Lớp 23CTT1A

Nhóm 02

Tên thành viên:

- Hồ Hồ Gia Bảo – 23120021
- Hoàng Gia Bảo – 23120022
- Nguyễn Thái Bảo – 23120023
- Nguyễn Thanh Bình – 23120024
- Phan Thị Phương Chi – 23120025
- Nguyễn Hải Đăng – 23120027

1.2 Tính các tích sau:

a. Ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b. Ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$$

1.4 Tính AB − BA trong các trường hợp sau:

a) AB $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 12 & -13 \end{pmatrix}$

BA $= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

AB $- BA = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 12 & -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$

b) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A.B – B.A

= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 13 \\ 3 & 11 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 & 13 & 5 \\ 11 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

= $\begin{pmatrix} -21 & -10 & 0 \\ -9 & 0 & 10 \\ 0 & 9 & 21 \end{pmatrix}$

1.6 Tìm hai ma trận A, B khác ma trận không sao cho AB là ma trận không.

Cho hai ma trận A và B khác không như sau:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.8 Tìm tất cả các ma trận giao hoán với A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

Gọi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận giao hoán với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ta có: AB = BA

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 3d & 2c + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = a+2c \\ 2a+4b = b+2d \\ c+3d = 3a+4c \\ 2c+4d = 3b+4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d-c \\ b = \frac{2}{3}c \\ c \in R \\ d \in R \end{cases}$$

Vậy các ma trận giao hoán với A có dạng $\begin{pmatrix} d-c & \frac{2c}{3} \\ c & d \end{pmatrix}$.

1.10 Tìm A^k, k ∈ ℕ trong các trường hợp sau:

a/

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

…

Dự đoán:

$$\forall k = 2n, n \in Z^+, A^k = I_2 \ (1)$$
$$\forall k = 2n-1, n \in Z^+, A^k = A \ (2)$$

Chứng minh quy nạp:

- Xét $k = 2n, A^k = A^{2n}$.

Với n = 1: $A^{2n} = A^2 = I_2$ $(\text{đú}ng)$

Giả sử (1) đúng với mọi $n = m \geq 1, tức\ l$à: $A^{2m} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta chứng minh (1) cũng dúng với n = m+1. Thật vậy:

$$A^{2(m+1)} = A^2.A.A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I_2\ (\text{đ}pcm)$$

- Xét $k = 2n - 1, A^k = A^{2n-1}$.

Với n = 1: $A^{2n-1} = A^1 = A$ (đúng)

Giả sử (2) đúng với mọi $n = m \geq 1, tức\ l$à: $A^{2m-1} = A = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$.

Ta chứng minh (1) cũng dúng với n = m+1. Thật vậy:

$$A^{2(m+1)-1} = A^{2m+1} = A^{2m}.A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix} = A\ (\text{đ}pcm).$$

b/

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = -I_2\\
A^3 &= \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = A^T\\
A^4 &= \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I_2\\
A^5 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = A\\
&\dots
\end{aligned}$$

Vậy:

$$A^k = \begin{cases} A, & k = 4n - 3\\ -I_2, & k = 4n - 2\\ A^T, & k = 4n - 1\\ I_2, & k = 4n \end{cases}, n \in Z, n \geq 1$$

c)

$Ta\ c$ó:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$Dự\ đoán: \forall k \in N, A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

$Giả\ sử\ dự\ đoán\ trên\ đúng\ với\ k = n$ tức là $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

$Ta\ cần\ chứng\ minh\ dự\ đoán\ trên\ cũng\ đúng\ với\ k = n + 1.$

$Thật\ vậy, với\ k = n + 1:$

$A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$ (đpcm).

$Vậy\ \forall k \in N, A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$Dự\ đoán\ A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$

$Với\ n = 1: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (đúng)

$Giả\ sử\ A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$ đúng $\forall k \geq 1, k \in N$

Ta cần chứng minh: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{pmatrix}$

Ta có $A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \\ 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \\ 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{pmatrix} (đpcm)$

$Vậy\ A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}\ \forall\ k \geq 1, k \in N$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Ta\ có : A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Dự\ đoán\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Với\ n = 1: A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (đúng)$

$Giả\ sử\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} đúng\ \forall\ k \geq 1, k \in N$

Ta phải chứng minh $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & k+\frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (dpcm)$

$Vậy\ A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\, k \geq 1, k \in N$

f) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có:

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Dựa vào các kết quả trên, ta dự đoán:

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nếu } k = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \text{ nếu } k > 2 \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử (*) đúng $\forall k > 2$ (do ta đã tính được với k = 2), ta chứng minh (*) đúng $\forall k + 1$, tức:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \text{ nếu } k + 1 > 2$$

Ta xét:

+ Với k + 1 = 3 ⇒ k = 2, do đó:

$$A^{k+1} = A^k.A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \ (1)$$

+ Với k + 1 > 3 ⇒ k > 2, do đó:

$$A^{k+1} = A^k.A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nếu } k = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \text{ nếu } k > 2 \end{cases}$ là đúng. Do đó:

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nếu } k = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \text{ nếu } k > 2 \end{cases}$$

g) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Ta thấy:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ A^k = 0_3, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 3 \end{cases}$$

h)* A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 11. \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Dựa vào các kết quả trên, ta dự đoán:

+ Các phần tử trên đường chéo chính tạo thành 1 hệ thức đệ quy:

$$\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_k = 2.a_{k-1} + 2.(-1)^k \ \ (\forall k \geq 3) \end{cases}$$

Hệ thức trên có 1 nghiệm riêng dạng:

$$a_k = \frac{1}{3}.2^k + \frac{2}{3}.(-1)^k \ (\forall k \geq 2)$$

+ Các phần tử ngoài đường chéo chính tạo thành 1 hệ thức đệ quy:

$$\begin{cases} b_2 = 1 \\ b_k = 2.b_{k-1} + (-1)^{k-1} \ \ (\forall k \geq 3) \end{cases}$$

Hệ thức trên có 1 nghiệm riêng dạng:

$$b_k = \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k \ (\forall k \geq 2)$$

Khi đó, ta có:

$$A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k \end{pmatrix} (\ \forall k \geq 2)\ (*)$$

Giả sử (*) đúng $\forall k \geq 2$, ta chứng minh (*) đúng $\forall k + 1$, tức:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

Ta xét:

$$A^{k+1} = A^k.A$$

$$= \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2b_k & a_k + b_k & a_k + b_k \\ a_k + b_k & 2b_k & a_k + b_k \\ a_k + b_k & a_k + b_k & 2b_k \end{pmatrix} (1)$$

Ta có:

$$2b_k = 2.(\frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k)$$

$$= \frac{1}{3}.2^{k+1} - \frac{2}{3}.(-1)^k = \frac{1}{3}.2^{k+1} + \frac{2}{3}.(-1)^{k+1} = a_{k+1} \ (2)$$

$$a_k + b_k = \frac{1}{3}.2^k + \frac{2}{3}.(-1)^k + \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k$$

$$= \frac{1}{3}.2^{k+1} + \frac{1}{3}.(-1)^k = \frac{1}{3}.2^{k+1} - \frac{1}{3}.(-1)^{k+1} = b_{k+1} \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k \end{pmatrix} \forall k \geq 2$ là đúng. Do đó:

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}.2^k + \frac{2}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k \\ \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k + \frac{2}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k \\ \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k - \frac{1}{3}.(-1)^k & \frac{1}{3}.2^k + \frac{2}{3}.(-1)^k \end{pmatrix} (\forall k \geq 2)$$

1.12 Cho A, B ∈ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$ sao cho AB ≠ BA. Chứng minh rằng:

a)

Ta có: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B)$

$= A^2 + AB + BA + B^2$

Vì $AB \neq BA$ *nên* $2AB \neq AB + BA$. *Do đó*: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Vậy nên: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

b)

$Ta\ có\ (A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

Vì $AB \neq BA\ nên\ AB - BA \neq 0. Do$ đó $A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

$Vậy\ nên\ A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$

1.14 Hãy xác định $f(A)$ trong các trường hợp sau:

a) $Ta\ có\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$f(A) = 2A^3 + 3A^2 + 5$

$f(A) = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

b) $Ta\ có\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{pmatrix}$

$f(A) = 3A^3 - 2A^2 - A + 2I_2$

$f(A) = 3\begin{pmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 & 211 \\ 139 & 308 \end{pmatrix}$

c)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = 4x^2 - 3x + 4$

$f(A) = 4A^2 - 3A + 4I_3$

$4A^2 = 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$3A = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$4I_3 = 4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$f(A) = 4A^2 - 3A + 4I_3 = \begin{pmatrix}8 & 4 & 4\\ 4 & 8 & 4\\ 4 & 4 & 8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}12 & 1 & 1\\ 1 & 12 & 1\\ 1 & 1 & 12\end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $f(x) = -3x^2 - x + 5$

Ta có: $A^2 = \begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\ -1 & 10 & 6\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f(A) = -3\begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\ -1 & 10 & 6\\ 8 & 7 & 6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix}-12 & -11 & -10\\ 0 & -26 & -19\\ -23 & -24 & -15\end{pmatrix}$$

1.16 Một ma trận A ∈ $M_n(\mathbb{R})$ được gọi là lũy đẳng nếu $A^2 = $ A.

a) Kiểm tra E = $\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ là ma trận lũy đẳng.

Ta có: $E = \begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$

➔ $E^2 = \begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix} = E$

Vậy E là ma trận luỹ đẳng.

b) Chứng minh rằng, nếu A, B ∈ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$ sao cho AB = A và BA = B thì A và B là các ma trận lũy đẳng.

$AB = A$ và $BA = B$

Ta có:

$AB = A \rightarrow (AB)A = A^2 \rightarrow A(BA) = A^2 \rightarrow AB = A^2 \rightarrow A = A^2$
$\rightarrow A$ lũy đẳng

$BA = B \rightarrow (BA)B = B^2 \rightarrow B(AB) = B^2 \rightarrow BA = B^2 \rightarrow B = B^2$
$\rightarrow B$ lũy đẳng

Qua đó ta $có$ đpcm.

c) Chứng minh rằng, nếu A, B ∈ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$ sao cho A và B cùng lũy đẳng thì A + B lũy đẳng khi và chỉ khi AB = BA = 0.

A *luỹ đẳng* $\Rightarrow A^2 = A$

B luỹ đẳng $\Rightarrow B^2 = B$

- $A + B$ luỹ đẳng

$\Leftrightarrow (A+B)^2 = A + B$
$\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A + B$
$\Leftrightarrow A + B + AB + BA = A + B$
$\Leftrightarrow AB + BA = 0$
$\Leftrightarrow AB = -BA$ (1)

- Xét đẳng thức: $BABA = BABA$
  $\Leftrightarrow BABA^2 = B^2ABA$
  $\Leftrightarrow B^{-1}BABA^2A^{-1} = B^{-1}B^2ABAA^{-1}$
  $\Leftrightarrow ABA = BAB$ (2)
- $(1),(2) \Leftrightarrow (-BA)A = BAB \Leftrightarrow -BA = BAB \Leftrightarrow BAB + BA = 0$
  $\Leftrightarrow BA(B+1) = 0 \Leftrightarrow BA = 0 (B \neq -1$ vì $(-1)^2 \neq -1)$ (3)
- $(1),(2) \Leftrightarrow ABA = (-AB)B \Leftrightarrow ABA = -AB \Leftrightarrow AB(A+1) = 0$
  $\Leftrightarrow AB = 0$ $(A \neq -1$ vì $(-1)^2 \neq -1)$ (4)
- $(3),(4) \Leftrightarrow AB = BA = 0$ (đpcm)

1.18 Tìm và biện luận hạng của các ma trận sau theo tham số m ∈ ℝ:

a/

$$Đặt\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 1 & m\\ 1 & m & 3\end{pmatrix}$$

$$Ta\ có: A \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & m+6\\ 0 & m-1 & 6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & m+6\\ 0 & 0 & 6+3(m-1)\end{pmatrix}$$

Nếu $6+3(m-1)=0 \Leftrightarrow m=-1\ thì\ A \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Suy ra r(A) = 2

Nếu $6+3(m-1)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$, thì r(A) = 3.

Vậy: $r(A)=2\ khi\ m=-1$ và $r(A)=3\ khi\ m\neq -1$.

b)

$$A=\begin{pmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 1-m & m-m^2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 0 & 1-m^2\end{pmatrix}$$

$-Nếu\ m-1=0 \Leftrightarrow m=1\ thì\ A \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ nên\ r(A)=2$

$-Nếu\ m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1\ thì:$

$+Nếu\ 1-m^2=0 \Leftrightarrow m=-1\ thì\ A \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ nên\ r(A)=2$

$+Nếu\ 1-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1\ \ thì\ \ r(A)=3$

c)

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Xét } m = 1, \text{khi đó } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 3$$

$\text{Xét } m \neq 1$:

$$\text{Ta có: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-\frac{1}{m-1}d_2]{d_3-\frac{1}{m-1}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1+\dfrac{2}{m-1} \\ 0 & 0 & -4 & -2+\dfrac{2}{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4-d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1+\dfrac{2}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow r(A) = 4$

$\text{Vậy với } m \neq 1 \text{ thì } r(A) = 4, m = 1 \text{ thì } r(A) = 3$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2 \leftrightarrow d_3 \\ d_3 \leftrightarrow d_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & m-1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_3-d_2 \\ d_4-(m-1)d_2 \\ d_3 \leftrightarrow d_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4(m-1) & m-3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nếu $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4-0.5d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=3$$

- Nếu $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, thì $r(A)=4$

1.20 Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a/

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$(A|I_2) = \left(\begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{matrix}\right) = (I_2|A^{-1})$$

Vậy nghịch đảo của ma trận trên là $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

b)

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$Ta\ có$: $(A|I_2) = \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right)$

$Dễ\ dàng\ thấy\ r(A) < 2. Suy\ ra\ A\ không\ khả\ nghịch$

c)

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

- Xét:

$$(A|I_n) = \left(\begin{matrix} sin\theta & -cos\theta \\ \cos\theta & sin\theta \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2-\cos(\theta)\ d_1]{\frac{1}{sin\theta}d1} \left(\begin{matrix} 1 & -\frac{cos\theta}{sin\theta} \\ 0 & \frac{1}{sin\theta} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{sin\theta} & 0 \\ -\frac{cos\theta}{sin\theta} & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1+\frac{cos\theta}{sin\theta}d_2]{sin\theta\, d_2} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} sin\theta & cos\theta \\ -cos\theta & sin\theta \end{pmatrix}$$

1.22 Tìm nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d2-d3]{d1+d4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d3+d2 \\ d4-d1 \\ d1-d2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d4+d3]{d1+d4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-d4]{d1+d4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1})$$

Vậy A *khả nghịch* và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$$(A|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&1&2&1&0&0&0\\0&1&1&4&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&3&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&0&0&1&0\\0&1&1&4&0&1&0&0\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&1&3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&0&0&1&0\\0&1&1&4&0&1&0&0\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&1&-2\\0&1&0&0&1&1&0&-2\\0&0&1&0&3&0&0&-2\\0&0&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)=(I_4|A^{-1})$$

VậyA $khả$ $nghịch$ và $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&0&-2\\3&0&0&-2\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$

c)

Đặt $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

Ta có: $(A|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_4-d_1]{\substack{d_2-d_1\\d_3-d_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_2-d_3\\d_3-d_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&2&-2&0&0&1&-1&0\\0&0&2&-2&0&0&1&-1\\0&0&-4&0&-1&1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2+d_3]{\substack{d_4+2d_3\\ d_3-\frac{1}{2}d_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{-1}{4}d_4]{\substack{\frac{1}{2}d_2\\ \frac{1}{2}d_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1-d_4]{\substack{d_1-d_2\\ d_1-d_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A\ kh\text{ả}\ ngh\text{ị}ch\ v\text{à}\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2\\ -2 & 7 & 4 & -4\\ -1 & 3 & 3 & -2\\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Xét: $(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 7 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_4-d_1]{\substack{d_2+2d_1\\ d_3+d_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1-2d_4]{\substack{d_1+3d_2\\ d+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.24 Cho A, B ∈ $M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu AB khả nghịch thì A và B cùng khả nghịch.

Do ma trận AB khả nghịch nên r(AB) = n (*)

Giả sử trong 2 ma trận A hoặc B có ít nhất 1 ma trận không khả nghịch, nói cách khác r(A) < n hoặc r(B) < n.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử ma trận A không khả nghịch, khi đó r(A) < n, đồng thời khi chuyển A về dạng bậc thang, ta có:

$$A \sim R_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận R_A thu được từ m phép BĐSCTD từ ma trận A ($m \in \mathbb{N}$) nên A cũng thu được thì m phép BĐSCTD từ ma trận R_A, do đó A có thể viết thành:

A = $\varphi_1(I_n).\varphi_2(I_n)\ldots\varphi_m(I_n).R_A$ (trong đó $\varphi_i(I_n)$ với $i = \overline{1,m}$ là các ma trận sơ cấp khả nghịch)

Như vậy $A.B = \varphi_1(I_n).\varphi_2(I_n)\ldots\varphi_m(I_n).R_A.B \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Ma trận kết quả A.B trên tương đương dòng với 1 ma trận có số dòng bằng 0 bằng với số dòng bằng 0 của ma trận R_A, do đó $r(AB) = r(\varphi_1(I_n).\varphi_2(I_n)\ldots\varphi_m(I_n).R_A.B) < n$ (mâu thuẫn với (*)).

Như vậy nếu ma trận AB khả nghịch thì cả 2 ma trận A và B phải cùng khả nghịch, do đó ta có điều phải chứng minh.

1.26 Giải các phương trình ma trận

a) Ta có $(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d2-3d1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$
$\xrightarrow[-d2]{d1+2d2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$

$Phương\ trình\ có\ dạng\ AX = B\ ta\ có\ A\ khả\ nghịch\ và\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\ nên$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

b) Ta có $(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \rightarrow$
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$

$Phương\ trình\ có\ dạng\ AX = B\ ta\ có\ A\ khả\ nghịch\ và\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\ nên$

$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c)

$X\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ (1)

Đặt $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$X\acute{e}t\ (A|I_4) = \left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[d_2+d_1]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$

$\Rightarrow A\ kh\mathring{a}\ ngh\d{i}ch\ v\grave{a}\ A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$(1) \Rightarrow X = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -7\\ -2 & -6\end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Phương trình có dạng AXB = C. Ta có A, B khả nghịch và:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 9\\ -5 & -5\end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$

Phương trình ma trận trên có dạng A.X = B với $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

Ta xét ma trận mở rộng $(A \mid I_3)$:

$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d3:=d3-2d1]{d2:=d2-3d1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d2:=\frac{-1}{4}d2]{\substack{d1:=d1+\frac{1}{2}d2\\ d3:=d3-\frac{5}{4}d1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3:=-4d3]{\substack{d1:=d1-2d3\\ d2:=d2-5d3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4\end{array}\right)=(I_3 \mid A^{-1})$$

Do đó A khả nghịch và $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}$

Do đó:

A.X = B

$\Leftrightarrow A^{-1}.A.X=A^{-1}.B$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$

f) $X.\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Phương trình ma trận trên có dạng X.A = B với $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ta xét ma trận mở rộng $(A \mid I_3)$:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & -8 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -7 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3 := d3 - 6d1]{\substack{d1 := d1 - 2d3 \\ d2 := d2 - 2d3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & -6 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d3 := d3 + 4d2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3 := -d3]{\substack{d1 := d1 - 2d3 \\ d2 := d2 - 2d3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -8 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 & -5 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Do đó:

X.A = B

$\Leftrightarrow X.A.A^{-1} = B.A^{-1}$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & -34 & -51 \\ 148 & -91 & -138 \\ 241 & -148 & -225 \end{pmatrix}$$

g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Phương trình ma trận trên có dạng A.X.B = C với $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ta xét ma trận mở rộng $(A \mid I_3)$:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d2 := d2 + d3 \\ d3 := d3 - d1}]{d1 := d1 - 2d3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d2 \leftrightarrow d3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d2 := \frac{1}{2}d2]{d1 := d1 + \frac{1}{2}d2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3:=\frac{1}{3}d3]{\substack{d1:=d1+\frac{1}{6}d3\\ d2:=d2-\frac{1}{2}d3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Ta xét ma trận mở rộng $(B \mid I_3)$:

$$(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3:=d3-d1]{d2:=d2-d1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d2 \leftrightarrow d3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d2:=-\frac{1}{2}d2]{d1:=d1+\frac{1}{2}d2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3:=-\frac{1}{2}d3]{d2:=d2+\frac{1}{2}d3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) = (I_3 \mid B^{-1})$$

Do đó B khả nghịch và $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Do đó:

A.X.B = C

$\Leftrightarrow A^{-1}.A.X.B.B^{-1} = A^{-1}.C.B^{-1}$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1.28 Cho $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 \\ \mathbf{5} & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -2 & -1 & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}$à $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & \mathbf{2} \\ -2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Chứng minh A và B khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3d1} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d1-d2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d2-5d1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -15 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}d2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$$

$Vậy\ A\ khả\ nghịch\ và\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d3-3d1]{d2+2d1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d3+d2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d2+2d3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d1-d2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_3|B^{-1})$$

$Vậy\ B\ khả\ nghịch\ và\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Tìm ma trận X thỏa mãn điều kiện AXB = C.

$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 9 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -19 & -11 \\ 1 & -34 & -20 \end{pmatrix}$$

1.30 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh A khả nghịch và tìm A^{-1}.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1})$$

$Vậy\ A\ khả\ nghịch\ và\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA = ABA$.

Ta có: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2XA = ABA$$
$$\Rightarrow AAXA = ABA$$
$$\Rightarrow AX = B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.32 Giải các hệ phương trình sau:

a/

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Ma trận hoá hệ phương trình trên, ta có:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Ta có:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_2 và x_4.

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 11 - 4t + 10s \\ x_2 = t \in R \\ x_3 = 2 + 4s \\ x_4 = s \in R \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình trên, ta có:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 - d_3]{\substack{d_1 + 3d_2 \\ d_1 - 5d_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -6 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Hệ đã *cho có* 2 *ẩn tự do* là x_3 *v*à x_5, *từ đó ta có nghiệm của hệ*:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 + 6t - 10s}{2} = -2 + 3t - 5s \\ x_2 = -1 + 4t - 3s \\ x_3 = t \in R \\ x_4 = 2 + 3s \\ x_5 = s \in R \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_4 - 5x_5 = 5 \end{cases}$

Hệ phương trình trên có số ẩn n = 5, khi ta xét đến ma trận mở rộng của hệ $\tilde{A}$ có dạng:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -5 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Ta thấy $r(\tilde{A}) = 3 < n = 5$, do đó hệ có vô số nghiệm với số ẩn tự do là n $- r(\tilde{A}) = 5 - 3 = 2$

Khi đó hệ phương trình trên có nghiệm là:

$$\begin{cases} x_1 = u \in \mathbb{R} \\ x_2 = -\frac{3}{2}u - \frac{157}{2}v - 68 \\ x_3 = -37v - 34 \\ x_4 = 5v + 5 \\ x_5 = v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1.34 Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a/

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình, ta\ có\ \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Vậy\ nghiệm\ của\ hệ\ là$: $\begin{cases} x1 = 9t - 10s \\ x2 = -7t + 7s \\ x3 = t, t \in \mathbb{R}; \\ x4 = s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình trên ta được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d4 := d4 - d1]{\substack{d2 := d2 - d1 \\ d3 := d3 - d1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d4 := d4 - 7d2]{\substack{d2 := d2 + 2d3 \\ d3 := d3 - 3d2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d4:=d4-\frac{5}{2}d3}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho có 1 ẩn tự do là x_4, đặt $x_4 = u$. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 + 3x_4 = u \\ x_3 = \dfrac{1}{4}(8x_4) = 2u \end{cases}$$

Như vậy hệ có vô số nghiệm:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, u, 2u, u)$ với $u \in \mathbb{R}$ tùy ý.

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 \qquad + 9x_4 = 0 \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình trên ta được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 8 & -5 & 0\\ 3 & -5 & 0 & 9 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d4:=d4-3d1]{\substack{d2:=d2-2d1\\ d3:=d3-d1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 9 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 6 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d3:=d3-3d2\\ d4:=d4-d2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d4 := d4 + \frac{4}{5}d3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho có 1 ẩn tự do là x_3, đặt $x_3 = u$. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 - x_4 = -5u \\ x_2 = -3x_3 - 3x_4 = -3u \\ x_4 = -\dfrac{1}{15}.0 = 0 \end{cases}$$

Như vậy hệ có vô số nghiệm:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5u, -3u, u, 0)$ với $u \in \mathbb{R}$ tùy ý.

1.36. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số m:

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

- Ma trận hoá hệ phương trình, ta được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & m & 3 \\ 1 & m & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & m-1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 - (m-1)d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & (m-2)(m+3) & 2-m \end{array}\right)$$

- TH1: $(m-2)(m+3) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = -3$

    - $m = 2, \tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình (1) có vô số nghiệm thoả: $\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

- $m = -3, \tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

  $\Rightarrow$ Hệ phương trình (1) vô nghiệm

- TH2: $(m-2)(m+3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \wedge m \neq -3$

  Hệ phương trình (1) có nghiệm:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \dfrac{m+2}{m+3} \\ z = \dfrac{1}{m+3} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$

Ma trận hóa hệ phương trình trên ta được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d1 \leftrightarrow d3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d3:=d3-md1]{d2:=d2-d1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d3:=d3+d2}\left(\begin{matrix}1 & 1 & m\\ 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 0 & (1-m)(2+m)\end{matrix}\left|\begin{matrix}1\\ 0\\ 1-m\end{matrix}\right.\right)(*)$$

Biện luận:

+ Với $(1-m)(2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}m=1\\ m=-2\end{matrix}\right.$

Xét m = 1, thay vào (*) ta được ma trận:

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}1\\ 0\\ 0\end{matrix}\right.\right)$$

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình mới:

$x_1+x_2+x_3=1$

Do đó hệ đã cho có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do x_2 và x_3 , khi đó nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases}x_1=-u-v+1\\ x_2=u\in\mathbb{R}\\ x_3=v\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Xét m = -2 , thay vào (*) ta được ma trận:

$$\left(\begin{matrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}1\\ 0\\ 3\end{matrix}\right.\right)$$

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình mới:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1\\ -3x_2+3x_3=0\\ 0=3\end{cases}$$

Khi đó hệ đã cho là vô nghiệm.

+ Với $(1-m)(2+m)\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}m\neq 1\\ m\neq -2\end{matrix}\right.$, khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \\ (m-1)x_2 + (1-m)x_3 = 0 \\ (1-m)(2+m)x_3 = 1-m \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{m+2} \\ x_2 = \dfrac{1}{m+2} \\ x_3 = \dfrac{1}{m+2} \end{cases}$$