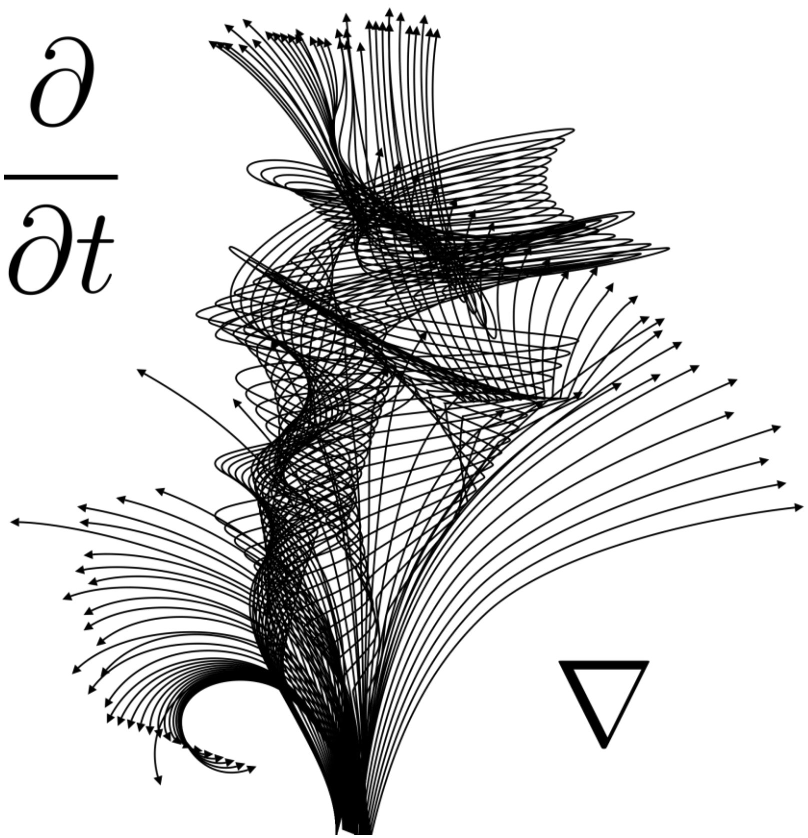
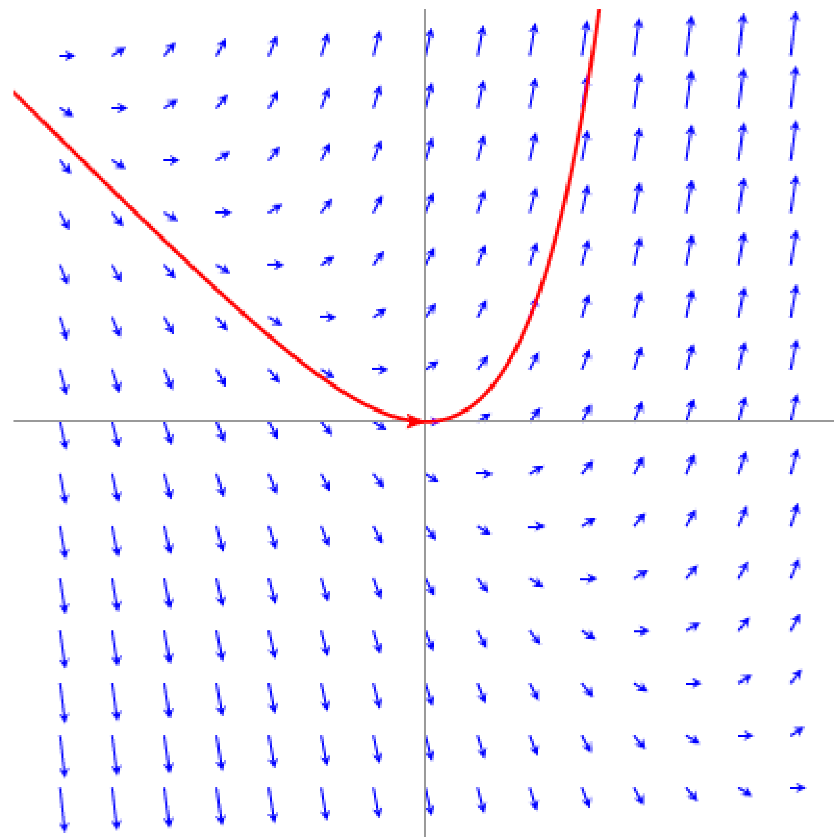
Vtp2-tuần 9, 10: Phương trình vi phân

Bộ môn Giải tích, khoa Toán-Tin học, Đhkhtn tpHCM

Giới thiệu phương trình vi phân và mô hình





Giới thiệu phương trình vi phân và mô hình

- Nếu F là hàm số 3 biến thì bài toán tìm hàm số một biến $y = y(x)$ thỏa

$$F(x; y; y') = 0 \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

được gọi là *bài toán giá trị đầu*. Hàm số $y = y(x)$ thỏa (1)-(2), với mọi x thuộc khoảng nào đó, được gọi là *nghiệm bài toán giá trị đầu*. Phương trình (1) được gọi là phương trình vi phân cấp một và (2) được gọi là *điều kiện đầu*.

- Tương tự, nếu F là hàm số 4 biến thì bài toán tìm hàm số một biến $y = y(x)$ thỏa

$$F(x; y; y', y'') = 0 \tag{3}$$

$$y(x_0) = y_0 \text{ và } y'(x_0) = y_1 \tag{4}$$

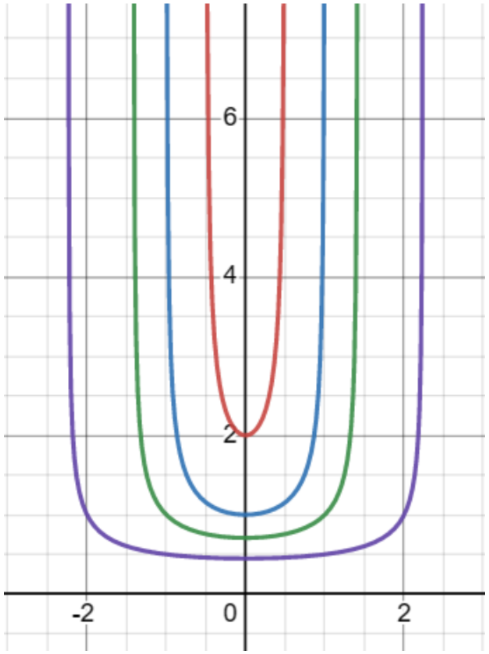
cũng là *bài toán giá trị đầu*. Phương trình (3) được gọi là phương trình vi phân cấp hai và (4) là *điều kiện đầu*.

Giới thiệu phương trình vi phân và mô hình

Ghi chú.

- Khảo sát trong các giáo trình nâng cao cho biết dưới một điều kiện khá tổng quát (thường được thỏa đối với các bài tập trong giáo trình này), thì bài toán (1)-(2) hoặc (3)-(4) được chứng minh có duy nhất nghiệm thỏa tính chất nào đó.
- Các phương trình vi phân trong bài tập của giáo trình này thường có một họ nghiệm, trong đó chỉ duy nhất một nghiệm thỏa điều kiện đầu.

Ví dụ. Hãy kiểm tra phương trình $y' = xy^3$ nhận một họ nghiệm là các hàm số $y = (c - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, với c là hằng số bất kỳ. Trong họ này có duy nhất hàm số thỏa $y(0) = 2$, xác định hàm này.



Đồ thị của vài hàm số trong họ nghiệm, trong đó đường màu đỏ là hàm số thỏa $y(0) = 2$.

Giới thiệu phương trình vi phân và mô hình

- **Mô hình tăng tưởng dân số tự nhiên:** Xét quần thể vi khuẩn, hay động vật, có số lượng ban đầu $P(0) = P_0$. Khi thời gian t trôi qua thì số cá thể là $P(t)$, là hàm số được cho là thỏa

$$P'(t) = kP(t), k \text{ là hằng số dương} \qquad \text{(M1)}$$

Lập luận cho mô hình (M1) là "ở mỗi thời điểm t, số cá thể càng đông thì tốc độ tăng cá thể $P'(t)$ càng lớn". (Cũng như số công nhân càng đông thì tốc độ cho ra sản phẩm càng lớn.)

- Mô hình tăng trưởng dân số tự nhiên cũng tương tự như mô hình của định luật phóng xạ. Số hạt nhân ban đầu của của một chất phóng xạ là $N(0) = N_0$. Sau thời thời gian t thì số hạt nhân còn lại là $N(t)$. (*Hoạt*) *độ phóng xạ* được định nghĩa là

$$H(t) = -N'(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{\Delta N}{\Delta t} \text{ (đơn vị Bq, Becquerel).}$$

1 Bq là một phân rã / giây. Số lượng $N(t)$ càng lớn thì hoạt độ càng mạnh, tức là $-N'(t) = \lambda N(t)$, $\lambda > 0$ là *hằng số phóng xạ*.

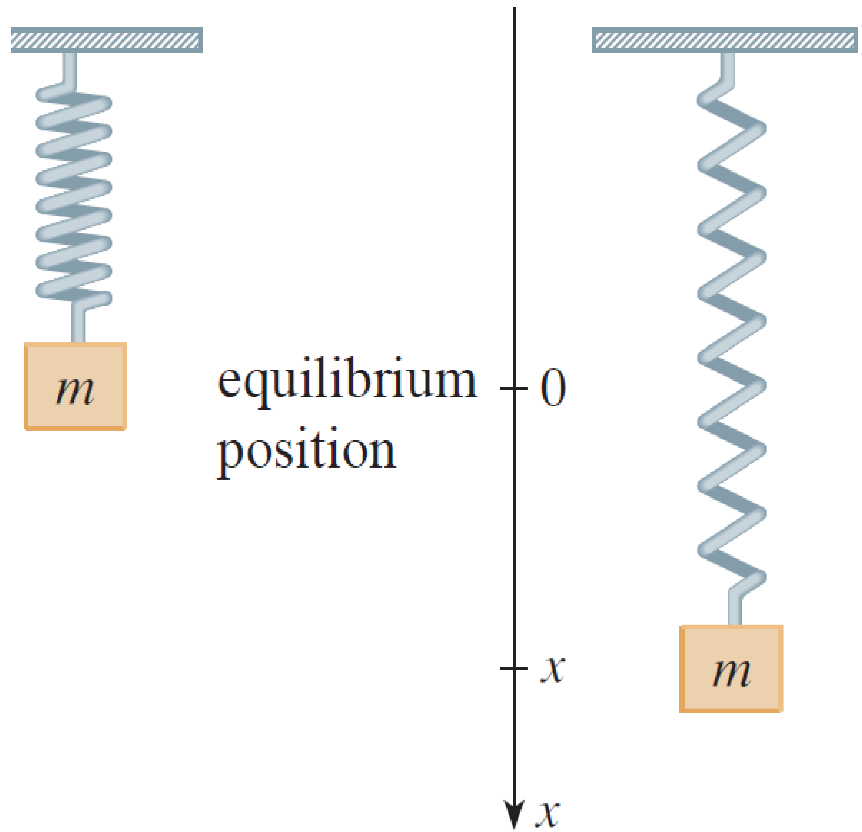
Giới thiệu phương trình vi phân và mô hình

- **Mô hình dao động điều hòa:**

Một vật m được treo vào một lò xo có độ cứng k. Độ dãn x so với vị trí cân bằng thỏa phương trình của định luật Hook, $F = -kx$ với F là lực đàn hồi tác dụng vào vật m.

Theo định luật II Newton thì $F = mx''$, với x'' là gia tốc tức thời của vật. Vậy, li độ x là mô hình thỏa phương trình vi phân cấp hai

$$mx'' + kx = 0 \qquad \text{(M2)}$$



với điều kiện ban đầu là

$x(0) = x_0$ (độ co dãn ban đầu),
$x'(0) = v_0$ (vận tốc đầu).

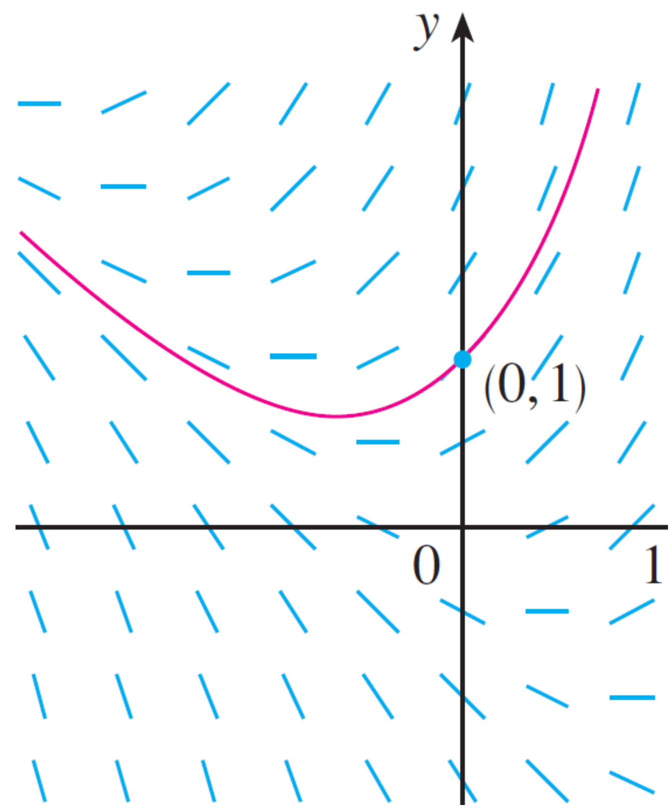
Phương pháp trường để xấp xỉ nghiệm ptr vi phân

Không may là với hầu hết các phương trình vi phân, không thể tìm được nghiệm là hàm số định bởi biểu thức tường minh. Thay vào đó, người ta phác họa đồ thị của nó. Cách tiếp cận này được gọi là phương pháp *trường chỉ hướng*.

Ví dụ. Chúng ta cần phác họa đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là nghiệm của bài toán giá trị đầu

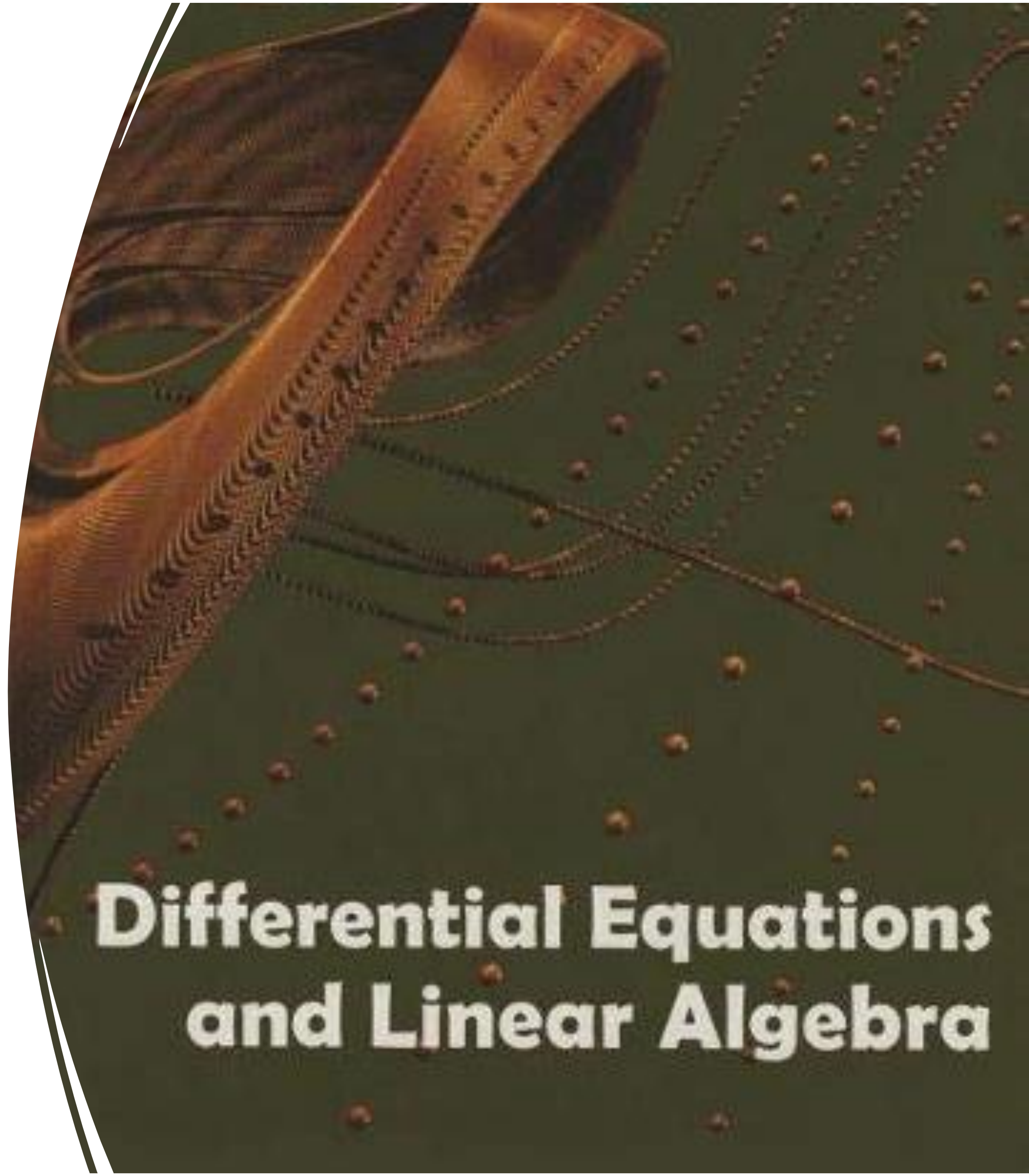
$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1.$$

Tiếp tuyến của đồ thị của f tại $(x; y)$ có hệ số góc là $f'(x) = y' = x + y$. Do vậy, qua mỗi điểm $(x; y)$, ta vẽ một đoạn thẳng ngắn có hệ số góc bằng $x + y$.



Đồ thị của nghiệm là đường cong trơn qua điểm $(0; 1)$, song song với các đoạn ngắn.

Cách giải vài phương trình vi phân cấp một



Phương trình vi phân cấp một dạng tách biến

Phương trình vi phân tách biến có dạng

$$y' = f(x)g(y).$$

Cách giải phương trình tách biến:

- Phân ly x và y ở hai vế
$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$
- Lấy nguyên hàm theo x ở hai vế
$$\int \frac{y'}{g(y)}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x\,.$$
- Từ đó, có thể tìm được y là biểu thức tường minh theo x ở dạng họ nghiệm (*nghiệm tổng quát*); hoặc có thể chỉ tìm được phương trình (không chứa y') cho ẩn hàm y theo x.
- Nếu có thêm điều kiện đầu thì xác định được nghiệm riêng.

Phương trình vi phân cấp một dạng tách biến

Hãy giải phương trình vi phân trong các ví dụ sau như là bài tập mẫu.

Ví dụ 1. Giải (M1), mô hình tăng trưởng tự nhiên.

Ví dụ 2. Giải hai phương trình vi phân sau

a) $xy^2y' = x + 1.$ b) $(y + \sin y)y' = x + x^3.$

Ví dụ 3. Giải bài toán giá trị đầu

a) $y' \tan x = a + y,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = a,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

b) $x \cos x = (2y + e^{3y})y',\ y(0) = 0.$

Phương trình vi phân đẳng cấp

Phương trình vi phân đẳng cấp có dạng

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

trong đó F là hàm số liên tục, không là hàm đồng nhất $u \mapsto u$.

Cách giải phương trình đẳng cấp:

- Đặt $u = \frac{y}{x}$ thì $y' = (xu)' = u + xu'$. Đưa phương trình đẳng cấp thành dạng $u + xu' = F(u) \Leftrightarrow u' = \frac{F(u)-u}{x}$, $x \neq 0$.
- Khảo sát riêng trường hợp $F(u) - u = 0$.
- Xét trường hợp $F(u) - u \neq 0$ với mọi x thuộc khoảng nào đó, phân ly biến x và u như sau

$$\frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x},$$

và được giải theo dạng tách biến.

Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ 4. Giải bài toán giá trị đầu $x^2y' = y^2 - xy + x^2$, $y(1) = 2$.

Giải. Với $x \neq 0$, phương trình có dạng $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó $F(u) = u^2 - u + 1$ và $u = \frac{y}{x}$. Phương trình trở thành

$$u + xu' = F(u),\ u(1) = \frac{y(1)}{1} = 2. \qquad (1)$$

- Xét trường hợp $F(u) = u$, tức là $u^2 - u + 1 = u \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow y = x$, không thỏa điều kiện đầu $y(1) = 2$, loại trường hợp này.
- Xét $F(u) \neq u$ thì phương trình (1) được tách biến như sau

$$\frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}.$$

Suy ra $\int \frac{u'}{(u-1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$, tức là $-\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C$. Thay $x = 1, u = 2$ (đk đầu) ta suy ra $C = -1$.

Phương trình vi phân đẳng cấp

- Vậy

$$u - 1 = (1 - \ln|x|)^{-1} \Leftrightarrow u = \frac{2 - \ln|x|}{1 - \ln|x|} \Leftrightarrow y = xu = \frac{2x - x\ln|x|}{1 - \ln|x|}.$$

Mẹo nhận ra phương trình đẳng cấp: Đơn thức theo biến x và y có dạng $ax^m y^n$, $m + n$ là bậc của đơn thức. Trong phương trình vi phân cấp 1, nếu tất cả các đơn thức theo biến x và y đều có cùng bậc thì phương trình ấy có thể đưa về dạng đẳng cấp.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$xyy' - y^2 = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} \qquad (2)$$

Giải. Sinh viên tự thực hiện các bước sau

- Đưa phương trình (2) về dạng $x + xu' = F(u)$, với $u = \frac{y}{x}$.
- Xét trường hợp $F(u) = u$, (2) có nghiệm riêng nào?
- Xét trường hợp $F(u) \neq u$, (2) có nghiệm tổng quát nào?

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(TT1)}$$

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

- Chọn một nguyên hàm của f là F.
- Nhân hai vế của (TT1) với $e^{F(x)}$

$$e^{F(x)}y' + f(x)e^{F(x)}y = g(x)e^{F(x)} \qquad (1)$$

- Chú ý $\left(e^{F(x)}\right)' = f(x)e^{F(x)}$, biến đổi như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \left[e^{F(x)}y\right]' = g(x)e^{F(x)}$$

$$\Leftrightarrow e^{F(x)}y = \int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-F(x)}\left(\int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x\right).$$

Phương trình vi phân Bernouli

Phương trình vi phân Bernouli có dạng

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \text{ với } n \neq 0, n \neq 1 \qquad \text{(Bnl)}$$

Cách giải phương trình vi phân Bernouli:

- Ta không xét nghiệm tầm thường $y = 0$. Đặt $u = y^{1-n}$.
- Đưa (Bnl) thành phương trình vi phân theo biến u và x như sau:

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}, \qquad y' = \frac{u'}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}}.$$

Thay kết quả trên vào (Bnl) ta được

$$\frac{u'}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} + f(x) u^{\frac{1}{1-n}} = g(x) u^{\frac{n}{1-n}}.$$

Nhân hai vế với $(1-n)u^{-\frac{n}{1-n}}$ ta được

$$u' + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x),$$

là dạng (TT1) ở trước.

Sinh viên thực hành các ví dụ sau như là bài tập mẫu.

Ví dụ 7. Hãy giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau

a) $y' \sin x + y \cos x = \sin(x^2)$

b) $y' + y = \sin(e^x)$.

Ví dụ 8. Giải bài toán giá trị đầu sau đây:

a) $xy' = y + x^2 \sin x$, $y(\pi) = 0$.

b) $x^2 y' + 2xy = \ln x$, $y(1) = 2$.

c) $(x^2 + 1)y' + 3x(y - 1) = 0$, $y(0) = 2$.

Ví dụ 9. Giải phương trình Bernouli $x^2 y' + 2xy = y^3$.

Phương trình vi phân toàn phần (ptr vi phân đúng)

Phương trình vi đúng có dạng

$$y' = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)} \text{ hay là } P(x;y)\mathrm{d}x + Q(x;y)\mathrm{d}y = 0,$$

trong đó hai số P, Q thuộc lớp trơn cấp 1 và thỏa $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

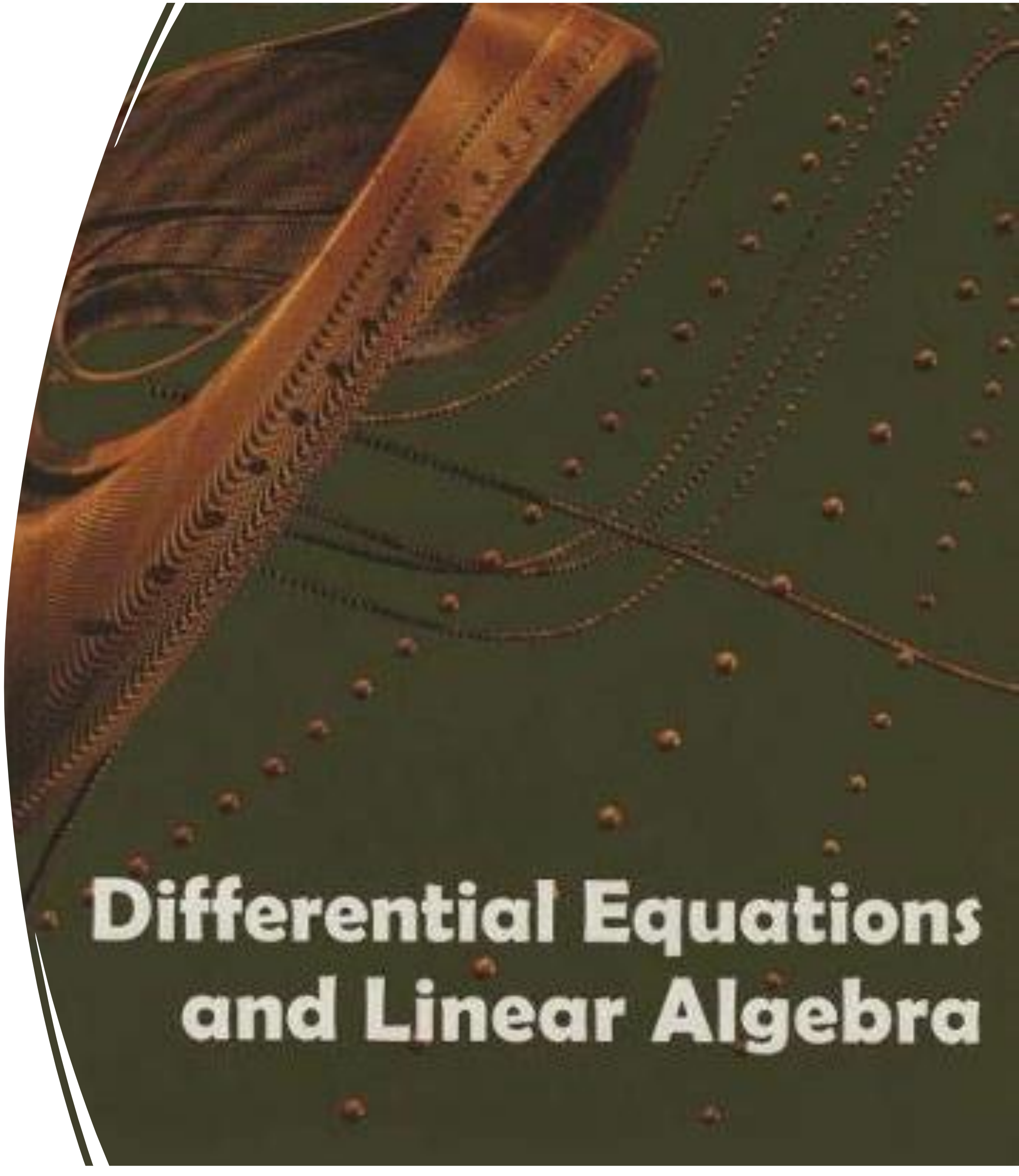
Cách giải phương trình vi phân đúng:

- Kiểm tra điều kiện đủ để $\mathbf{F} = \langle P; Q\rangle$ là trường bảo toàn trên tập nào đó trong $\mathbb{R}^2$ rồi tìm hàm thế $f(x;y)$ thỏa $\langle P; Q\rangle = \nabla f$.
- Phương trình vi phân đúng trở thành

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \text{ hay là } \mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y = 0.$$

- Nghiệm phương trình vi phân là một ẩn hàm $y = y(x)$ được định bởi phương trình $f(x;y) = k$, với k là hằng số tùy ý, phương trình này không chứa y', được xem như giải xong phương trình vi phân.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, hệ số hằng



Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, hệ số hằng

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, hệ số hằng, **không thuần nhất**

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = G(x)}, \text{ với } a, b, c \text{ là hằng số thực} \qquad \text{(TT2)}$$

Để giải (TT2), ta cần các phương trình phụ sau đây

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, hệ số hằng, **thuần nhất**

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0} \qquad \text{(TT2-C)}$$

Phương trình đặc trưng, là phương trình đại số thông thường

$$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}, \text{ với } a, b, c \text{ là hằng số thực} \qquad \text{(Đtr)}$$

Cách giải phương trình thuần nhất (TT2-C)

- Nếu phương trình (Đtr) có hai nghiệm thực phân biệt r_1 và r_2 thì phương trình (TT2-C) có nghiệm tổng quát là

$$y_c = C_1\boldsymbol{e^{r_1x}} + C_2\boldsymbol{e^{r_2x}},\ \text{với } C_1 \text{ và } C_2 \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu phương trình (Đtr) có nghiệm kép r_0 thì phương trình (TT2-C) có nghiệm tổng quát là

$$y_c = C_1\boldsymbol{e^{r_0x}} + C_2\boldsymbol{xe^{r_0x}} = (C_1 + C_2x)e^{r_0x}.$$

- Nếu phương trình (Đtr) có hai nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm \beta i$ thì phương trình (TT2-C) có nghiệm tổng quát là

$$y_c = C_1\boldsymbol{e^{\alpha x}\cos\beta x} + C_2\boldsymbol{e^{\alpha x}\sin\beta x} = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Ví dụ. Hãy tìm nghiệm tổng quát y_c của các phương trình sau đây:

a) $2y'' + 5y' - 3y = 0$ b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Hãy tìm nghiệm riêng cho ptr a) với đk đầu $y(0) = 1, y'(0) = 4.$

Dạng nghiệm riêng của ptr không thuần nhất (TT2)

Cách xác định dạng nghiệm riêng y_p của (TT2)

- Đa-mũ: Nếu $G(x) = P_n(x)e^{rx}$, P_n là đa thức bậc n, thì dạng nghiệm riêng y_p của (TT2) được chọn như sau
  - r không là nghiệm của (Đtr) thì $y_p = Q_n(x)e^{rx}$, dạng giống như $G(x)$.
  - r là một trong 2 nghiệm thực phân biệt của (Đtr) thì $y_p = xQ_n(x)e^{rx}$.
  - r là nghiệm kép của (Đtr) thì $y_p = x^2Q_n(x)e^{rx}$.
- Đa-lượng-mũ: Nếu $G(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ thì dạng nghiệm riêng y_p của (TT2) được chọn như sau
  - $\alpha \pm \beta i$ không là nghiệm của (Đtr) thì y_p có dạng giống như $G(x)$ nhưng lấy bậc đa thức là $s = \max(m; n)$.
  - $\alpha \pm \beta i$ là nghiệm của (Đtr) thì $y_p = xe^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$.
- Chồng chất nghiệm: Nếu $G(x) = \sum_{k=1}^{n} G_k(x)$ với $G_k(x)$ thuộc các dạng trên thì $y_p = \sum_{k=1}^{n} y_{p_k}$, trong đó y_{p_k} là nghiệm riêng của (TT2) với G được thay bởi G_k.

Xác định dạng nghiệm riêng của (TT2)

Ví dụ. Hãy xác định dạng nghiệm riêng, không cần tìm giá trị của hệ số, của các phương trình không thuần nhất sau đây:

a) $y'' - y' - 2y = xe^x \cos x$

b) $y'' + 4y = \cos 4x + \cos 2x$

c) $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

d) $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

e) $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

f) $y'' + 4y = e^{3x} + x \sin 2x$

Cách giải ptr (TT2)

Các bước giải phương trình (TT2)

- *Bước 1.* Tìm nghiệm tổng quát $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ của phương trình thuần nhất (TT2-C), trong đó C_1, C_2 là hằng số.
- *Bước 2.* Nếu $G(x)$ là đa-mũ, đa-lượng-mũ, hay là chồng chất các dạng này thì chọn dạng y_p của (TT2) cho phù hợp để thay vào (TT2), tìm hệ số của y_p theo *phương pháp hệ số bất định* rồi qua bước 4. Nếu $G(x)$ không thuộc dạng trên thì qua bước 3 (phương pháp *biến thiên hằng số*).
- *Bước 3.* Chọn dạng $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$, trong đó hai hàm số $u_1(x)$ và $u_2(x)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = G/a \end{cases} \quad (a \text{ là hệ số trong ptr (TT2)}).$$

- *Bước 4.* Nghiệm tổng quát của (TT2) là $y = y_c + y_p$.
- *Bước 5.* Nếu có đk đầu thì xác định hệ số cụ thể.

Ví dụ 1. Dùng phương pháp hệ số bất định, giải các bài sau

a) $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

b) $y'' - y' = xe^{x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

c) $y'' + y = e^{x} + x^{3}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

d) $y'' + y' - 2y = x + \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ví dụ 2. Dùng phương pháp biến thiên hằng số, giải các bài sau

a) $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$