Họ và tên: Nguyễn Thái Bảo
Mã số sinh viên: 23120023
Mã lớp: 23CTT1A

BÀI TẬP VỀ NHÀ MÔN THỰC HÀNH VI TÍCH PHÂN 1B

Câu 1. Quy tắc móc xích của đạo hàm

1.1. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos\sqrt{\sin(\tan \pi x)}$.

Giải:
$$f'(x) = -\sin\sqrt{\sin(\tan\pi x)} \cdot \left[\sqrt{\sin(\tan\pi x)}\right]'$$
$$= -\sin\sqrt{\sin(\tan\pi x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(\tan\pi x)}} \cdot \left[\sin(\tan\pi x)\right]'$$
$$= \frac{-\sin\left(\sqrt{\sin(\tan\pi x)}\right)}{2\sqrt{\sin(\tan\pi x)}} \cdot \cos(\tan\pi x) \cdot \left[\tan(\pi x)\right]'$$
$$= \frac{-\sin\left(\sqrt{\sin(\tan\pi x)}\right) \cdot \cos(\tan\pi x)}{2\sqrt{\sin(\tan\pi x)}} \cdot \sec^2(\pi x) \cdot \pi$$

Vậy: $$f'(x) = -\frac{\pi \cdot \sec^2(\pi x) \cdot \cos(\tan\pi x) \cdot \sin\left(\sqrt{\sin(\tan\pi x)}\right)}{2\sqrt{\sin(\tan\pi x)}}$$

1.2. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^x$

Giải: $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$
$$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)'$$
$$= e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)'$$
$$= e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1)$$
$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Vậy: $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

1.3. Cho $F(x) = f(x f(x f(x)))$, với $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, $f'(3) = 6$. Tìm $F'(1)$.

Giải: Ta có: $$F'(x) = f'\left(x f(x f(x))\right) \cdot \left[x f(x f(x))\right]'$$
$$= f'(x f(x f(x))) \cdot \left[f(x f(x)) + x \cdot f'(x f(x)) \cdot (x f(x))'\right]$$
$$= f'(x f(x f(x))) \cdot \left[f(x f(x)) + x \cdot f'(x f(x)) \cdot [f(x) + x \cdot f'(x)]\right]$$

Thay $x = 1$: $$F'(1) = f'(f(f(1))) \cdot \left[f(f(1)) + f'(f(1)) \cdot (f(1) + f'(1))\right]$$
$$= f'(f(2)) \cdot \left[f(2) + f'(2) \cdot (2 + 4)\right]$$
$$= f'(3) \cdot (3 + 5.6)$$
$$= 6 \cdot 33 = 198$$

Vậy: $F'(1) = 198$.

Câu 2. Ứng dụng của đạo hàm tính vận tốc tức thời, tốc độ biến thiên tức thời.

2.1. Bệnh nhân A bị đau dạ dày và đang được điều trị. Lượng vi khuẩn HP gây đau dạ dày tại ngày thứ m là:

$$F(m) = 500\ln(2t+1) + 2000$$

Tìm công thức tính tốc độ phát triển của vi khuẩn HP. Sau 2 ngày thì nhóm vi khuẩn này có tốc độ phát triển bằng bao nhiêu?

Giải:

- Tốc độ phát triển của vi khuẩn HP là đạo hàm của hàm số lượng vi khuẩn HP $F(m) = 500\ln(2t+1) + 2000$

$\Rightarrow v(m) = F'(m) = 500 \cdot \dfrac{2}{2t+1} = \dfrac{1000}{2t+1}$ (con / ngày)

- Sau 2 ngày, nhóm vi khuẩn này có tốc độ phát triển là:

$v(2) = \dfrac{1000}{2\cdot 2+1} = 200$ (con / ngày)

Vậy: $v(m) = \dfrac{1000}{2t+1}$ (con / ngày) và $v(2) = 200$ (con / ngày).

2.2. Cho 1 vật di chuyển theo phương trình $s(t) = t^2 - 40t + 10$. Trong đó t là thời gian chuyển động (s), s là quãng đường di chuyển của vật (m). Hỏi tại thời điểm nào thì vật dừng lại?

Giải: Vận tốc là đạo hàm của hàm tính quãng đường nên ta có:

$$v(t) = s'(t) = 2t - 40 \text{ (m/s)}$$

Vật dừng lại tức là vận tốc tức thời của vật bằng 0. Ta có:

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 40 = 0$

$\Leftrightarrow t = 20$ (s)

Vậy tại thời điểm $t = 20$ (s) thì vật dừng lại.

2.3. Một thùng hình trụ chứa 100 000 ~~ga-lông~~ m^3 nước, chảy ra ngoài tại đáy thùng trong 1 giờ, thì theo định luật Torricelli, thể tích V của nước còn lại trong thùng sau t phút chảy được cho bởi công thức: $V(t) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$, $0 \le t \le 60$.

a) Tìm tốc độ thoát nước (tức thời) như một hàm theo t. Đơn vị của tốc độ này là gì? b) Tại các thời điểm $t = 0, 10, 20,$ ~~30, 40~~$, 50, 60$ phút, tìm tốc độ chảy và lượng nước còn lại trong thùng.

Giải:

a) Theo đề bài, ta có: $V(t) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$, $0 \le t \le 60$.

Vận tốc thoát nước là đạo hàm của hàm thể tích: $V'(t) = 100000 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)$

$= \dfrac{10000}{3} \cdot \left(\dfrac{t}{60} - 1\right)$ (m^3 / phút)

Vì $V'(t) \le 0 \;\; \forall t \in [0; 60]$, mà tốc độ có giá trị không âm nên hàm tốc độ thoát nước tức thời có dạng:

$v(t) = |V'(t)| = \dfrac{10000}{3} \cdot \left|\dfrac{t}{60} - 1\right|$

$= \dfrac{10000}{3} \cdot \left(1 - \dfrac{t}{60}\right)$, $0 \le t \le 60$.

Vậy $v(t) = \dfrac{10000}{3} \cdot \left(1 - \dfrac{t}{60}\right)$ (m^3 / phút), $0 \le t \le 60$.

Đơn vị của tốc độ này là: m^3 / phút

b) • $t = 0$: $v(0) = \frac{10000}{3} \cdot \left(1 - \frac{0}{60}\right) = \frac{10000}{3}$ (m^3/phút)

$V(0) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{0}{60}\right)^2 = 100\,000$ (m^3)

• $t = 10$: $v(10) = \frac{10000}{3} \cdot \left(1 - \frac{10}{60}\right) = \frac{25000}{9}$ (m^3/phút)

$V(10) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{10}{60}\right)^2 = \frac{625000}{9}$ (m^3)

• $t = 20$: $v(20) = \frac{10000}{3} \cdot \left(1 - \frac{20}{60}\right) = \frac{20000}{9}$ (m^3/phút)

$V(20) = 100\,000 \cdot \left(1 - \frac{20}{60}\right)^2 = \frac{400000}{9}$ (m^3)

• $t = 50$: $v(50) = \frac{10000}{3} \cdot \left(1 - \frac{50}{60}\right) = \frac{5000}{9}$ (m^3/phút)

$V(50) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{50}{60}\right)^2 = \frac{25000}{9}$ (m^3)

• $t = 60$: $v(60) = \frac{10000}{3} \cdot \left(1 - \frac{60}{60}\right) = 0$ (m^3/phút)

$V(60) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{60}{60}\right)^2 = 0$ (m^3)

(với $v(t)$ và $V(t)$ lần lượt là tốc độ chảy và lượng nước còn lại trong thùng tại thời điểm t)

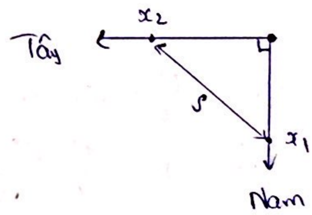
2.4. Hai chiếc xe bắt đầu di chuyển từ cùng một điểm. Một chiếc đi về phía nam với tốc độ 60 mi/h và chiếc còn lại di chuyển về phía tây với tốc độ 25 mi/h. Khoảng cách giữa 2 chiếc xe tăng lên ở mức nào sau đó 2 giờ?

Giải: Gọi: t là thời gian (đơn vị: h)

x_1 là khoảng cách của xe đi về phía nam so với điểm xuất phát sau t giờ (đơn vị: mi)

x_2 là khoảng cách của xe đi về phía tây so với điểm xuất phát sau t giờ (đơn vị: mi)

s là khoảng cách giữa 2 xe sau t giờ (đơn vị: mi)



Ta có: $x_1 = 60t$ (mi) và $x_2 = 25.t$ (mi)

Ta có công thức liên hệ giữa các biến:

$$s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{(theo định lý Pytago)}$$

Đạo hàm hai vế của phương trình theo t, ta có:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2.x_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + 2.x_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{60t.60 + 25t.25}{\sqrt{(60t)^2 + (25t)^2}} = 65 \text{ (mi/h)}$$

Nhận xét: tốc độ thay đổi khoảng cách hai xe là một hằng số và bằng 65 mi/h.

Vậy sau 2 giờ, khoảng cách giữa 2 chiếc xe tăng lên với tốc độ 65 mi/h.

2.5. Nếu một quả cầu tuyết tan chảy sao cho diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ 1 cm^2/phút, tìm tốc độ giảm của đường kính khi đường kính là 10 cm.

Giải: Gọi S là diện tích (cm^2), a là đường kính quả cầu tuyết (cm), t là thời gian (đơn vị phút)

Ta có công thức: $S = \pi . a^2$ (cm^2)

Đạo hàm 2 vế phương trình theo t, ta được: $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi . a^2) = 2\pi . a . \frac{da}{dt}$

Từ giả thiết ta có: $\frac{dS}{dt} = -1$ (âm vì diện tích đang giảm) và cần tìm $\frac{da}{dt}$. Tại thời điểm $a = 10$, ta có:

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi a.\frac{da}{dt} \Rightarrow -1 = 2\pi.10.\frac{da}{dt} \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\frac{1}{20\pi}$$

Vậy khi đường kính ~~giảm~~ là 10 cm thì đường kính đang giảm với tốc độ $\frac{1}{20\pi} \approx 0,0159$ cm/phút.

Câu 3. Tích phân suy rộng loại 2.

3.1. Tính $\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Giải: Ta thấy rằng $f(x) = x.\ln(x)$ không xác định tại $x = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\ln(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\ln(x)dx$$

Đặt $I = \int_t^1 x\ln(x)\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x) \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \ln(x).\frac{x^2}{2}\Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{x}{2}dx$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Big|_t^1 = -\frac{1}{4} - \frac{t^2}{2}\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)$$

Từ đó ta có: $\lim_{t\to 0^+} I = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\lim_{t\to 0^+}\left(t^2.\ln t - \frac{t^2}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{t^2}} \quad \text{(dạng vô định } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}.\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-2/t^3} \quad \text{(dùng quy tắc L'Hospital)}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}.0 = -\frac{1}{4}.$$

Vậy: $\int_0^1 x.\ln(x)\,dx = -\frac{1}{4}$ (hội tụ).

3.2. Tính: $I = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$

Giải: Ta thấy $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}$ không xác định tại $x = 0$

$$\Rightarrow I = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} 2.\int_t^1 \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(2.e^{\sqrt{x}+1}\Big|_t^1\right)$$

$$= 2.e^2 - 2.\lim_{t\to 0^+}\left(e^{\sqrt{t}+1}\right)$$

$$= 2.e^2 - 2.e = 2e(e-1)$$

Vậy tích phân suy rộng loại 2 $I = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ và có giá trị là: $2e(e-1)$.