Họ và tên: Nguyễn Thái Bảo
MSSV : 23120023

Bài tập cá nhân chương 2 - Thực hành Toán rời rạc

Đề : 2

2.5 d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$

Ta có: $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$

$= [(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D)$

$= \underbrace{[B \cap (A \cup \overline{A})]}_{E} \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D)$

$= B \cup [B \cap (A \cap \overline{C} \cap D)]$

$= B \cup (B \cap M) \quad (\text{với } M = A \cap \overline{C} \cap D)$

$= B$

Vậy: $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B) = B.$

Bài 2.9

b) $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$

① Xét $\forall (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)]$, ta có:

$\begin{cases} (x,y) \in (A \times H) \\ (x,y) \notin (B \times K) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in H \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ y \notin K \end{array} \right. \end{cases}$ (*)

• TH1: $x \notin B$. Khi đó, ta có:

$(*) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \setminus B) \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in [(A \setminus B) \times H]$

$\Rightarrow (x,y) \in [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)].$ (a)

• TH2: $y \notin K$. Khi đó ta có:

$(*) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in H \\ y \notin K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in (H \setminus K) \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in [A \times (H \setminus K)]$

$\Rightarrow (x,y) \in [A \times (H \setminus K)] \cup [(A \setminus B) \times H]$ (b)

Từ (a), (b) suy ra: $\forall (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)] \Rightarrow (x,y) \in [A \times (H \setminus K)] \cup [(A \setminus B) \times H]$ (1)

② Xét $\forall (x,y) \in [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$, ta có:

$(x,y) \in [(A \setminus B) \times H]$ hay $(x,y) \in [A \times (H \setminus K)]$

• TH1: $(x,y) \in [(A \setminus B) \times H]$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ và } y \in H \\ x \notin B \text{ và } \left[\begin{array}{l} y \in K \\ y \notin K \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in (A \times H) \\ (x,y) \notin (B \times K) \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)]$ (c)

• TH2: $(x,y) \in [A \times (H \setminus K)]$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in H \\ y \notin K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ và } y \in H \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin B \end{array} \right. \text{ và } y \notin K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in (A \times H) \\ (x,y) \notin (B \times K) \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)]$ (d)

Từ (c), (d) suy ra: $\forall (x,y) \in [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)] \Rightarrow (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)]$ (2)

Từ (1), (2): $\forall (x,y) \in [(A \times H) \setminus (B \times K)] \Leftrightarrow (x,y) \in [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)].$

Vậy: $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)].$ (đpcm)

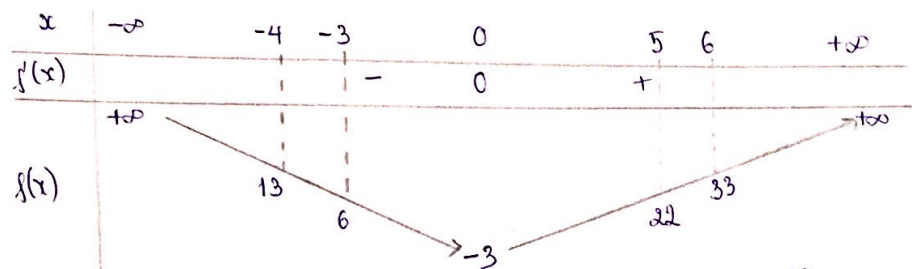**Bài 2.14** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$.

d) $A = (-4, -3] \cup [5, 6]$

Giải

Xét $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x.$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Xét $g(x) = 2x^2 + 4x + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x + 4.$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1.$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-4	-3		0		5	6	$+\infty$
$f'(x)$				$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$		13						33	$+\infty$

(branches: from $+\infty$ down to 13, then to 6, down to -3, up to 22, 33, up to $+\infty$)

Ta thấy: $A = (-4;-3] \cup [5,6] \Rightarrow f(A) = [6,13) \cup [22,\overset{33}{33}]$.

Ta có: $f(\mathbb{R}) = [-3; +\infty)$

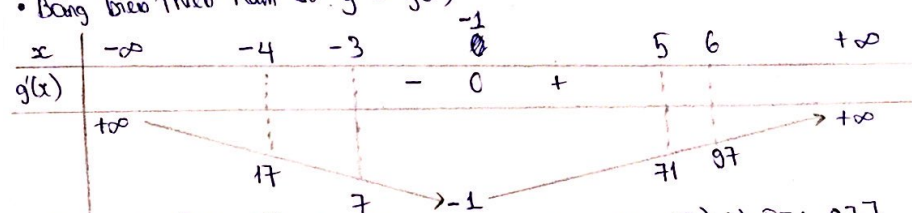Đặt $A' = A \cap f(\mathbb{R}) = \{-3\} \cup [5,6]$. Khi đó $f'(A) = f'(A')$

Ta có: $f(x) = -3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(-3) = 0$

$f(x) = 5 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow f'(5) = \{\pm 2\sqrt{2}\}$

$f(x) = 6 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow f'(6) = \{\pm 3\}$.

Vậy: $f'(A) = f'(A') = \cancel{f(x)}$ và $[-3, -2\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{2}, 3]$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-4	-3	$\overset{-1}{0}$			5	6	$+\infty$
$g'(x)$				$-$	0	$+$				
$g(x)$	$+\infty$		17					71	97	$+\infty$

(branches: from $+\infty$ to 17, to 7, down to -1, up to 71, 97, to $+\infty$)

Ta thấy: $A = (-4,-3] \cup [5,6] \Rightarrow g(A) = [7,17) \cup [71,97]$.

Có: $g(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$. Đặt $A'' = A \cap g(\mathbb{R}) = [5,6]$. Khi đó $g'(A) = g'(A'')$

Ta có: $g(x) = 5 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow g'(5) = \{-1 \pm \sqrt{3}\}$

$g(x) = 6 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{2} \Rightarrow g'(6) = \{-1 \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2}\}$

Vậy: $g'(A) = g'(A'') = [-1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}, -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}, -1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}]$.

Kết luận: với $A = (-4,-3] \cup [5,6]$ thì:

- $f(A) = [6,13) \cup [22,33]$;
- $g(A) = [7,17) \cup [71,97]$
- $f'(A) = [-3, -2\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{2}, 3]$;
- $g'(A) = [-1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}, -1-\sqrt{3}] \cup [-1+\sqrt{3}, -1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}]$

Bài 2.15

b) Tìm $f(A)$, $f(D)$, $f'(H)$, $f'(K)$.

Ta có: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 5-2x & \text{nếu } 0 < x < 3 \\ x-1 & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$

Có: $\forall x \leq 0: y = f(x) = x+7 \Rightarrow x = y-7$ với $y \leq 7$. (1)

$\forall x \in (0,3): y = f(x) = 5-2x \Rightarrow x = \dfrac{5-y}{2}$ với $y \in (-1,5)$ (2)

$\forall x \geq 3: y = f(x) = x-1 \Rightarrow x = y+1$ với $y \geq 2$ (3)

Từ (1)(2)(3) ta có: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-7 & \text{nếu } x \leq 7 \\ \dfrac{5-x}{2} & \text{nếu } -1 < x < 5 \\ x+1 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

- $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$

Ta có: $f(-2) = 5$, $f(-1) = 6$, $f(0) = 7$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 3$, $f(5) = 4$

$\Rightarrow f(A) = \{5, 6, 7, 3, 1, 3, 4\}$

- $D = (-1, 5] = (-1, 0] \cup (0,3) \cup [3,5]$

$\Rightarrow f(D) = (6,7] \cup (-1,5) \cup [2,4]$

$= (-1,5) \cup (6,7]$

- $H = [-5, -1]$

Ta thấy $x \in [-5,-1]$ thì $x \leq 7$, khi đó $f^{-1}(x) = x - 7$

$\Rightarrow f^{-1}(H) = [-12, -8]$

- $K = (-\infty, 0] = (-\infty, -1] \cup (-1, 0]$

$\forall x \in (-\infty, 0]$ thì $x \leq 7$ nên ta có: $f^{-1}(x) = x - 7$

$\Rightarrow f^{-1}(K) = (-\infty, -7]$ (1)

$\forall x \in (-1, 0] \subset (-\infty, 0]$ thì $-1 < x < 5$ nên $f^{-1}(x) = \dfrac{5-x}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(K) = [\dfrac{5}{2}, 3)$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow f^{-1}(K) = (-\infty, -7] \cup [\dfrac{5}{2}, 3)$.

Vậy: $\begin{cases} f(A) = \{5, 6, 7, 3, 1, 3, 4\} \\ f(D) = (-1,5) \cup (6,7] \\ f^{-1}(H) = [-12, -8] \\ f^{-1}(K) = (-\infty, -7] \cup [\dfrac{5}{2}, 3) \end{cases}$

Bài 2.16

c) $p: \mathbb{R} \to (-2, 3)$, $p(x) = \dfrac{9 - 2 \cdot e^x}{e^x + 3}$

$\forall y \in (-2, 3)$, phương trình $p(x) = y$ (ẩn $x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow y = \dfrac{9 - 2e^x}{e^x + 3}$ (*)

$(*) \Leftrightarrow y(e^x + 3) = 9 - 2 \cdot e^x$ (do $e^x + 3 > 3 \neq 0$)

$\Leftrightarrow e^x(y + 2) = 9 - 3y$

$\Leftrightarrow e^x = \dfrac{9 - 3y}{y + 2}$ $\left(\begin{array}{l} \text{do } y - 2 < y < 3 \\ \text{nên } y + 2 \neq 0 \end{array}\right)$

Vì $y \in (-2, 3) \Rightarrow -2 < y < 3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 9 - 3y < 15 \\ 0 < y + 2 < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{9 - 3y}{y + 2} > 0$, do đó e^x tồn tại.

$(*) \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{9 - 3y}{y + 2}\right) \in \mathbb{R}$ $\forall y \in (-2, 3)$.

Vậy $\forall y \in (-2, 3)$, $\exists ! \; x = \ln\left(\dfrac{9 - 3y}{y + 2}\right) \in \mathbb{R}$ thỏa $y = p(x)$.

Vậy p là song ánh.

Ta có ánh xạ ngược của song ánh p là:

$p^{-1}: (-2, 3) \to \mathbb{R}$, $p^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{9 - 3x}{x + 2}\right)$.