Xích Markov

Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 20 tháng 5 năm 2021

1 Xích Markov

Outlines

1 Xích Markov

Xích Markov

Ví dụ dẫn nhập

Một công ty có nhiều máy tính dùng chung một loại hệ điều hành. Các máy tính này đã cũ nên có nguy cơ mất ổn định mà hệ quả lớn nhất là có thể làm mất dữ liệu. Dựa trên số liệu thống kê, bộ phận bảo trì máy tính của công ty nhận thấy:
Nếu một máy tính trục trặc (hư) tuần này, có khả năng 92% nó sẽ hư tuần kế tiếp, và nếu một máy tính không hư tuần này, có khả năng 60% nó sẽ không hư tuần kế tiếp.
Giả sử hiện tại có 70% máy tính hư. Các vấn đề mà bộ phận bảo trì quan tâm là :

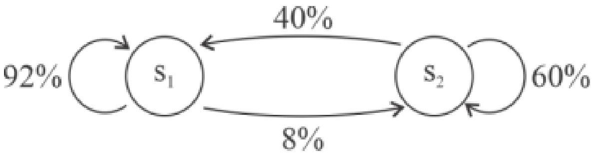
- Tuần sau có bao nhiêu phần trăm máy tính hư?
- Tuần sau nữa có bao nhiêu phần trăm máy tính hư?
- Về lâu dài, mỗi tuần sẽ có khoảng bao nhiêu phần trăm máy tính hư?

Xích Markov

Bằng cách xét các trạng thái (state) của máy tính công ty :

- Trạng thái s_1 : "máy tính trục trặc", và
- Trạng thái s_2 : "máy tính không trục trặc".

Dữ kiện chuyển đổi trạng thái của máy tính có thể mô tả bằng biểu đồ sau



Với ngôn ngữ của xác suất thống kê, ta xét tổng thể Ω các máy tính của công ty.i.

Tại thời điểm t, một máy tính của công ty có thể nhận một trong 2 trạng thái, s_1 hay s_2, ký hiệu $X_t(\omega) = s_1$ hay $X_t(\omega) = s_2$.
Ta có biến ngẫu nhiên $X_t : \Omega \to s_1, s_2$ mà thường gọi là biến ngẫu nhiên phân loại, xác định bởi bảng phân phối xác suất.

X_t	s_1	s_2
P	$\pi_t(s_1)$	$\pi_t(s_2)$

Trong ví dụ trên, tại $t = 0$ chỉ thời điểm hiện tại X_0 là biến ngẫu nhiên xác định bởi bảng phân phối xác suất

X_0	s_1	s_2
P	0.7	0.3

Họ các biến ngẫu nhiên X_t được gọi là một hệ động lực, phân phối xác suất các trạng thái của hệ thay đổi theo thời gian.

Khi ta chỉ xét các thời điểm rời rạc, chẳng hạn $t = 0, 1, 2, \ldots$ (đơn vị tuần như bài toán trên), và nếu phân phối của X_{t+1} chỉ phụ thuộc vào phân phối của X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ thì họ X_n được gọi là một xích Markov (Markov chain) với thời gian rời rạc (discrete-time).
Nếu một máy tính trục trặc tuần này ($X_n = s_1$), có khả năng 92% nó sẽ hư tuần kế tiếp ($X_{n+1} = s_1$) và nếu một máy tính không hư tuần này ($X_n = s_2$), có khả năng 60% nó sẽ không hư tuần kế tiếp ($X_{n+1} = s_2$).
Dùng ký hiệu của Xích Markov, $X_0, X_1, X_2, \ldots$, ta có thể mô hình bài toán

$$P(X_{n+1} = s_1 | X_n = s_1) = 0.92; P(X_{n+1} = s_2 | X_n = s_1) = 0.08$$
$$P(X_{n+1} = s_1 | X_n = s_2) = 0.4; P(X_{n+1} = s_2 | X_n = s_2) = 0.6$$
$$P(X_0 = s_1) = 0.7; P(X_0 = s_2) = 0.3$$

Vì vậy các câu hỏi đặt ra đầu bài được biểu diễn dưới các xác suất sau

- $P(X_1 = s_1)$, tuần sau có bao nhiêu phần trăm máy tính hư.
- $P(X_2 = s_1)$, tuần sau nữa có bao nhiêu phần trăm máy tính hư.
- $P(X_n = s_1)$ khi n lớn, về lâu dài có bao nhiêu phần trăm máy tính hư.

Công thức xác suất toàn phần

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_m)P(A_m)$$

Trong đó $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là họ các biến cố đầy đủ.

- $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$,
- $A_i \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$,
- Luôn luôn có đúng 1 biến cố A_i xảy ra.

Xích Markov

Giải

Ta có

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = s_1)\\
&= P(X_1 = s_1 | X_0 = s_1)P(X_0 = s_1) + P(X_1 = s_1 | X_0 = s_2)P(X_0 = s_2)\\
&= (0.92)(0.7) + (0.4)(0.3) = 0.764
\end{aligned}
$$

Nghĩa là tuần sau có khoảng 76.4% máy tính trục trặc.
Tương tự, với $P(X_1 = s_2)$

$$
\begin{aligned}
&= P(X_1 = s_2 | X_0 = s_1)P(X_0 = s_1) + P(X_1 = s_2 | X_0 = s_2)P(X_0 = s_2)\\
&= (0.08)(0.7) + (0.6)(0.3) = 0.236
\end{aligned}
$$

Xích Markov

Giải

Từ đó, ta có bảng phân phối xác suất cho tuần sau

X_1	s_1	s_2
P	$P(X_1 = s_1) = 0.764$	$P(X_1 = s_2) = 0.236$

Từ phân phối hiện tại,

X_1	s_1	s_2
P	0.7	0.3

Xích Markov

Tổng quát, xét vector

$$\pi_n = (P(X_n = s_1), P(X_n = s_2)) = (\pi_n(1), \pi_n(2)) \in \mathbb{R}^2$$

cho bởi phân phối của X_n

X_n	s_1	s_2
P	$P(X_n = s_1)$	$P(X_n = s_2)$

và xem như vector dòng, ký hiệu

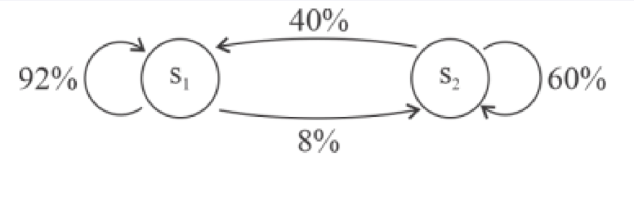
$$P_{ij} = p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)$$

chỉ xác suất chuyển trạng thái từ s_i ở tuần này, $t = n$ sang s_j ở tuần kế, $t = n + 1$.

Xích Markov

Biểu đồ chuyển trạng thái của xích Markov được viết lại dưới dạng bảng sau

		Tuần kế	
		s_1(hư)	s_2(không hư)
Tuần này	s_1(hư)	p_{11}=0.92	p_{12}=0.08
	s_2(không hư)	p_{21}=0.4	p_{22}=0.6



Ma trận $P = (P_{ij}) = (p_{ij})$,
$\pi_n = (P(X_n = s_1), P(X_n = s_2)) = (\pi_n(1), \pi_n(2)) \in \mathbb{R}^2$
$P_{ij} = p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)$

$$P = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Do

$$P(X_1 = s_1) = P(X_1 = s_1 | X_0 = s_1)P(X_0 = s_1) + P(X_1 = s_1 | X_0 = s_2)P(X$$
$$P(X_1 = s_2) = P(X_1 = s_2 | X_0 = s_1)P(X_0 = s_1) + P(X_1 = s_2 | X_0 = s_2)P(X$$

Nên ta có thể viết lại biểu thức trên thành

$$\pi_1(1) = p_{11}\pi_0(1) + p_{21}\pi_0(2)$$
$$\pi_1(2) = p_{12}\pi_0(1) + p_{22}\pi_0(2)$$

Hoặc ta có thể viết dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix}\pi_1(1) & \pi_1(2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_0(1) & \pi_0(2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \pi_0 P$$

Với ví dụ trên, ta có $\pi_0 = \begin{pmatrix}0.7 & 0.3\end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix}0.92 & 0.08\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$

Từ đó

$$\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix}0.7 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.92 & 0.08\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.764 & 0.236\end{pmatrix}$$

Do tính chất của Markov, ta có

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \text{ với mọi } n = 0, 1, 2 \ldots \tag{1}$$

Để tìm xác suất tuần sau nữa có bao nhiêu phần trăm máy tính hư, ta có

$$\pi_2 = \pi_1 P = \begin{pmatrix} 0.764 & 0.236 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7973 & 0.2027 \end{pmatrix}$$

Bằng cách áp dụng quy nạp cho biểu thức (1), ta tìm được

$$\pi_{13} = \begin{pmatrix} 0.8333 & 0.1667 \end{pmatrix} \quad \pi_{14} = \begin{pmatrix} 0.8333 & 0.1667 \end{pmatrix}, \dots$$

Nên về lâu dài sẽ có khoảng 83.33% máy tính trục trặc hằng tuần.

Phân phối dừng

Khi $\pi_n \approx \pi_n$, ta có $\pi_{n+2} = \pi_{n+1} P \approx \pi_{n+} \approx \pi_n$, với mọi k. Đặc biệt, nếu phương trình $\pi = \pi P$ có nghiệm, thì khi $\pi_k = \pi$ với $k \in \mathbb{N}$, ta suy ra $\pi_n = \pi$, với mọi $n \geq k$. Khi đó, ta nói π là phân phối dừng của xích Markov.

Xích Markov

Tìm phân phối dừng

Với ví dụ đã đề cập ở trên, để tìm phân phối dừng $\pi = (\pi(1) \quad \pi(2)) = (x \quad y)$, ta có

$$\pi = \pi P \Longleftrightarrow \pi^T = P^T \pi^T \Longleftrightarrow \left(I - P^T\right)\pi^T = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.08 & -0.4 \\ -0.08 & 0.4 \end{pmatrix}$$

ta được phương trình $0.08x - 0.4y = 0$, ngoài ra, do P thỏa điều kiện $x + y = 1$ nên giải hệ phương trình trên, ta tìm được $x = 5/6, y = 1/6$. Vậy phân phối dừng cần tìm là $\pi = (5/6 \quad 1/6)$

Xích Markov - Mô hình tổng quát

Xét một hệ thống mà tại từng thời điểm rời rạc, $t = 0, 1, 2, \ldots$ mỗi cá thể ở đúng một trong các trạng thái $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Gọi X_n là biến ngẫu nhiên biểu diễn trạng thái của hệ thống tại thời điểm $n = 0, 1, 2 \ldots$, xác định bởi bảng phân phối xác suất

X_n	s_1	$\ldots$	s_m
P	$\pi_n(1) = P(X_n = s_1)$	$\ldots$	$\pi_n(m) = P(X_n = s_m)$

Khi phân phối của biến ngẫu nhiên X_{n+1} được xác định bởi phân phối của biến ngẫu nhiên X_n, nghĩa là

$$P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i, X_{n-1} = s^{n-1}, \ldots, X_0 = s^0\right)$$
$$= P\left(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\right) = p_{ij} \text{ với mọi } i, j = 1, 2, \ldots, m$$

độc lập với các trạng thái $s^0, \ldots, s^{n-1}$ của $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, ta nói dãy $\{X_0, X_1, \ldots\}$ là một Xích Markov với không gian trạng thái $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ và ma trận chuyển $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m.m}$

Xích Markov

Khi $X_n = s_i$, ta nói xích ở trạng thái s_i ở thời điểm $t = n$ và vector $\pi_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \dots, \pi_n(m))$ trong đó $\pi_n(i) = P(X_n) = s_i$ được gọi là phân phối của xích tại thời điểm $t = n$. Phân phối của X_0, π_0 được gọi là phân phối đầu của xích.

Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với không gian trạng thái $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ và ma trận chuyển $P = (p_{ij})$, ta có các kết quả sau

Mệnh đề 1

Với mọi n, ta có

$$P(X_{t+n} = s_j | X_t = s_i) = P(X_n = s_j | X_0 = s_i) \text{ với mọi } i, j = 1, 2, 2 \dots, m$$

Với mỗi n, đặt $p_{ij}^n = P(X_n = s_j | X_0 = s_i)$, với mọi $i, j = 1, 2, \dots, m$ ma trận $P^{(n)} = (p_{ij}^n))$ được gọi là ma trận chuyển n bước của xích.

Mệnh đề 2

Với mọi n, $P^{(n)} = P^n$, trong đó P^n là lũy thừa n của ma trận chuyển P, ta có

$$\pi_{t+n} = \pi_t P^n$$
$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

Định nghĩa

Phân phối $\pi = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(m))$ thỏa $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi(j)$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, m$ thì phân phối π được gọi là phân phối giới hạn của xích.

Định nghĩa

Phân phối π thỏa $\pi = \pi P$ được gọi là phân phối dừng của xích.

- Xích có thể không có, có đúng một hoặc nhiều phân phối dừng,
- Khi xích rơi vào một phân phối dừng thì xích sẽ dừng ở phân phối đó (xích không thay đổi phân phối), nghĩa là nếu có n để $\pi_n = \pi$ là một phân phối dừng thì $\pi_t = \pi$ với mọi $t \geq n$,
- Phân phối giới hạn nếu có, là một phân phối dừng.

Ma trận chuyển P được gọi là chính quy nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho mọi số hạng của P^n đều là số dương. Ví dụ

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}$$

Nếu xích Markov có ma trận chuyển là chính quy thì phân phối giới hạn cũng chính là phân phối dừng duy nhất.

Ví dụ

Một thành phố được chia thành ba khu vực nhân khẩu học. Kết quả điều tra dân số cho thấy rằng mỗi năm 5% cư dân của khu vực 1 chuyển đến khu vực 2, và 5% di chuyển đến khu vực 3. Cư dân của khu vực 2, 15% chuyển đến đến khu vực 1 và 10% chuyển đến khu vực 3. Và cư dân của vùng 3, 10% chuyển sang vùng 1 và 5% chuyển sang vùng 2. Giả sử hiện nay(t=0) một cư dân đang sinh sống tại khu vực 2. Khảo sát xác suất cư dân này ở từng vùng vào lúc 6 năm sau (thời điểm t=6). Mô hình này có phân phối dừng không? Giải thích ý nghĩa của phân phối dừng này, nếu có.

Giải

Dựa trên thông tin điều tra dân số, ta có bảng chuyển trạng thái

		Năm sau		
		s_1 (vùng 1)	s_2 (vùng 2)	s_3 (vùng 3)
Năm nay	s_1 (vùng 1)	90%	5%	5%
	s_2 (vùng 2)	15%	75%	10%
	s_3 (vùng 3)	10%	5%	85%

Từ đó, ma trận chuyển tương ứng

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.15 & 0.75 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.85 \end{pmatrix}$$

Phân phối đầu, tại thời điểm $t = 0$, $\pi_0 = (0, 1, 0)$

Phân phối tại thời điểm $t = 6$, $\pi_n = \pi_0 P^n$, với $n = 6$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.6498 & 0.1471 & 0.2032 \\ 0.4599 & 0.2647 & 0.2754 \\ 0.3876 & 0.1471 & 0.4653 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta tìm được

$$\pi_6 = \pi_0 P^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6498 & 0.1471 & 0.2032 \\ 0.4599 & 0.2647 & 0.2754 \\ 0.3876 & 0.1471 & 0.4653 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.4599 & 0,2647 & 0.2754 \end{pmatrix}$$

P là chính quy vì tất cả số hạng của P đều dương.
Để tìm phân phối dừng $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ thỏa điều kiện

$$\pi = \pi P \Longleftrightarrow \pi^T = P^T \pi^T \Longleftrightarrow \left(I - P^T\right) \pi^T = 0$$

Ma trận hóa hệ phương trình trên, ta có ma trận mở rộng

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.15 & -0.1 \\ -0.05 & 0.25 & -0.05 \\ -0.05 & -0.1 & 0.15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.1 & -0.15 & -0.1 \\ 0 & 0.175 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = 1.857 \\ y = 0.5714z \\ z = z \end{cases}$$

Ngoài ra phân phối dừng thỏa điều kiện $x + y + z = 1$, từ đó ta có $\pi = \begin{pmatrix} 0.5416 & 0.1667 & 0.2917 \end{pmatrix}$

Ý nghĩa: về lâu dài, khoảng 54.16% cư dân sẽ ở khu vực 1, 16.67% cư dân sẽ ở khu vực 2 và khoảng 29.17% cư dân sẽ ở khu vực 3.

Tính xác suất Xích Markov

Cho xích Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ có không gian trạng thái $S = \{1, 2, 3\}$ và ma trận chuyển

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

với phân phối đầu $\pi_0 = (0.5, 0.5, 0)$

Tìm phân phối xác suất π_3 của X_3. Ta có $\pi_3 = \pi_0 P^3$, với

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.488 & 0.224 & 0.228 \\ 0.36 & 0.544 & 0.096 \\ 0.04 & 0.48 & 0.48 \end{pmatrix}$$

Nên ta có được $\pi_3 = (0.424, 0.384, 0.192)$. Ý nghĩa của $P^3_{1,3} = 0.288$: xác suất chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 3 sau 3 bước.

Tính $P(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3)$. Ta có

$P(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3) = P(X_{10} = 2|X_7 = 1) = P(X_3 = 2|X_0 = 1)$
từ $P(X_{t+n} = s_j|X_t = s_i) = P(X_n = s_j|X_0 = s_i)$
$P(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3) = P(X_3 = 2|X_0 = 1) = P^3_{1,2} = 0.224$

Tìm $P\left(X_4 = 2, X_3 = 1\right)$.
Từ công thức nhân xác suất $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, ta có

$$P\left(X_4 = 2, X_3 = 1\right) = P\left(X_4 = 2|X_3 = 1\right)P(X_3 = 1)$$

Trong đó, $P\left(X_4 = 2 | X_3 = 1\right) = P\left(X_1 = 2 | X_0 = 1\right) = P_{1,2} = 0.8$, ngoài ra $P(X_3 = 1) = \pi_3(1) = 0.424$. Do đó

$$P\left(X_4 = 2, X_3 = 1\right) = (0.8)(0.424) = 0.3392$$

Bài tập 1

Cho xích Markov với 3 trạng thái $S = 1, 2, 3$ và ma trận xác suất chuyển

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vẽ đồ thị biểu diễn sự chuyển đổi của xích.

b) Nếu $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/4$, tìm phân phối của xích tại thời điểm 2.

c) Tìm $P(X_7 = 1|X_3 = 2)$ và $P(X_4 = 3, X_5 = 2)$

Bài tập 2

Cho xích Markov có sơ đồ chuyển trạng thái như sau.

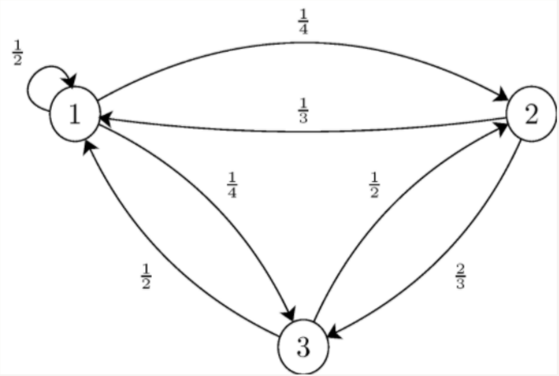


Figure 11.20 - A state transition diagram.

Tìm phân phối dừng của xích.