensprung auf.

Nun wird zudem angenommen, dass der zu betrachtende Lichtstrahl unter einem Winkel α einfällt, so klein, dass die Längen der Strecken \overline{AR} und \overline{RB} gemäß der Kleinwinkelnäherung „in guter Näherung“ identisch mit der Schichtdicke d sind.

Fall 1: $n_2 < n_3$

Mit der generellen Interferenzbedingung für destruktive Interferenz $\delta = \lambda \cdot (k - \frac{1}{2})$ (Siehe: Gleichung 7.7 auf Seite 93) und den besprochenen Näherungen gilt bei Phasensprüngen an beiden Schichtübergängen:

$$\delta = \lambda_2 \cdot k - \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

Zu beachten ist hierbei, dass λ_2 die Wellenlänge im Medium n_2 ist. Meistens ist aber die

Wellenlänge in Luft angegeben (λ_1). Aus der Gleichung 8.3 auf Seite 99 für die Wellenlänge eines gebrochenen Lichtstrahls ergibt sich für λ_2 mit $n_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{n_2}{n_1} \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_1}{n_2}\end{aligned}\tag{8.7}$$

Dann noch $\delta = 2d$ aus der Winkelnäherung anwenden und es folgt die Gesamtgleichung für den Fall des Phasensprungs bei beiden Reflexionen ($n_2 < n_3$):

$$\begin{aligned}2d &= \delta \\ 2d &= \lambda_2 \cdot k - \frac{\lambda_2}{2} \\ 2d &= \frac{\lambda_1 \cdot k}{n_2} - \frac{\lambda_1}{2n_2} \\ d &= \frac{\lambda_1 \cdot k}{2n_2} - \frac{\lambda_1}{4n_2} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3\dots\end{aligned}\tag{8.8}$$

Für den Spezialfall $k = 1$ ergibt sich die häufig zitierte Formel:

$$d = \frac{\lambda_1}{4n_2}\tag{8.9}$$

Fall 2: $n_2 > n_3$

Da der Phasensprung bei der Reflexion am Medium n_3 ausgelassen wird, ergibt sich von Natur aus ein Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ zwischen den beiden ausfallenden Strahlen, auch wenn die Schicht infinitesimal dünn ist. Daher muss dieses $\frac{\lambda}{2}$ zum Gangunterschied δ des 1. Falles addiert werden:

$$\begin{aligned}\delta_{2,\text{Fall}} &= \delta_{1,\text{Fall}} + \frac{\lambda}{2} \\ \delta &= \lambda_2 \cdot k - \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{2} \\ \delta &= \lambda_2 \cdot k \\ \delta &= \frac{\lambda_1 \cdot k}{n_2} \\ 2d &= \frac{\lambda_1 \cdot k}{n_2} \\ d &= \frac{\lambda_1 \cdot k}{2n_2} \quad \text{wobei } k \in 1, 2, 3\dots\end{aligned}\tag{8.10}$$

8.4.2 Anwendung

Fall 1

Dieses Prinzip findet Anwendung bei der optischen Vergütung von Linsen in Kameraobjektiven. Da in diesen so wenig Reflexion wie möglich auftreten soll, werden dünne Schichten, deren Brechzahl zwischen Luft und Linse liegt, mit der richtigen Dicke aufgetragen, dass sie bestimmte Wellenlängen, die am häufigsten spiegeln, durch diese destruktive Interferenz auslöschen und so die Intensität des durchgelassenen Lichtes erhöhen und gleichzeitig (un)gewollte Reflexionen auf der Aufnahme⁵¹ vermeiden:



Abbildung 8.6: Reflexe in einer Kameralinse

Auch in in öligen Pfützen lässt sich das Phänomen beobachten (Luft - Öl - Wasser: $n_1 < n_2$ und $n_3 > n_2$), man sieht dann verschiedene Farben.

Fall 2

Fall 2 tritt in Glimmerplättchen oder Seifenblasen⁵² auf (Luft - Seife/Glimmerplättchen - Luft: $n_1 < n_2$ und $n_3 = n_1$):



Abbildung 8.7: Interferenz an der Oberfläche einer Seifenblase

8.5 Polarisation

8.5.1 Begriff

Die Polarisation ist festgelegt durch die Schwingungsebene des elektrischen Feldes des Lichtes. Natürliches Licht ist unpolarisiert, das heißt es enthält Licht aller Polarisationsrichtungen, also es enthält Wellen aller Schwingungsebenen.

Mit Schwingungsebene meint man die Ausrichtung der Ebene, in der sich die Schwingungsvektoren des elektrischen Feldes befinden. Diese stehen immer Senkrecht auf dem Vektor der Ausbreitungsrichtung, aber es gibt trotzdem unendlich viele Möglichkeiten für die Ausrichtung des Feldes. Siehe Abbildung 8.1 auf Seite 97: die blauen Vektorpfeile sind die Schwingungsvektoren des elektrischen Feldes.

8.5.2 Polarisationsfilter

Ein Polarisationsfilter lässt nur Licht, welches in eine bestimmte Richtung polarisiert ist, zu 100% durch.

Wenn Licht bereits polarisiert ist, also nur noch eine Schwingungsebene existiert, wird es vom Filter 100% durchgelassen, wenn er sich in der sogenannten Transmissionsrichtung befindet. Steht er 90° zur Transmissionsrichtung, wird das Licht zu 100% abgeschirmt, also nichts durchgelassen.

Das Malus'sche Gesetz gibt die resultierende Intensität des Lichtes nach dem Filter in Abhängigkeit von der Anfangsintensität I_1 und dem Winkel des Filters zur Transmissionsrichtung Θ (sprich: „groß Theta“) an:

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2(\Theta) \quad (8.11)$$

8.5.3 Brewster-Winkel

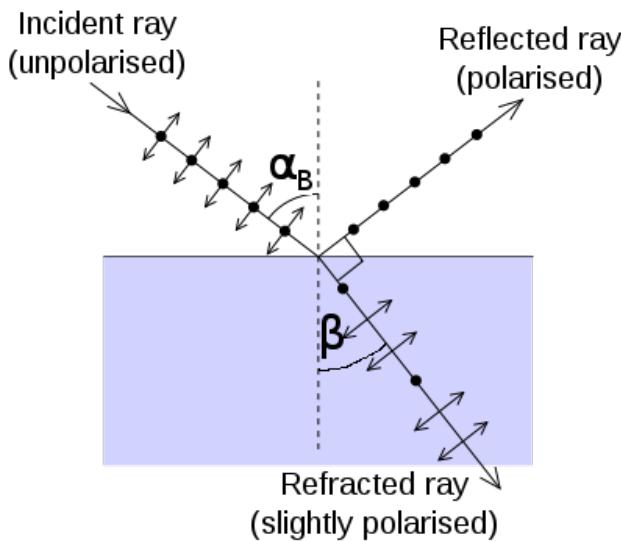


Abbildung 8.8: Illustration des Brewster-Winkels

Licht kann auch durch Reflexion polarisiert werden. Aber nur, wenn das Licht im Brewster-Winkel auf die Reflexionsebene auftrifft, wird der reflektierte Strahl vollständig polarisiert. Nach der Polarisation steht die Ebene des elektrischen Feldes parallel zur Reflexionsebene.

Die Bedingung für vollständige Polarisation: Der Winkel zwischen reflektiertem und gebrochenem Strahl muss 90° sein. Dies ist die Definition des Brewster Winkels.

Man kann ihn sich mit der Grafik 8.8⁵³ herleiten:

Mit dem Brechungsgesetz (Siehe Gleichung 8.2 auf Seite 99) und in der Luft: $n_1 \approx 1$, gilt:

$$\begin{aligned}\beta &= 90^\circ - \alpha_B \\ \frac{\sin \alpha_B}{\sin 90^\circ - \alpha} &= \frac{n_2}{n_1} \\ \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} &= n_2 \\ \tan \alpha_B &= n_2 \\ \alpha_B &= \arctan n_2\end{aligned}\tag{8.12}$$

Kapitel 9

Quanten

9.1 Hallwachs-Experiment

Mit dem Hallwachs Experiment entdeckte Wilhelm Hallwachs 1888 den fotoelektrischen Effekt, der die klassische (mechanische) Wellentheorie widerlegte und das Kapitel der Quantenphysik öffnete.

9.1.1 Aufbau und Beobachtung

Die geladene Zinkplatte eines Ladungsmesser (Siehe: Sektion 2.1.2 auf Seite 27: Elektroskop) wird zunächst mit weißem Licht bestrahlt, wobei sich keine Veränderung des Ausschlags der Nadel zeigt. Auch beim Hinzunehmen weiter, identischer Lichtquellen, also einer Erhöhung der Intensität des Lichts, gibt es keine Veränderung.

Beim Wiederholung des Versuches mit Ultraviolettlicht, welches ein kürzere Wellenlänge besitzt, wird allerdings der Ausschlag der Nadel kleiner.

9.1.2 Deutung nach Hallwachs

Elektronen wurden aus der Metallplatte gelöst, daher kommt die Veränderung des Nadelausschlags. Daraus folgt, dass die Energie von elektromagnetischen Wellen abhängig von der Wellenlänge ist und **nicht** von der Intensität. **Dies ist ein Widerspruch zur klassischen Wellentheorie.**

Licht muss also neben dem Wellencharakter (Siehe: Kapitel 8 ab Seite 97: Optik) auch Teilchencharakter zeigen. Dieses Lichtteilchen nennt man „Photon“.

9.2 Fotoeffekt

Der Fotoeffekt ist der heutige Name für den Hallwachseffekt und die Erforschung und Mathematisierung erfolgte von Max Planck und Albert Einstein Anfang des 20. Jahrhunderts.

Nun war qualitativ bekannt, dass Licht ab einer bestimmten Wellenlänge Elektronen aus Metall auslöst, allerdings gab es weder eine quantitative Bestimmung der Menge dieser Elektronen, noch eine Gleichung zur Bestimmung der Strahlungsenergie.

Nice to know: Qualitative Bestimmung heißt, man kann das Ergebnis eines Versuches so vorhersagen, dass man zwar den Effekt kennt und Aussagen über Dinge wie Richtung einer möglichen Bewegung, etc. machen kann, aber keine exakten Werte angeben kann.

Mit einer quantitativen Aussage gibt man auch exakte Werte an.

9.2.1 Fotozelle

Bei dem Experiment kommt die sogenannte Fotozelle zum Einsatz.

Eine Fotozelle ist ein evakuiertes (im Inneren ist ein Vakuum) Glaszyylinder, in welchem sich, im grössten Sinne, ein Kondensator befindet. An zwei Elektroden die sich im Inneren befinden, eine ist ringförmig und die andere halbkugelförmig, lassen sich Messgeräte und Spannungsquellen anschließen.

9.2.2 Aufbau und Durchführung

Eine Fotozelle wird mit UV-Licht bestrahlt, dadurch werden Elektronen Elektronen aus der schalenförmigen Kathode aus Natrium (ein Metall) ausgelöst.

Es kann beobachtet werden, dass ein (wenn auch extrem kleiner) Strom fließt, wenn man die beiden Elektronen über einen Widerstand und ein Strommessgerät verbindet.

Eine Gegenspannung U_{max} wird an der Fotozelle angelegt und so lange erhöht, bis kein Strom I mehr gemessen wird.

9.2.3 Deutung

Einige der herausgeschlagenen Elektronen treffen auf der ringförmigen Anode auf; dies erzeugt den Strom der gemessen wird.

Diese Elektronen besitzen eine demnach eine kinetische Energie E_{kin} (Siehe: Sektion 1.3.4 auf Seite 14: [Energieformen](#)), wenn sie ausgelöst werden. Durch die Gegenspannung müssen sie gegen ein entgegengesetztes elektrisches Feld ankämpfen" (Siehe: Sektion 2.5 auf Seite 37: [Elektronenbewegung im Elektrischen Feld](#)). Wenn kein Strom I mehr gemessen wird ist die elektrische Energie $E_{el} = U \cdot e$ (Siehe: Gleichung 2.9 auf Seite 33 mit der Feldstärke E (nicht verwechseln mit der Energie, beides hat das Formelzeichen E) im Kondensator $E = \frac{U}{d}$) gleich der kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ (Siehe: Gleichung 1.10 auf Seite 15):

$$E_{el} = E_{kin} \quad (9.1)$$

9.2.4 Photonenergie

Nun kann man davon ausgehen, dass die Energie *eines* Lichtphotons gleich der kinetischen Energie *eines* ausgelösten Elektrons ist. Da es, durch andere Faktoren, Unterschiede in den Geschwindigkeiten der herausgeschlagenen Elektronen gibt, werden nur die schnellsten, also die energiereichsten Elektronen in Betracht gezogen.

Es gibt allerdings eine gewisse Austrittsarbeit W_A , abhängig von dem Material der Kathode, die notwendig ist, um ein Elektron überhaupt aus der Platte zu lösen, ohne im dabei eine kinetische Energie mitzugeben. Daher muss diese Größe von der Photonenergie E_{phot} abgezogen werden.

Ferner ist E_{kin} , wie gerade gezeigt, gleich E_{el} , sodass man schreiben kann:

$$E_{el} = E_{phot} - W_A \quad (9.2)$$

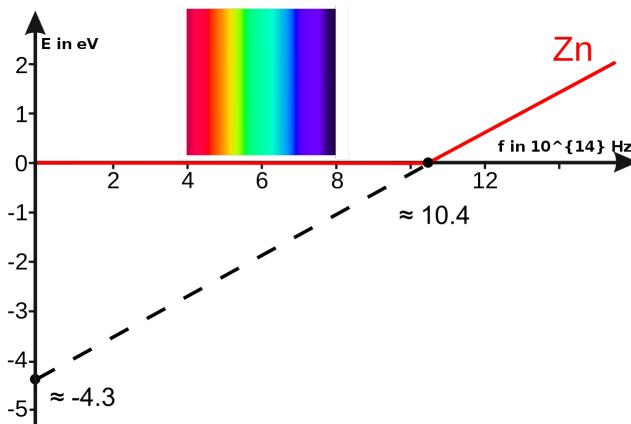


Abbildung 9.1: Aufführung der Energie der Elektronen (in Elektronenvolt: $1\text{eV} = q_e J \approx 1,602\text{J}$) über der Frequenz des Lichtes. Ein Spektrum gibt eine Referenz des Bereiches.

Aus der Abbildung 9.1⁵⁴ ist ein linearer Anstieg der Photonenergie ersichtlich. Max Planck folgerte daraus, dass es ein Naturkonstante gibt, die die Steigung definiert.

Einstein formulierte dann die, sehr wichtige, Einstein'sche Gleichung:

$$E_{phot} = h \cdot f \quad (9.3)$$

Hierbei ist h das „Plank'sche Wirkungsquantum“, eine Naturkonstante (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 06), mit:

$$h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \quad (9.4)$$

9.2.5 Austrittsarbeit

Mit Gleichung 9.3 kann man die Gleichung 9.2 weiter auflösen und erhält für W_A :

$$\begin{aligned} E_{el} &= h \cdot f - W_A \\ e \cdot U &= h \cdot f - W_A \\ W_A &= h \cdot f - e \cdot U \end{aligned} \tag{9.5}$$

9.2.6 Grenzfrequenz

Für die Grenzfrequenz f_{gr} , also die Frequenz, die das Licht mindestens haben muss, um Elektronen aus einem bestimmten Material zu lösen, lässt sich aus Gleichung 9.2 ableiten, wenn man $E_{el} = 0$ setzt:

$$\begin{aligned} 0 &= E_{phot,gr} - W_A \\ W_A &= E_{phot,gr} \\ W_A &= h \cdot f_{gr} \\ f_{gr} &= \frac{W_A}{h} \end{aligned} \tag{9.6}$$

9.3 Ist Licht ein Teilchen oder eine Welle?

Man kann nicht genau sagen, was Licht, oder elektromagnetische Wellen allgemein, ist bzw. sind.

Es können aber Eigenschaften verschiedener Modelle, dem Wellenmodell und dem Teilchenmodell, auf Licht angewendet werden, sodass man sagen kann dass Licht etwas „Drittess“ ist.

Wichtig: Licht ist keine Welle, bei der Photonen schwingen!

9.3.1 Licht als Welle

Bei der Wellenoptik wird Licht als Welle angenommen. Das Huygen'schen Prinzip ist zutreffend und Phänomene wie Brechung, Reflexion und Polarisation treten auf. Zudem gibt es Interferenzen an Spalten.

Eine Ausnahme bei der Optik ist allerdings die Tatsache, dass kurzwelligeres Licht stärker gebrochen wird als langwelligeres. Dies ist auch nur als Quantenphänomen zu deuten.

9.3.2 Licht als Teilchen

Immer wenn von Licht als Photonen die Rede ist, betrachtet man die Teilcheneigenschaften des Lichts. Phänomene wären der Fotoeffekt. Weitere, wie die Compton-Streuung oder die Existenz des Photonenimpulses, folgen in den nächsten Sektionen.

9.4 Photonenimpuls

Der Impuls \vec{p} eines beliebigen Körpers mit Masse ist definiert als $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ (Siehe: Sektion 1.5.1 auf Seite 17: [Impuls](#)).

Das Problem bei der Anwendung auf Photonen ist, dass Photonen keine Ruhemasse haben, ihre effektive Masse lässt sich nur durch Umformen der Gleichung der Einstein'schen Relativitätstheorie ermitteln:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \\ m &= \frac{E}{c^2} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit mit der sich Photonen bewegen. Daher folgt:

$$\begin{aligned} p &= m \cdot v \\ p &= \frac{E}{c^2} \cdot c \\ p &= \frac{E}{c} \end{aligned} \tag{9.8}$$

Mit der Photonenergie (Siehe: Gleichung 9.3 auf Seite 111) und der Beziehung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$ gilt:

$$p = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{9.9}$$

Nice to know: Für viele Berechnungen mit dem Photonenimpuls: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

9.4.1 Elastischer Stoß

Bei einem elastischen Stoß bleibt, neben der Summe des Impulses, die Summe der kinetischen Energien der Stoßpartner unverändert (Siehe: Sektion 1.5 auf Seite 17: [Stöße](#)).

Für Photonen kann man dann folgern: wenn $m_1 \ll m_2$ (wie beim Vorgang: Photon trifft auf Reflektor) ist nach dem Stoß der Betrag der Geschwindigkeit des Photon in guter Näherung dieselbe wie zu Beginn, aber in die entgegengesetzte Richtung: $v'_1 \approx -v_1$. Der Impulsübertrag ist also $2p$.

9.4.2 Unelastischer Stoß

Dieser Vorgang ist nicht reibungsfrei, es geht kinetische Energie "verloren"(Umwandlung in Wärme).

Ein Beispiel wäre, wenn Photonen auf eine schwarze Fläche treffen: es kommt nur zum einfachen Impulsübertrag, die restliche Energie wird in Wärme umgewandelt.

9.5 De Broglie Wellenlänge

Der Physiker Louis De Broglie erkannte aus der Impulsgleichung des Photons (Gleichung 9.9 auf Seite 113), dass mathematisch gesehen, jedes Teilchen mit einem Impuls, also jedes Teilchen und jeder Körper mit einer Masse und einer Geschwindigkeit, eine Wellenlänge hat und damit Wellencharakter zeigen müsste.

Diese Art der Welle nennt man auch Materialwelle oder, gebräuchlicher, De-Broglie-Welle.

Die Berechnung der De-Broglie-Wellenlänge gestaltet sich denkbar einfach. Aus Gleichung 9.9 geht hervor:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \quad (9.10)$$

9.6 Interferenzen von Quantenobjekten

Aufgrund der De Broglie-Wellenlänge haben auch Elektronen eine Wellenlänge, wenn sie einen Impuls besitzen, also bewegt sind.

Nun gilt es, Interferenzerscheinungen zu zeigen, was die Theorie beweisen würde, da es Wellencharakteristika zeigen würde.

9.6.1 Theoretische Bestimmung der Wellenlänge

Theoretisch lässt sich die De-Broglie-Wellenlänge λ durch das Gleichsetzen der Gleichung des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ mit der Formel für den Photonenimpuls $\vec{p} = \frac{h}{\lambda}$ berechnen:

$$\begin{aligned} m_e \cdot v &= \frac{h}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{h}{m_e \cdot v} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Um die Geschwindigkeit v bei einem Versuch mit Elektronenbeschleunigung durch ein elektrisches Feld zu ersetzen, setzt man die Gleichungen der kinetischen Energie E_{kin} mit der Gleichung der Elektrischen E_{el} gleich und formt anschließend nach v um (Siehe: Sektion 2.8 auf Seite 42: Braun'sche Röhre):

$$v = \sqrt{\frac{2q_e \cdot U_B}{m_e}} \quad (9.12)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 9.11 folgt dann die theoretische Wellenlänge des Elektrons, die aus dem Versuchsaufbau zu erwarten ist:

$$\lambda = \frac{h\sqrt{m_e}}{m_e \cdot \sqrt{2q_e \cdot U_B}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{m_e} \cdot \sqrt{2q_e \cdot U_B}}$$
(9.13)

9.6.2 Interferenz an Graphit

Da Elektronen der Theorie nach eine sehr kleine Wellenlänge haben, benutzt man Kristalle, um Interferenzmuster zu erzeugen. An den Netzebenen des Kristalls, in denen die Atome regelmäßig angeordnet sind, werden Elektronen gestreut, ähnlich wie Licht an dünnen Schichten (Siehe: Sektion 8.4 auf Seite 102: Optische Interferenz an dünnen Schichten). Auf dem Leuchtschirm der Röhre kommt es je nach Gangunterschied über die verschiedenen Netzebenen zu Maxima und Minima.

Wichtig: Bei Grafit haben die Atome in einer Ebene einen anderen Abstand d zu einander, als die Atome zwischen den Ebenen. Es gibt also zwei „Spaltabstände“ und folglich auch zwei Maxima 1. (2., ..., n.) Ordnung.

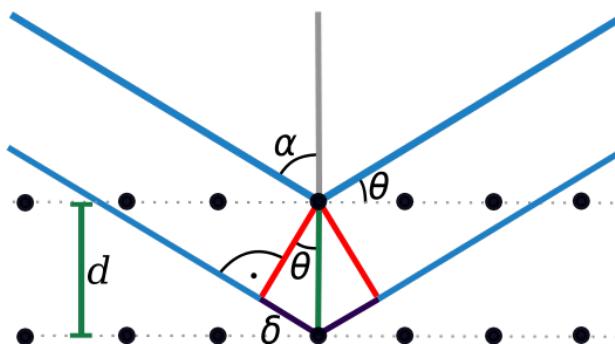


Abbildung 9.2: Darstellungen der Beziehungen. Achtung: α ist hier mit Θ vertauscht!

Der Gangunterschied δ , siehe Zeichnung⁵⁵, ist $\delta = 2d \cdot \sin \alpha$ und für konstruktive Interferenz, also ein Maximum, muss er ein natürliches Vielfaches der Wellenlänge λ sein:

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \alpha \quad (9.14)$$

Daraus folgt die Bragg'sche Bedingung:

$$\sin \alpha = \frac{n \cdot \lambda}{2d} \quad (9.15)$$

Versuch

Im Versuch wird ein beschleunigter Elektronenstrahl auf einen Graphitkristall geleitet. An diesem kommt es zur Streuung und es bilden sich zwei ringförmige Maxima auf dem Schirm, welcher so beschichtet ist, dass er unter Elektronenstimulation leuchtet.

Bezeichnet man den Abstand vom Maximum n . Ordnung zum Maximum 0. Ordnung mit r und den Abstand vom Kristall zum Schirm mit a folgt gemäß Winkelbeziehungen:

$$\tan 2\alpha = \frac{r}{a} \quad (9.16)$$

Um die Wellenlänge der Elektronen nun experimentell zu bestimmen, setzt man diese Formel mit der Bragg'schen Gleichung gleich. Man kann folgende Kleinwinkelnäherung für $\alpha > 10^\circ$ anwenden:

$$2 \sin \alpha = \tan 2\alpha \quad (9.17)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot \lambda}{2d} &= \frac{r}{a} \\ \lambda &= \frac{2dr}{n \cdot l} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Hiermit hat man eine Gleichung in der nur messbare Werte stecken und kann das Ergebnis mit dem theoretischen Ergebnis von oben vergleichen.

Ohne Winkelnäherung

$$\begin{aligned} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda}{2d}\right) &= \arctan\left(\frac{r}{l}\right) \\ \arcsin\left(\frac{n \cdot \lambda}{2d}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{r}{l}\right) \\ \frac{n \cdot \lambda}{2d} &= \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{r}{l}\right)\right) \\ \lambda &= \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{r}{l}\right)\right) \cdot \frac{2d}{n} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Nice to know: Es kommt nur zur Interferenz, wenn die Bragg'sche Gleichung erfüllt ist. Dafür muss α , für eine bestimmte Wellenlänge, auch eine bestimmte Größe haben. Im Experiment wird deshalb eine Graphitfolie benutzt, auf der die Kristallgitter in den verschiedensten Anordnungen liegen. So ist statistisch gesehen immer ein Kristall im richtigen Winkel zum Elektronenstrahl.

9.6.3 Interferenz am Doppelstspalt

Grundsätzlich gelten die gleichen Formeln wie bei der Interferenz mit Licht (Siehe Sektion 8.3 auf Seite 99: [Optische Interferenz am Doppelstspalt](#)). Allerdings muss der Spaltabstand d , aufgrund der sehr kleinen Wellenlängen, ebenfalls sehr klein sein, damit man überhaupt ein Interferenzmuster detektieren kann. Auch wenn man dies berücksichtigt, ist das Interferenzmuster trotzdem so klein, dass man es nur mit einem Elektronenmikroskop sichtbar machen kann.

Bedingungen für konstruktive Interferenz: $\delta = n \cdot \lambda$; für destruktive Interferenz: $\delta = (n - \frac{1}{2}) \cdot \lambda$.

Versuch

Um die Wellenlänge λ experimentell herauszufinden, gilt, wenn d der Spaltabstand ist, a der Abstand zum Schirm und d_k der Abstand des k . Maximum zum 0. Maximum, ist:

$$\tan \alpha = \frac{d_k}{a} \quad (9.20)$$

und:

$$\sin \alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d} \quad (9.21)$$

Dann entweder durch Kleinwinkelnäherung:

$$\lambda = \frac{d_k \cdot d}{k \cdot a} \quad (9.22)$$

oder ohne:

$$\lambda = \sin(\arctan(\frac{d_k}{a})) \cdot \frac{d}{k} \quad (9.23)$$

Für Weiteres, bitte die umfassendere Herleitung in Sektion 8.3 auf Seite 99: [Optische Interferenz am Doppelstspalt](#) betrachten!

9.7 Compton Wellenlänge

Wenn man Photonen mit ausreichend Energie (ab ca. 100keV) auf gebundene Elektronen schießt, wird das Phänomen durch den Fotoeffekt (Siehe Sektion 9.2 auf Seite 109: [Fotoeffekt](#)) beschrieben. Es kommt zum vollständigen Energieübertrag vom Photon auf das Elektron.

Wenn man ein Photon nun gegen ein freies Elektron schießt, wird das Phänomen durch den Compton-Effekt beschrieben:

9.7.1 Effekt

Es kommt nicht immer zu einer vollständigen Impulsübertrag, nämlich kann das Elektron auch zur Seite abgelenkt und das Photon dann in der Konsequenz nicht in die entgegengesetzte Richtung reflektiert. Wenn nicht der ganze Impuls übertragen wird, kommt es zur Compton-Streuung.

Das Elektron wird durch den Teilimpuls in eine Richtung beschleunigt, während das Photon in eine andere abgelenkt wird. Nach dem Zusammenstoß hat das Photon einen geringeren Impuls und da seine Geschwindigkeit konstant c ist, ändert sich, bedingt durch den Impulserhaltungssatz, seine Wellenlänge (sie wird größer).

Für ein Elektron als Teilchen, an dem gestreut wird, gilt die Compton-Wellenlänge des Elektrons (Casio fx-991xx: Konstante Nr. 12):

$$\Delta\lambda = \lambda_c = \frac{h}{m_e \cdot v} \approx 2,426 \cdot 10^{-12} m \quad (9.24)$$

Wenn λ die Wellenlänge des Lichts vor dem Stoß und λ' die Wellenlänge nach dem Stoß, dann ist die Wellenlängenänderung, in Abhängigkeit des Streuwinkels Θ :

$$\begin{aligned}\lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e \cdot c} - \frac{h}{m \cdot c} \cos \Theta \\ \Delta\lambda &= \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \cos \Theta) \\ \Delta\lambda &= \lambda_c \cdot (1 - \cos \Theta)\end{aligned} \quad (9.25)$$

Das Maximum dieser Gleichung liegt bei $\Theta = 180^\circ \rightarrow (1 - \cos 180^\circ) = 2$.

Das Minimum ist bei $\Theta = 0^\circ \rightarrow (1 - \cos 0^\circ) = 0$.

9.8 Beschreibung von Quantenobjekten

Als man den Versuch mit Elektronen am Doppelspalt durchführte, tat man dies auch mit einzelnen Elektronen, die nacheinander auf den Spalt „abgefeuert“ wurden und stellte fest, dass auch bei dieser Konfiguration das Interferenzmuster auftrat.

Um den Versuch noch genauer zu untersuchen und zu überwachen, brachte man einen Detektor an einem der Spalte an, um festzustellen, durch welchen Spalt sich das Elektron bewegt. Als man dies aber tat, traten keine Interferenzen mehr auf, was man am Bild der Elektronen auf dem Schirm erkennen konnte.

Diese Entdeckung ließ und lässt sehr viele Fragen auf, aber stellte klar, dass man das Verhalten von Quantenobjekten nicht vorhersagen und nicht einmal vollständig beschreiben kann, sondern Aussagen nur mit Wahrscheinlichkeiten treffen kann.

9.9 Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

Werner Heisenberg fand heraus, dass man bei Quantenobjekten, z.B. Elektronen, nie den Aufenthaltsort *und* den Impuls, also die Geschwindigkeit und die Richtung (Im Impulse steckt die Geschwindigkeit, eine gerichtete Größe), genau bestimmen kann. Das hat nichts mit den Ungenauigkeiten von Messtechniken zu tun, sondern ist ein Phänomen.

Er stellte die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation auf, auch Unschärferelation genannt:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (9.26)$$

Hierbei ist Δx die Ortsunschärfe und Δp die Impulsunschärfe. Dies sind die Genauigkeitsbereiche, mit denen die beiden Größen bestimmt werden können. Wenn man also nun den Ort genau bestimmen kann, kann man den Impuls nur ungenau bestimmen und daher nicht genau vorhersagen, wie schnell oder in welche Richtung sich das Teilchen fortbewegen wird.

Auf Elektronen am Doppelspalt angewendet bedeutet das, dass man, auch wenn der Ort des Elektrons sehr genau bestimmt werden kann (es kann sich ja nur durch einen der beiden Spalte bewegen und dort kann man Detektoren anbringen), nicht sicher weiß, wohin es sich bewegt, da man zwar weiß, aus welcher Richtung es kam, aber die Ablenkung am Doppelspalt und daher den Impuls und die weitere Flugbahn, nicht genau bestimmen kann.

Endnoten

¹ Von Wikipedia, die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonssche_Gesetze

² Von Wikipedia, die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonssche_Gesetze

³ Von Wikipedia, die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Actio_und_Reactio

⁴ Abbildungen 1.4-1.1 „Kräfteaddition“ von Till Blaha - Eigene Werke. Lizenziert unter Gemeinfrei

⁵ „Four pulleys“ von User:Prolineserver, User:Tomia. (minor edits by Stanisław Skowron, scale adjusted by User:Atropos235) - Eigenes Werk. Lizenziert unter CC BY 2.5 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Four_pulleys.svg

⁶ Abbildungen 1.6-1.8: „Translationsdiagramme“ von Till Blaha - Eigene Werke. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁷ „Abwurfrgrößen beim schießen Wurf“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁸ „Camposcargas“ by http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Chanchocan - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons - <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Camposcargas.PNG>

⁹ Paragraph von: Armin Kunz: „Bewertung der 1. Klausur“ vom 09.10.2014

¹⁰ „Abschirmung eines E-Feldes“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

¹¹ „RC switch“ by PureCore - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons, Slightly modified by Till Blaha (removal of voltage direction) - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RC_switch.svg

¹² „E Feld Kondensator“. Von Wikibooks - https://de.wikibooks.org/wiki/Datei:E_Feld_Kondensator.png

¹³ Angabe von: <http://www.techniklexikon.net/d/dielektrizitaetskonstante/dielektrizitaetskonstante.htm>, abgerufen am 21.12.2015

¹⁴ „Kondensatorenenschaltung parallel“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

¹⁵ „Kondensatorenenschaltung in Reihe“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

¹⁶ Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_von_Stokes

¹⁷ „Millikan Beispielwerte“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

¹⁸ Phrase von: https://nl.wikipedia.org/wiki/Proef_van_Millikan

¹⁹ Millikanversuch als Applet: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/p/e/mi/java1/mi_java1.html

²⁰ Siehe auch: <https://de.wikipedia.org/wiki/Edison-Richardson-Effekt>

²¹ „Braun’sche Roehre“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

²² Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Elementarmagnet>

²³ Abbildung 3.1 - „VF Pt cylindrical magnet thumb“ von Geek3 - Eigenes WerkThis plot was created with VectorFieldPlot. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VF_Pt_cylindrical_magnet_thumb.svg

²⁴ Abbildung 3.2 - „Feldlinien Hufeisenmagnet“ von unbekannt - unbekannt. Lizenziert unter PD-Schöpfungshöhe über Wikipedia - https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Feldlinien_Hufeisenmagnet.png

²⁵ „Gerader leiter“ von Talos aus der deutschsprachigen Wikipedia. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gerader_leiter.svg

²⁶ „Stromschleife“ von 30px MovGP0 - selbst erstellt mit Inkscape. Lizenziert unter CC BY-SA 2.0 de über

Wikimedia Commons - <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stromschleife.svg>

²⁷ „VF Pt cylindrical coil real“ von Geek3 - Eigenes Werk This plot was created with VectorFieldPlot. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VF_Pt_cylindrical_coil_real.svg

²⁸ „UVWREGEL new“ von UVWREGEL.png: Qniemiec 19:15, 14. Jan. 2011 (CET). Original uploader was Qniemiec at de.wikipedia derivative work: Qniemiec (talk) - UVWREGEL.png. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:UVWREGEL_new.png

²⁹ „Cyclotron motion wider view“ von Marcin Bialek - Eigenes Werk. Lizenziert unter GFDL über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyclotron_motion_wider_view.jpg

³⁰ „Wienscher Geschwindigkeitsfilter“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

³¹ „Zyklotron Prinzipskizze02“ von KlausFoehl - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zyklotron_Prinzipskizze02.svg

³² „SelbstinduktionGlimmlampeSchaltkreis“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

³³ „Phasenverschiebung Spannung vor Strom“ by Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

³⁴ „Dynamo.pul.gleich.wiki.v.1.00“ von Arthur Kronenberger - www.physik3d.de. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 de über Wikimedia Commons, modifiziert von Till Blaha (conversion nach .png) - <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dynamo.pul.gleich.wiki.v.1.00.gif>

³⁵ „Betrag von $\sin x$ “ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

³⁶ „BLINDELEISTUNG-ADE094210“ - <http://files.sma.de/dl/10040/BLINDELEISTUNG-ADE094210.pdf>

³⁷ „BLINDELEISTUNG-ADE094210“ - <http://files.sma.de/dl/10040/BLINDELEISTUNG-ADE094210.pdf>

³⁸ „Zeigerdiagramm für Widerstände“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

³⁹ „SchwingkreisSchaltung“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

⁴⁰ „Sine cosine one period“ von Geek3 - Eigenes Werk. Lizenziert unter CC BY 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sine_cosine_one_period.svg

⁴¹ „SiebkreisSchaltung“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

⁴² „SiebkreisGraph“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei

⁴³ „Diagramm einer Schwingung“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁴⁴ „Phasenverschiebung minus $0,5\pi$ “ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁴⁵ „Interferenzbedingungen“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁴⁶ „Stehende Wellen bei Flageolettönen bei Gitarren“ von Till Blaha - Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei.

⁴⁷ „Onde electromagnetique“ von SuperManu - Self, based on Image:Onde electromagnetique.png. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:onde_electromagnetique.svg

⁴⁸ „Refraction - Huygens-Fresnel principle“ von Arne Nordmann (norro) - Own illustration, based on Image:Wellen-Brechung.png and Image:Huygens_brechung.png. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Refraction--Huygens-Fresnel_principle.svg

⁴⁹ Animiertes .gif auf: <https://www.itp.uni-hannover.de/~zawischa/ITP/beugg.html>

⁵⁰ „Double-slit schematic“ von Peter Suppenhuhn, svg version by Trutz Behn, modified by Till Blaha -

Eigenes Werk. Lizenziert unter Gemeinfrei über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit_schematic.svg

⁵¹ By Mbhsb. Matthias B. Hullin, Elmar Eisemann, Hans-Peter Seidel, Sungkil Lee: Physically-Based Real-Time Lens Flare Rendering. In: ACM Transactions on Graphics, Vol. 30 (4), 2011 (Proc. SIGGRAPH). - Own work, CC BY-SA 3.0, \$3

⁵² „Reflection in a soap bubble edit“ von Brocken Inaglory. The image was edited by user:Alvesgaspar - Eigenes Werk. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reflection_in_a_soap_bubble_edit.jpg

⁵³ „Brewsters-angle“ by Pajs - Eigen werk. Licensed under Publiek domein via Wikimedia Commons - <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brewsters-angle.svg> modifiziert von Till Blaha

⁵⁴ „Photoelectric effect diagram no label“ by Klaus-Dieter Keller - File:Photoelectric effect diagram.svg. Licensed under CC BY 3.0 via Wikimedia Commons. Modified by Till Blaha (Labeling) - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photoelectric_effect_diagram_no_label.svg

⁵⁵ „Bragg“ by Dipl.-Phys. (JPG-version), Matthias M. (SVG-version) - /home/matthias/Desktop. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bragg.svg>