Tuần 4
CỰC TRỊ

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, đh KHTN tpHCM

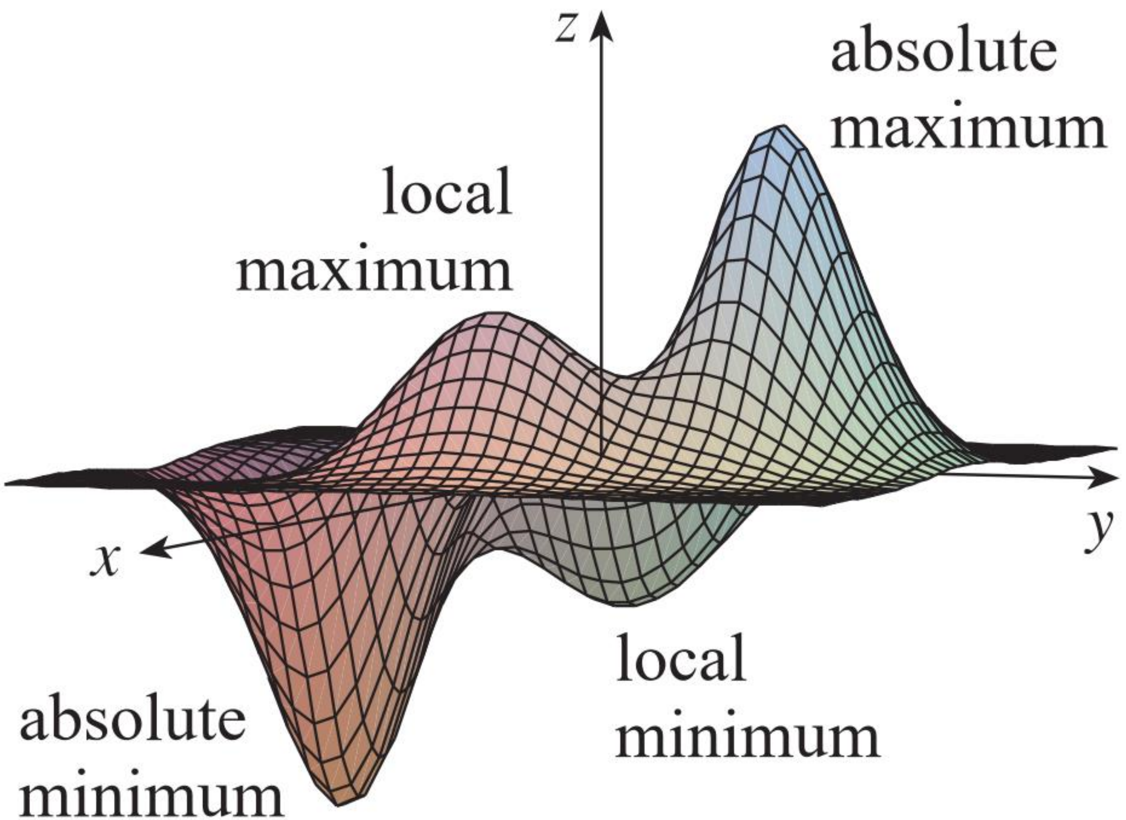
Quy ước tên tài liệu:

[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th*, tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)

Minh họa các loại điểm cực trị của đồ thị hàm số f có hai biến:

Các khái niệm về cực trị tự do



Các khái niệm về cực trị

Cho một hàm số $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Ta nói $\mathbf{a} \in D$ là *điểm cực đại địa phương*, hay là *điểm cực đại tương đối* của hàm số f có nghĩa là tồn tại quả cầu $B(\mathbf{a}; r) \subset D$ sao cho $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}; r), f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \qquad (*)$
- Khi đổi chiều bất đẳng thức ở $(*)$, ta có định nghĩa của *điểm cực tiểu địa phương* của hàm số f.
- Cực đại hay cực tiểu địa phương được gọi chung là *cực trị địa phương*, hay nói vắn tắt là *cực trị*.
- Nếu $\mathbf{a}$ là điểm cực trị của hàm số f thì $(\mathbf{a}; f(\mathbf{a}))$ được gọi là *điểm cực trị của đồ thị hàm số f*.
- Nếu bất đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $\mathbf{x}$ thuộc tập xác định D của f thì ta nói $\mathbf{a}$ là *điểm cực đại tuyệt đối*, hay là *cực đại toàn cục* của f. Khi đó $f(\mathbf{a})$ là giá trị lớn nhất của f. Định nghĩa cực tiểu tuyệt đối tương tự.

Tìm cực trị hàm số nhiều biến

- Cực trị địa phương của f tại $\mathbf{a}$ theo nghĩa nêu ở trước cũng còn gọi là *cực trị tự do*, vì bất đẳng thức $(*)$ đúng với $\mathbf{x}$ thay đổi tự do xung quanh lân cận của $\mathbf{a}$, không bị ràng buộc trên một đường hay một mặt, v.v.. Sau này ta sẽ khảo sát *cực trị có ràng buộc*.

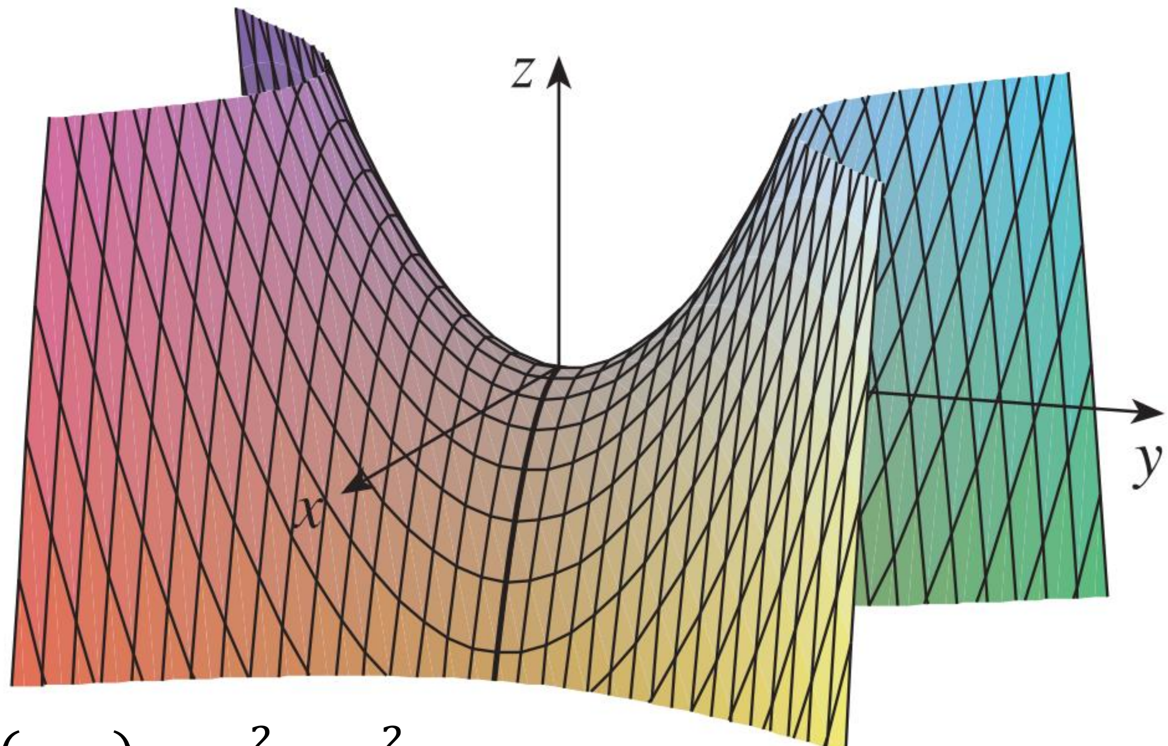
Điều kiện cần của cực trị. Nếu hàm số $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ đạt cực trị địa phương tại $\mathbf{a} \in D$, đồng thời có các đạo hàm riêng tại $\mathbf{a}$ thì $\mathbf{a}$ là *điểm dừng* của f, nghĩa là $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

- Kết quả trên được suy trực tiếp từ điều kiện cần của cực trị của hàm 1 biến.

- Hơn nữa, điều trên cũng dễ hình dung, vì nếu $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ thì đạo hàm của f tại $\mathbf{a}$ theo mỗi hướng khác nhau sẽ bị đổi dấu, tức giá trị f từ $\mathbf{a}$ sẽ biến thiên tăng hoặc giảm theo nhiều hướng khác nhau, nên không thể đạt cực trị tại $\mathbf{a}$.

Điều kiện cần của cực trị

- Điều kiện về điểm dừng của f chưa đủ để kết luận đó là điểm cực trị của f. Ví dụ, hàm số $f(x;y) = y^2 - x^2$ có điểm dừng là $(0;0)$ nhưng không là điểm cực trị.
- Điểm dừng của f mà không là điểm cực trị được gọi là *điểm yên ngựa* của f.



Đồ thị của $f(x;y) = y^2 - x^2$

Điều kiện đủ của cực trị của hàm số hai biến

Điều kiện đủ của cực trị hàm hai biến. Giả sử f là hàm số hai biến, trơn đến cấp 2 trong một lân cận của điểm dừng $\mathbf{a} = (x_0; y_0)$. Đặt $D(x; y)$ là định thức của ma trận Hesse (định thức này được gọi là Hessian):

$$D(x; y) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2.$$

- Nếu $D(\mathbf{a}) > 0$ và $f_{xx}(\mathbf{a}) > 0$ thì $\mathbf{a}$ là cực tiểu (địa phương) của f.
- Nếu $D(\mathbf{a}) > 0$ và $f_{xx}(\mathbf{a}) < 0$ thì $\mathbf{a}$ là điểm cực đại của f.
- Nếu $D(\mathbf{a}) < 0$ thì $\mathbf{a}$ là điểm yên ngựa của f.

- Trường hợp $D(\mathbf{a}) = 0$ không được nêu trong phát biểu điều kiện đủ, tùy từng hàm số cụ thể mà khảo sát, không có kết luận tổng quát.

Chứng minh điều kiện đủ của cực trị (có thể bỏ qua)

Sau đây là chứng minh của kết quả trên, trường hợp $n = 2$.

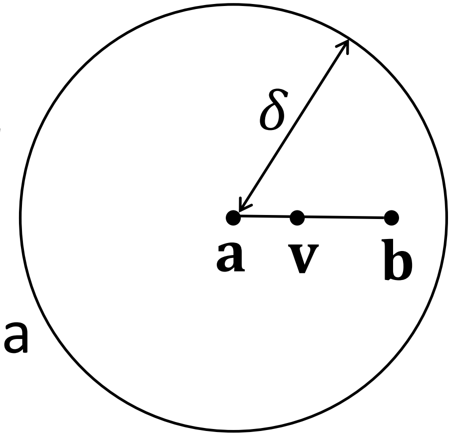
- Xét trường hợp $D(\mathbf{a}) = f_{xx}(\mathbf{a})f_{yy}(\mathbf{a}) - f_{xy}^2(\mathbf{a}) > 0$ và $f_{xx}(\mathbf{a}) > 0$. Do các đạo hàm cấp 2 liên tục tại $\mathbf{a}$ nên có đĩa B_δ tâm $\mathbf{a}$, bán kính $\delta > 0$ sao cho $\forall \mathbf{v} \in B_\delta, D(\mathbf{v}) > 0$ và $f_{xx}(\mathbf{v}) > 0$. Lấy $\mathbf{b} \in B_\delta$ tùy ý và $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, ta chứng minh $f(\mathbf{b}) \geq f(\mathbf{a})$, nghĩa là $\mathbf{a}$ là điểm cực tiểu của f.

Thật vậy, đặt $\mathbf{v} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ với $t \in [0; 1]$ và $g(t) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})$. Lưu ý là $g(0) = 0$ và $g(1) = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$.

Dùng quy tắc móc xích, ta có

$g''(t) = f_{xx}(\mathbf{v})u_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{v})u_1u_2 + f_{yy}(\mathbf{v})u_2^2$

trong đó $(u_1; u_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.



Theo c.thức Taylor, tồn tại giá trị $t \in (0; 1)$ thỏa $g(1) = g(0) + g'(0) + g''(t) = g''(t)$.

Chứng minh điều kiện đủ của cực trị

Để cho gọn về ký hiệu, ta đặt $A = f_{xx}(\mathbf{v})$, $B = f_{xy}(\mathbf{v})$, $C = f_{yy}(\mathbf{v})$ thì $D(\mathbf{v}) = AC - B^2 > 0$ và $A > 0$. Ta biến đổi

$$g(1) = g''(t) = Au_1^2 + 2Bu_1u_2 + Cu_2^2 \quad (*)$$

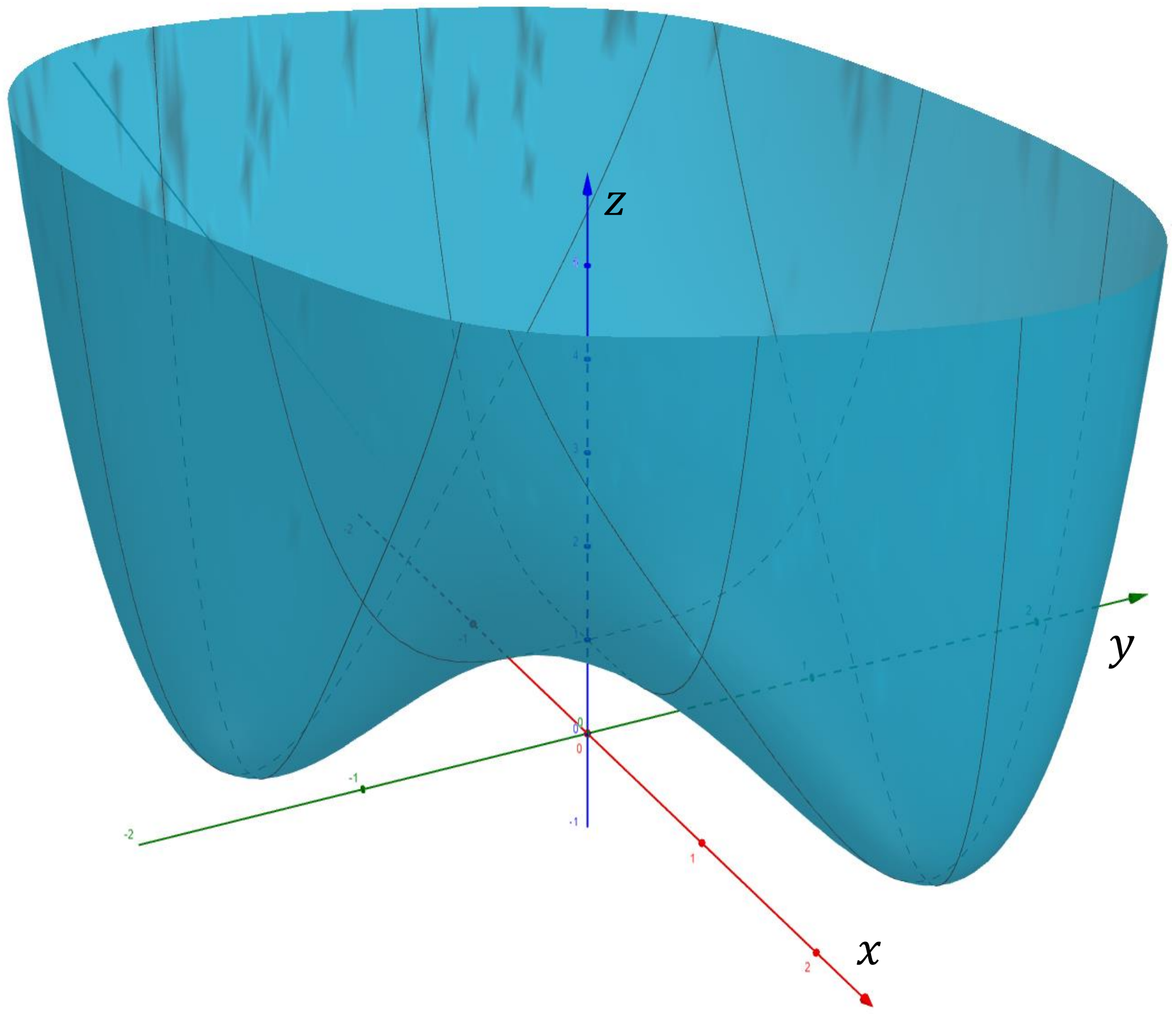
$$= A\left[\left(u_1 + \frac{B}{A}u_2\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}u_2^2\right] \geq 0$$

nghĩa là $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$, là đpcm.

- Trường hợp $D(\mathbf{a}) = f_{xx}(\mathbf{a})f_{yy}(\mathbf{a}) - f_{xy}^2(\mathbf{a}) > 0$ và $f_{xx}(\mathbf{a}) < 0$, lập luận tương tự sẽ thấy $\mathbf{a}$ là điểm cực tiểu.
- Trường hợp $D(\mathbf{a}) < 0$ thì lập luận khó hơn, gồm rất nhiều chi tiết, ta tạm bỏ qua. Nếu sv muốn tìm hiểu thì đọc thêm giáo trình, kể cả trường hợp tổng quát với hàm có n biến.

Cực trị địa phương

Ví dụ. Hãy khảo sát cực trị của hàm số $f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Với đồ thị cho sẵn, dự đoán có mấy điểm cực trị, điểm yên ngựa?



Cực trị địa phương

Ví dụ. Hãy khảo sát cực trị của hàm số $f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Giải.

- Tính các đạo hàm riêng $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$.
- Tìm các điểm dừng bằng cách gán các đạo hàm riêng bằng 0:

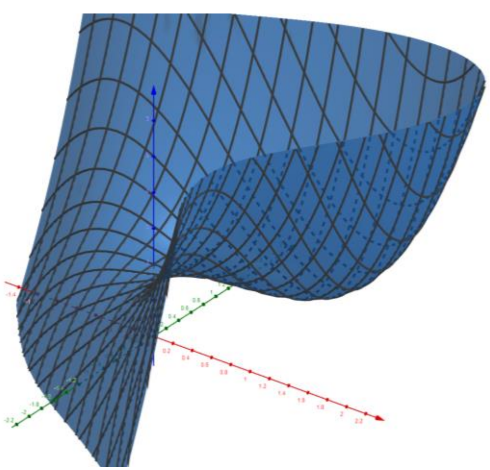
$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ (x^3)^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \end{cases}.$$

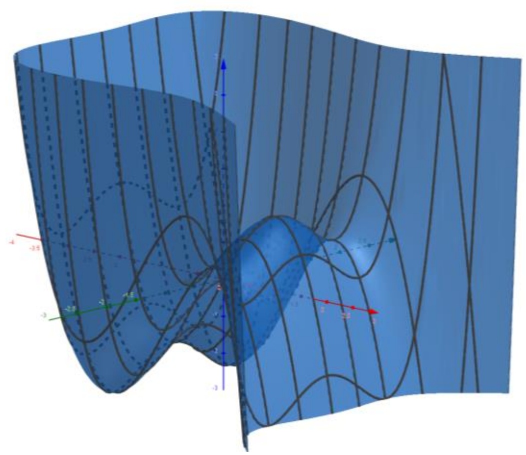
Vậy ta có các điểm dừng $(0;0)$, $(-1;-1)$ và $(1;1)$.

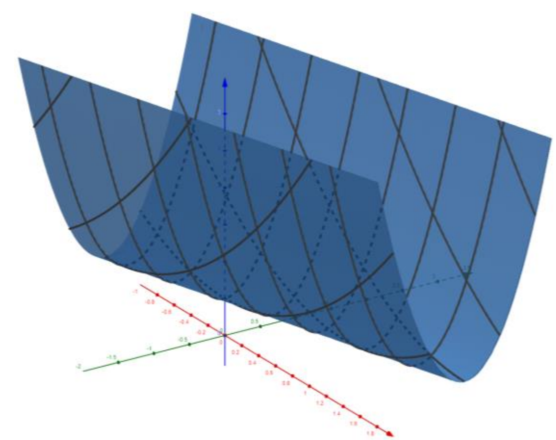
- Tính các đạo hàm cấp hai và định thức Hessian: $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = f_{yx} = -4$, $D(x;y) = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = 144x^2y^2 - 16$
- Xét tại $(0;0)$, $D(0;0) = -16 < 0$. Vậy $(0;0)$ là điểm yên ngựa.
- $D(\pm 1; \pm 1) = 144 - 16 > 0$ và $f_{xx}(\pm 1; \pm 1) = 12 > 0$. Vậy $(\pm 1; \pm 1)$ là hai điểm cực tiểu của f.

Bài tập mẫu

- Khảo sát cực trị của hàm số $f(x;y) = 2 + x^3 + y^3 - 3xy$.
- Khảo sát cực trị của hàm số $f(x;y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$.
- Chứng minh hàm số $f(x;y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 1$ có vô hạn điểm dừng và tại mỗi điểm, Hessian $D = 0$. Chứng minh các điểm dừng này là điểm cực tiểu của f.







Bài tập mẫu

- Một công ty sản xuất hai loại điện thoại di động. Gọi x và y (đơn vị là nghìn cái) lần lượt là số điện thoại một và loại hai. Chi phí sản xuất được mô hình hóa bởi hàm số $C(x; y) = 3x^2 - 3xy + 4y^2$ (đơn vị là tỉ đồng).
  a) Tính $C_x(3; 4)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tính.
  b) Tính doanh thu $R(x; y)$ (tỉ đồng) nếu đơn giá điện thoại loại một và hai lần lượt là 30 triệu (đồng/cái) và 20 triệu (đồng/cái).
  c) Công ty nên sản xuất với sản lượng mỗi loại là bao nhiêu để được lợi nhuận tối đa?
- Hãy khảo sát cực trị của hàm số $f(x; y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
- Tham khảo thêm [1], bài tập 1.5.1

Cực trị có ràng buộc

Cực trị có ràng buộc của hàm 2 biến

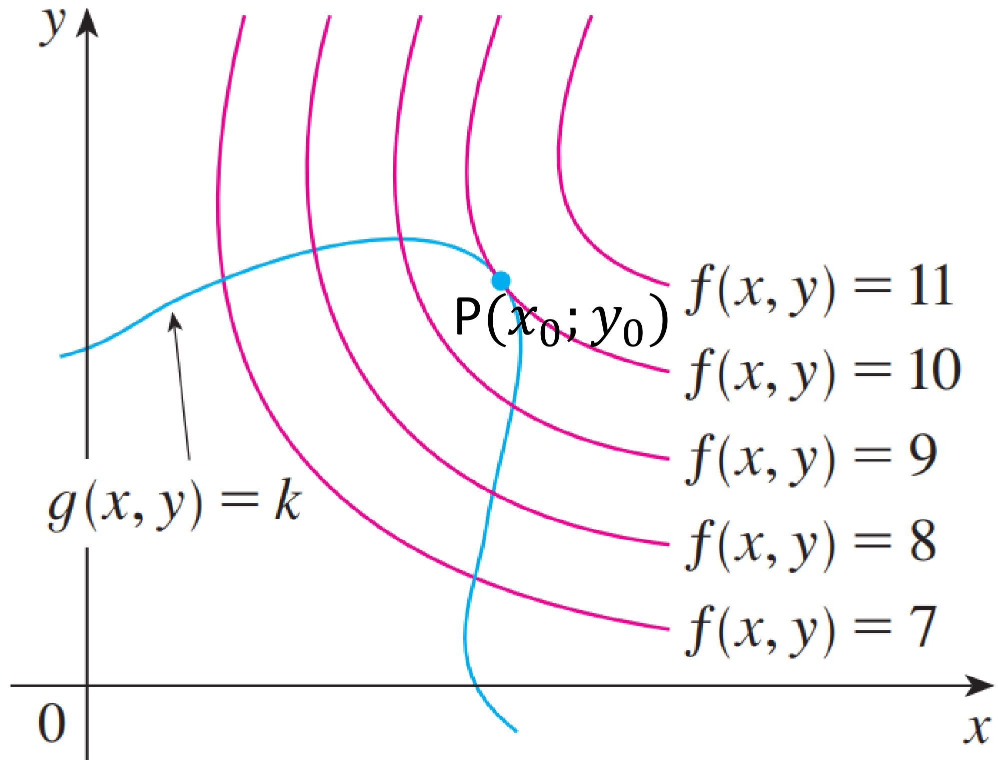
Xét bài toán sau: Tìm cực trị của hàm số $f(x;y)$, với ràng buộc là

$$g(x;y) = k, k \text{ là hằng số.}$$

- Bài toán trên được hiểu là tìm điểm $\mathbf{a} = (x_0; y_0)$ thuộc đường đẳng trị (C): $g(x;y) = k$ của hàm *g*, sao cho tồn tại quả cầu $B(\mathbf{a};r)$ để
$$\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a};r) \cap (C), f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \text{ (hoặc là ngược lại).}$$
- Nói cách khác, bài toán yêu cầu tìm điểm **a** thuộc đường đẳng trị của g sao cho giá trị f tại $\mathbf{a}$ là lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) mọi giá trị của f trên một phần của đường đẳng trị của hàm g chứa $\mathbf{a}$.
- Hàm số g được gọi là *hàm ràng buộc*, còn hàm f được gọi là *hàm mục tiêu* (mục tiêu đạt tối ưu, cực đại hay cực tiểu).
- Các bài toán cực trị có nhiều ràng buộc của hàm nhiều biến tổng quát hơn được khảo sát trong các giáo trình chuyên về toán tối ưu.

Phương pháp nhân tử Lagrange

- Xét bài toán tìm cực trị của hàm số f với ràng buộc $g(x; y) = k$. Ta phác họa các đường đẳng trị của f với nhiều mức khác nhau và ta chỉ có một đường ràng buộc màu xanh như hình bên.



- Ta quan tâm các đường đẳng trị của f mà có điểm chung với đường ràng buộc. Trong số này ta thấy đường $f(x; y) = 10$ có mức lớn nhất, có vẻ tiếp xúc với với đường ràng buộc tại P$(x_0; y_0)$ (là điểm cực đại), tức là chúng có cùng tiếp tuyến tại P. Nói cách khác, hai vectơ $\nabla f(x_0; y_0)$ và $\nabla g(x_0; y_0)$ cùng phương.

Phương pháp nhân tử Lagrange

Điều kiện cần của cực trị có ràng buộc. Giả sử f và g là hai hàm trơn đến cấp 1 trên một tập mở của $\mathbb{R}^2$. Nếu $(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của f với ràng buộc $g(x; y) = k$ và $\nabla g(x_0; y_0) \neq \mathbf{0}$ thì

$$\nabla f(x_0; y_0) = \lambda \nabla g(x_0; y_0). \;\; (\lambda \text{ là nhân tử Lagrange.})$$

Chứng minh. (có thể bỏ qua) Do điều kiện $\nabla g(x_0; y_0) \neq \mathbf{0}$, người ta suy ra được (nhờ một kết quả có tên *Định lý hàm ẩn*) có hàm vectơ khả vi $\mathbf{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big)$ mô phỏng một phần đường đẳng trị $g(x; y) = k$ chứa điểm $(x_0; y_0)$, tức là $\forall t, g\big(x(t); y(t)\big) = k$ và $\mathbf{r}(t_0) = (x_0; y_0)$ với t_0 nào đó. Vậy hàm một biến $t \mapsto f\big(x(t); y(t)\big)$ đạt cực trị tại t_0, suy ra

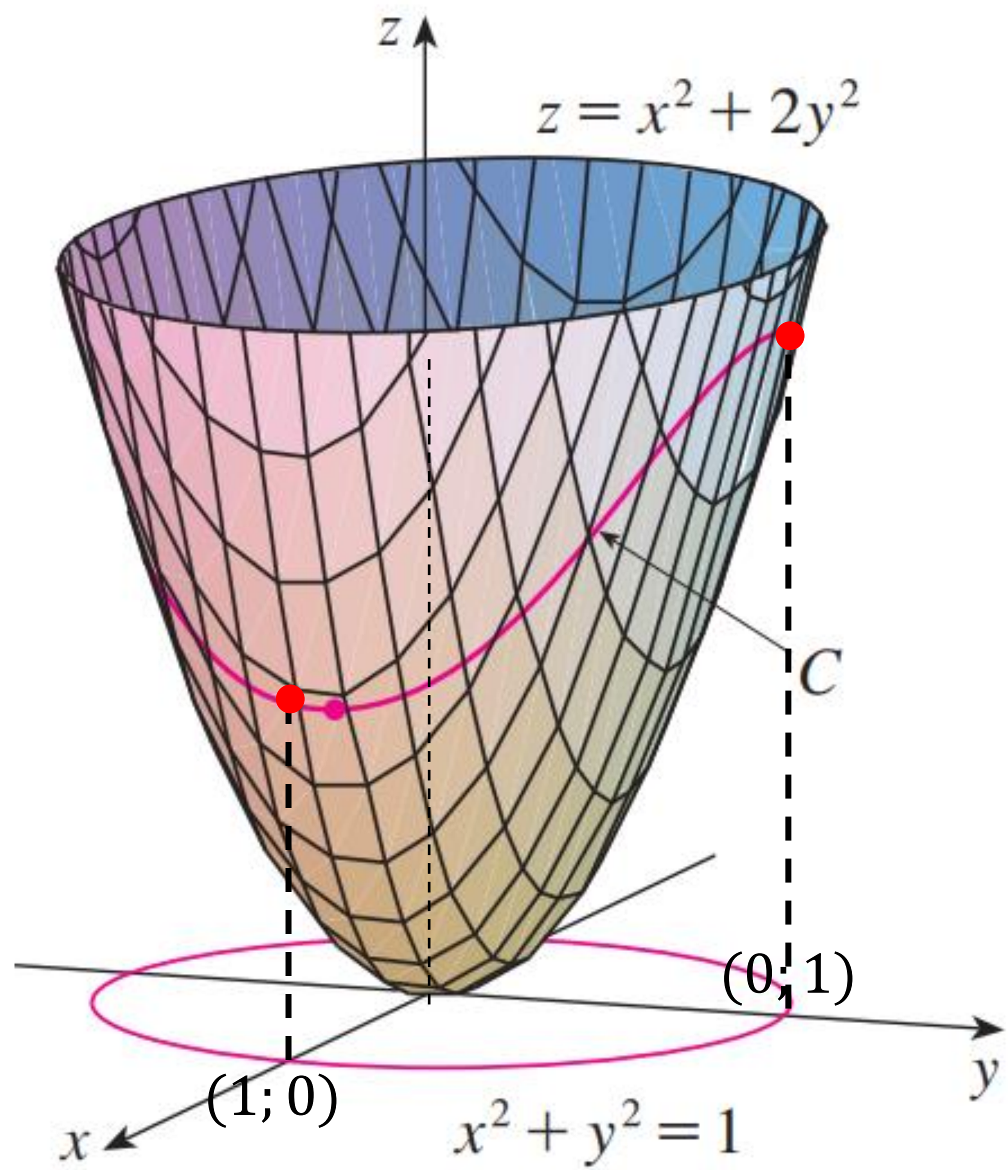
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x(t); y(t)\big)\Big|_{t=t_0} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0; y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \quad (1)$$

Đạo hàm theo t ở hai vế $g\big(x(t); y(t)\big) = k$ ta được $\nabla g\big(x(t); y(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$, kết hợp (1) ta suy ra đpcm.

Cực trị có ràng buộc

Ví dụ1 . Tìm cực trị tuyệt đối (cho biết là tồn tại) của hàm số $f(x;y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Ta tham khảo đồ thị của f trong hình bên, dự đoán trước kết quả: GTLN của f bằng 2, đạt được tại $(0;\pm 1)$ và GTNN của f bằng 1, đạt được tại $(\pm 1;0)$. Khi $(x;y)$ chạy trên đường tròn thì điểm $\big(x;y;f(x;y)\big)$ chạy trên đường C của mặt đồ thị.



Cực trị có ràng buộc

Ví dụ 1. Tìm cực trị tuyệt đối, biết rằng tồn tại, của hàm số $f(x; y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Cực trị của f trên đường tròn $g(x; y) = 1$, với $g(x; y) = x^2 + y^2$, xảy ra tại những điểm thỏa hệ phương trình nhân tử Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g, g = 1 \Leftrightarrow f_x = \lambda g_x; f_y = \lambda g_y; g = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 & (1) \\ y(2-\lambda) = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) cho hai trường hợp:

- Nếu $\lambda = 1$ thì từ (2)(3) ta suy ra hai *điểm tới hạn* $(\pm 1; 0)$.
- Nếu $x = 0$ thì thay vào (3), ta có thêm hai điểm tới hạn $(0; \pm 1)$.

So sánh giá trị f tại 4 điểm tới hạn nói trên, ta tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f trên đường tròn lần lượt là 2 và 1.

Phương pháp nhân tử Lagrange tổng quát

Điều kiện cần của cực trị có ràng buộc (bài toán tổng quát). Giả sử $1 \leq p < n$ (p và n là hai số tự nhiên) và các hàm số f, g_i với $1 \leq i \leq p$ trơn đến cấp 1 trên một tập mở của $\mathbb{R}^n$. Nếu $\mathbf{a}$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(\mathbf{x}) \\ \text{thỏa ràng buộc } g_i(\mathbf{x}) = k_i, 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

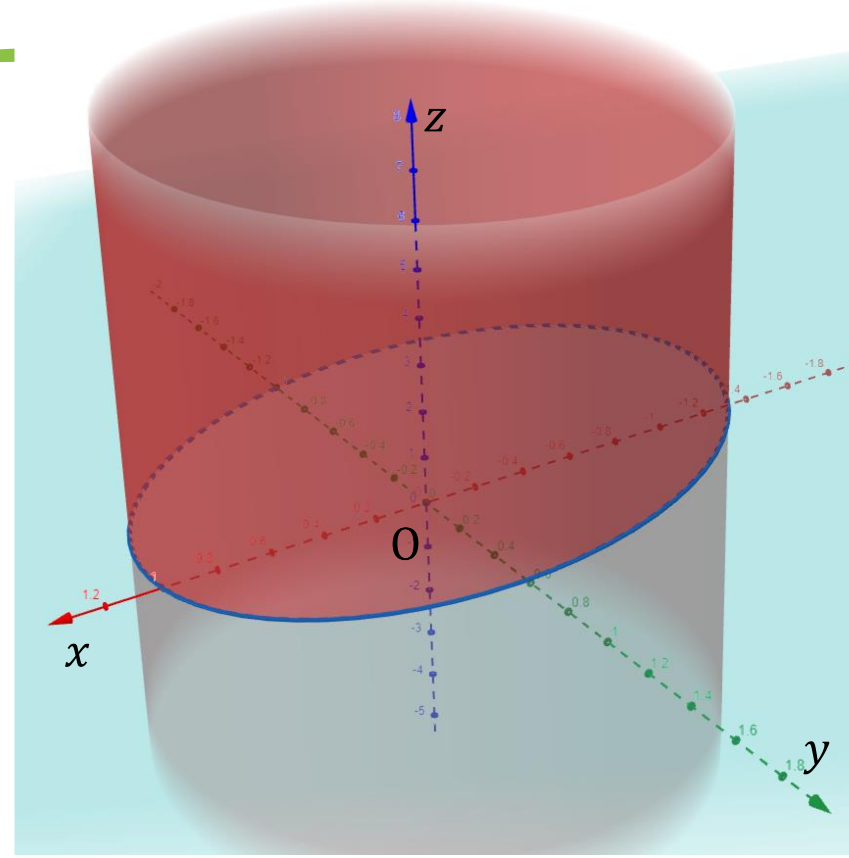
và các vectơ $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_p(\mathbf{a})$ độc lập tuyến tính thì tồn tại các số (nhân tử Lagrange) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a}) \qquad (*)$$

- Chứng minh định lý trên có trong các giáo trình chuyên về chủ đề tối ưu.
- Điểm $\mathbf{a}$ thỏa $(*)$ được gọi là điểm dừng có ràng buộc của f.

Cực trị có 2 ràng buộc

- **Ví dụ 2.** Tìm min và max (cho biết là có) của $f(x;y;z) = x + 2y + 3z$ trên đường cong giao tuyến của mặt phẳng $x - y + z = 1$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.



Giải. Hai ràng buộc là $g(x;y;z) = x - y + z = 1$; $h(x;y;z) = x^2 + y^2 = 1$. Ta tìm hai nhân tử Lagrange λ và μ thỏa $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$:

$$1 = \lambda + \mu 2x \qquad (1)$$
$$2 = -\lambda + \mu 2y \qquad (2)$$
$$3 = \lambda \qquad (3)$$

Thay $\lambda = 3$ vào (1), (2); Thay $x = -\frac{1}{\mu}; y = \frac{5}{2\mu}$ vào $h(x;y;z) = 1$

Cực trị có 2 ràng buộc

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1 \Leftrightarrow \mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot$$

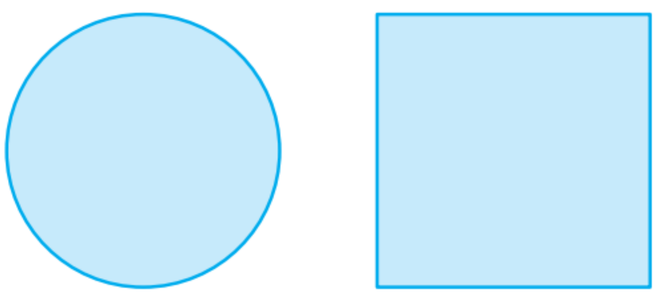
Ta tìm được 2 điểm dừng có ràng buộc là $(x;y;z)=\left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}};\pm\frac{5}{\sqrt{29}};1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$. Giá trị của f tại hai điểm này cho biết min và max của f trên đường cong giao tuyến đang xét:

$$\min = 3-\sqrt{29}; \max = 3+\sqrt{29}.$$

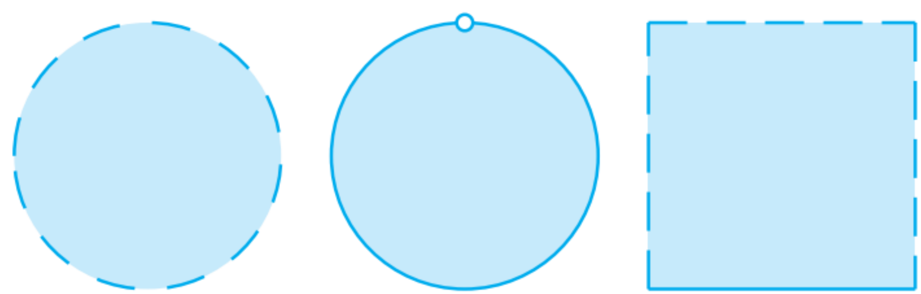
Cực trị truyệt đối trên tập hợp compact

Cực trị tuyệt đối trên tập hợp compact

- Ta nhắc lại, một tập được gọi là đóng trong $\mathbb{R}^n$ khi nó chứa mọi điểm biên của nó (xem bài giảng tuần 1).
- Một tập được gọi là bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ khi nó nằm trong một quả cầu.
- Một tập được gọi là compact trong $\mathbb{R}^n$ khi nó vừa đóng, vừa bị chặn.



Minh họa hai tập đóng trong $\mathbb{R}^2$, và là compact.



Minh họa ba tập không đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Ta thừa nhận định lý sau (chứng minh nằm ngoài phạm vi giáo trình)

Định lý. *Mọi hàm số liên tục trên một tập compact trong* $\mathbb{R}^n$ *luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó. (Hàm liên tục luôn có cực trị tuyệt đối trên tập compact.)*

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên tập hợp compact K của $\mathbb{R}^n$**:**

- Tìm giá trị của hàm tại các điểm dừng là điểm trong của K (không thuộc biên của K).
- Tìm giá trị cực trị của hàm trên biên của tập K với phương pháp cực trị có ràng buộc, hoặc đưa về cực trị không ràng buộc với số biến ít hơn. Nếu biên của K bao gồm nhiều tập mức hợp lại, thì phải xét giá trị hàm tại các điểm thuộc phần giao của các tập mức này.
- So sánh các giá trị ở trên để chỉ ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Về sự tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- Ở vài trường hợp, chứng minh sự tồn tại cực trị tuyệt đối trên tập hợp không phải compact đòi hỏi những lập luận nâng cao về mặt toán học, tùy vào nét đặc thù của từng bài cụ thể.
- Tuy nhiên, ở một số bài toán tối ưu trong thực tế, sự tồn tại cực trị tuyệt đối trên một tập hợp tuy không phải là compact là được mặc định, theo “quan điểm tự nhiên”. Do đó khi giải các bài này, chú trọng tính thực dụng, chúng ta bỏ qua lập luận sự tồn tại cực trị tuyệt đối.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 1. Một cái hộp chữ nhật không có nắp, được làm từ 12 m^2 bìa cứng. Hãy tìm thể tích của hộp lớn nhất có thể.

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán này theo hai kiểu: cực trị tự do hoặc cực trị có ràng buộc. Gọi x, y, z (mét) lần lượt là độ rộng, độ sâu và độ cao của hộp.

- ***Cách 1.*** Ta đưa về bài toán cực trị có ràng buộc

$$\begin{cases} \text{Tìm } \max V \\ g(x;y;z) = 12 \end{cases} \text{trong đó } V = xyz, g(x;y;z) = xy + 2xz + 2yz.$$

Thực tế cho thấy với hữu hạn vật liệu bìa cứng, không thể tạo ra một hộp có thể tích lớn tùy ý, mà chỉ đạt một thể tích tối đa nào đó ở một kích thước $(x;y;z)$ thỏa hệ nhân tử Lagrange

$$V_x = \lambda g_x; V_y = \lambda g_y; V_z = \lambda g_z; g = 12.$$

Sinh viên thực hành giải hệ trên tại lớp sẽ tìm được kích thước tối ưu là $(x;y;z) = (2;2;1)$.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- ***Cách 2.*** Ta đưa về bài toán cực trị tự do. Ta có

$$xy + 2xz + 2yz = 12 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2x + 2y}, \text{với } x > 0, y > 0, xy < 12.$$

Vậy ta tìm giá trị lớn nhất của $V = xyz = xy(12 - xy)(2x + 2y)^{-1}$ trên tập hợp $D = \{(x; y) \mid x > 0, y > 0, xy < 12\}$, không phải là tập compact. Ta tìm các điểm dừng thuộc D của hàm thể tích rồi so sánh giá trị V tại các điểm dừng, chọn ra giá trị lớn nhất.

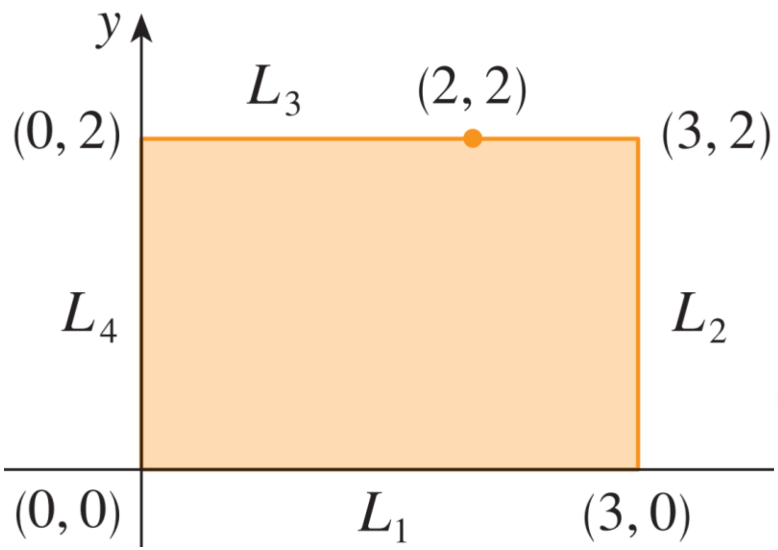
$$V_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x^2 + y^2)} = 0; V_y = 0 \Leftrightarrow x = y = 2, \text{v.v..}$$

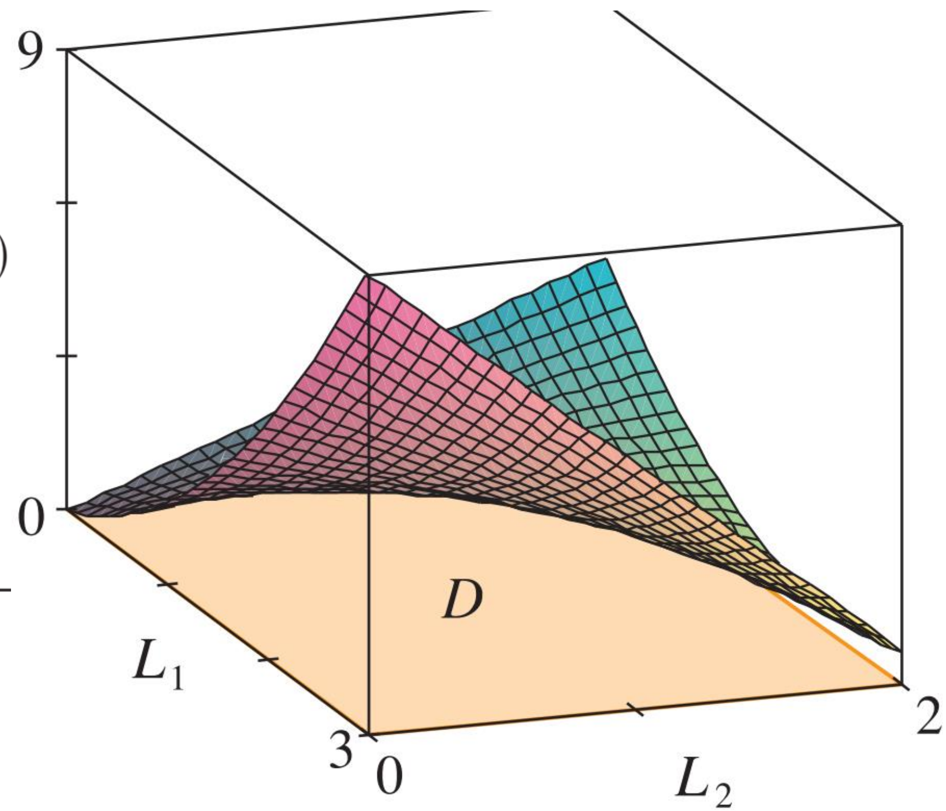
Mặc dù ta vẫn có thể lập luận về mặt Toán học để chứng minh V có giá trị lớn nhất trên D, nhưng điều này đòi hỏi vài kỹ thuật nâng cao, không đáng phải tốn công như thế, vì thực tế cho thấy sự tồn tại giá trị lớn nhất của V trên tập D là hiển nhiên, tuy D không là compact.

Bài tập mẫu

- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x;y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên hình chữ nhật compact $\{(x;y) \mid 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$.

Dưới đây là đồ thị của f để tham khảo và dự đoán kết quả:





Bài tập mẫu

- Tìm điểm trên mặt cong $z = x^2 + y^2$ gần điểm $(0; 0; 2)$ nhất.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số f trên các tập ràng buộc được cho.

- $f(x; y) = 6 - 4x - 3y, x^2 + y^2 = 1.$
- $f(x; y) = e^{-xy}, x^2 + 4y^2 = 1.$
- $f(x; y; z) = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 3.$
- $f(x; y) = x^2 + y^2 - x - y, x^2 + y^2 \leq 1.$
- $f(x; y) = xy - x - 2y$, trên tam giác có các đỉnh $(0; 0)$, $(3; 0)$ và $(0; 6)$.
- Tham khảo thêm [1], các bài tập 1.5.2→21.