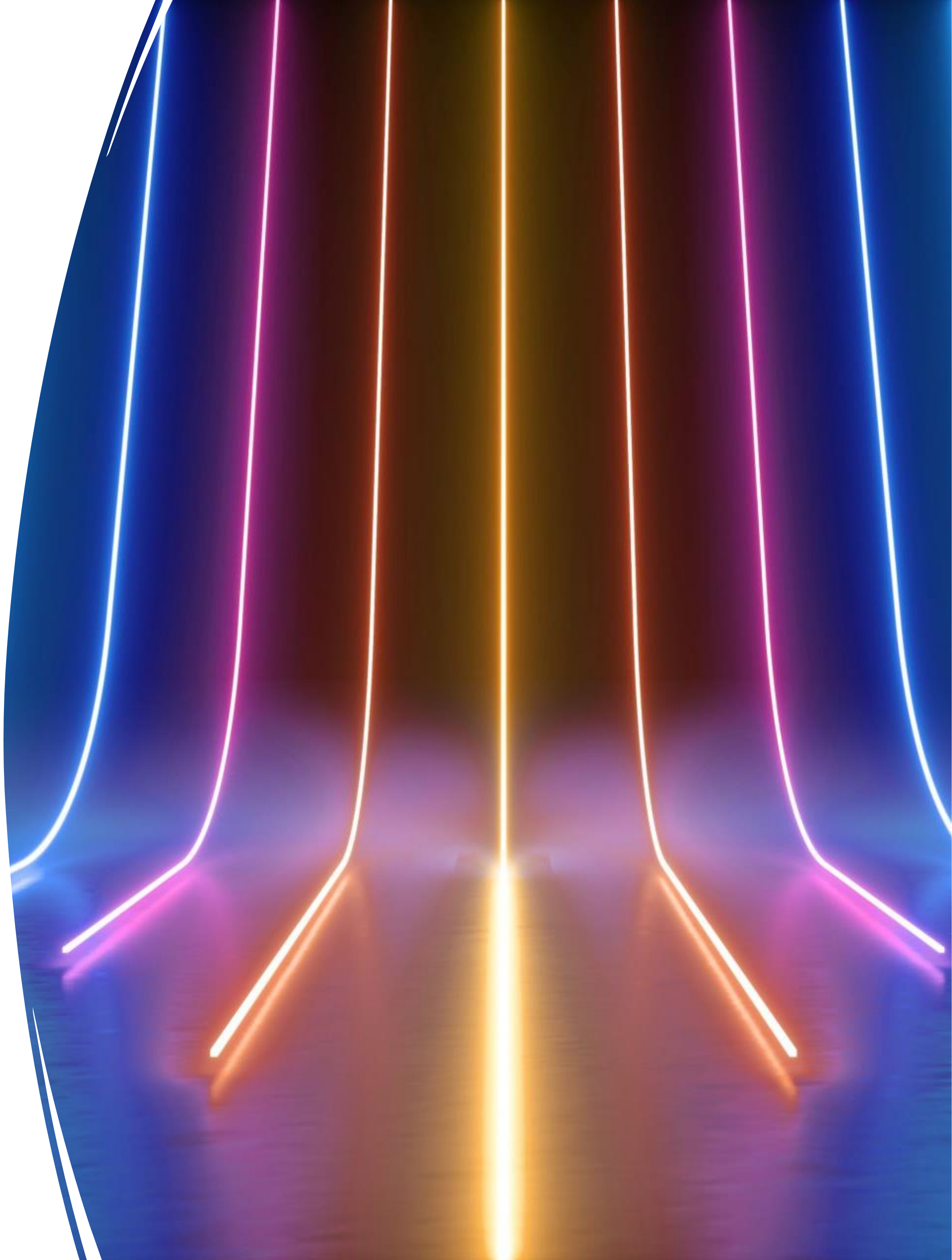
Vtp2-tuần 8
Định lý cơ bản của tích phân đường và tích phân kép

Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin học, Đhkhtn tpHCM

Quy ước tên tài liệu:

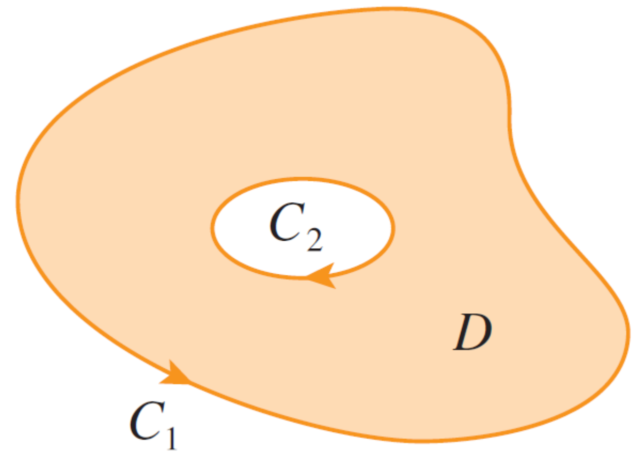
[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th* , tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)



Công thức Green

Xét một miền phẳng D có biên ∂D là hợp của hữu hạn các đường cong (trên đó có lộ trình) đơn-kín, ký hiệu $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$ là tích phân đường loại 2 của trường vectơ $\mathbf{F}$ trên ∂D được định hướng *tương thích* với D, hay còn gọi là định *hướng dương*, là hướng mà theo đó miền trong của D luôn nằm bên trái.



$\partial D = C_1 + C_2$ có hướng dương.

Công thức Green (định lý cơ bản của tích phân kép)

Giả sử $\mathbf{F} = (P; Q)$ là trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D, với D là hợp của hữu hạn các miền đơn giản (theo cả hai chiều), không dẫm lên nhau, và ∂D là hợp của hữu hạn đường cong đơn-kín, trơn từng khúc. Khi đó

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \,.$$

Công thức Green

Bài tập mẫu

1. Tính theo hai cách: (a) trực tiếp, (b) dùng định lý Green

- $\oint_{\partial T}(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$, T là hình tròn bán kính 2, tâm O.
- $\oint_{\partial D} xy\mathrm{d}x+x^2y^3\mathrm{d}y$, D là tam giác đỉnh (0;0), (1;0) và (1;2).

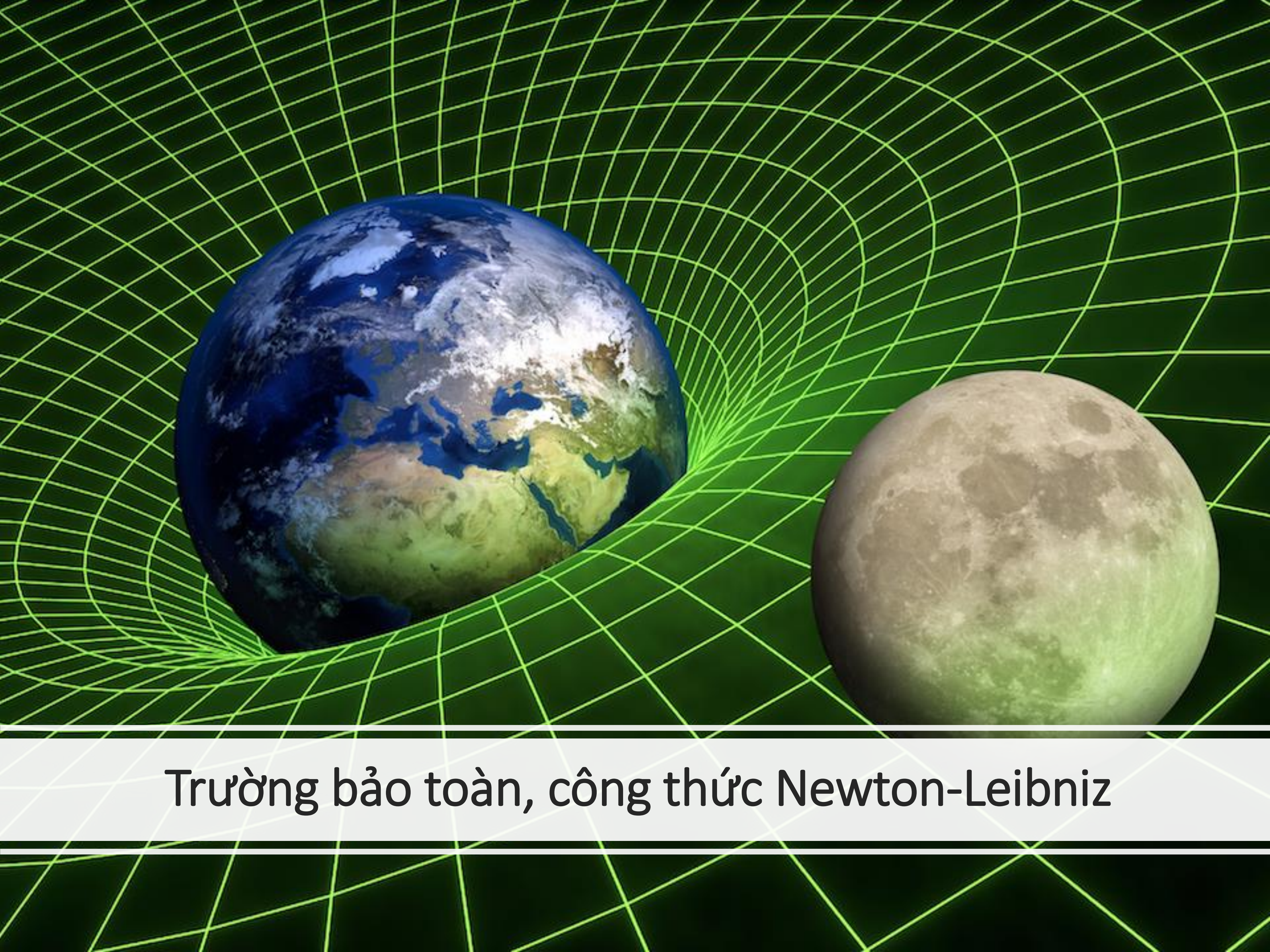
2. Tính dựa theo định lý Green:

- $\oint_{\partial D}\left(y+e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x+(2x+\cos(y^2))\mathrm{d}y$, với D là miền bị bao bởi hai đường $y=x^2$ và $x=y^2$.
- $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ với $\mathbf{F}=(e^{-x}+y^2;e^{-y}+x^2)$ và C gồm đường cong $y=\cos x$ từ $(-\frac{\pi}{2};0)$ đến $(\frac{\pi}{2};0)$ và đoạn thẳng từ $(\frac{\pi}{2};0)$ đến $(-\frac{\pi}{2};0)$.

3. Chứng minh rằng diện tích miền phẳng D có thể được tính theo công thức

$$|D|=\oint_{\partial D} x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D} y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\,.$$

4. Bài tập trong [1] từ 3.2.11→3.2.24.



Trường bảo toàn, công thức Newton-Leibniz

Trường bảo toàn

- Trường vectơ $\mathbf{F}$ được gọi là *trường bảo toàn* có nghĩa là trường $\mathbf{F}$ có một *hàm thế* f, tức là một hàm số sao cho $\nabla f = \mathbf{F}$. (Trong Vật Lý, nếu $\mathbf{F} = \nabla f$ là một trường lực bảo toàn thì hàm số $-f$ được gọi là *thế năng*.)
- Sinh viên tự chứng minh công thức sau như bài tập

Công thức Newton-Leibniz cho tích phân đường

Nếu f là hàm số nhiều biến trơn trên một tập mở chứa đường cong (vết) của một lộ trình $\mathbf{r}$ trơn, khởi đầu từ A, kết thúc ở B, thì

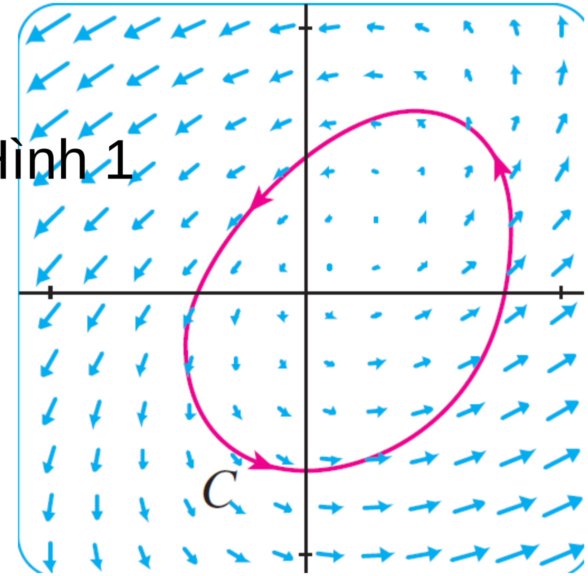
$$\int \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(B) - f(A) = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big).$$

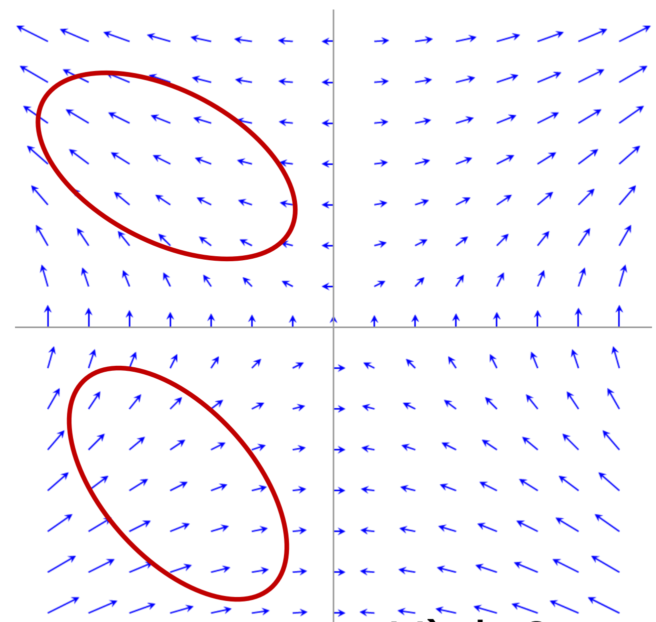
- *Nhận xét.* Tích phân đường của trường bảo toàn liên tục chỉ phụ thuộc điểm khởi đầu và điểm kết thúc, không phụ thuộc hình dạng đường cong của lộ trình, và giá trị của nó bằng 0 nếu lộ trình là khép kín ($\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$).

Trường bảo toàn

- **Câu hỏi 1:** Xét trường vectơ được minh họa ở hình 1, có nhận xét gì về *lưu số* của trường dọc theo đường cong C kín được định hướng ngược chiều kim đồng hồ? (Lưu số là tích phân đường của trường dọc theo C. Đại lượng *lưu số* đo "độ xoáy" của trường dọc theo C.) Trường có bảo toàn không?
- **Câu hỏi 2:** Giả sử trường trong hình 2 là bảo toàn. Điều này biểu hiện như thế nào đối với vài đường cong kín trong hình?

Hình 1





Hình 2

Ý nghĩa của trường bảo toàn trong Vật lý

Xét $\mathbf{F}$ là trường lực thế có dạng $\mathbf{F} = \nabla f$, ta đặt $P = -f$ thì P được gọi là thế năng trong trường lực $\mathbf{F}$. Xét một chất điểm di chuyển trong trường lực $\mathbf{F}$ theo lộ trình $\mathbf{r}$: $[a; b] \to \mathbb{R}^n$ thì công của lực $\mathbf{F}$ đối với chất điểm đó là

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \Leftrightarrow \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t = f(B) - f(A).$$

Theo định luật Newton thứ 2 thì $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = m\mathbf{r}''(t)$ với m là khối lượng, $v(t) = \mathbf{r}'(t)$ là vận tốc và $a(t) = v'(t) = \mathbf{r}''(t)$ là gia tốc của chất điểm. Thay $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = m\mathbf{r}''(t)$ vào đẳng thức trên

$$m \int_a^b \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t = P(A) - P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\mathbf{r}'(t)]^2 \,\mathrm{d}t = \frac{m}{2}[v^2(b) - v^2(a)] = P(A) - P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + P(B) = \frac{1}{2} m v_A^2 + P(A), \text{ cơ năng được bảo toàn.}$$

Trường bảo toàn

Bài tập

1. Chứng rằng trường vectơ hằng, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, là trường bảo toàn.

2. Trong $\mathbb{R}^3$, mô phỏng không gian tọa độ Descartes, gốc O đặt ở tâm Trái Đất, tại mỗi vị trí $\mathbf{r} = (x; y; z)$ của vật có khối lượng m, luôn có một trọng lực tác dụng vào vật cho bởi công thức

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

trong đó G là hằng số hấp dẫn, M là khối lượng Trái Đất. Chứng minh $\mathbf{F}$ là trường bảo toàn, với hàm thế là $f(\mathbf{r}) = GMm\mathbf{r}^{-1}$.

3. Điện trường tĩnh $\mathbf{E}$ gây bởi điện tích điểm Q đặt tại gốc tọa độ O cũng là trường bảo toàn, với

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \ (\varepsilon_0 \text{ là hằng số điện}).$$

4. Bài tập trong [1], 3.2.1→3.2.3

Dấu hiện nhận biết trường bảo toàn

- Như đã biết, khi lấy tích phân đường của trường bảo toàn liên tục, ta chỉ quan tâm điểm đầu và điểm cuối của lộ trình. Vấn đề là làm sao nhận biết một trường vectơ cho trước có bảo toàn hay không, và nếu có thì tìm hàm thế như thế nào.
- Sau đây là điều kiện cần; điều kiện đủ cho trường bảo toàn

Định lý. (Dấu hiệu nhận biết trường bảo toàn.)

- Nếu trường $\mathbf{F} = (P; Q)$ trơn và bảo toàn trên tập mở chứa D thì

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ trên tập D.}$$

- Nếu trường vectơ $\mathbf{F} = (P; Q)$ trơn trên một tập mở D có *dạng hình sao*; hoặc *đơn liên* (nói sau), đồng thời

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ trên tập D}$$

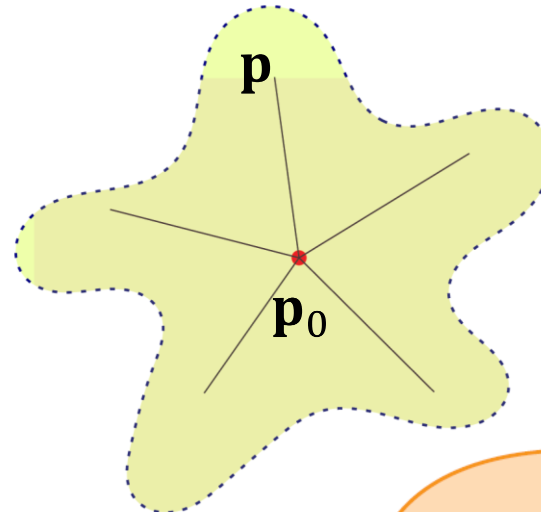
thì $\mathbf{F}$ là trường bảo toàn trên D.

Miền có dạng hình sao và miền đơn liên.

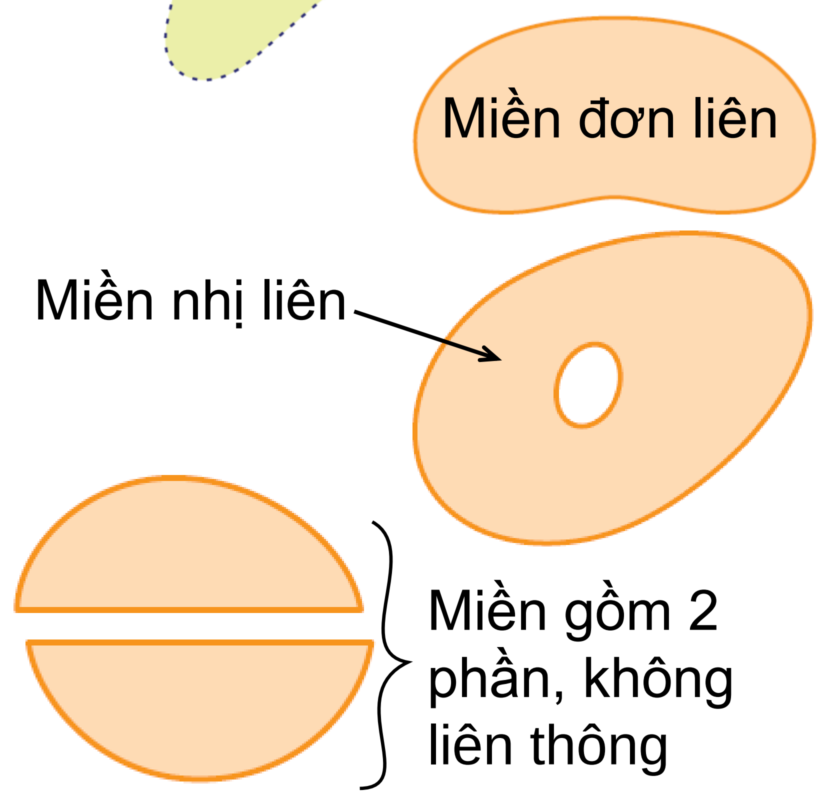
- Ta nói tập $D \subset \mathbb{R}^n$ là miền có *dạng hình sao* nghĩa là trong D có một điểm $\mathbf{p}_0$ sao cho

$$\forall \mathbf{p} \in D, \forall t \in [0;1], (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p} \in D.$$

Ghi chú. Khi t tăng từ 0 đến 1 thì $(1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}$ mô phỏng điểm chạy theo đoạn thẳng từ $\mathbf{p}_0$ đến $\mathbf{p}$ trong không gian tọa độ Descartes.



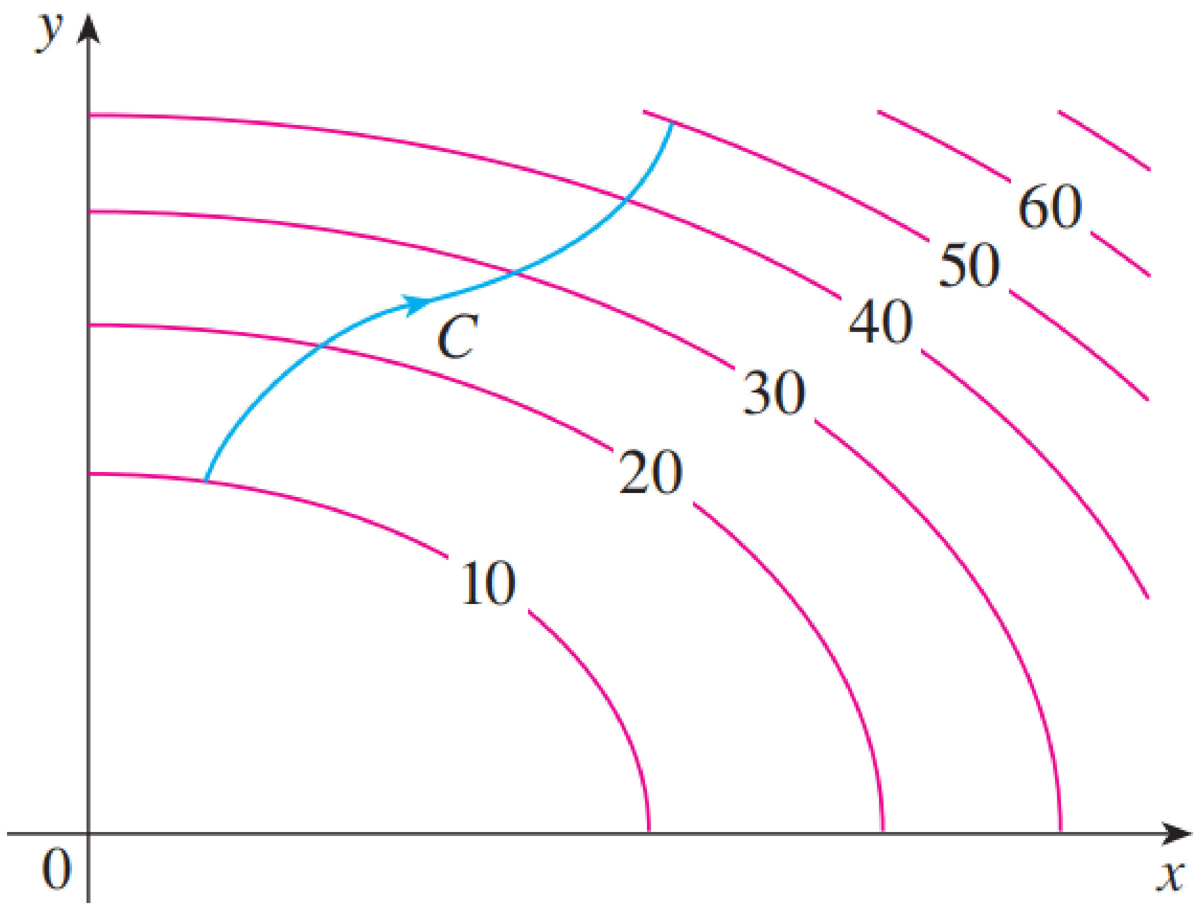
- Miền D trong trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *đơn liên*, nói theo trực quan, nghĩa là với mọi lộ trình đơn-kín thuộc D, miền bị bao quanh bởi lộ trình này cũng phải thuộc D, đồng thời hai điểm bất kỳ thuộc D luôn được nối bởi lộ trình liên tục trong D.



Trường bảo toàn

Bài tập mẫu

1. Hình dưới là đường cong C nằm trong bản đồ các đường đẳng trị của hàm f trơn cấp 1. Tìm $\int_C \nabla f \cdot d\vec{s}$.



Trường bảo toàn

2. Cho trường vectơ $\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}, \forall(x; y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$. Chứng minh $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ trên D và $\mathbf{F}$ không phải là trường bảo toàn trên D. Điều này có mâu thuẫn gì với dấu hiệu của trường bảo toàn hay không, tại sao?
3. Kiểm tra trường $\mathbf{F} = (3x^2 + 4y^2)\mathbf{i} + (8xy + 3)\mathbf{j}$ có phải là trường bảo toàn? Nếu có thì hãy tìm hàm thế rồi tính $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ với C là đường cong nối $(-2; 3)$ đến $(0; 0)$.
4. Chứng minh $\int_C 2xe^{-y}\mathrm{d}x + (2y - x^2e^{-y})\mathrm{d}y$ không phụ thuộc hình dạng của C. Tính tích phân này với C là đường cong nối $(1; 0)$ đến $(2; 1)$.
5. Chứng minh $\int_C \sin y\, \mathrm{d}x + (x\cos y - \sin y)\mathrm{d}y$ không phụ thuộc hình dạng của C. Tính tích phân này với C là đường cong nối $(2; 0)$ đến $(1; \pi)$.
6. Bài tập trong [1], 3.2.4→3.2.10.