TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 1 – Năm học 2024 - 2025

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng ĐTSĐH ghi)
CK2425-1
MTH00058

Tên học phần:	**TOÁN HỌC TỔ HỢP (CÁC LỚP 23CLC)**	**Mã HP:**	**MTH 000058**
Thời gian làm bài:	**100 phút**	Ngày thi:	**26 / 12 / 2024**

Ghi chú: *Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu khi làm bài.*

CÂU 1: (1,5 đ)

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k xe điện y hệt nhau vào 6 kho sao cho số xe ở kho 1 và 2 là tùy ý, số xe ở kho 3 ít nhất là 2, số xe ở kho 4 và kho 5 đều ≥ 3 và số xe ở kho 6 là một số nguyên tố trong khoảng từ 4 đến 12. Tính giá trị a_{40}.

CÂU 2: (1,5 đ)

$\forall k \geq 0$, đặt b_k là số cách xếp k tấm ảnh khác nhau vào 4 ngăn kéo sao cho số ảnh ở ngăn 1 là tùy ý, số ảnh ở ngăn 2 là một số nguyên chẵn, số ảnh ở ngăn 3 là một số nguyên lẻ và ngăn 4 không được để trống. Hãy tính b_k theo k ($k \geq 0$).

CÂU 3: (2đ)

Có bao nhiêu dãy số gồm 5 *chữ số dương hệ thập phân* sao cho các dãy đó

a) không chứa 7 *hay* không chứa 8 *hay* không chứa 9 ?

b) chứa đồng thời các chữ số 7, 8 và 9 ?

c) thỏa đúng 1 trong 3 điều kiện nêu trong a) ?

CÂU 4: (2đ)

Các huấn luyện viên ***A, B, C, D, E*** được xem xét bổ nhiệm làm huấn luyện viên trưởng cho các đội bóng 1, 2, 3, 4, 5, 6 (mỗi vị chỉ phụ trách một đội bóng). Biết rằng ***A*** không hợp với các đội 5 và 6, ***B*** không hợp với các đội 4, 5 và 6, ***C*** không hợp với đội 2, ***D*** không hợp với các đội 1, 2 và 3, còn ***E*** không hợp với đội 1. Hỏi có bao nhiêu cách bổ nhiệm thích hợp cho các vị huấn luyện viên ?

CÂU 5: (2đ = 1đ + 1đ).

a) Phân tích N = 1005290 thành tích các số nguyên tố dương. Có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của hai số nguyên ≥ 2 ? Có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của các số nguyên ≥ 2 ? Cho biết $B_4 = 15$ và $B_5 = 52$.

b) Dùng các công thức đệ qui để tính số cách chia 7 cuốn truyện khác nhau cho 5 đứa trẻ sao cho đứa nào cũng có ít nhất một cuốn ?

CÂU 6: (1đ = 0.5đ + 0.5đ).

Cho biết $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k = \dfrac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$.

Dùng hàm sinh để tính tổng $s_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ theo n ($n \geq 1$).

HẾT

(Đề thi gồm 1 trang)

Họ tên người ra đề/MSCB: .... Chữ ký: ....

Họ tên người duyệt đề: .... Chữ ký: ....

Câu 1: Đa thức nhân tử cho kho 1 và 2 là

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Đa thức nhân tử cho kho 3: $\sum_{k=2}^{+\infty} x^k = \frac{x^2}{1-x}$

Đa thức nhân tử cho kho 4 và 5 là:

$$\sum_{k=3}^{+\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}$$

Đa thức nhân tử cho kho 6: $x^5 + x^7 + x^{11}$

Hàm sinh ứng với dãy $(a_k)_{k\geq 0}$ là

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{x^2}{(1-x)}\cdot\frac{x^6}{(1-x)^2}\cdot(x^5+x^7+x^{11})$$

$$= (x^{13}+x^{15}+x^{19})\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+13} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+15} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+19}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Suy ra $a_{40} = C_{31}^{27} + C_{29}^{25} + C_{25}^{21}$

Câu 2: Do các tấm ảnh khác nhau → hàm sinh mũ

Đa thức nhân tử cho ngăn 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Đa thức nhân tử cho ngăn 2: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Đa thức nhân tử cho ngăn 3 là: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Đa thức nhân tử ngăn 4 là:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$$

Hàm sinh mũ cho dãy $(b_k)_{k\geq 0}$ là

$$e^x \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})(e^x - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})(e^{2x} - e^x)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{3x} - 1 + e^{-x})$$

$$= \frac{-1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4^k - 3^k + (-1)^k}{4}\right) \frac{x^k}{k!}$$

Suy ra $b_0 = \frac{-1}{4}$ và $b_k = \frac{4^k - 3^k + (-1)^k}{4}$ $\forall k \geq 0$.

Câu 3: A là tập các dãy 5 số không chứa số 7

B là tập các dãy 5 số không chứa 6

C là tập các dãy 5 số không chứa 9

a) $n(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3$

$S_1 = |A| + |B| + |C| = 3.9^5$

$S_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 3.8^5$

$S_3 = |A \cap B \cap C| = 7^5$

$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 3.9^5 - 3.8^5 + 7^5 = 95650$

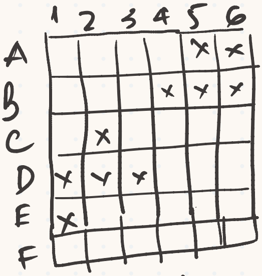
b) $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$

$= 10^5 - 95650 = 4350$

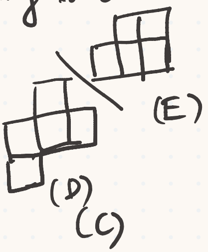
c) Số cách thỏa yêu cầu là

$$N_1 = S_1 - C_2^1 S_2 + C_3^2 S_3 = 30960.$$

<u>Câu 4</u>: Số cách thỏa câu cầu $= \frac{1}{1!}$ số cách đặt 6 quân xe vào bàn cờ như hình



Bàn cờ ứng với ô cấm là



$$P(x,E) = 1 + 5x + 4x^2$$

$$P(x,D) = 1 + 5x + 5x^2 + x^3$$

$$\Rightarrow P(x,C) = P(x,E).P(x,D)$$

$$= 1 + 10x + 34x^2 + 46x^3 + 25x^4 + 4x^5$$

Số cách thỏa yêu cầu là

$$\frac{1}{1!}(6!1 - 5!10 + 4!34 - 3!46 + 2!25 - 1!4 + 0!0)$$

$$= 106$$

Câu 5: a) $N = 2.5.11.13.19.37$

Số cách phân tích N thành tích 2 số ≥ 2 là

$$S_6^2 = 2^5 - 1 = 31$$

Số cách phân tích N thành tích các số ≥ 2 là:

$$B_6 = C_5^0 B_0 + C_5^1 B_1 + C_5^2 B_2 + C_5^3 B_3 + C_5^4 B_4 + C_5^5 B_5$$

$$= 203$$

b) Số cách chia thừa yêu cầu là:

$5!\, S_7^5$.

Ta có: $S_7^5 = S_6^4 + 5S_6^5 = S_5^3 + 4S_5^4 + 5C_6^2$

$$= S_4^2 + 3S_4^3 + 4C_5^2 + 5C_6^2$$

$$= (2^3 - 1) + 3C_4^2 + 4C_5^2 + 5C_6^2$$

$$= 140$$

$\Rightarrow$ Số cách là: 16800

Câu 6: Với $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} S_k x^k = \frac{f(x)}{1-x} = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^5}$$

$$= (x^3 + 4x^2 + x) \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^k x^{k+3} + \sum_{k=0}^{+\infty} 4C_{k+4}^k x^{k+2} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^k x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=3}^{+\infty} C_{k+1}^{k-3} x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} 4C_{k+2}^{k-2} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} C_{k+3}^{k-1} x^k$$

Suy ra $S_1 = C_4^0 = 1$

$S_2 = 4C_4^0 + C_5^1 = 9$

$S_n = C_{n+1}^{n-3} + 4C_{n+2}^{n-2} + C_{n+3}^{n-1} \; \forall n \geq 3$

$= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 1 – Năm học 2023 - 2024

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng ĐTSĐH ghi)

Tên học phần:	TOÁN HỌC TỔ HỢP (HCQ KHÓA 2022)	Mã HP:	MTH 000050
Thời gian làm bài:	90 phút	Ngày thi:	22 / 01 / 2024

Ghi chú: *Sinh viên không được phép sử dụng tài liệu khi làm bài.*

CÂU 1: **(1,5 đ)** $\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k cuốn sách y hệt nhau vào 6 cái tủ sao cho số sách ở tủ 1 là một số nguyên dương chính phương ≤ 10, số sách ở tủ 2 và tủ 3 đều ≥ 2, số sách ở tủ 4, tủ 5 và tủ 6 đều ≥ 3. Viết hàm sinh $F(x)$ cho dãy $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ và tính giá trị a_{44}.
(số nguyên dương chính phương là bình phương của một số nguyên > 0).

CÂU 2: **(1,5 đ)**
$\forall k \geq 0$, đặt b_k là số cách xếp k máy in khác nhau vào 5 nhà kho sao cho số máy ở kho 1 và kho 2 là tùy ý, số máy ở kho 3 là một số nguyên lẻ, số máy ở kho 4 là một số nguyên chẵn và kho 5 không được bỏ trống. Viết hàm sinh mũ $E(x)$ cho dãy $\{ b_k \mid k \geq 0 \}$ và tính b_k theo k, $\forall k \geq 0$.

CÂU 3: **(2đ)** Đặt $U = \{\varepsilon = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{N}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30\}$. Tính $|X|, |Y|, |Z|$ và $|T|$ với $X = \{ \varepsilon = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \geq 9$ (1) *hay* $x_2 \geq 9$ (2) *hay* $x_3 \geq 9$ (3) *hay* $x_4 \geq 9$ (4) $\}$.
$Y = \{ \varepsilon = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_1 \leq 8,\ x_2 \leq 8,\ x_3 \leq 8$ *và* $x_4 \leq 8 \}$.
$Z = \{ \varepsilon = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid \varepsilon$ thỏa *đúng một* trong các điều kiện (1), (2), (3) và (4) $\}$ và
$T = \{ \varepsilon = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid \varepsilon$ thỏa *ít nhất hai* điều kiện trong các điều kiện (1), (2), (3) và (4) $\}$.

CÂU 4: **(2đ)** Các kỹ sư ***a, b, c, d, e, f*** được gởi đi du học ở các nước 1, 2, 3, 4, 5, 6 (mỗi nước chỉ nhận 1 người). Biết rằng ***a*** không muốn đi các nước 1 và 3, ***b*** không muốn đi các nước 2 và 3, ***c*** không muốn đi nước 4, ***d*** không muốn đi nước 5, ***e*** không muốn đi các nước 5 và 6 còn ***f*** không muốn đi các nước 4 và 6. Hỏi có bao nhiêu cách xếp nơi đi du học cho các kỹ sư nói trên theo nguyện vọng? [HD : chia bàn cờ thành 2 phần rời nhau và có thể dùng ô (6,4) cho bàn cờ lớn]

CÂU 5: **(2đ** = 0,5đ + 0,5đ + 0,5đ + 0,5đ).
a) Có bao nhiêu cây nhị phân *đủ* chứa đúng 10 *đỉnh trong* ?
b) Dùng các công thức đệ qui để tính S_5^3, S_6^4, S_7^5 và S_8^6 (S_n^k là một dạng viết khác của $\left\{ {n \atop k} \right\}$).
c) Có bao nhiêu cách tặng 8 cái áo khác nhau cho 6 bạn trẻ (bạn nào cũng được tặng áo) ?
d) Có bao nhiêu cách phân hoạch $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ thành 7 tập hợp con khác $\varnothing$?

CÂU 6: **(1đ)**. Cho biết $\dfrac{2x^2 + x - 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{1-3x}$. Dùng hàm sinh mũ để giải hệ thức đệ qui sau đây : $a_0 = 1$ và $a_{n+1} = 3(n+1)a_n - (2n-1)(n+1)!$, $\forall n \geq 0$.

HẾT

(Đề thi gồm 1 trang)

Họ tên người ra đề/MSCB: ....Chữ ký: .. [Trang 1/1]
Họ tên người duyệt đề: ....Chữ ký: ....

Câu 1: Đa thức nhân tử cho sách ở tủ 1 là: $x+x^4+x^9$

Đa thức nhân tử ở tủ 2 và 3 là $\sum_{k=2}^{+\infty} x^k = \frac{x^2}{1-x}$

Đa thức nhân tử ở tủ 4, 5, 6 là $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^3}{1-x}$

Hàm sinh ứng với dãy $(a_k)_{k\geq 0}$ là

$$F(x) = (x+x^4+x^9)\frac{x^4}{(1-x)^2}\cdot\frac{x^9}{(1-x)^3}$$

$$= (x^{14}+x^{17}+x^{22})\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+14} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+17} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+22}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow a_{44} = C_{34}^{30} + C_{31}^{27} + C_{26}^{22} = 92791$$

Câu 2: Đa thức nhân tử cho kho 1 và 2

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Đa thức nhân tử cho kho 3

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Đa thức nhân tử cho kho 4:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Đa thức nhân tử cho kho 5: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$

Hàm sinh mũ cho dãy $(b_k)_{k\geq 0}$ là

$$E(x) = e^{2x}\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}).(e^x - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{5x} - e^{4x} - e^x + 1)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{5x} - e^{4x} - e^x + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4}(5^k - 4^k - 1)\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{4}$$

Vậy $b_0 = \frac{1}{4}$, $b_k = \frac{1}{4}(5^k - 4^k - 1)\ \forall k \geq 1$

Câu 3: Đặt $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30, x_i \geq 9\}$
$(i = 1, 2, 3, 4)$

Ta có: $|X| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

$$= S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

Ta có: $S_1 = 4.C_{24}^3 = 8096$

$S_2 = C_4^2 . C_{15}^3 = 2730$

$S_3 = C_4^3 C_6^3 = 80$

$S_4 = 0$

$\Rightarrow |X| = 5446$

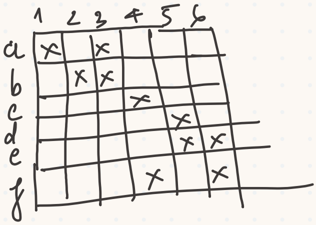
$$|Y| = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = n(U) - n(X)$$
$$= C_{33}^3 - 5446 = 10.$$

$$|Z| = N_1 = S_1 - C_2^1 S_2 + C_3^2 S_3 - C_4^3 S_4 = 2876$$

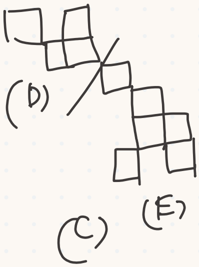
$$|T| = N_2^* = S_2 - C_2^1 S_3 + C_3^2 S_4 = 2570$$

Câu 4.

Số cách xếp thửa yêu cầu bằng số cách đặt 6 quân xe vào bàn cờ như hình vẽ dưới



Bàn cờ ứng C ứng với ô cấm là



$$P(x,C) = P(x,D)\,P(x,E)$$

$$\cdot\; P(x,D) = 1 + 4x + 3x^2$$

$$P(x,E) = xP(x,\boxplus) + P(x,\boxplus)$$

$$= x(1+3x+x^2) + P(x,\square).P(x,\boxplus)$$

$$= x + 3x^2 + x^3 + (1+x)(1+4x+2x^2)$$

$$= 1 + 6x + 9x^2 + 3x^3$$

$$\Rightarrow P(x,C) = 1 + 10x + 36x^2 + 57x^3 + 39x^4 + 9x^5$$

Vậy số cách chia thửa yêu cầu là:

$$6! - 5!10 + 4!36 - 3!57 + 2!39 - 1!9 + 0!0.$$

$= 111$ cách.

Câu 5

a) Có $C_{10} = \frac{1}{11} \cdot C_{20}^{10}$ cây nhị phân thoả yêu cầu

b) $S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3 = (2^3-1) + 3C_4^2 = 126$

$S_6^4 = S_5^3 + 4S_5^4 = 126 + 4 \cdot C_5^2 = 166$

$S_7^5 = S_6^4 + 5S_6^5 = 166 + 5 \cdot C_6^2 = 241$

$S_8^6 = S_7^5 + 6S_7^6 = 241 + 6C_7^2 = 367$

c) Số cách là: $S_8^6 \cdot 6! = 264240$

d) Số cách là: $S_9^7 = S_8^6 + 7S_8^7 = 367 + 7C_8^2 = 563$ cách

Câu 6:

Đặt $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$, ta có:

$$a_{k+1} = 3(k+1)a_k - (2k-1)(k+1)! \quad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{(k+1)!} = 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1) a_k x^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} (2k-1)\frac{(k+1)!}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$= 3x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^k}{k!} - x\sum_{k=0}^{+\infty} (2k-1) x^k$$

$$\Rightarrow F(x) - 1 = 3xF(x) - x\left(2\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k - \sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) \quad (*)$$

* Tính $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$

Ta có: $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k x^k$$

$$(*) \Leftrightarrow F(x)(1-3x) = 1 - x\left(2\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow F(x)(1-3x) = \frac{(1-x)^2 - 2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{2x^2+x-1}{(1-x)^2(1-3x)}$$

$$= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-3x}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} -x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1}^k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (C_{k+1}^k + 3^k - 1) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (3^k + k) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n!} = 3^n + n \Rightarrow a_n = (3^n + n) n! \quad \forall n \geq 0$$