Thái Bảo:

3.21/a;

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2, f_2 = -4 - t + 6t^2, f_3 = 6 + 3t - 4t^2$

Đặt các vector tương ứng: $u_1 = (1,2,-5), u_2 = (-4,-1,6), u_3 = (6,3,-4)$.

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ nên S là tập sinh của W. (1)

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow detA = 56 \neq 0$ nên S độc lập tuyến tính. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.

Vậy $\{f_1, f_2, f_3\}$ là một cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức f_1, f_2, f_3.

3.22 a;

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow S = \{A_1, A_2, A_3\}$ độc lập tuyến tính. (1)

Lại có W = $\langle S \rangle$ hay S là tập sinh của W. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{A_1, A_2, A_3\}$ là một cơ sở của W.

3.23/

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_3-2d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra nghiệm của hệ là:

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t + 3s, -t + 2s, t, s) \; với \; t, s \in \mathbb{R}$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là:

$$u_1 = (-1, -1, 1, 0), u_2 = (3, 2, 0, 1)$$

Do đó, nếu W là không gian nghiệm thì $\beta = \{u_1, u_2\}$ là cơ sở của W và dimW = 2.

3.24;

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,-1,1,-1), u_3 = (1,3,1,3)$$

$$v_1 = (1,2,0,2), v_2 = (1,2,1,2), v_3 = (3,1,3,1)$$

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Lập:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó U có dimU = 2 và có một cơ sở

$$\{a_1 = (1,0,1,0) \; ; a_2 = (0,1,0,1)\}$$

Lập:

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W có dimW = 3 và có một cơ sở

$$\{b_1 = (1,0,0,0) \; ; b_2 = (0,1,0,1) \; ; b_3 = (0,0,1,0)\}$$

Ta có U + W sinh bởi các vector

$$a_1 = (1,0,1,0)\ ; a_2 = (0,1,0,1)\ ;\ b_1 = (1,0,0,0)\ ; b_2 = (0,1,0,1)\ ; b_3 = (0,0,1,0)$$

Lập:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra U + W có số chiều là 3 và một cơ sở của U + W là $\{b_1, a_2, b_3\}$.

Giả sử $u = (x, y, z, t) \in U \cap W$

Vì $u \in U$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

$$\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \mid u^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & 3 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in U$ thì $z - x = 0$ (1)

Vì $u \in W$ nên u là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3.

$$\left(v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T \mid u^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \\ 2 & 2 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 3 & z \\ 0 & 0 & -5 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & t - y \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W$ thì $t - y = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} z - x = 0 \\ t - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ là: $u = (x, y, z, t) = (x, y, x, y)\ với\ x, y \in \mathbb{R}$.

Các nghiệm cơ bản của hệ là: $(1,0,1,0)$và $(0,1,0,1)$.

Vậy $U \cap W$ có cơ sở là $\{(1,0,1,0); (0,1,0,1)\}$.

3.33/ a, b;

a/

$$u_1 = (1,1,1)\ ; u_2 = (2,2,1); u_3 = (2,3,1)$$

$$v_1 = (1,2,0); v_2 = (0,1,0); v_3 = (1,0,1)$$

b/

Lập ma trận mở rộng:

$$\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T | v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Suy ra: $(\beta \longrightarrow \beta') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Đồng thời: $(\beta' \longrightarrow \beta) = (\beta \longrightarrow \beta')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.37/a, b

a/

Ta có: $(\beta \longrightarrow \beta_0) = P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$u = (2,1,-1)$$

$$\Rightarrow [u]_\beta = (\beta \longrightarrow \beta_0)[u]_{\beta_0} = (\beta \longrightarrow \beta_0)u^T$$

$$\Rightarrow [u]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vậy: $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b/

Ta có: $(\beta_0 \longrightarrow \beta) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T\right)$

Vậy các vector u_1, u_2, u_3 của cơ sở β là:

$$u_1 = (1,0,1); u_2 = (2,1,0); u_3 = (4,2,1)$$