Lớp 23CTT1A

Nhóm 02

Tên thành viên:

- Hồ Hồ Gia Bảo – 23120021
- Hoàng Gia Bảo – 23120022
- Nguyễn Thái Bảo – 23120023
- Nguyễn Thanh Bình – 23120024
- Phan Thị Phương Chi – 23120025
- Nguyễn Hải Đăng – 23120027

3.2 Trong các câu sau, xét xem vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3 hay không? Hãy tìm dạng biểu diễn tuyến tính của nó (nếu có)?

a) $u = (10, 6, 5, 3), u_1 = (1,1,-1,0), u_2 = (3,1,2,1), u_3 = (2,1,3,1)$

Lập: $(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T \mid u^T)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-5d_2]{\substack{d_2+3d_4\\ d_1-3d_2\\ d_4-\frac{1}{5}d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2-2d_3]{\substack{-\frac{1}{5}d_3\\ d_1+4d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3,1,2)$$

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Dạng biểu diễn của u là: $u = 3u_1 + u_2 + 2u_3$.

b)

$$u = (1,1,1,0), u_1 = (1,1,0,1), u_2 = (1,0,1,1), u_3 = (0,1,1,1)$$

Lập: $(u_1^T\ u_2^T\ u_3^T \mid u^T)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2-d_1\\ d_4-d_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1-d_3+d_4\\ -d_2+d_4}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3-d_2\\ d_4-d_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-3\end{array}\right)$$

Hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy u không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

c) Lập $(u_1{}^T, u_2{}^T, u_3{}^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\2&5&1&3\\1&1&-3&7\\-2&-6&-4&2\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{d_3-d_1\\ d_4+d_2\\ d_2-2d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&-1&-1&1\\0&-2&-4&6\\0&-1&-3&5\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\substack{d_3-2d_2\\ d_4-d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&4\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}d_3\\ -\frac{1}{2}d_4}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&-1&-1&2\\0&0&1&-2\\0&0&1&-2\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{d_2+d_3\\ -d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1-3d_2]{d_1-d_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$Hệ\ phương\ trình\ có\ nghiệm\ duy\ nhất\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, 0, -2)$

$u\ là\ tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3\ và\ dạng\ biểu\ diễn\ của\ u\ là\ u = 3u_1 + 0u_2 - 2u_3$

3.4 Xét xem các vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,1,-1)$

Lập:

$$A = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \det(A) = -1 - (1-1) = -1 \neq 0$$
$$(theo\ quy\ tắc\ Sarrus)$$

Vậy u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

b.

$$u_1 = (-1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (1,5,3)$$

Lập:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2 < 3$ *nên hệ vô số nghiệm*.

Vậy u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

c) *Lập* $A = \ (u_1{}^T, u_2{}^T, u_3{}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[d_4+2d_3]{d_4+2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có $r(A) = 3$ *nên* u_1, u_2, u_3 *độc lập tuyến tính*

d) $u_1 = (1, 2, 3, -4), u_2 = (3, 5, 1, 1), u_3 = (1, 1, -5, 9)$

Lập $A = (u_1{}^T u_2{}^T u_3{}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow r(A) = 2 < 3.$ *Suy ra* u_1, u_2, u_3 *phụ thuộc tuyến tính*.

3.6 Xét xem các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Xét phương trình:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hoá hệ phương trình ta có: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\tilde{A} \xrightarrow{d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 - d_2]{\substack{d_1 - d_2 \\ d_3 + d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 - d_3]{\substack{\frac{1}{2} d_3 \\ d_1 + d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất (nghiệm tầm thường):

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$$

Vậy A_1, A_2, A_3 độc lập tuyến tính.

b. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

Xét phương trình:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hoá hệ phương trình ta có: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_4 - 3d_1]{\substack{d_2 + 2d_1 \\ d_3 - d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{7}d_2 \\ d_1 - 2d_2 \\ d_3 - d_2 \\ d_4 + 7d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-t, -2t, t), t \in \mathbb{R}$$

Vậy A_1, A_2, A_3 phụ thuộc tuyến tính.

$c)\ Xét\ phương\ trình\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & -\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có\ \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_4 - 2d_2]{\substack{d_2 - d_3 \\ d_4 + 2d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Ta\ có\ r(A) = 3\ nên\ A_1, A_2, A_3\ độc\ lập\ tuyến\ tính$

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$Xét\ phương\ trình$: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$

$$\rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được: $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình có nghiệm tầm thường: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Vậy A_1, A_2, A_3 độc lập tuyến tính.

3.8 Trong các tập hợp W sau đây thì tập hợp nào là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$?

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 0\}$

Với $u = (1,0,0) \in W$ và $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$, ta có: $\alpha u = (-1,0,0) \notin W$ (vì $-1 < 0$).

Vậy W không là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$.

f/ W = $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1.x_2 = 0\}$.
Ta có 0 = (0, 0, 0) ∈ W, do 0.0 = 0.

Khi đó với $u_a = (0, 1, 0)$, $u_b = (1, 0, 0) \in W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

$u_a + u_b = (1, 1, 0)$ và 1.1 ≠ 0 nên $u_a + u_b \notin W$.

Như vậy W không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b. $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + 2x_2 = 3x_3\}$

Với $O = (0,0,0) \in W$. (1)

Cho $u = (1,1,1) \in W$, $v = (1, -2, -1) \in W$ và $\alpha = -1$ ta có: $u + v = (2, -1, 0) \in W$ (vì $2 + 2.(-1) = 0$) và $\alpha.u = (-1, -1, -1) \in W$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra W là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$.

c) $0 = (0, 0, 0) \notin$ W. Vì $(0 + 3.0 \neq 1)$ *do* đó W *không phải không gian con của không gian* $\mathbb{R}^3$

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = x_2 = x_3\}$

Ta có: $0 = (0, 0, 0) \in W$

Xét: $u = (1, 1, 1) \in W, v = (2, 2, 2) \in W$ và $\alpha = -1 \in R$.

Ta có: $u + v = (3, 3, 3) \in W$ và $\alpha u = (-1, -1, -1) \in W$

$Vậy\ W\ là\ không\ gian\ con\ của\ không\ gian\ R^3$

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 = x_2x_3\}$

$$(0,0,0) \in W\ vì\ 0^2 = 0.0$$
$$Với\ \forall u = (x_1, x_2, x_3), v = (x_1', x_2', x_3') \in W:$$
$$u + v = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3')$$
$$Xét\ x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3' \geq 0: u + v = \left(\sqrt{x_2x_3} + \sqrt{x_2'x_3'}, x_2 + x_2', x_3 + x_3'\right)$$

$\Rightarrow \exists x_2 = x_3 = x_2' = 1, x_3' = 3, sao\ cho$:

$4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{x_2x_3} + \sqrt{x_2'x_3'}\right)^2 \neq (x_2 + x_2')(x_3 + x_3') = 8$

$vậy\ u + v \notin W \Rightarrow W\ không\ là\ không\ gian\ con\ của\ \mathbb{R}^3$

3.10 Tập hợp nào sao đây là không gian con của không gian $\mathbb{R}[t]$?

a) Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$sao cho $f(-t) = f(t)$.

Đặt $W = \{f(t) \in \mathbb{R}(t) | f(-t) = f(t)\}$

Ta có: $0 = 0(t) \in W$ vì $0(t) = 0(-t) = 0$. Suy ra $W \neq \emptyset$.

Với mọi $f(t), g(t) \in W, nghĩa\ là\ f(-t) = f(t)\ và\ g(-t) = g(t), và\ \alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

i) $[\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](t) = f(t) + g(t) = f(-t) + g(-t) = [\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](-t)$
   Suy ra $[\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](t) \in W$ (1)

ii) $\alpha f(t) = \alpha f(-t)$
   Suy ra $\alpha f(t) \in W$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $W \leq \mathbb{R}[t]$.

Vậy tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = f(t)$ là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

b. Tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$sao cho $f(-t) = -f(t)$.

Đặt $W = \{f(t) \in \mathbb{R}(t) | f(-t) = -f(t)\}$

Ta có: $O = 0(t) \in W$ vì $O(t) = -O(-t) = 0$. Suy ra $W \neq \emptyset$.

Với mọi $f(t), g(t) \in W, nghĩa$ là $f(-t) = -f(t)$ và $g(-t) = -g(t),v$à $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

i) $-[\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](t) = -f(t) - g(t) = f(-t) + g(-t) = [\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](-t)$
Suy ra $-[\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}](t) \in W$ (1)

ii) -$\alpha f(t) = \alpha f(-t)$
Suy ra $-\alpha f(t) \in W$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $W \leq \mathbb{R}[t]$.

Vậy tập các đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ sao cho $f(-t) = -f(t)$ là không gian con của $\mathbb{R}[t]$.

$c)$ $A = \{f(t) \in \mathbb{R}[\mathrm{t}] | f(0) = \ f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(0) - \ f(1) - f(2) = 0\}$

$0 = 0(t) \in \ v$ì $0(0) - 0(1) - 0(2) = 0$

$Với\ mọi\ u = \ u(t) = \ a_n t^n + \cdots + a_1 t^1 + a_0, v = \ v(t) = \ b_n t^n + \cdots + b_1 t^1 + b_0 \in \ \mathbb{R}[\mathrm{t}], nghĩa$ là $u(0) - u(1) - u(2) = 0\ , v(0) - \ v(1) - v(2) = 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

$+)u + v = (a_n + b_n)t^n + \cdots + (a_1 + b_1)t^1 + a_0 + b_0.$

$ta\ có$: $(a_n + b_n)0^n + \cdots + (a_1 + b_1)0^1 + a_0 + b_0 - (a_n + b_n)1^n - \cdots - (a_1 + b_1)1^1 - a_0 - b_0 - (a_n + b_n)2^n - \cdots - (a_1 + b_1)2^1 - a_0 - b_0 = u(0) + v(0) - u(1) - v(1) - u(2) - v(2) = 0$

$Suy\ ra\ u + v \in \mathbb{R}[\mathrm{t}].(1)$

$+)\alpha u=\alpha(a_nt^n+\cdots+a_1t^1+a_0)$

$Ta\ có$: $\alpha(a_n0^n+\cdots+a_10^1+a_0)-\alpha(a_n1^n+\cdots+a_11^1+a_0)-\alpha(a_n2^n+\cdots+a_12^1+a_0)$

$$=\alpha(a_nt^n+\cdots+a_1t^1+a_0-a_n1^n-\cdots-a_11^1-a_0-a_nt^n-\cdots-a_12^1-a_0)=\alpha\big(u(0)-u(1)-u(2)\big)$$
$$=\alpha 0=0$$

$Suy\ ra\ \alpha u\in\mathbb{R}[\mathrm{t}].\,(2)$

Từ (1) và (2) $suy\ ra\ A\le\mathbb{R}[\mathrm{t}]$.

d) Đặ$t\ W$ là tậ$p\ các\ đa\ thức\ f(t)\in\mathbb{R}[t]sao\ cho\ \big(f(t)\big)^2=f(t)$.

$$f(t)=0\ thuộc\ W$$
$$Với\ \forall f,g\in W:$$
$$(f+g)^2=f^2+g^2+2fg\neq f+g$$

$\Rightarrow W\ không\ là\ không\ gian\ con\ của\ R[t]$

3.12 Chứng minh rằng:

a) $S=\{(1,-1),(-2,3)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$

Với $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2, u_1=(1,-1), u_2=(-2,3)$, ta lập hệ phương trình:

$$(u_1^T\quad u_2^T|u^T)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&x\\-1&3&y\end{array}\right)\overset{d_2+d_1}{=}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&x\\0&1&x+y\end{array}\right)\overset{d_1+2d_2}{=}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&3x+2y\\0&1&x+y\end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1,u_2.

Vậy S là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$ (đpcm).

b. $S=\{(1,1),(1,2),(2,-1)\}$ là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$

Với $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, u_1 = (1,1), u_2 = (1,2), u_3 = (2, -1)$, ta lập các hệ phương trình:

$$(u_1^T \quad u_2^T | u^T) = \left(\begin{matrix}1 & 1\\1 & 2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right) \overset{d_2-d_1}{=} \left(\begin{matrix}1 & 1\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y-x\end{matrix}\right) \overset{d_1-d_2}{=} \left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y\\x+y\end{matrix}\right)$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_{2,}$. (1)

$$(u_1^T \quad u_3^T | u^T) = \left(\begin{matrix}1 & 2\\1 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right) \overset{d_2-d_1}{=} \left(\begin{matrix}1 & 1\\0 & -3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y-x\end{matrix}\right) \overset{\substack{d_1+\frac{1}{3}d_2\\ -\frac{1}{3}d_2}}{=} \left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\end{matrix}\right)$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_{3,}$. (2)

$$(u_2^T \quad u_3^T | u^T) = \left(\begin{matrix}1 & 2\\2 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right) \overset{d_2-2d_1}{=} \left(\begin{matrix}1 & 1\\0 & -5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\y-x\end{matrix}\right) \overset{\substack{d_1+\frac{1}{5}d_2\\ -\frac{1}{5}d_2}}{=} \left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}y\\ \frac{1}{5}x-\frac{1}{5}y\end{matrix}\right)$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của $u_2, u_{3,}$. (3)

Từ (1), (2) và (3), vậy S là một tập sinh của $\mathbb{R}^2$ (đpcm).

$c)Với\ u = (x, y, z), ta\ lập\ hệ\ phương\ trình\ ({u_1}^T, {u_2}^T, {u_3}^T \mid u^T)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{\substack{d_2 - d_3 \\ d_1 - d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y + z \\ 0 & 1 & 0 & y - z \\ 0 & 0 & 1 & y - x \end{array}\right)$$ $hệ\ có\ nghiệm$ suy ra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, u_3 nên\ S$ là $một\ tập$ sinh $của$ $\mathbb{R}^3$

3.14. $Kiểm\ tra\ tập\ hợp\ nào\ sau$ là $cơ\ sở\ của\ R^3$?

$a)\ B = \{u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 1, 2)\}$

$Với\ u = (x, y, z) \in R^3, ta\ lập\ hệ\ phương\ trình$

$$({u_1}^T {u_2}^T {u_3}^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-x + 2y}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-x - y + 3z}{3} \end{array}\right)$$

$Vậy\ hệ\ có\ nghiệm, suy\ ra\ u$ là $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3. Vậy\ B$ là $tập\ sinh\ của\ R^3$

$$Lập\ A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$Ta\ có{:}\ r(A) = 3. Suy\ ra\ B$ độc $lập\ tuyến\ tính. Vậy\ B\ là\ cơ\ sở\ của\ R^3$

$b)\ B = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}$

$Với\ u = (x,y,z) \in R^3, ta\ lập\ hệ\ phương\ trình$

$$(u_1{}^T u_2{}^T u_3{}^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right)$$

$Vậy\ hệ\ có\ nghiệm, suy\ ra\ u$ là $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3. Vậy\ B$ là $tập\ sinh\ của\ R^3$

$$Lập\ A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có: $r(A) = 3. Suy\ ra\ B$ độc $lập\ tuyến\ tính. Vậy\ B\ l$à $cơ\ sở\ của\ R^3$

$c)\ B = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,1,-1)\}$

$Với\ u = (x,y,z) \in R^3, ta\ lập\ hệ\ phương\ trình$

$$(u_1{}^T u_2{}^T u_3{}^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 & -x+y \end{array}\right)$$

$Vậy\ hệ\ có\ nghiệm, suy\ ra\ u\ l$à $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3. Vậy\ B$ là $tập\ sinh\ của\ R^3$

$$Lập\ A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ta\ có: r(A) = 3. Suy\ ra\ B$ độc $lập\ tuyến\ tính. Vậy\ B$ là $cơ\ sở\ của\ R^3$

$c)\ B = \{u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (1, 5, 3)\}$

$Với\ u = (x, y, z) \in R^3, ta\ lập\ hệ\ phương\ trình$

$$(u_1{}^T u_2{}^T u_3{}^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 5 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 6 & x + y \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{x - 2y + 3z}{3} \end{array}\right)$$

$Với\ u_0 = (1, 1, 1)$ $thì\ hệ\ trên\ vô\ nghiệm. Vậy\ u_0\ không$ là $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3$.

$Vậy\ B\ không$ là $tập\ sinh\ của\ R^3 \to Vậy\ B\ không$ là $cơ\ sở\ của\ R^3$.

3.16. Kiểm tra xem $\{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, \dots, t^{n-1} + t^n\}$ có là cơ sở của $\mathbb{R}[t]$ hay không?
Coi các phần tử của $\mathbb{R}[t]$ là các vector $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ là các hệ số của $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$
Đặt $u_0 = (1,1,0,0 \dots 0), u_1 = (0,1,1,0,0, \dots 0), u_2 = (0,0,1,1,0, \dots 0), \dots\ u_{n-1} = (0,0,0, \dots, 0,1,1) \in \mathbb{R}_n[t]$
Với $\forall u = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n[t]$, đặt $A = (u_0^T \quad u_1^T \quad u_2^T \quad \cdots \quad u_{n-1}^T)$ và $\tilde{A} = (A|u^T)$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & x_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_n \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_i - d_{i-1}, i \in \overline{2, n+1}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_1 - x_0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & x_2 - x_1 - x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 - x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & x_{n-2} - x_{n-3} - \cdots - x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{n-1} - x_{n-2} - \cdots - x_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_n - x_{n-1} - \cdots - x_0 \end{array}\right)$$

Ta thấy: $r(A) = n < r(\tilde{A}) = n + 1$

$\Rightarrow Phương\ trình\ \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = u\ vô\ nghiệm$

$\Rightarrow \forall u \in \mathbb{R}[t], u\ không\ là\ tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_0, u_1, \ldots, u_n$

$\Rightarrow \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, \ldots, t^{n-1} + t^n\}\ không\ là\ tập$ sinh $của\ \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, \ldots, t^{n-1} + t^n\}\ không\ là\ cơ\ sở\ của\ \mathbb{R}[t]$

3.18 Cho S = {u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1, 2, 5), u_3 = (5, 3, 4)} và W = ⟨S⟩.

a) Chứng minh S = {u_1, u_2, u_3} không là cơ sở của W.

Ta lập ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 := c_3 - 2c_1]{c_2 := c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Do detA = 0 nên S không độc lập tuyến tính, do đó S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.

b) Tìm một cơ sở B của W sao cho B ⊂ S và xác định dimW.

Ta xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ (*)

Ma trận hóa phương trình trên ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 := d_3 - 3d_2]{d_1 := d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy phương trình (*) có nghiệm:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-7\mathrm{t}, 2\mathrm{t}, \mathrm{t})$ với t $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -7\mathrm{t}.u_1 + 2t.u_2 + t.u_3 = 0$

Chọn t = 1, ta có:
$-7u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 7u_1 - 2u_2$

Do đó u_3 là tổ hợp tuyến tính của u_1 và u_2, mặt khác ta có:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Do đó r$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2$ nên $\{u_1, u_2\}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy tập B = $\{u_1, u_2\} \subset S$ là 1 cơ sở của W.

3.20 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các vectơ sau:

a) u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4), u_3 = (3, 4, 5).

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

Ta xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ (*)

Ma trận hóa phương trình trên ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra phương trình có nghiệm

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\mathrm{t}, -2\mathrm{t}, \mathrm{t})$ với t $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow t.u_1 - 2t.u_2 + t.u_3 = 0$

Cho $t = 1$ ta có $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = -u_1 + 2u_2$

Như vậy u_3 là tổ hợp tuyến tính của u_1 và u_2. Mặt khác, ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Do đó r(A)= 2 nên $\{u_1, u_2\}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy tập B = $\{u_1, u_2\}$ là 1 cơ sở của W.

b) u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1).

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

Với u = (a, b, c) ∈ W ta lập ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (u_1^T, u_2^T, u_3^T | u^T) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & -\mathrm{a} + \mathrm{b} \\ 0 & 0 & 2 & -\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} \end{array}\right)$$

Do hệ phương trình trên luôn có nghiệm nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 và u_3. Do đó S là tập sinh của W (1)

Mặt khác ta cũng có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow detA = -2 \neq 0$ nên S là độc lập tuyến tính. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra tập S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.

sở của W.

c) u_1 = (1, 2, 3, 1), u_2 = (1, 2, 1, −2), u_3 = (1, 3, 2, 1), u_4 = (2, 1, 3, −7).

Đặt W = $\langle S\rangle$ với S = $\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$

Ta xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ (*)

Ma trận hóa phương trình trên ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra phương trình có nghiệm

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-2\mathrm{t}, -3\mathrm{t}, 3\mathrm{t}, \mathrm{t})$ với t $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -2\mathrm{t}.u_1 - 3t.u_2 + 3t.u_3 + t.u_4 = 0$

Cho $t = 1$ ta có $-2u_1 - 3u_2 + 3u_3 + u_4 = 0 \Rightarrow u_4 = 2u_1 + 3u_2 - 3u_3$

Như vậy u_4 là tổ hợp tuyến tính của u_1, $u_2$và u_3. Mặt khác, ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Do đó r(A)= 3 nên $\{u_1, u_2, u_3\}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy tập B = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.

d) u_1 = (1, 1, −1, 2), u_2 = (1, −1, −2, 1), u_3 = (1, 3, 2, 1), u_4 = (2, 1, 2, −1)

Đặt W = $\langle S\rangle$ với S = $\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$

Ta xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$ (*)

Ma trận hóa phương trình trên ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra phương trình có nghiệm

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left(3\mathrm{t}, -\frac{11}{4}\mathrm{t}, -\frac{9}{4}\mathrm{t}, \mathrm{t}\right)$ với $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 3\mathrm{t}. u_1 - \frac{11}{4} t. u_2 - \frac{9}{4} t. u_3 + t. u_4 = 0$$

Cho $t = 1$ ta có $3u_1 - \frac{11}{4}u_2 - \frac{9}{4}u_3 + u_4 = 0 \Rightarrow u_4 = -3u_1 + \frac{11}{4}u_2 + \frac{9}{4}u_3$

Như vậy u_4 là tổ hợp tuyến tính của u_1, $u_2$và u_3. Mặt khác, ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Do đó r(A)= 3 nên $\{u_1, u_2, u_3\}$ là độc lập tuyến tính. Như vậy tập B = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.