Lớp 23CTT1A

Nhóm 02

Tên thành viên:

- Hồ Hồ Gia Bảo – 23120021
- Hoàng Gia Bảo – 23120022
- Nguyễn Thái Bảo – 23120023
- Nguyễn Thanh Bình – 23120024
- Phan Thị Phương Chi – 23120025
- Nguyễn Hải Đăng – 23120027

4.1 Ánh xạ nào sau đây là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$? Giải thích.
a)

$$f(x, y) = (xy, x + y)$$

Với mọi $u = (x_1, y_1)$ và $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} &f(\alpha u + v) = f(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2) \\ &= \big((\alpha x_1 + x_2) * (\alpha y_1 + y_2), \alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2\big) \\ &= (\alpha^2 x_1 y_1 + \alpha x_1 y_2 + \alpha x_2 y_1 + x_2 y_2, \alpha x_1 + \alpha x_2 + y_1 + y_2) \ (1) \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} &\alpha f(u) + f(v) \\ &= \alpha(x_1 y_1, x_1 + y_1) + (x_2 y_2, x_2 + y_2) \\ &= (\alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2, \alpha x_1 + \ \alpha x_2 + y_1 + y_2) \ (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(\alpha u + v) \neq \alpha f(u) + f(v)$.

Vậy $f(x, y) = (xy, x + y)$ không là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\text{Ta có u} = (\text{x0}, \text{y0}) \quad \text{v} = (\text{x1}, \text{y1})$$

$$Vậy\ \text{f(u)} = (\text{x0} + \text{y0}, \text{x0} - \text{y0}) \quad \text{f(v)} = (\text{x1} + \text{y1}, \text{x1} - \text{y1})$$

$$\text{Với a thuộc R ta có au} + \text{v} = (\text{ax0} + \text{x1}, \text{ay0} + \text{y1})$$

$$\text{ta có f(au + v)} = \left(\text{a(x0} + \text{y0)} + \text{x1} + \text{y1}, \text{a(x0} - \text{y0)} + (\text{x1} - \text{y1})\right)$$

$$\begin{aligned} Lại\ có\ af(u) + f(v) &= a(\text{x0} + \text{y0}, \text{x0} - \text{y0}) + (\text{x1} + \text{y1}, \text{x1} - \text{y1}) \\ &= \left(\text{a(x0} + \text{y0)} + \text{x1} + \text{y1}, \text{a(x0} - \text{y0)} + (\text{x1} - \text{y1})\right) \end{aligned}$$

$$Vậy\ f(x, y) = (x + y, x - y)\ là\ ánh\ xạ\ tuyến\ tính\ từ\ \mathbb{R}^2\ vào\ \mathbb{R}^2$$

c)

- Với $\forall u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
  - $f(u + v) = f(a + x, b + y) = (a + x, 0) = (a, 0) + (x, 0) = f(u) + f(v)$
  - $f(\alpha u) = f(\alpha a, \alpha b) = (\alpha a, 0) = \alpha(a, 0) = \alpha f(u)$

    $\Rightarrow f(x, y) = (x, 0)$ *là ánh xạ tuyến tính*

d) $f(x, y) = (x^2, 0)$

Với mọi u = $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có:
$f(\alpha u) = f(\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha^2 . x_1^2, 0) = \alpha^2 . f(u) \neq \alpha . f(u)$
Do đó ánh xạ $f(x, y) = (x^2, 0)$ không phải là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

4.2 Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 2y + z)$$

Chứng minh $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Với mọi $u = (x_1, y_1, z_1)$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned}
&f(\alpha u + v)\\
&= f(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)\\
&= (\alpha x_1 + x_2 + 2(\alpha y_1 + y_2) + 3(\alpha z_1 + z_2), 2(\alpha x_1 + x_2) + 2(\alpha y_1 + y_2) + \alpha z_1 + z_2)\\
&= (\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + 3\alpha z_1 + x_2 + 2y_2 + 3z_2, 2\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1 + 2x_2 + 2y_2 + z_2)\\
&= (\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + 3\alpha z_1, 2\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + \alpha z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2, 2x_2 + 2y_2 + z_2)\\
&= \alpha(x_1 + 2y_1 + 3z_1, 2x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2, 2x_2 + 2y_2 + z_2)\\
&= \alpha f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

Suy ra: f là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$.

Vậy $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ (đpcm).

4.3 Cho ánh xạ $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ được xác định bởi:

$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z)$

Chứng minh f là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$

Với $\forall u = (x_1, y_1, z_1)$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(\alpha u + v) = f(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)$$

$$= \big((\alpha x_1 + x_2) - 2(\alpha y_1 + y_2) + 2(\alpha z_1 + z_2), -(\alpha x_1 + x_2) + 2(\alpha y_1 + y_2) - 3(\alpha z_1 + z_2), 2(\alpha x_1 + x_2) - 4(\alpha y_1 + y_2) + 5(\alpha z_1 + z_2)\big)$$

$= (\alpha x_1 - 2\alpha y_1 + 2\alpha z_1, -\alpha x_1 + 2\alpha y_1 - 3\alpha z_1, 2\alpha x_1 - 4\alpha y_1 + 5\alpha z_1) + (x_2 - 2y_2 + 2z_2, -x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 - 4y_2 + 5z_2)$

$= \alpha(x_1 - 2y_1 + 2z_1, -x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 - 4y_1 + 5z_1) + (x_2 - 2y_2 + 2z_2, -x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 - 4y_2 + 5z_2)$

$= \alpha f(u) + f(v)$

Vậy $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z)$ là ánh xạ tuyến tính.

4.4 Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sao cho $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 2) = (1, 3)$ và $f(1, 2, 1) = (2, -1)$.

Đặt $u1 = (1,1,1)$, $u2 = (1,1,2)$, $u3 = (1,2,1)$

Ta có $f(u1) = (1,2)$, $f(u2) = (1,3)$, $f(u3) = (2,-1)$

Với $u = (x, y, z)$ lập ma trận mở rộng $(u1^T, u2^T, u3^T | u^T)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{d_1-d_2 \\ d_1-d_3 \\ d_3 \leftrightarrow d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & y-x \end{array}\right)$$

$$Vậy\ ta\ có\ u = (3x-y-z).u1 + (z-x).u2 + (y-x).u3$$

$$Vậy\ f(u) = (3x-y-z)f(u1) + (z-x)f(u2) + (y-x)f(u3)$$
$$= (3x-y-z).(1,2) + (z-x).(1,3) + (y-x).(2,-1)$$

$$= (3x-y-z+z-x+2y-2x, 6x-2y-2z+3z-3x+x-y) = (y, 4x-3y+z)$$

$$Vậy\ f(x,y,z) = (y, 4x-3y+z)$$

4.5. *Cho* $u_1 = (1,-1), u_2 = (-2,3)$. *Hãy xác định toán tử tuyến tính* $f \in L(R^2)$ *sao cho*

$f(u_1) = u_2$ và $f(u_2) = -u_1$.

Đặt $B = \{u_1, u_2\}$. *Dễ dàng chứng minh* được B *là cơ sở của* R^2.

Cho $u = (x,y) \in R^2$. *Lập ma trận mở rộng*

$({u_1}^T {u_2}^T | u^T) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ -1 & 3 & y \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3x+2y \\ 0 & 1 & x+y \end{array}\right)$

$Vậy\ [u]_B = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+y \end{pmatrix} \longrightarrow u = (3x+2y)u_1 + (x+y)u_2$

$\longrightarrow f(u) = (3x+2y)f(u_1) + (x+y)f(u_2) = (3x+2y)(-2,3) + (x+y)(-1,1) = (-7x - 5y, 10x+7y)$

$Vậy\ f(x,y) = (-7x - 5y, 10x+7y)$

4.6 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, -x + 2y - 3z, 2x - 4y + 5z)$$

a) $u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,0), u_3 = (0,0,0), u_4 = (0,1,2)$

Ta có: $f(u_1) = (1,-2,3), f(u_2) = (0,0,0), f(u_3) = (0,0,0), f(u_4) = (2,-4,6)$.

Vì $f(u_2)$ và $f(u_3)$ bằng 0 nên $u_2, u_3 \in Kerf$.

b) $v_1 = (0,1,-1), v_2 = (1,-1,2), v_3 = (0,0,0), v_4 = (1,1,1)$

Ta có $v \in Imf \Leftrightarrow f(x,y,z) = v$ có nghiệm. Ta xét các ma trận mở rộng tương ứng:

$$\widetilde{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm nên $v_1 \in Imf$.

$$\widetilde{A_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm nên $v_2 \in Imf$.

$$\widetilde{A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm nên $v_3 \in Imf$.

$$\widetilde{A_4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình vô nghiệm nên $v_4 \notin Imf$.

4.7 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, 2x - 3y + z).$$

Tìm cơ sở cho Imf và $Kerf$.

+ Cơ sở của Imf:

Gọi $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ta xét:

$f(e_1) = (1,2)$

$f(e_2) = (-1,-3)$

$f(e_3) = (2,1)$

Khi đó Imf sinh bởi $\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \}$

Ta lập:

$$\begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 - 3d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó 1 cơ sở của Imf là $\{ f(e_1) = (1,2), f(e_2) = (-1,-3) \}$

+ Cơ sở của Kerf:

Đặt u = {x, y, z} ∈ $\mathbb{R}^3$, ta có u ∈ Kerf thì f(u) = 0, khi đó ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ (1)

Ma trận hóa hệ phương trình (1) ta có ma trận mở rộng:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 := -d_2]{d_1 := d_1 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là: (x, y, z) = (–5t, –3t, t) với t ∈ ℝ
Nghiệm cơ bản của hệ là v = (–5, –3, 1)
Do đó một cơ sở của Kerf là { v = (–5, –3, 1) }.

4.8. *Cho* f *là toán tử tuyến tính trên* R^3 *xác định bởi*

$$f(x, y, z) = (x + 3y - z, x - 2y + 4z, 2x - y + 5z). \text{ Tìm cơ sở cho } Imf \text{ và } Kerf.$$

Tìm cơ sở cho Imf:

Gọi $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *là cơ sở chính tắc của* R^3. *Ta có*:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,2), f(e_2) = f(0,1,0) = (3,-2,-1), f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,4,5).$

Khi đó Imf *sinh bởi* $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow r(A) = 2.$$

$\longrightarrow$ *Vậy* Imf *có 1 cơ sở là* $\{(1,1,2), (0,-5,-7)\}$

$Tìm\ cơ\ sở\ cho\ Kerf$:

Đặt $u = (x, y, z) \in R^3. Ta\ có$

$$u \in Kerf \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ trên\ ta$ được: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Hệ\ phương\ trình\ có\ nghiệm$

$(x, y, z) = (-2t, t, t)\ với\ t \in R$

$Với\ t = 1\ th$ì $u = (-2,1,1). Vậy\ Kerf\ có\ một\ cơ\ sở\ l$à $\{(-2,1,1)\}$.

4.9 Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ có dạng ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tìm cơ sở cho *Imf* và *Kerf*.

* Tìm cơ sở của $Ker\ f$:

$u(x,y,z) \in Ker\ f \Rightarrow f(u) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1 - 3d_2]{d_3 + 5d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm là: $(x,y,z) = (t,-t,t), t \in \mathbb{R}$

Nghiệm cơ bản của hệ là: $u = (1,-1,1)$

Vậy cơ sở của $Ker\ f = \{(1,-1,1)\}$

* Tìm cơ sở của $Im\ f$

$Gọi\ \mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là $cơ\ sở\ chính\ tắc\ của\ \mathbb{R}^3. Ta\ có$:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (3,1,-2)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (2,1,-3)$

$\Rightarrow Im\ f$ được sinh $bởi$ $\{(1,0,1),(3,1,-2),(2,1,-3)\}$

Lập ma trận: $A = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 2d_1]{d_2 - 3d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\+ Vậy cơ sở của $Im\ f$ là $\{(1,0,1),(0,1,-5)\}$

4.10 Cho ánh xạ tuyến tính

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z - t, x + 2y - z - 2t, x + 3y - 3z - 3t).$$

Tìm một cơ sở của *Kerf* và một cơ sở của *Imf*.

- Tìm cơ sở của $Ker\ f$:
  + $u(x, y, z, t) \in Ker\ f \Rightarrow f(u) = 0$

    $\Rightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x + 2y - z - 2t = 0 \\ x + 3y - 3z - 3t = 0 \end{cases}$
  + Ma trận hoá hệ phương trình:
    - $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - Hệ phương trình có nghiệm là: $(x, y, z, t) = (-3z, 2z + t, z, t)$
    - Nghiệm cơ bản của hệ là: $u_1 = (-3, 2, 1, 0)$và $u_2 = (0,1,0,1)$
    - Vậy cơ sở của $Ker\ f = \{(-3,2,1,0), (0,1,0,10\}$
- Tìm cơ sở của $Im\ f$
  + $Gọi\ \mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^4. Ta\ có$:
    - $f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,1,1)$
    - $f(e_2) = f(0,1,0,0) = (1,2,3)$
    - $f(e_3) = f(0,0,1,0) = (1, -1, -3)$

- $f(e_4) = f(0,0,0,1) = (-1,-2,-3)$
  $\Rightarrow Im\ f$ được sinh $bởi$ $\{(1,1,1),(1,2,3),(1,-1,-3),(-1,-2,-3)\}$

\+ Lập ma trận: $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \\ f(e_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{d_3+2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\+ Vậy cơ sở của $Im\ f\ l$à $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$

4.11 Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho Kerf = ⟨(1, 1, 1), (0, 1, 2)⟩ và Imf = ⟨(1, 1, 1)⟩.

$$V\text{ì } Imf = \langle(1,1,1)\rangle\ nên\ Imf = \{u = \alpha(1,1,1) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$Ta\ có\ B = \{(1,1,1)\}$ là $cơ\ sở\ của\ Imf\ do$ $(1,1,1)$ độc $lập$ tuyến tính

$$V\text{ì } Kerf = \langle(1,1,1),(0,1,2)\rangle\ nên\ Kerf = \{v = t(1,1,1) + s(0,1,2) | t,s \in \mathbb{R}\}$$

$Ta\ có\ B1 = \{(1,1,1),(0,1,2)\}$ là $cơ\ sở\ của\ Kerf\ do\ B1$ độc $lập$ tuyến tính

$$V\text{ì } Imf = \{u = \alpha(1,1,1) | \alpha \in \mathbb{R}\}\ nên$$

$$f(1,0,0) = (a,a,a)$$

$$f(0,1,0) = (b, b, b)$$

$$f(0,0,1) = (c, c, c) \text{ Với a, b, c } \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$Nên\ f(x, y, z) = (ax + by + cz, ax + by + cz, ax + by + cz)$$

Xét hệ phương trình thuần nhất với ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Giải\ hệ\ ta\ có \begin{cases} x = \dfrac{-b.t1 - c.s1}{a} (1) \\ y = t1 \\ z = s1 \end{cases}$$

$$Ta\ lại\ có\ B1 = \{(1,1,1), (0,1,2)\}\ là\ cơ\ sở\ của\ Kerf\ nên$$

$$Xét\ u = (x, y, z)\ \ sao\ cho\ f(u)\ \in Imf\ ta\ có$$

$$u = (t, t + s, t + 2s)\ Thay\ t + s = t1, t + 2s = s1\ ta\ có$$

$$u = (2t1 - s1, t1, s1)\ (2)$$

$$Từ\ (1)(2) ta\ có \begin{cases} b = -2a \\ c = a \end{cases}$$

$$Vậy f(x, y, z) = (ax - 2ay + az, ax - 2ay + az, ax - 2ay + az)\ với\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

4.12 Tìm $f \in L(R^3)$ sao cho *Kerf* = ⟨(1, 1, 1)⟩ và *Imf* = ⟨(1, 1, 1), (0, 1, 2)⟩

- Vì $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ là 1 *cơ sở của* $\mathbb{R}^3$
  $\Rightarrow$ Để *xác định f, ta xác định* $f(1,1,1), f(1,1,0)$ và $f(1,0,0)$
- Vì $Ker\ f = \langle(1,1,1)\rangle$ *nên* $f(1,1,1) = 0$
- Vì $Im\ f = \langle(1,1,1),(0,1,2)\rangle$ *nên* $f(1,1,0), f(1,0,0) \in \langle(1,1,1),(0,1,2)\rangle$
- Với $\forall(a,b,c) \in \langle(1,1,1),(0,1,2)\rangle$, $\exists s,t \in \mathbb{R}$:
  + $(a,b,c) = (s, s+t, s+2t)$
    $\Rightarrow \begin{cases} s = a \\ s+t = b \\ s+2t = c \end{cases}$ có *nghiệm*
  + Ma trận hoá hệ phương trình:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[d_2-d_1]{d_3-d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c-b \end{array}\right) \xrightarrow{d_3-d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right)$$

  + Định lý Kronecker – Capelli: $a - 2b + c = 0$
- Vậy: $f(1,1,0) = (a_1, b_1, c_1), f(1,0,0) = (a_2, b_2, c_3)$ *với* $a_i - 2b_i + c_i = 0,$ *với* $i \in \{1,2\}$
- Với $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *ta có*:

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + x(1,0,0)$$
$$\Rightarrow f(x,y,z) = zf(1,1,1) + (y-z)f(1,1,0) + xf(1,0,0)$$
$$\Rightarrow f(x,y,z) = (y-z)f(1,1,0) + xf(1,0,0)$$
$$\Rightarrow f(x,y,z) = (a_2x + (a_1-a_2)y - a_1z, b_1y - b_1z, c_2x + (c_1-c_2) - c_1z)$$
$$\text{với } a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \text{ thoả } a_i - 2b_i + c_i = 0, \text{với } i \in \{1,2\}$$

4.13 *Cho* $f \in L(R^3, R^2)$ *xác định bởi*:

$$f(x,y,z) = (x + y - z, 2x - 3y + z).$$

$a)$ *Xác định ma trận biểu diễn của* f *theo cặp cơ sở chính tắc của* R^3 *và* R^2.

Đặt $B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ *là cơ sở chính tắc của* R^3

Đặt $C = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$ *là cơ sở chính tắc của* R^2

Ta có: $f(u_1) = (1,2), f(u_2) = (1,-3), f(u_3) = (-1,1)$.

Lập: $\left({v_1}^T {v_2}^T \middle| f({u_1}^T)\ f({u_2}^T)\ f({u_3}^T)\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$ *Vậy* $[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ *Xác định ma trận biểu diễn của* f *theo cặp cơ sở* $B = \{u_1 = (1,0,-1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$

(*của* R^3) *và* $B' = \{v_1 = (1,1), v_2 = (2,3)\}$ (*của* R^2).

Ta có: $f(u_1) = (2,1), f(u_2) = (2,-1), f(u_3) = (1,2)$.

Lập $\left({v_1}^T {v_2}^T \middle| f({u_1}^T)\ f({u_2}^T)\ f({u_3}^T)\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\longrightarrow$ *Vậy* $[f]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4.14 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x,y) = (x - 2y, 2x + y)$.

a) Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$, với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.
Với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$, khi đó ta có:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = ([f(e_1)]_{\mathcal{B}_0}\ \ [f(e_2)]_{\mathcal{B}_0}) = (f(e_1)^T\ \ f(e_2)^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$, với $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,-3), u_2 = (-1,2)\}$

Ta có:

$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0).[f]_{\mathcal{B}_0}.(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = (\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1}.[f]_{\mathcal{B}_0}.(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})$

Ta có:

$(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = (u_1^T, u_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có: $det(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = -1$

Đồng thời $adj(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Do đó: $(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{det(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})}.adj(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = \frac{1}{-1}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Như vậy:

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1}.[f]_{\mathcal{B}_0}.(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 10 \\ -20 & 15 \end{pmatrix}$$

4.15 *Cho toán tử tuyến tính* $f \in L(R^3)$ *xác định bởi*:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - 2z, x - 3y + 3z).$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathrm{B} = \{\mathrm{u_1 u_2 u_3}\}$ của R^3, với $\mathrm{u}_1 = (-1,2,1), \mathrm{u}_2 = (0,1,1), \mathrm{u}_3 = (0,-3,-2)$.

Gọi B_0 *là cơ sở chính tắc của* R^3, *ta có*: $[f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$Ta\ có$: $(B_0 \longrightarrow B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow (B \longrightarrow B_0) = (B_0 \longrightarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$[f]_B = (B_0 \longrightarrow B)^{-1}[f]_{B_0}(B_0 \longrightarrow B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -12 & 0 & 12 \\ -13 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4.16 Cho toán tử tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - 2z, x - 3y + 3z)$$

a.

* Tìm cơ sở của $Ker\ f$:

$+\quad u(x,y,z) \in Ker\ f \Rightarrow f(u) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3d_3 + 2d_2 \\ 3d_1 + d_2 \\ \frac{1}{3}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm là: $(x,y,z) = (0,t,t), t \in \mathbb{R}$

Nghiệm cơ bản của hệ là: $u = (0,1,1)$

Vậy cơ sở của $Ker\ f = \{(0,1,1)\}$

* Tìm cơ sở của $Im\ f$

$Gọi\ \mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ $là\ cơ\ sở\ chính\ tắc\ của\ \mathbb{R}^3. Ta\ có$:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,2,-3)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,-2,3)$

$\Rightarrow Im\ f$ được sinh $bởi$ $\{(1,1,1), (-1,2,-3), (1,-2,3)\}$

Lập ma trận: $A = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2+d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

+ Vậy cơ sở của $Im\ f\ l$à $\{(1,1,1), (0,3,-2)\}$

b. $\beta = \{(1,0,1), (1,-2,0), (2,1,3)\}\ của\ \mathbb{R}^3$

Ta có:

$f(u_1) = (2,-1,4)$

$f(u_2) = (3,-3,7)$

$f(u_3) = (4,-2,8)$

Lập $(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T | \ f(u_1)^T \quad f(u_2)^T \quad f(u_3)^T$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3-d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-d_3]{\substack{d_2-3d_3 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & -15 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2+2d_3 \\ d_1-d_2-2d_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & -26 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 10 \end{array}\right)$$

Vậy $f_\beta = \begin{pmatrix} -11 & -26 & -22 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

4.17 Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = u_2 + u_3$, $f(u_2) = u_3 + u_1$ và $f(u_3) = u_1 + u_2$, với u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1).

a)

$$Với\ u = (x, y, z)\ lập\ ma\ trận\ mở\ rộng\ (u1^T, u2^T, u3^T|u^T)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow[-d_2]{\substack{d_2-d_3 \\ d_1+d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x+y-z \\ 0 & 1 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & z-x \end{array}\right)$$

$$Vậy\ ta\ có\ u = (x+y-z)u1 + (z-y)u2 + (z-x)u3$$

$$\Rightarrow f(u) = (x+y-z)f(u1) + (z-y)f(u2) + (z-x)f(u3)$$

$$= (x+y-z)(u2+u3)+(z-y)(u1+u3)+(z-x)(u1+u2)$$

$$= (x+y-z)(1,1,2)+(z-y)(1,2,2)+(z-x)(2,1,2)$$

$$= (x+y-z+z-y+2z-2x, x+y-z+2z-2y+z-x, 2x+2y-2z+2z-2y+2z-2x)$$

$$= (2z-x, 2z-y, 2z)$$

$$Vậy\ f(x,y,z) = (2z-x, 2z-y, 2z)$$

b)

$$Ta\ có\ [f]_{Bo} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(B_0 \to B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_0 \to B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B = (B_0 \to B)^{-1}.[f]_{Bo}.(B_0 \to B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.18 Cho $\beta = \{(1,-1),(-2,3)\}$ là cơ sở $\mathbb{R}^2$. Hãy xác định $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Gọi β_0 là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Ta có: $[f]_\beta = (\beta_0 \to \beta)^{-1}[f]_{\beta_0}(\beta_0 \to \beta)$

$\Rightarrow [f]_{\beta_0} = (\beta_0 \to \beta)[f]_\beta(\beta_0 \to \beta)^{-1}$.

Ta có: $(\beta_0 \to \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\beta_0 \to \beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Suy ra: $[f]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}$

Lại có: $[f]_{\beta_0} = ([f(e_1)]_{\beta_0}\ [f(e_2)]_{\beta_0}) = ([f(e_1)]^T\ [f(e_2)]^T)$

Suy ra: $f(e_1) = (-11, 19)$ và $f(e_2) = (-6,11)$

$\Rightarrow f(x,y) = \big(x(-11,19) + y(-6,11)\big)$.

Vậy $f(x,y) = (-11x - 6y, 19x + 11y) \in L(\mathbb{R}^2)$.

4.19 Cho B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, −1)} là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Hãy xác định tính $f \in L(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+ $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f(1,1,1) = (1,1,1) + (1,1,0) = (2,2,1) \\ f(1,1,0) = (1,1,0) + (1,0,-1) = (2,1,-1) \\ f(1,0,-1) = (1,1,1) + (1,0,-1) = (2,1,0) \end{cases}$

+ $f(x,y,z) = \ (a_1x + b_1y + c_1z \quad a_2x + b_2y + c_2z \quad a_3x + b_3y + c_3z)$
    - $f(1,1,1) = \ (a_1 + b_1 + c_1 \quad a_2 + b_2 + c_2 \quad a_3 + b_3 + c_3) = (2 \quad 2 \quad 1)$
    - $f(1,1,0) = \ (a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad a_3 + b_3) = (2 \quad 1 \quad -1)$
    - $f(1,0,-1) = \ (a_1 - c_1 \quad a_2 - c_2 \quad a_3 - c_3) = (2 \quad 1 \quad 0)$

    $\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2, b_1 = c_1 = 0 \\ a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 1 \\ a_3 = 2, b_3 = \ -3, c_3 = 2 \end{cases}$

+ Vậy $f(x,y,z) = (2x, 2x - y + z, 2x - 3y + 2z)$

4.20 Cho cặp cơ *sở* $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,-1)\}$ (của $\mathbb{R}^3$) và $C = \{(2,-1),(-3,2)\}$ (của $\mathbb{R}^2$). Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho

$[f]_{\mathcal{B},C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Gọi $\mathcal{B}_0, C_0$ lần lượt là 2 cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

Ta có:

$[f]_{\mathcal{B}_0,C_0} = (C_0 \longrightarrow C).[f]_{\mathcal{B},C}.(\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0) = (C_0 \longrightarrow C).[f]_{\mathcal{B},C}.(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1}$

Ta có:

$(C_0 \longrightarrow C) = ((2,-1)^T \ \ (-3,2)^T) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = ((1,1,1)^T \;\; (1,1,0)^T \;\; (1,0,-1)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$det(\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0) = -1$

Đồng thời: $adj(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó: $(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{det(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})}.adj(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = \frac{1}{-1}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Như vậy:

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}).[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.(\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 5 & -7 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & 22 & -10 \\ 11 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

Suy ra: $f(x,y,z) = (-17x + 22y - 10z,\; 11x - 14y + 7z)$