CHƯƠNG VII

HÀM BOOLE

Ký hiệu n là số nguyên ≥ 1.

I. HÀM BOOLE:

1.1/ ĐẠI SỐ BOOLE NHỊ PHÂN: Cho B = { 1, 0 }. Ta xác định *các phép toán* trên B như sau: ∀x, y ∈ B (x, y gọi là *các biến Boole*),

$\bar{x} = 1 - x$ (*bù Boole*), $x \wedge y = x.y$ (*tích Boole*), $x \vee y = x + y - x.y$ (*tổng Boole*).

x	1	0
$\bar{x}$	0	1

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x \wedge y$	1	0	0	0

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$x \vee y$	1	1	1	0

Kết quả tính toán của các phép toán " *bù Boole*, *tích Boole* và *tổng Boole* " thì giống như kết quả chân trị của các phép toán " *phủ định*, *hội* và *tuyển* mệnh đề ".

Cấu trúc đại số (B, –, ∧, ∨) ≡ (B, –, ., ∨) gọi là *Đại số Boole nhị phân.*

Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật tương tự như trong *Đại số mệnh đề*:

∀x, y, z ∈ B, ta có (ta luôn dùng ký hiệu . thay cho ∧).

* Luật bù kép : $\bar{\bar{x}} = x$.

* Luật lũy đẳng : $x.x = x$ và $x \vee x = x$.

* Luật giao hoán : $x.y = y.x$ và $x \vee y = y \vee x$.

* Luật bù De Morgan : $\overline{x.y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ và $\overline{x \vee y} = \bar{x}.\bar{y}$.

* Luật hấp thu : $x.(x \vee y) = x = x \vee (x.y)$.

* Luật kết hợp : $(x.y).z = x.(y.z) = x.y.z$ và $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$.

* Luật phân phối : $x.(y \vee z) = (x.y) \vee (x.z)$ và $x \vee (y.z) = (x \vee y).(x \vee z)$.

* Luật trung hòa : $x.1 = x = x \vee 0$.

* Luật bù : $x.\bar{x} = 0$ và $x \vee \bar{x} = 1$.

* Luật thống trị : $x.0 = 0$ và $x \vee 1 = 1$.

1.2/ HÀM BOOLE:

a) $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$, ta nói $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là *một vector Boole*.

Mỗi ánh xạ $f : B^n \to B = \{0, 1\}$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gọi là *một hàm Boole n biến*.

b) Mỗi hàm Boole n biến được mô tả bằng *một bảng giá trị* có 2^n cột ghi các giá trị của hàm Boole theo 2^n vector Boole trong B^n.

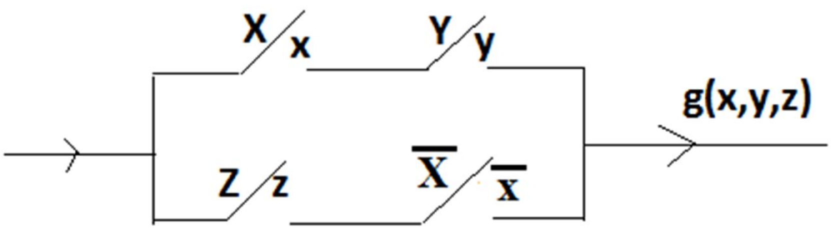
Ví dụ:

a) Các cử tri P, Q, R bỏ phiếu tín nhiệm ứng cử viên S. Ta có các biến Boole tương ứng p, q, r ($p = 1$ nếu P tín nhiệm S hoặc $p = 0$ nếu trái lại. Tương tự cho các biến Boole q và r). Ta có hàm Boole f thể hiện kết quả bỏ phiếu tín nhiệm $f : B^3 \to B, \forall (p, q, r) \in B^3$, trong đó $f(p, q, r) = 1$ (nếu S được tín nhiệm ≥ 2 phiếu) hoặc $f(p, q, r) = 0$ (nếu trái lại).

p	1	1	1	0	1	0	0	0
q	1	1	0	1	0	1	0	0
r	1	0	1	1	0	0	1	0
f (p, q, r)	1	1	1	1	0	0	0	0

Bảng giá trị của hàm Boole f (p, q, r).

b) Cho các công tắc điện X, Y, Z trong một mạch điện như sau (công tắc điện $\overline{X}$ có trạng thái đóng và mở luôn luôn trái ngược với công tắc X) :



Ta có các biến Boole tương ứng x, y, z ($x = 1$ nếu X đóng, $x = 0$ nếu X mở). Tương tự cho các biến Boole y và z). Ta có hàm Boole g thể hiện trạng thái của mạch điện : $g : B^3 \to B$, $\forall(x, y, z) \in B^3$, $g(x, y, z) = 1$ (nếu có điện qua mạch: X, Y đều đóng hoặc X mở, Z đóng) hoặc $g(x, y, z) = 0$ (nếu trái lại).

x	1	1	1	0	1	0	0	0
y	1	1	0	1	0	1	0	0
z	1	0	1	1	0	0	1	0
g(x, y, z)	1	1	0	1	0	0	1	0

Bảng giá trị của hàm Boole $g(x, y, z)$.

1.3/ ĐẠI SỐ BOOLE CỦA CÁC HÀM BOOLE:

Đặt F_n = (Tập hợp các hàm Boole n biến) = $\{ f \mid f : B^n \to B \}$.

Ta có $| F_n | = 2^{2^n}$ (bảng giá trị có 2^n cột, mỗi cột có 2 khả năng chọn giá trị).

Trong F_n, có *các hàm Boole đặc biệt* là *hàm Boole hằng* **O** (luôn luôn có giá trị 0) và *hàm Boole hằng* **1** (luôn luôn có giá trị 1).

Ta xác định *các phép toán* trên F_n như sau: $\forall f, g \in F_n$, $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$,

$\overline{f}(X) = \mathbf{1}(X) - f(X)$ [*bù Boole*], $(f \wedge g)(X) = (f.g)(X) = f(X).g(X)$ [*tích Boole*]

và $(f \vee g)(X) = f(X) + g(X) - f(X).g(X)$ [*tổng Boole*].

Cấu trúc đại số $(F_n, -, \wedge, \vee)$ gọi là *Đại số Boole của các hàm Boole n biến.*

Cấu trúc này cũng thỏa 10 luật như trong Đại số mệnh đề: $\forall f, g, h \in F_n$, ta có

* Luật bù kép : $\overline{\overline{f}} = f$. * Luật lũy đẳng : $f.f = f$ và $f \vee f = f$.

* Luật giao hoán : $f.g = g.f$ và $f \vee g = g \vee f$.

* Luật bù De Morgan : $\overline{f.g} = \overline{f} \vee \overline{g}$ và $\overline{f \vee g} = \overline{f}.\overline{g}$.

* Luật hấp thu : $f.(f \vee g) = f = f \vee (f.g)$.

* Luật kết hợp : $(f.g).h = f.(g.h) = f.g.h$ và $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h) = f \vee g \vee h$.

* Luật phân phối : $f.(g \vee h) = (f.g) \vee (f.h)$ và $f \vee (g.h) = (f \vee g).(f \vee h)$.

* Luật trung hòa : $f.\mathbf{1} = f = f \vee \mathbf{O}$. * Luật bù : $f.\overline{f} = \mathbf{O}$ và $f \vee \overline{f} = \mathbf{1}$.

* Luật thống trị : $f.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ và $f \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$ (ta luôn dùng ký hiệu **.** thay cho $\wedge$).

Ví dụ: Cho $f, g \in F_2$ và các hàm **O**, **1**, $\overline{f}$, $\overline{g}$, $f \wedge g = f.g$, $f \vee g$ được thể hiện trong bảng giá trị dưới đây:

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
1(x, y)	1	1	1	1
O(x, y)	0	0	0	0
f (x, y)	1	0	0	1
g(x, y)	1	0	1	0
$\overline{f}$ (x, y)	0	1	1	0
$\overline{g}$ (x, y)	0	1	0	1
(f .g)(x, y)	1	0	0	0
$(f \vee g)$(x, y)	1	0	1	1

II. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA HÀM BOOLE:

2.1/ TỪ ĐƠN (CÁC HÀM BOOLE CƠ BẢN):

Trong F_n, xét $2n$ *hàm Boole cơ bản* (ta cũng gọi chúng là $2n$ *từ đơn*):

$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ và $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_i}$ ($1 \le i \le n$).

Từ nay về sau, ta ký hiệu đơn giản $\varphi_i \equiv x_i$ và $\psi_i \equiv \overline{x_i}$ ($1 \le i \le n$).

Ví dụ: $F_5 = \{ f \mid f : B^5 \to B \}$ có 10 từ đơn là $\varphi_i \equiv x_i$, $\psi_i \equiv \overline{x_i}$ ($1 \le i \le 5$).

$\varphi_2(1, 0, 1, 1, 0) = x_2(1, 0, 1, 1, 0) = 0$ và $\psi_5(0, 1, 1, 0, 0) = \overline{x_5}(0, 1, 1, 0, 0) = \overline{0} = 1$.

$\overline{x_2}x_3\overline{x_5}x_1\overline{x_3} = \overline{x_2}\,\overline{x_5}x_1(x_3\overline{x_3}) = \overline{x_2}\,\overline{x_5}x_1.\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (giao hoán, kết hợp, bù, thống trị).

$x_4\overline{x_2}x_1\overline{x_5} \vee x_4\overline{x_2}x_1x_5 = (x_4\overline{x_2}x_1)(\overline{x_5} \vee x_5) = x_4\overline{x_2}x_1.\mathbf{1} = x_4\overline{x_2}x_1$ (phân phối, kết hợp, bù, trung hòa).

2.2/ ĐƠN THỨC:

Một đơn thức trong F_n là tích Boole của một số từ đơn sao cho tích này $\neq$ **O**.

Trong mỗi đơn thức, không thể có mặt đồng thời x_i và $\overline{x_i}$ [vì $x_i\overline{x_i} = \mathbf{O}$] và ta không viết lặp lại các từ đơn [vì $x_ix_i = x_i$ và $\overline{x_i}\,\overline{x_i} = \overline{x_i}$] ($1 \le i \le n$).

Bậc của một đơn thức là số từ đơn khác nhau có mặt trong đơn thức đó.

Mỗi đơn thức trong F_n có bậc (deg = degree) từ 1 đến n.

Mỗi đơn thức có bậc n trong F_n (cao nhất) được gọi là *một đơn thức tối tiểu.*

Mỗi đơn thức tối tiểu trong F_n có dạng tổng quát

$$m = y_1\, y_2 \ldots y_n \text{ trong đó } y_i = x_i \text{ hoặc } \overline{x_i} \; (1 \le i \le n).$$

<u>Ví dụ:</u> Xét các đơn thức trong F_5 (theo 5 biến Boole x_1, x_2, x_3, x_4 và x_5):

$m_1 = \overline{x_3}$, $m_2 = x_2\overline{x_5}$, $m_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$, $m_4 = x_2x_3x_4x_5$ và $m_5 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4x_5$.

Ta có $\deg(m_i) = i$ ($1 \le i \le 5$) và $m_5 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4x_5$ là một đơn thức tối tiểu bậc 5.

2.3/ <u>ĐA THỨC:</u> *Một đa thức* f trong F_n là tổng Boole của một số đơn thức trong F_n. Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là các đơn thức trong F_n).

<u>Ví dụ:</u> Xét đa thức f trong F_5 (theo 5 biến Boole x, y, z, t và u) :

$$f(x, y, z, t, u) = \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t \vee \overline{z} \vee y\overline{t}\,u \vee y\overline{u}.$$

Ta có $f(1, 1, 0, 0, 1) = \overline{1}.\overline{1}.0.0 \vee \overline{0} \vee 1.\overline{0}.1 \vee 1.\overline{1} = 0 \vee 1 \vee 1 \vee 0 = 1$.

2.4/ <u>DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE:</u>

Dạng nối rời chính tắc của một hàm Boole f là một dạng đa thức đặc biệt của f sao cho các thành phần đơn thức trong đó đều là *các đơn thức tối tiểu*. Ta viết $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là *các đơn thức tối tiểu* trong F_n).

Dạng nối rời chính tắc của f là *duy nhất sai khác một sự hoán vị của các thành phần đơn thức* $m_1, m_2, \ldots$ và m_k.

<u>Ví dụ:</u> $f \in F_4$ có biểu thức $f(x, y, z, t) = \overline{x}\,y\,\overline{z}\,t \vee xy\overline{z}\,\overline{t} \vee x\overline{y}\,z\,t$.

Vế phải là tổng Boole của các đơn thức tối tiểu trong F_4 nên vế phải là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole f.

2.5/ <u>TÌM DẠNG NỐI RỜI CHÍNH TẮC CHO HÀM BOOLE:</u> Cho $f \in F_n$.

a) Tìm từ *bảng giá trị* của f : Ta quan tâm các vector Boole $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ trong bảng giá trị mà $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$. Ta tạo ra các đơn thức tối tiểu tương ứng với các vector Boole đó : $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto m = y_1 y_2 \ldots y_n$ với $y_i = x_i$ (nếu $u_i = 1$) hoặc $y_i = \overline{x_i}$ (nếu $u_i = 0$) [$1 \le i \le n$].

Tổng Boole các đơn thức tối tiểu như vậy chính là dạng nối chính tắc của hàm Boole f.

<u>Ví dụ:</u> Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole x_1, x_2, x_3) có bảng giá trị như sau:

x_1	1	1	1	0	1	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	1	0	0
x_3	1	0	1	1	0	0	1	0
$f(x_1, x_2, x_3)$	1	0	1	1	0	1	0	1

Ta thấy $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$.

$(1, 1, 1) \mapsto m_1 = x_1x_2x_3$, $(1, 0, 1) \mapsto m_2 = x_1\overline{x_2}x_3$, $(0, 1, 1) \mapsto m_3 = \overline{x_1}x_2x_3$,

$(0, 1, 0) \mapsto m_4 = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$ và $(0, 0, 0) \mapsto m_5 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

Do đó dạng nối rời chính tắc của f là $f = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$ hay viết cụ thể $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

b) Tìm từ *một dạng đa thức* của f : dùng $u \vee \overline{u} = \mathbf{1}$ (luật bù) và luật trung hòa để nâng bậc các đơn thức trong đa thức. Phối hợp thêm các luật phân phối, kết hợp, giao hoán và lũy đẳng để khai triển và rút gọn về dạng nối rời chính tắc cho f.

<u>Ví dụ:</u> Cho $f \in F_3$ có dạng đa thức như sau: $f(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}z \vee x$. Ta có

$f(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} \vee \mathbf{1}.\overline{y}z \vee x.\mathbf{1}.\mathbf{1}$ [trung hòa] $= \overline{x}y\overline{z} \vee (x \vee \overline{x})\overline{y}z \vee x(y \vee \overline{y})(z \vee \overline{z})$ [bù]

$= \overline{x}y\overline{z} \vee (x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z) \vee x(yz \vee y\overline{z} \vee \overline{y}z \vee \overline{y}\,\overline{z})$ [phân phối một và hai lần]

$= \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z}$ [phân phối và kết hợp]

$= \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z}$ [giao hoán].

$= \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z}$ [lũy đẳng].

2.6/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Khi đó f có thể viết thành *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó có dạng nối rời chính tắc của f là *một dạng đa thức đặc biệt* của f).

Như vậy ta có thể biểu diễn các hàm Boole dưới dạng đa thức (đơn giản) mà không cần dùng đến bảng giá trị (việc này khá cồng kềnh phức tạp khi $n \geq 4$).

2.7/ <u>SO SÁNH CÁC DẠNG ĐA THỨC:</u> Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$.

Giả sử f có 2 dạng đa thức (với các đơn thức $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, v_2, \ldots, v_q$) :

$$f = u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_p \ (1) \quad \text{và} \quad f = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_q \ (2)$$

a) Trường hợp 1: Ta nói (1) và (2) *đơn giản như nhau* nếu

* $p = q$.

* $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ ($1 \leq i \leq p$) [có thể hoán vị các đơn thức $v_1, v_2, \ldots, v_q$ và ký hiệu lại theo thứ tự trước khi so sánh bậc của các đơn thức tương ứng].

b) Trường hợp 2 : Ta nói (1) *đơn giản hơn* (2) [hay (2) *phức tạp hơn* (1)] nếu

* $p \leq q$.

* $\deg(u_i) \leq \deg(v_i)$ ($1 \leq i \leq p$) [có thể hoán vị các đơn thức $v_1, v_2, \ldots, v_q$ và ký hiệu lại theo thứ tự trước khi so sánh bậc của các đơn thức tương ứng].

* Có ít nhất một dấu $<$ xảy ra trong các dấu $\leq$ nói trên.

c) Trường hợp 3 : Ta nói (1) và (2) *không so sánh được với nhau* nếu trường hợp 1 và trường hợp 2 không xảy ra.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $f \in F_4$ và f có 3 dạng đa thức như sau:

$$f(x, y, z, t) = x\,y \vee \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4 \ (1)\ [\, p = 4 \,]$$

$$= x\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,y \vee \bar{x}\,z\,t = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4 \ (2)\ [\, q = 4 \,]$$

$$= x\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee x\,y = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \vee w_5 \ (3)\ [\, r = 5 \,]$$

(1) và (2) đơn giản như nhau [$p = q = 4$ và $\deg(u_i) = \deg(v_i)$ khi $1 \le i \le 4$].

(2) đơn giản hơn (3) [$q = 4 < r = 5$ và $\deg(v_i) \le \deg(w_i)$ khi $1 \le i \le 4$].

b) Cho $g \in F_4$ và g có 2 dạng đa thức như sau:

$$g(x, y, z, t) = z\bar{t} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yz = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee u_4 \quad (4)\ [\ p = 4\ ]$$

$$= \bar{x}y\bar{z}t \vee x\bar{y}zt \vee z\bar{t} \vee \bar{x}yzt = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4 \quad (5)\ [\ q = 4\ ].$$

Để ý $\deg(u_1) = 2 < \deg(v_1) = 4$ nhưng $\deg(u_3) = 4 > \deg(v_3) = 2$ nên ta cần phải hoán vị v_3 với v_1 rồi ký hiệu lại các đơn thức v_3, v_2, v_1, v_4 lần lượt thành w_1, w_2, w_3 và w_4 trước khi so sánh bậc của các đơn thức tương ứng:

$$g(x, y, z, t) = z\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yzt = w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \quad (6)\ [\ r = 4\ ].$$

Ta có (4) đơn giản hơn (6) [$p = r = 4$, $\deg(u_i) \le \deg(w_i)$ khi $1 \le i \le 4$ và $\deg(u_2) = 3 < \deg(w_2) = 4$]. Như vậy (4) cũng đơn giản hơn (5).

c) Cho $h \in F_4$ và h có 2 dạng đa thức như sau:

$$h(x, y, z, t) = x \vee \bar{x}yz\bar{t} = u_1 \vee u_2 \quad (7)\ [\ p = 2\ ]\ [\ \deg(u_1) = 1, \deg(u_2) = 4\ ]$$

$$= xz \vee yz\bar{t} \vee x\bar{z} = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \quad (8)\ [\ q = 3\ ]\ [\deg(v_1) = \deg(v_3) = 2, \deg(v_2) = 3]$$

(7) và (8) không so sánh được với nhau vì trường hợp 1 và 2 không thể xảy ra.

2.8 / DẠNG CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CỦA HÀM BOOLE:

Cho $f \in F_n$ và $f \neq \mathbf{O}$. Ta đã biết f có *một hay nhiều dạng đa thức khác nhau* (trong đó *dạng nối rời chính tắc* của f là *dạng đa thức phức tạp nhất* của f). Bằng cách *so sánh các dạng đa thức* của f, ta chọn ra các dạng đa thức *đơn giản nhất có thể được* cho f (nghĩa là không có dạng nào khác đơn giản hơn chúng). Chúng chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của f.

Phạm vi chương trình là tìm các công thức đa thức tối tiểu của các hàm Boole *không quá 4 biến* bằng *phương pháp biểu đồ KARNAUGH.*

III. PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH:

3.1/ BẢNG MÃ: Cho Đại số Boole nhị phân $B = \{ 1, 0 \}$.

a) Bảng mã cho B^1 (biến Boole x) :

x	$\bar{x}$
1	0

b) Bảng mã cho B^2 (các biến Boole x và y) :

	x	$\bar{x}$
y	11	01
$\bar{y}$	10	00

c) Bảng mã cho B^3 (các biến Boole x, y và z) :

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

d) Bảng mã cho B^4 (các biến Boole x, y, z và t) : x *ở bên trên* (2 cột đầu), y *ở bên dưới* (2 cột giữa), z *ở bên trái* (2 dòng đầu), t *ở bên phải* (2 dòng giữa).

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

3.2/ GHI CHÚ:

a) Khái niệm " *kề nhau* " trong bảng mã được hiểu như sau:

* Dòng (cột) 1 kề với dòng (cột) 2. Dòng (cột) 2 kề với dòng (cột) 3.

* Dòng (cột) 3 kề với dòng (cột) 4. Dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.

Bảng mã cũng có thể được xem như *một mặt trụ* nên có thể *uốn cong theo chiều dọc hoặc chiều ngang* để dòng (cột) 4 kề với dòng (cột) 1.

b) Hai ô " *kề nhau* " trong bảng mã có mã số *chỉ sai khác nhau một vị trí.*

3.3/ BIỂU ĐỒ KARNAUGH CỦA HÀM BOOLE:

Cho $f \in F_n$ ($n \leq 4$) và xét bảng giá trị của f.

Ta để ý các vector Boole $(u_1,u_2, \dots ,u_n)$ trong bảng giá trị có $f(u_1,u_2, \dots ,u_n) = 1$.

Mỗi vector Boole $(u_1, u_2, \dots , u_n)$ như vậy tương ứng với ô có cùng mã số $u_1u_2 \dots u_n$ trong bảng mã của B^n. Đánh dấu các ô tương ứng đó trong bảng mã. Tập hợp S gồm các ô được đánh dấu gọi là *biểu đồ Karnaugh của hàm Boole* f và ta ký hiệu biểu đồ đó là $S = Kar(f)$ hay gọn hơn nữa là $S = K(f)$.

Ví dụ: Cho $f \in F_3$ (theo 3 biến Boole x, y, z) có bảng giá trị như sau:

x	1	1	1	0	1	0	0	0
y	1	1	0	1	0	1	0	0
z	1	0	1	1	0	0	1	0
f(x, y, z)	1	0	1	1	0	1	0	1

Ta thấy $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$.

Đánh dấu các ô có mã số tương ứng 111, 101, 011, 010 và 000 trong bảng của B^3, ta được biểu đồ $S = Kar(f)$ gồm 5 ô như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	
$\bar{z}$			010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Ta có thể vẽ biểu đồ $S = Kar(f)$ một cách đơn giản hơn nữa là

*	*	*	
		*	*

3.4/ NHẬN XÉT:

Một hàm Boole $f \in F_n$ được xác định nếu biết một trong các yếu tố sau:

a) *Bảng giá trị* của f.

b) *Một dạng đa thức* của f.

c) *Dạng nối rời chính tắc* của f (dạng đa thức đặc biệt và phức tạp nhất của f).

d) *Biểu đồ Karnaugh* của f (nếu $n \leq 4$).

3.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $f, g \in F_n$ ($n \le 4$). Khi đó:

a) $K(\overline{f})$ là *phần bù* của $K(f)$ trong bảng mã của B^n.

b) $K(f.g) = K(f \wedge g) = K(f) \cap K(g)$ và $K(f \vee g) = K(f) \cup K(g)$.

c) $f \le g \Leftrightarrow K(f) \subset K(g)$. Suy ra $f = g \Leftrightarrow K(f) = K(g)$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $f, g \in F_3$ có các biểu đồ Karnaugh như sau:

*		*	*
	*	*	

Kar(f) (5 ô)

*	*		*
	*	*	*

Kar(g) (6 ô)

Ta suy ra biểu đồ Karnaugh của các hàm Boole $\overline{f}$, $\overline{g}$, $f.g$ và $f \vee g$ lần lượt như sau:

	*		
*			*

Kar($\overline{f}$) (3 ô)

		*	
*			

Kar($\overline{g}$) (2 ô)

*			*
	*	*	

Kar(f .g) (4 ô)

*	*	*	*
	*	*	*

Kar($f \vee g$) (7 ô)

3.6/ <u>BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐƠN THỨC:</u>

Cho *đơn thức* $m \in F_n$ ($n \le 4$). Ta đã biết $1 \le \deg(m) \le n$.

a) Nếu $\deg(m) = p$ [$1 \le p \le n$] thì $K(m)$ là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có 2^{n-p} ô. Như vậy khi $\deg(m)$ càng lớn thì $K(m)$ càng có ít ô.

b) Nếu $\deg(m) = n$ (m là *đơn thức tối tiểu*) thì $K(m)$ có đúng $2^{n-n} = 1$ ô.

<u>Ví dụ:</u> Cho $n = 4$.

a) $m = z$ và $u = \overline{y}$ [$\deg(m) = \deg(u) = p = 1$].

	x	**x**			
z	*	*	*	*	
z	*	*	*	*	**t**
					t
		y	**y**		

Kar(z)

	x	**x**			
z	*			*	
z	*			*	**t**
	*			*	**t**
	*			*	
	$\overline{y}$	**y**	**y**	$\overline{y}$	

Kar ($\overline{y}$).

Kar(z) là hình chữ nhật và Kar($\overline{y}$) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-1} = 8$ ô.

b) $m = x\bar{t}$ và $u = \bar{x}y$ [deg(m) = deg(u) = p = 2].

	x	x			
z	*	*			$\bar{t}$
z					t
					t
	*	*			$\bar{t}$
		y	y		

Kar($x\bar{t}$)

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z			*		$\bar{t}$
z			*		t
			*		t
			*		$\bar{t}$
		y	y		

Kar($\bar{x}y$).

Kar($x\bar{t}$) là hình chữ nhật mở rộng và Kar($\bar{x}y$) là hình chữ nhật có $2^{4-2} = 4$ ô.

c) $m = \bar{x}zt$ và $u = \bar{y}z\bar{t}$ [deg(m) = deg(u) = p = 3].

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					
z			*	*	t
					t
		y	y		

Kar($\bar{x}zt$)

	x	x			
z	*			*	$\bar{t}$
z					t
					t
					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Kar($\bar{y}z\bar{t}$).

Kar($\bar{x}zt$) là hình chữ nhật và Kar($\bar{y}z\bar{t}$) là hình chữ nhật mở rộng có $2^{4-3} = 2$ ô.

d) $m = \bar{x}yz\bar{t}$ [deg(m) = p = 4 và m là đơn thức tối tiểu].

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z			*		$\bar{t}$
z					t
					t
					$\bar{t}$
		y	y		

Kar($\bar{x}yz\bar{t}$).

Kar($\bar{x}zt$) là hình chữ nhật có $2^{4-4} = 1$ ô.

3.7/ <u>BIỂU ĐỒ CỦA MỘT ĐA THỨC:</u>

Cho *đa thức* $f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k$ là *các đơn thức* của F_n).

Nếu $n \leq 4$ thì Kar(f) = Kar(m_1) ∪ Kar(m_2) ∪ … ∪ Kar(m_k).

<u>Ví dụ:</u> Cho $f \in F_4$ và $f(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x$. Ta có

S = Kar(f) = K($\bar{y}\bar{z}\bar{t}$) ∪ K($\bar{x}z$) ∪ K($\bar{x}y\bar{z}t$) ∪ K(x) trong đó K(x) gồm 8 ô (.),

$K(\bar{x}z)$ gồm 4 ô (–), $K(\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t})$ gồm 2 ô (~) và $K(\bar{x}y\bar{z}t)$ gồm 1 ô (+).

Do đó $S = Kar(f)$ gồm 14 ô được đánh dấu trong bảng mã của B^4 như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	.	.	–	–	$\bar{t}$
z	.	.	–	–	t
	.	.	+		t
	.~	.		~	$\bar{t}$
		y	y		

3.8/ TẾ BÀO VÀ TẾ BÀO LỚN TRONG BIỂU ĐỒ:

Cho $f \in F_n$ ($n \le 4$) và $S = Kar(f)$.

a) *Một tế bào* trong S là *một hình chữ nhật* (*mở rộng*) có số ô là 2^r ($0 \le r \le 4$).

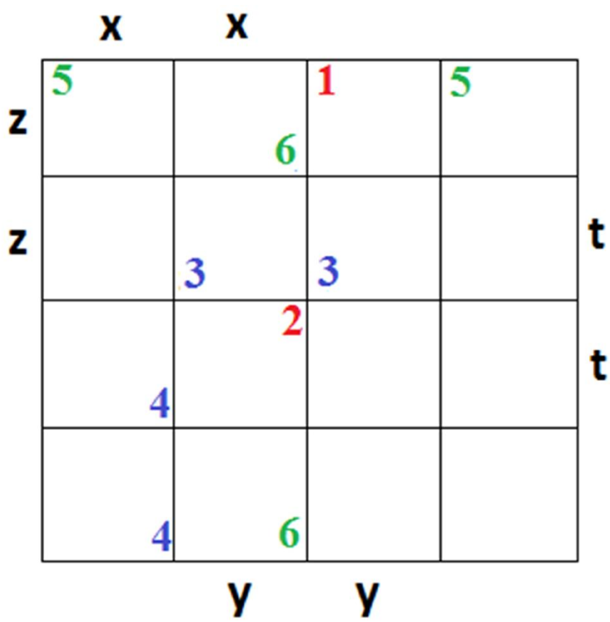
Như vậy số ô của mỗi tế bào chỉ có thể là 1, 2, 4, 8 và 16.

Một tế bào trong S chính là *biểu đồ của một đơn thức nào đó* trong F_n.

b) *Một tế bào lớn* T trong S là *một tế bào tối đại* (theo quan hệ thứ tự $\subset$ trên tập hợp các tế bào trong S), nghĩa là không có tế bào T' nào trong S thỏa $T \subset T'$ và $T \ne T'$.

Ví dụ

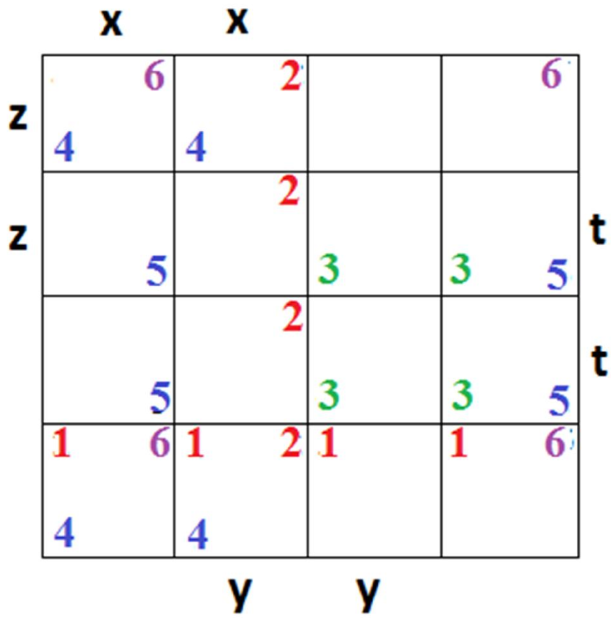
a) Một số tế bào 1 ô và 2 ô.



$T_1 = \bar{x}yz\bar{t}$ (1 ô), $T_2 = xy\bar{z}t$ (1 ô), $T_3 = (x \vee \bar{x})yzt = yzt$ (2 ô),

$T_4 = x\bar{y}\bar{z}(t \vee \bar{t}) = x\bar{y}\bar{z}$ (2 ô), $T_5 = \bar{y}z\bar{t}$ (2 ô), $T_6 = xy\bar{t}$ (2 ô).

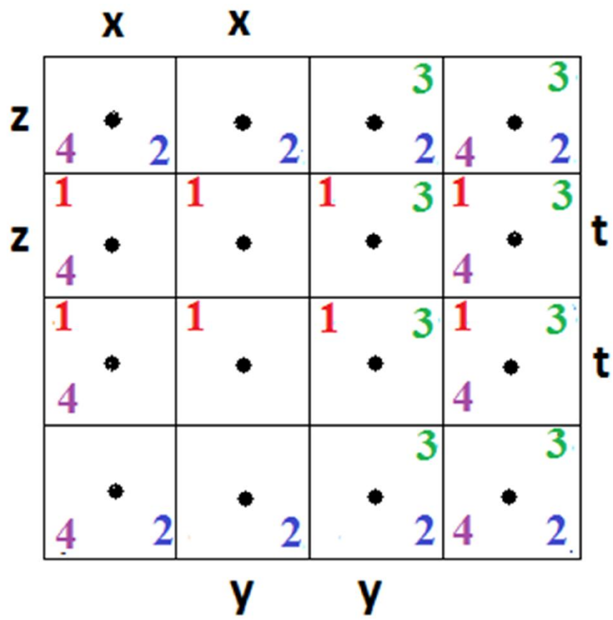
b) Một số tế bào 4 ô.



$T_1 = \bar{z}\,\bar{t}$ (4 ô), $T_2 = xy$ (4 ô), $T_3 = \bar{x}t$ (4 ô),

$T_4 = x\bar{t}$ (4 ô), $T_5 = \bar{y}t$ (4 ô), $T_6 = \bar{y}\,\bar{t}$ (4 ô).

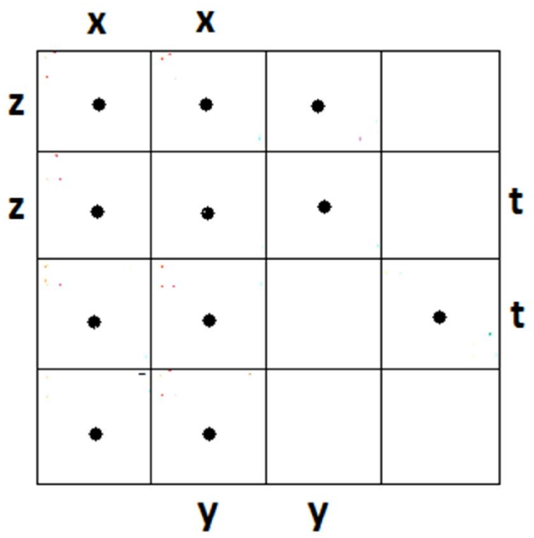
c) Một số tế bào 8 ô và 16 ô.

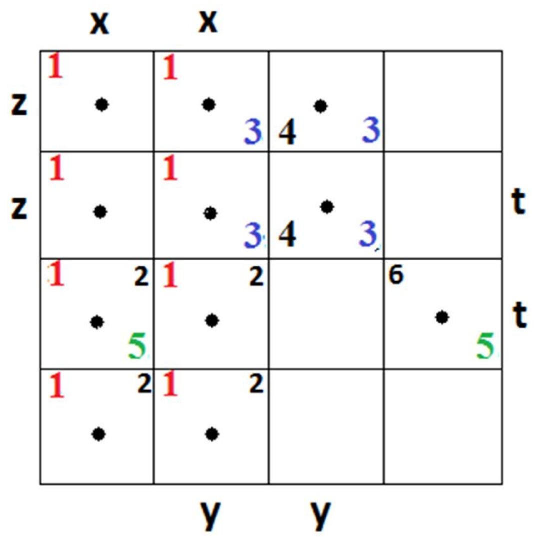


$T_1 = t$ (8 ô), $T_2 = \bar{t}$ (8 ô), $T_3 = \bar{x}$ (8 ô), $T_4 = \bar{y}$ (8 ô),

T_5 (cả 16 ô của bảng) $= (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z})(t \vee \bar{t}) = \mathbf{1}$ (hàm Boole hằng **1**).

d) Cho $S = Kar(f)$ và các tế bào T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 và T_6 như hình dưới đây :



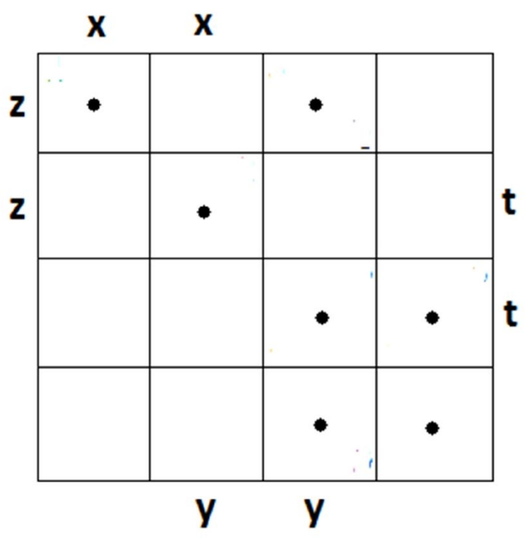


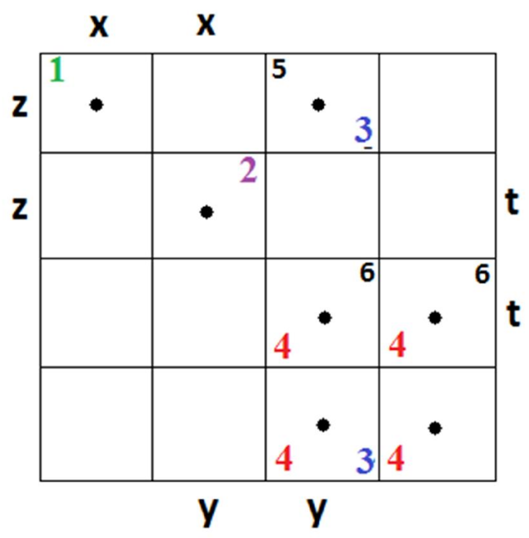
$S = Kar(f)$ [11 ô]

Ta có T_1, T_3, T_5 là các tế bào lớn và T_2, T_4, T_6 là các tế bào không lớn

(Không có tế bào T_i' thỏa $T_i \subset T_i' \subset S$ và $T_i \neq T_i'$ với $i = 1, 3, 5$. Mặt khác, $T_2 \subset T_1$ và $T_2 \neq T_1$, $T_4 \subset T_3$ và $T_4 \neq T_3$, $T_6 \subset T_5$ và $T_6 \neq T_5$).

e) Cho $S = Kar(g)$ và các tế bào T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 và T_6 như hình dưới đây :





$S = Kar(g)$ [7 ô]

Ta có T_1, T_2, T_3, T_4 là các tế bào lớn và T_5, T_6 là các tế bào không lớn

(Không có tế bào T_i' thỏa $T_i \subset T_i' \subset S$ và $T_i \neq T_i'$ với $i = 1, 2, 3, 4$.

Mặt khác, $T_5 \subset T_3$ và $T_5 \neq T_3$, $T_6 \subset T_4$ và $T_6 \neq T_4$).

IV. CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:

4.1/ PHÉP PHỦ TỐI TIỂU CHO TẬP HỢP:
Cho các tập hợp S, T_1, T_2, ... và T_k.

a) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ thì $\{ T_1, T_2, ... , T_k \}$ gọi là *một phép phủ* của S.

b) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ và $\forall j \in \{ 1, 2, ... , k \}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} T_i \neq S$ (bỏ bớt bất kỳ T_j nào ra đều dẫn đến phần hội của các tập hợp còn lại không phủ được S) thì ta nói $\{ T_1, T_2, ... , T_k \}$ gọi là *một phép phủ tối tiểu* của S.

c) Nếu $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ và $\exists j \in \{ 1, 2, ... , k \}$, $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} T_i = S$ thì ta nói $\{ T_1, T_2, ... , T_k \}$ gọi là *một phép phủ chưa tối tiểu* của S (khi bỏ bớt T_j , phần hội của các tập hợp còn lại vẫn phủ được S).

Ví dụ: Cho $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

a) Xét $T_1 = \{ 2, 3, 6 \}$, $T_2 = \{ 1, 4, 6 \}$ và $T_3 = \{ 1, 3, 5 \}$.

Ta có $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = S$, $T_1 \cup T_2 \neq S$, $T_1 \cup T_3 \neq S$ và $T_2 \cup T_3 \neq S$ nên $\{ T_1, T_2, T_3 \}$ là một phép phủ tối tiểu của S.

b) Xét $Z_1 = \{ 1, 2, 5 \}$, $Z_2 = \{ 4, 5 \}$, $Z_3 = \{ 2, 3, 5 \}$ và $Z_4 = \{ 3, 6 \}$.

Ta có $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 = S$ và $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_4 = S$ nên $\{ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \}$ là một phép phủ chưa tối tiểu của S (vì dư Z_3).

4.2/ THUẬT TOÁN TÌM CÁC CÔNG THỨC ĐA THỨC TỐI TIỂU CHO HÀM BOOLE:

Cho $f \in F_n$ ($n \leq 4$) và $S = Kar(f)$.

a) Ý tưởng chính:

* Tìm *tất cả các tế bào lớn* của S.

* Chỉ ra *một số phép phủ* của S (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).

* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của S từ các phép phủ nói trên (sơ loại).

* Viết các công thức đa thức cho f tương ứng với các phép phủ tối tiểu trên.

* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức tối ưu* cho f (loại chính thức).

b) Thuật toán cụ thể:

* Xác định *tất cả các tế bào lớn* của S (chỉ rõ vị trí của chúng trên biểu đồ và gọi tên chúng).

* Chọn ô P_1 (tùy ý) $\in S$ và tế bào lớn T_1 (tùy ý) thỏa $P_1 \in T_1$.

  Chọn ô P_2 (tùy ý) $\in S \setminus T_1$ và tế bào lớn T_2 (tùy ý) thỏa $P_2 \in T_2$.

  Chọn ô P_3 (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và tế bào lớn T_3 (tùy ý) thỏa $P_3 \in T_3$.

  Chọn ô P_4 (tùy ý) $\in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ và tế bào lớn T_4 (tùy ý) thỏa $P_4 \in T_4$, …

  Tiếp tục quá trình trên cho đến khi $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k) = \varnothing$, nghĩa là ta có được *một phép phủ* $S = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$.

* Kết thúc quá trình chọn các ô và các tế bào lớn, ta thu được *một hay nhiều phép phủ* của S (phủ bằng *các tế bào lớn* của nó).

* Giữ lại *các phép phủ tối tiểu* của S từ các phép phủ nói trên.

* Viết *các công thức đa thức* cho f tương ứng với mỗi phép phủ tối tiểu trên

* *So sánh* các công thức đa thức vừa viết để chọn ra *các công thức đơn giản nhất có thể được*. Đây chính là *các công thức đa thức tối tiểu* của f.

4.3/ <u>GHI CHÚ:</u> Việc chọn các ô $P_1, P_2, P_3, ...$ là tùy ý trong các phạm vi cho phép. Tuy nhiên ta có thể chọn theo *các thứ tự ưu tiên sau* để thuật toán tiến hành được *nhanh gọn hơn*:

* *Ưu tiên 1*: chọn trước các ô chỉ thuộc 1 tế bào lớn và lấy tất cả các tế bào lớn tương ứng với các ô đó.

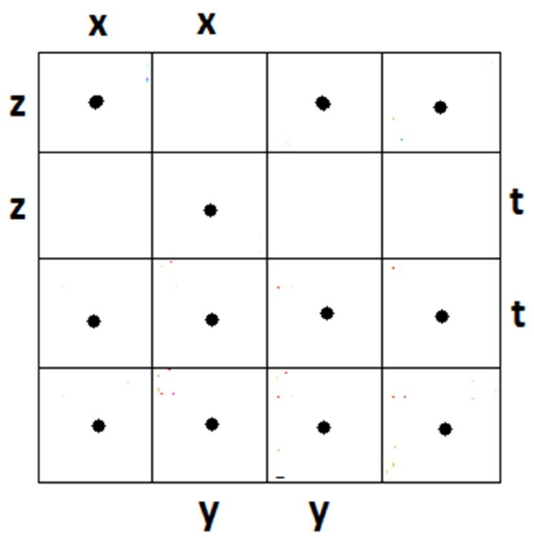
* *Ưu tiên 2* : xét tiếp các ô chỉ thuộc 2 tế bào lớn. Nếu có nhiều ô cùng ưu tiên 2 thì chọn trước các ô có đặc điểm ‘‘ không ở chung tế bào lớn với các ô đã bị xóa ’’.

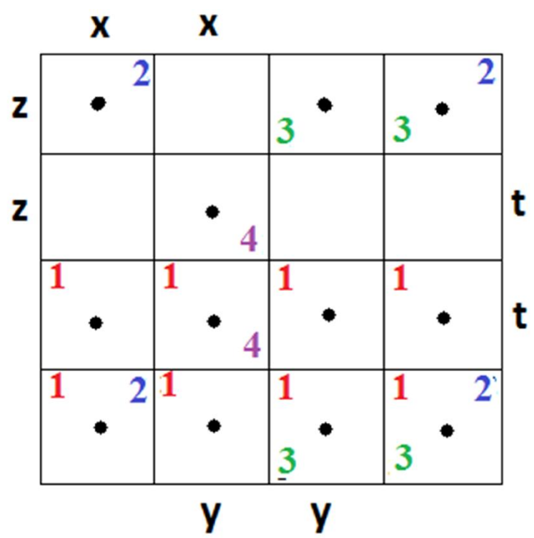
* *Ưu tiên thông thường* : chọn trước ô ở hàng trên (so với các ô ở hàng dưới), nếu nhiều ô cùng ở hàng trên thì chọn trước ô ở phía trái. Ưu tiên thông thường tạo ra sự thống nhất trong việc chọn ô chứ không chắc giúp thuật toán gọn hơn.

Ví dụ:

a) $f \in F_4$ có $S = K(f)$ với

$K(f) = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.





Các tế bào lớn trong S là $T_1 = \bar{z}$, $T_2 = \bar{y}\,\bar{t}$, $T_3 = \bar{x}\,\bar{t}$ và $T_4 = xyt$.

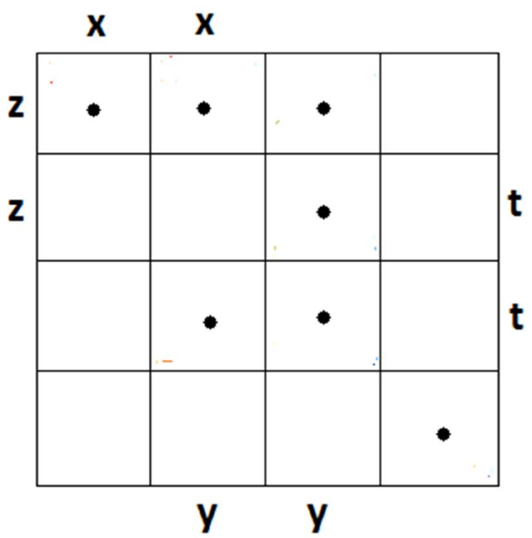
Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_2$, $(1, 3) \in T_3$, $(2, 2) \in T_4$ và $(3, 1) \in T_1$. Ta có $S \setminus (T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1) = \varnothing$ nên $S = T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_1$ là phép phủ duy nhất của S. Sơ đồ phủ của S là $T_2 \to T_3 \to T_4 \to T_1$. Do đó

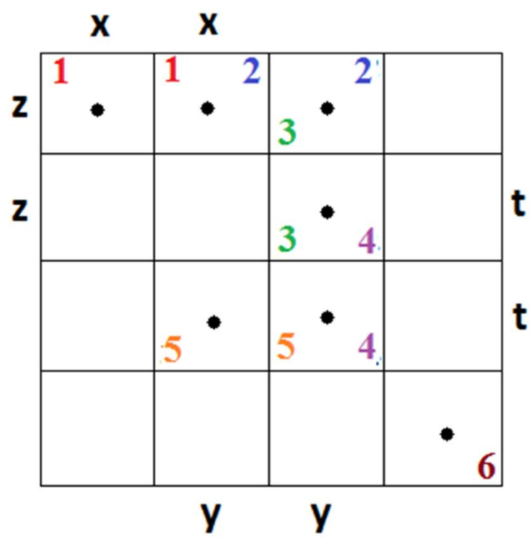
$f(x, y, z, t) = \bar{y}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{t} \vee xyt \vee \bar{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của f.

b) $g \in F_4$ có $S = K(g) = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4) \}$.

Các tế bào lớn trong S là

$T_1 = xz\bar{t}$, $T_2 = yz\bar{t}$, $T_3 = \bar{x}yz$, $T_4 = \bar{x}yt$, $T_5 = y\bar{z}t$ và $T_6 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$.





Ưu tiên 1: $(1, 1) \in T_1$, $(3, 2) \in T_5$ và $(4, 4) \in T_6$.

Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6) \neq \varnothing$.

Ưu tiên 2: chọn $(1, 3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6)$ và để ý $(1, 3) \in (T_2 \cap T_3)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2) \neq \varnothing$ nên chọn $(2, 3) \in S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2)$ và để ý $(2, 3) \in (T_3 \cap T_4)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_3$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_2 \cup T_4$ (2).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_3$ (3).

Sơ đồ các phép phủ của S là

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] & T_5 \arrow[r] & T_6 \arrow[r] \arrow[d] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_3 \\ & & T_3 & T_4 & \end{tikzcd}$$

Phép phủ (1) chưa tối tiểu [dư T_2 khi so với phép phủ (3)] nên bị loại.

Các phép phủ (2) và (3) đều tối tiểu.

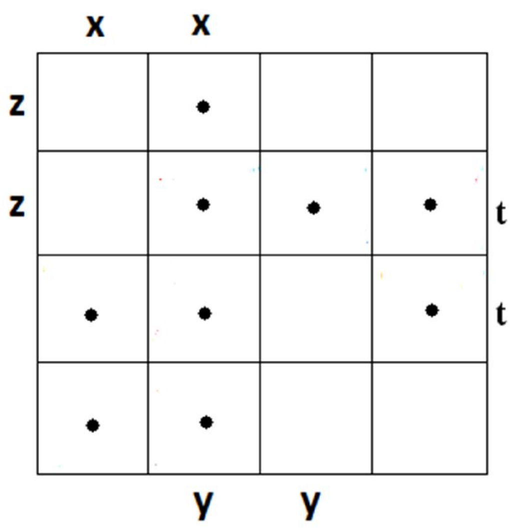
Từ (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho g:

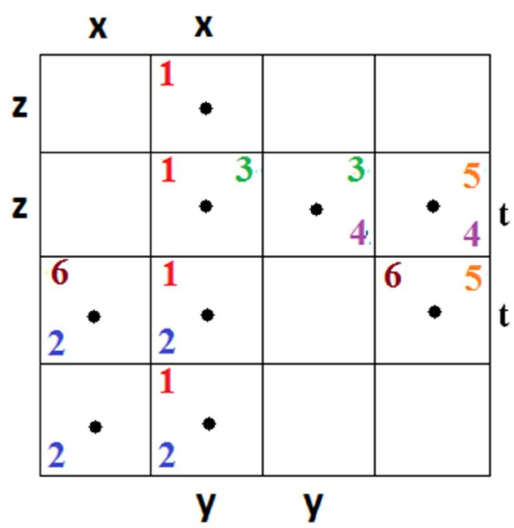
$g(x, y, z, t) = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee yz\bar{t} \vee \bar{x}yt$ (*).

$g(x, y, z, t) = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}yz$ (**).

(**) là công thức đa thức tối tiểu cho g [loại (*) vì nó phức tạp hơn (**)].

c) $h \in F_4$ có $S = K(h) = \{(1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2)\}$.





Các tế bào lớn trong S là

$T_1 =$ xy, $T_2 = x\bar{z}$, $T_3 =$ yzt, $T_4 = \bar{x}zt$, $T_5 = \bar{x}\,\bar{y}t$ và $T_6 = \bar{y}\,\bar{z}t$.

Ưu tiên 1: $(1, 2) \in T_1$ và $(4,1) \in T_2$. Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2) \neq \varnothing$.

Ưu tiên 2: chọn $(2, 4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2)$ và để ý $(2, 4) \in (T_4 \cap T_5)$. Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4) \neq \varnothing$ nên chọn $(3, 4) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4)$ và để ý $(3, 4) \in (T_5 \cap T_6)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (1).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (2).

Ta lại có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5) \neq \varnothing$ nên chọn $(2, 3) \in S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5)$ và để ý $(2, 3) \in (T_3 \cap T_4)$.

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (3).

Do $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (4).

Sơ đồ các phép phủ của S là

$$\begin{array}{ccccccc} & & T_1 & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & T_4 & \rightarrow & T_5 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & T_3 & \leftarrow & T_5 & & T_6 & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & T_4 & & & & \end{array}$$

Phép phủ (4) trùng với phép phủ (1). Các phép phủ (1), (2) và (3) đều tối tiểu.

Từ (1), (2) và (3), ta viết các công thức đa thức tương ứng cho h :

$h(x, y, z, t) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}\bar{y}t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{y}\bar{z}t = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}t \vee yzt.$

Các công thức trên (đơn giản như nhau) là các công thức đa thức tối tiểu của h.

d) Muốn viết dạng nối rời chính tắc của f (hay $\bar{f}$), ta gọi tên đơn thức tương ứng với mỗi ô của K(f) [hay K($\bar{f}$)] rồi lấy tổng Boole của chúng. Trong phần c), ta có

$h(x,y,z,t) = xyz\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t}$

và $\bar{h}(x, y, z, t) = x\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$.

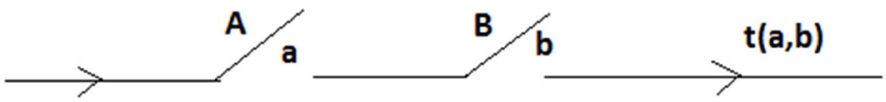
V. <u>ĐẠI SỐ CÁC MẠCH ĐIỆN:</u>

5.1/ <u>HÀM BOOLE CỦA MẠCH ĐIỆN:</u>

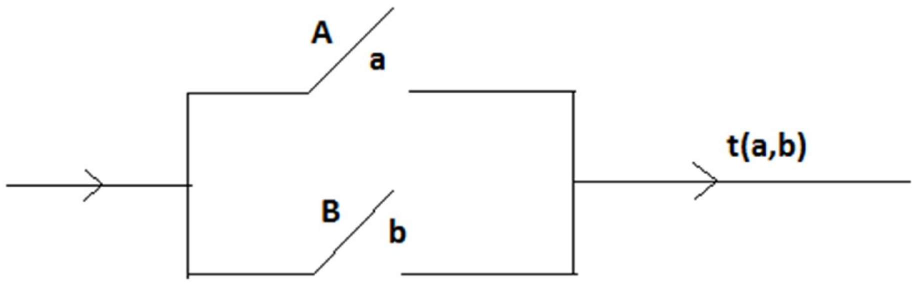
a) Mạch điện là một hệ thống bao gồm các công tắc điện và các dây dẫn.

Mỗi công tắc điện tương ứng với *một biến Boole* (biến Boole này = 1 hoặc 0 tùy thuộc vào trạng thái đóng hoặc mở của công tắc). Hai công tắc A và B (tương ứng với các biến Boole a và b) trên một dây dẫn sẽ được *mắc nối tiếp* hoặc *mắc song song*. Ta có hàm Boole theo hai biến

t (a, b) = 1 (nếu có điện qua dây) hoặc t (a, b) = 0 (nếu trái lại).



Cấu trúc mắc nối tiếp t(a, b) = ab.



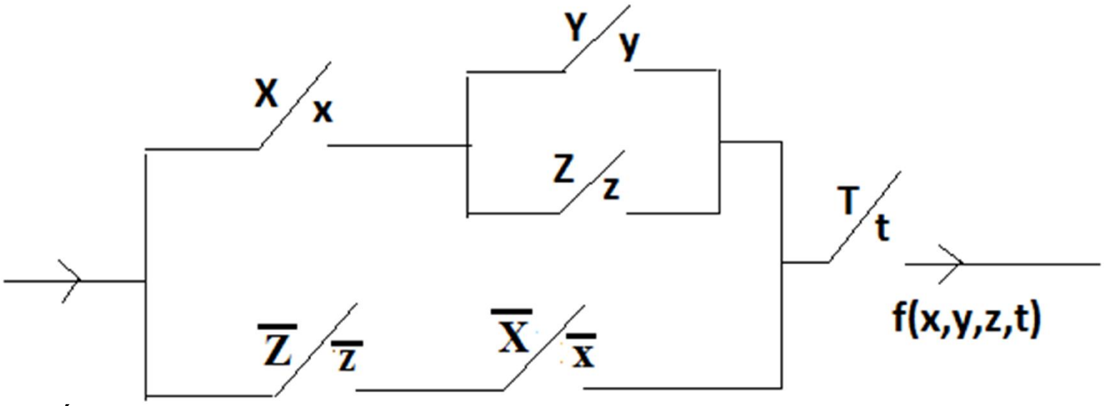
Cấu trúc mắc song song t(a, b) = a ∨ b.

b) Xét mạch điện có n công tắc điện $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ứng với các biến Boole $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Ta có hàm Boole f theo n biến (hàm Boole của mạch điện) :

$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ (nếu có điện qua mạch) hoặc $= 0$ (nếu trái lại).

Từ các cấu trúc mắc nối tiếp hoặc mắc song song trong mạch điện, ta có thể viết $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dưới dạng một đa thức theo $a_1, a_2, \ldots$ và a_n trong F_n .

Ví dụ: Cho một mạch điện với các công tắc điện X, Y, Z và T như sau:



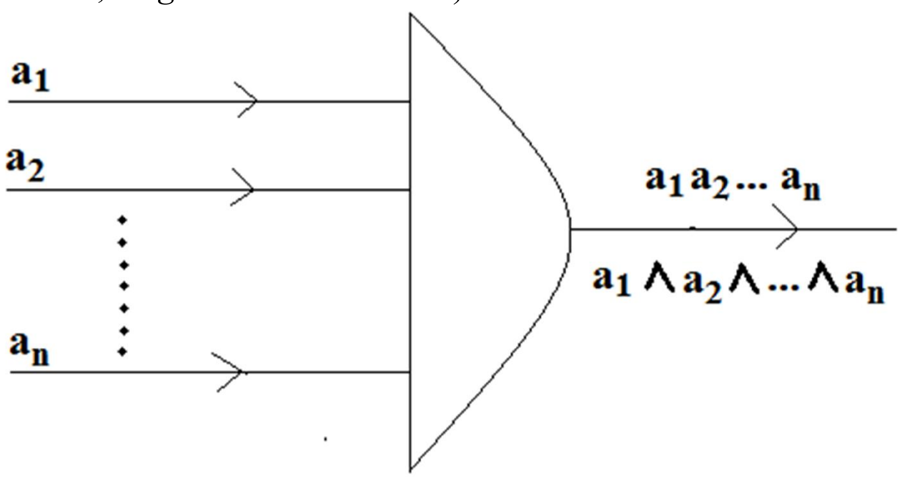
Ta viết hàm Boole f của mạch điện trên dưới dạng đa thức.

Ta có $f(x, y, z, t) = [\, x(y \vee z) \vee \bar{z}\,\bar{x}\,]t = (xy \vee xz \vee \bar{x}\,\bar{z})t$ [để ý $xz \vee \bar{x}\,\bar{z} \neq 1$]

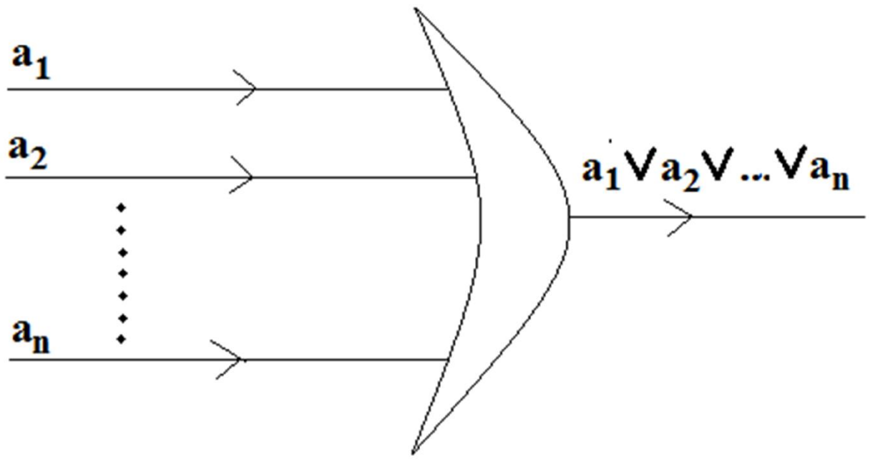
$= xyt \vee xzt \vee \bar{x}\,\bar{z}\,t$ (dạng đa thức của f).

5.2/ CỔNG: Cổng là một thiết bị điện có một hay nhiều dòng điện đi vào và chỉ có một dòng điện đi ra.

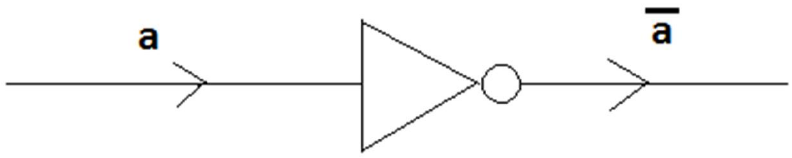
Có 3 loại cổng: cổng AND, cổng OR và cổng NOT (ứng với các phép toán *tích Boole*, *tổng Boole* và *bù Boole*).



Cổng AND.



Cổng OR.



Cổng NOT.

5.3/ <u>THIẾT KẾ MẠNG CÁC CỔNG TỔNG HỢP HÀM BOOLE:</u>

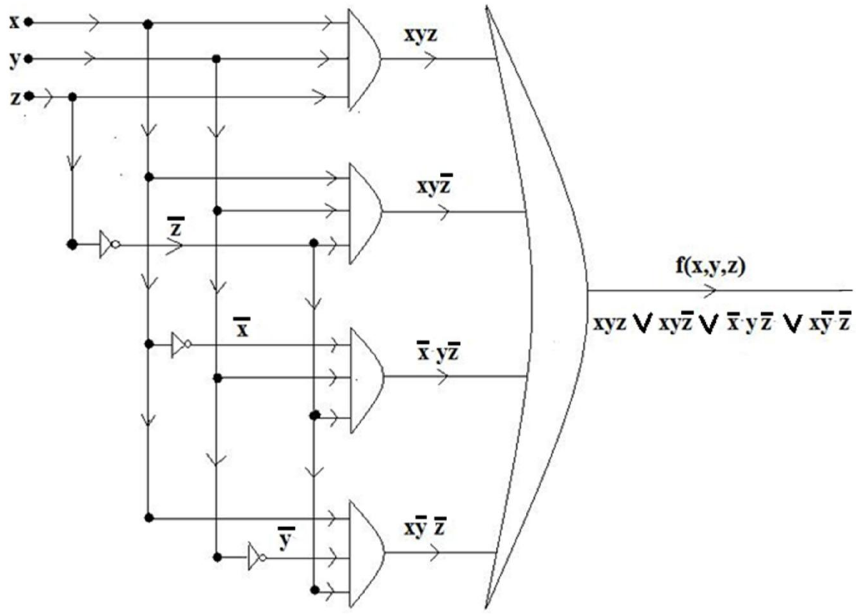
Cho $f \in F_n$. Ta biết f có một hay nhiều dạng đa thức khác nhau.

a) Ta có thể dựa vào một dạng đa thức tùy ý của f để thiết kế một mạng (gồm các cổng AND, OR, NOT và các dây dẫn) tổng hợp f.

b) Để tối ưu hóa, ta nên dùng một công thức đa thức tối tiểu của f thiết kế mạng các cổng tổng hợp nó. Ta sẽ tiết giảm được chi phí mua sắm các cổng và các dây dẫn.

<u>Ví dụ:</u> $f \in F_3$ và $f(x, y, z) = xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}\,\overline{z}$ (đây là một dạng đa thức của f và cũng là dạng nối rời chính tắc của f).

a) Dựa vào dạng đa thức trên, ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f như sau:

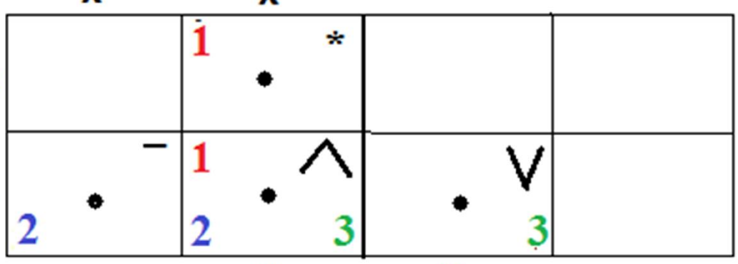


Mạng các cổng (chưa tối ưu hóa) tổng hợp hàm Boole f.

b) Ta tìm một công thức đa thức tối tiểu cho f trước khi thiết kế mạng các cổng cho nó.

Vẽ $S = \mathrm{Kar}(f) = K(xyz) \cup K(xy\overline{z}) \cup K(\overline{x}y\overline{z}) \cup K(x\overline{y}\,\overline{z})$ trong bảng mã B^3.

K(xyz) (*), $K(xy\overline{z})$ [$\wedge$], $K(\overline{x}y\overline{z})$ [$\vee$] và $K(x\overline{y}\,\overline{z})$ [–] (mỗi biểu đồ có 1 ô).



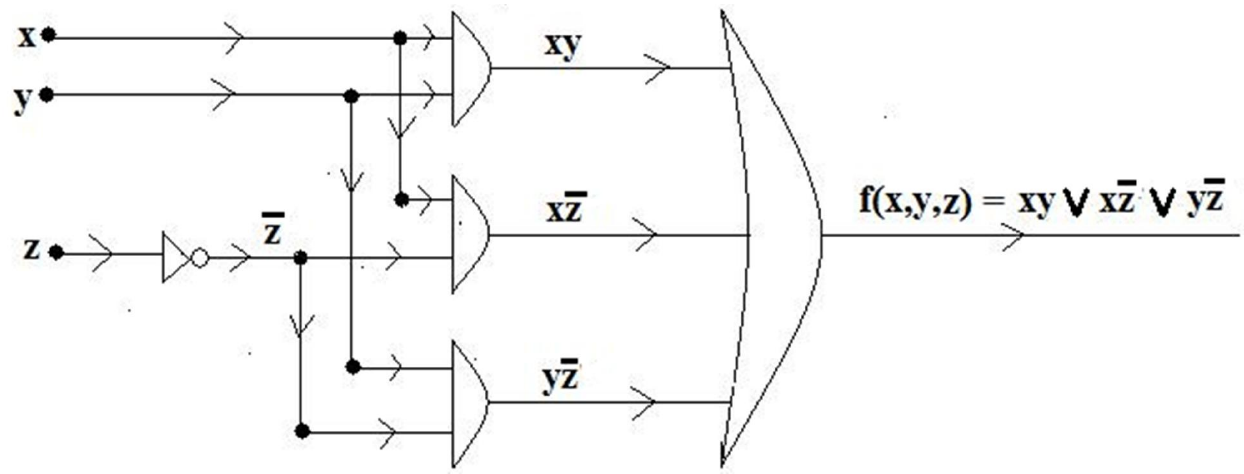
Các tế bào lớn trong S là $T_1 = xy$, $T_2 = x\overline{z}$ và $T_3 = y\overline{z}$.

Ưu tiên 1: (1, 2) $\in T_1$, (2, 1) $\in T_2$ và (2, 3) $\in T_3$.

Ta có $S \setminus (T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \varnothing$ nên $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ là phép phủ duy nhất của $S : T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3$. Do đó

$f(x, y, z) = xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}$ là công thức đa thức tối tiểu (duy nhất) của f .

Ta thiết kế mạng các cổng tổng hợp f dựa theo công thức đa thức tối tiểu trên:



Mạng các cổng (đã tối ưu hóa) tổng hợp hàm Boole f.
