Họ và tên: Nguyễn Thái Bảo   MSSV: 23120023

BÀI TẬP CÁ NHÂN THỰC HÀNH TOÁN RỜI RẠC

CHƯƠNG 3 - 4 - LỚP 23CTT1A

ĐỀ 5.

3.14.

• Theo đề bài, ta có 7 chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 và cần lập các số tự nhiên có 10 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số khác mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần.

• Mà số tự nhiên không bắt đầu bằng chữ số 0, để thỏa yêu cầu bài toán thì chữ số đầu tiên khác 0.

• Số các dãy số có 10 chữ số có thể lập được từ giả thuyết và thỏa yêu cầu bài toán (có tính số 0 ở đầu) là:

$$P^*_{10}(3,2,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 302400 \text{ (số)}$$

• Số các dãy số có 10 chữ số có thể lập được từ giả thiết và thỏa yêu cầu bài toán, bắt đầu bằng chữ số 0 là:

$$P^*_{9}(3,2,1,1,1,1) = \frac{9!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 30240 \text{ (số)}$$

• Số các số tự nhiên cần tìm là:

$$P^*_{10}(3,2,1,1,1,1,1) - P^*_{9}(3,2,1,1,1,1) = 302400 - 30240 = 272160 \text{ (số)}$$

Vậy số các số tự nhiên cần tìm thỏa yêu cầu bài toán là: 272160 số.

3.31.

Ta có: $S = \{1, 2, \dots, 14\}$ và $A \subset S$ thỏa $|A| \geq 6$.

Vậy $\min|A| = 6$. Khi đó ta có:

+) Số tập con khác $\emptyset$ của A có 1 phần tử là: C_6^1

+) Số tập con khác $\emptyset$ của A có 2 phần tử là: C_6^2.

⋮

Suy ra: số tập con khác $\emptyset$ của A có tối đa 5 phần tử là:

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 = 62$$

⇒ A có ít nhất 62 tập con khác rỗng có tối đa 5 phần tử. Trong đó:

+) Tổng nhỏ nhất của các phần tử trong mỗi tập con này là:

$\min\left(\sum_{m \in M} m\right) = 0$, với $\forall M \subset A$, $M \neq \emptyset$, $|M| \leq 5$, $|A| = 6$, $M = \{0\}$.

+) Tổng lớn nhất của các phần tử trong mỗi tập con này là:

$\max\left(\sum_{m \in M} m\right) = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$

$\forall M \subset A$, $M = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, $|A| = 6$.

⇒ Tổng các phần tử của 62 tập con trên có giá trị thuộc đoạn $[0, 60]$.

• Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất $\left\lceil \frac{62}{60} \right\rceil = 2$ tập con trong số 62 tập con nói trên mà tổng các phần tử của chúng bằng nhau.

Tức là: Tồn tại $H, K \subset A$ $(\emptyset \neq H \neq K \neq \emptyset)$ thỏa $|H| \leq 5$, $|K| \leq 5$ và $\sum_{h \in H} h = \sum_{k \in K} k$. (đpcm).

4.6

1) $a_2 = -28$, $a_3 = -149$ (*) và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3$ (**)

Nhận xét: Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với:

$\lambda = 2$, $\mu = -1$, $\alpha = 1$ và $\varphi_2(n) = -12n^2 - 24n + 4$ có $\deg(\varphi_2) = 2$

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0, \forall n \geq 3$ (I)

và đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ có $\alpha = 1$ là nghiệm kép của $f(x)$.

(I) có nghiệm tổng quát: $a'_n = (p + nq).1^n = p + nq, \forall n \geq 2$ $(p, q \in \mathbb{R})$

(**) có 1 nghiệm cụ thể có dạng:

$$a''_n = \alpha^n . n^2 . \psi_2(n) = 1^n . n^2 (rn^2 + sn + t) = rn^4 + sn^3 + tn^2, \forall n \geq 2 \ (r, s, t \in \mathbb{R}, r \neq 0)$$

Thay $a''_n = rn^4 + sn^3 + tn^2, \forall n \geq 2$ vào (**), ta có:

$$r(n+1)^4 + s(n+1)^3 + t(n+1)^2 = 2(rn^4 + sn^3 + tn^2) - [r(n-1)^4 + s(n-1)^3 + t(n-1)^2] - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3 \ (\forall n \in \mathbb{Z})$$

Thế $n = -1$, $n = 0$ và $n = 1$ vào phương trình, ta có:

$$\begin{cases} -14r + 6s - 2t = -16 \\ 2r + 2t = 4 \\ 14r + 6s + 2t = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -1 \\ s = -4 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow a''_n = -n^4 - 4n^3 + 3n^2, \forall n \geq 2$$

Vậy (**) có nghiệm tổng quát: $a_n = a'_n + a''_n = p + nq - n^4 - 4n^3 + 3n^2, \forall n \geq 2$ $(p, q \in \mathbb{R})$

Từ (*) ta có:

$$\begin{cases} -28 = p + 2q - 36 \\ -149 = p + 3q - 162 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \\ q = 5 \end{cases}$$

Kết luận: $a_n = -n^4 - 4n^3 + 3n^2 + 5n - 2, \forall n \geq 2$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

4.10

Gọi a_n là dân số thế giới vào năm n.

Theo đề bài, ta có hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 thuần nhất:

$$a_{n+1} = (1 + 3.10^{-2}) a_n, \forall n \geq 2000 \ (*) \quad \text{và} \quad a_{2000} = 7.10^9 \ (**)$$

(*) có đa thức tương ứng $f(x) = x - 1,03$

(*) có nghiệm tổng quát: $a_n = p(1,03)^n, \forall n \geq 2000$ $(p \in \mathbb{R})$

Từ (**), ta có: $7.10^9 = p.(1,03)^{2000} \Rightarrow p = \dfrac{7.10^9}{(1 + 3.10^{-2})^{2000}}$

$$\Rightarrow a_n = 7.10^9 . (1 + 3.10^{-2})^{n-2000}, \forall n \geq 2000$$

Vậy $a_n = 7.10^9 . (1 + 3.10^{-2})^{n-2000}, \forall n \geq 2000$ là một nghiệm riêng của (*) tương ứng với (**).

Họ và tên. Nguyễn Thái Bảo MSSV. 23120023 Tổ 2

4.7 d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3 & (I) \\ x_0 = 1,\ x_1 = 3 & (II) \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow x_n = \frac{5}{2}x_{n-1} - x_{n-2} - \frac{n^2}{2} - n + \frac{3}{2},\ \forall n \geq 2$

Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với:
$\lambda = \frac{5}{2},\ \mu = -1,\ \alpha = 1,\ \varphi_2(n) = -\frac{n^2}{2} - n + \frac{3}{2}$ với $\deg(\varphi_2) = 2$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $x_n - \frac{5}{2}x_{n-1} + x_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2$ (□)
và đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = (x-2)(x-\frac{1}{2})$ có $f(\alpha) = f(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

(□) có nghiệm tổng quát: $x'_n = p.2^n + q\,2^{-n},\ \forall n \geq 0\ (p,q \in \mathbb{R})$

(I) có một nghiệm cụ thể dạng: $x''_n = 1^n.\psi_2(n) = rn^2 + sn + t,\ \forall n \geq 0$ $(r,s,t \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$

Thay $x''_n = rn^2 + sn + t,\ \forall n \geq 0$ vào (I), ta có:
$rn^2 + sn + t = \frac{5}{2}[r(n-1)^2 + s(n-1) + t] - [r(n-2)^2 + s(n-2) + t] - \frac{n^2}{2} - n + \frac{3}{2},\ \forall n \geq 2$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$

Thế $n=0,\ n=1,\ n=2$ vào phương trình, ta có:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}s + (-\frac{1}{2})t = \frac{3}{2} \\ 2r + 0s - \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ s = 4 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow x''_n = n^2 + 4n + 4,\ \forall n \geq 0$$

Vậy (I) có nghiệm tổng quát $x_n = x'_n + x''_n$
$= p.2^n + q\,2^{-n} + n^2 + 4n + 4,\ \forall n \geq 0$ $(p,q \in \mathbb{R})$

Từ (II) ta có: $\begin{cases} p + q + 4 = 1 \\ 2p + \frac{1}{2}q + 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_n = -3.2^n + n^2 + 4n + 4,\ \forall n \geq 0$

Kết luận: $x_n = -3.2^n + n^2 + 4n + 4,\ \forall n \geq 0$ là một nghiệm riêng của (I) tương ứng với (II).

4.8 c) $S_n = -1^4 + 2^4 + \dots + (-1)^n n^4\ (n \geq 1)$

Ta có $S_1 = -1$ (*) và $S_n = S_{n-1} + n^4.(-1)^n,\ \forall n \geq 2$ (**).
Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 1 không thuần nhất với:
$\lambda = 1 \neq \alpha = -1$ và $\varphi_4(n) = n^4$ có $\deg(\varphi_4) = 4$

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $S_n - S_{n-1} = 0,\ \forall n \geq 2$ (□)
và đa thức bậc nhất tương ứng $f(x) = x - 1$.

(□) có nghiệm tổng quát $S'_n = p.1^n = p,\ \forall n \geq 1\ (p \in \mathbb{R})$

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng $S''_n = (-1)^n\psi_4(n) = (-1)^n(qn^4 + rn^3 + sn^2 + tn + u),\ \forall n \geq 1$ $(q,r,s,t,u \in \mathbb{R}$ và $q \neq 0)$

Thay $S''_n = (-1)^n(qn^4 + rn^3 + sn^2 + tn + u),\ \forall n \geq 1$ vào (**), ta có:
$(-1)^n(qn^4 + rn^3 + sn^2 + tn + u) = (-1)^{n-1}[q(n-1)^4 + r(n-1)^3 + s(n-1)^2 + t(n-1) + u] + n^4.(-1)^n,\ \forall n \geq 2$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$

Thế $n = -2,\ n = -1,\ n = 0,\ n = 1,\ n = 2$ vào đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{cases} 16q - 8r + 4s - 2t + u = (-1).(81q - 27r + 9s - 3t + u) + 16 & (1) \\ (-1).(q - r + s - t + u) = 16q - 8r + 4s - 2t + u - 1 & (2) \\ u = (-1).(q - r + s - t + u) & (3) \\ (-1).(q + r + s + t + u) = u - 1 & (4) \\ 16q + 8r + 4s + 2t + u = (-1).(q + r + s + t + u) + 16 & (5) \end{cases}$$

~~Từ (4)(3) ⇒ -q - r - s + t - u = q +~~

Giải hệ phương trình bậc nhất sau trên, ta có: $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ r = 1 \\ s = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \\ u = 0 \end{cases}$

$S''_n = (-1)^n(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n)$

$\Rightarrow \cancel{S''_n = (-1)^n(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n)},\ \forall n \geq 1$

Vậy (**) có nghiệm tổng quát: $S_n = S'_n + S''_n$
$\cancel{= p + (-1)^n(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n),\ \forall n \geq 1\ (p \in \mathbb{R})}$

~~Từ (*) ta có: -1 = p - 1 ⇒ p = 0~~ $\Rightarrow S_n = (-1)^n(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n) + p,\ \forall n \geq 1$ $(p \in \mathbb{R})$

Từ (*) ta có: $-1 = p - 1 \Rightarrow p = 0$

Vậy $S_n = (-1)^n\left(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n\right), \forall n \geq 1$ là một nghiệm riêng của (**) tương ứng với (*).

Vậy $S_n = -1^4 + 2^4 + \dots + (-1)^n n^4 = (-1)^n\left(\frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{2}n\right)$ $(n \geq 1)$.