Vector

Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 23 tháng 2 năm 2023

1. Phân rã QR
2. Trị riêng và vector riêng
3. Chéo hóa
4. Ứng dụng sự chéo hóa

Outlines

Trực giao hóa Gram-Schmidt

Ví dụ 1

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$. Hãy trực chuẩn hóa họ vector trên nếu có thể.

B1. Đặt $v_1 = u_1 = (1,1,1)$, $\|v_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$

B2.

$$\langle u_2, v_1 \rangle = 0.1 + 1.1 + 1.1 = 2$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\|v_2\|^2 = \frac{2}{3}$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt

B3.

$$\langle u_3, v_1\rangle = 1, \langle u_3, v_2\rangle = \frac{1}{3}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\|v_3\|^2 = \frac{1}{2}$$

Như vậy ta có họ trực giao tương ứng

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), v_3 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Để tìm họ trực chuẩn, ta thực hiện thêm bước chuẩn hóa

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$
$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$$
$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt

Ví dụ 2

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc cho các vector $u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, -1, 1), u_3 = (0, 1, 1, 1)$. Hãy trực chuẩn hóa họ vector trên nếu có thể.

Phân rã QR - QR decomposition

Mệnh đề

Nếu A là ma trận có kích thước $m \times n$ gồm n vector cột độc lập tuyến tính thì A có thể được phân tích thành tích của 2 ma trận

$$A = QR$$

Với Q là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột trực chuẩn và R là ma trận $n \times n$ tam giác trên khả nghịch.

Phân rã QR - QR decomposition

Thuật giải

B1. Xác định n cột của $A = [u_1|u_2|\ldots|u_n]$.

B2. Thực hiện thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính và kết thúc, ngược lại sẽ nhận được $q_1, q_2, \ldots, q_n$ là họ trực chuẩn tương ứng.

B3. Xây dựng ma trận Q gồm n cột $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

B4. Xây dựng ma trận R kích thước $n \times n$ như sau

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \cdots & \langle u_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \cdots & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

Phân rã QR - QR decomposition

Ví dụ

Tiếp theo ví dụ 1 ở trên đã xây dựng họ trực chuẩn. Phân rã QR ma trận sau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có các cột của A lần lượt như sau

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Phân rã QR

Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa u_1, u_2, u_3 được

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

Tính các tích vô hướng

$$\langle u_1, q_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\ldots$$

$$\langle u_3, q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Từ đó ta có

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \langle u_3, q_1\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \langle u_3, q_3\rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Phân rã QR

Như vậy ta có một phân rã QR của A là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Phân rã QR ma trận ở ví dụ 2 đã trực chuẩn hóa ở phần trên.

Outlines

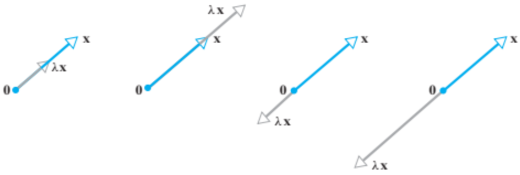
Trị riêng và vector riêng

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông, vector $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là vector riêng của A nếu Ax tỷ lệ theo một hằng số với x, nghĩa là

$$Ax = \lambda x$$

với hằng số tỷ lệ λ. Trong đó, λ được gọi là trị riêng của A và vector x được gọi là vector riêng ứng với trị riêng λ.



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$ (c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

Trị riêng và vector riêng

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, vector $x = (1, 2)$ là một vector riêng của ma trận A, với một trị riêng là $\lambda = 3$.

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} = 3x$$

Outlines

Trị riêng và vector riêng

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông có kích thước $n \times n$, λ được gọi là trị riêng của A khi và chỉ khi

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Trong đó $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ tìm đa thức đặc trưng của A.

Trị riêng và vector riêng

Đa thức đặc trưng của A, $det(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Định nghĩa

Cho ma trận vuông $A \in M_n$, với trị riêng λ, ta gọi nghiệm X của phương trình

$$(A - \lambda I_n) X = 0$$

là một vector riêng của A ứng với trị riêng λ.

Ví dụ

Hãy tìm vector riêng ứng với ma trận đã có đa thức đặc trưng ở ví dụ trên

Giải phương trình đa thức đặc trưng, ta có

$$-(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$
$$\lambda=1 \text{ hay } \lambda=2$$

Với $\lambda=1$, tìm cơ sở cho không gian nghiệm phương trình $(A-I_3)X=0$, ta có

$$A-I_3=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -6 & -5 & 3\\ -6 & -6 & 4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm hệ phương trình trên $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}t, t, t\right), t \in \mathbb{R}$

Ứng với trị riêng $\lambda = 1$, tồn tại vector riêng $u_1 = \left(-\frac{1}{3}, 1, 1\right)$.

Với $\lambda = 1$, tìm cơ sở cho không gian nghiệm phương trình $(A - I_3)X = 0$, ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm PT $(x, y, z) = (t, s, 2t + 2s), t, s \in \mathbb{R}$

Ứng với trị riêng $\lambda = 1$, tồn tại vector riêng $u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (0, 1, 2)$.

Thuật toán chéo hóa ma trận vuông $A \in M_n$

B1. Tìm đa thức đặc trưng $det(A - \lambda I)$. Nếu $P_A(\lambda)$ có tổng các lũy thừa khác n thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc, ngược lại chuyển sang bước 2.

B2. Tìm tất cả các nghiệm λ_i của phương trình đa thức đặc trưng. Với mỗi trị riêng λ_i tìm cơ sở và số chiều cho không gian nghiệm phương trình $(A - \lambda I_n) X = 0$.
Nếu mỗi λ_i số chiều không gian nghiệm nhỏ hơn lũy thừa của λ_i trong đa thức đặc trưng thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc, ngược lại chuyển sang bước 3.

B3. Với các vector trong cơ sở không gian nghiệm tìm được ở bước 2, ta đặt ma trận P là ma trận có được bằng cách dựng các vector thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo. $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, tìm trị riêng và vector riêng của A, xác định cơ sở và số chiều của các không gian vector riêng tương ứng.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1(\text{ bội } 1), \lambda = -2(\text{ bội } 2)$$

- Vector riêng

  Với $\lambda = 1$, giải nghiệm hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$, ta có nghiệm tổng quát

$$(x, y, z) = (t, -t, t), t \in \mathbb{R}$$

  Với trị riêng $\lambda = -2$, vector riêng tương ứng là $u_1 = (1, -1, 1)$
  Với $\lambda = 1$, giải nghiệm hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$, ta có nghiệm tổng quát

$$(x, y, z) = (-t - s, t, s), t, s \in \mathbb{R}$$

  Với trị riêng $\lambda = 1$, vector riêng tương ứng là
  $u_2 = (-1, 1 - 0), u_3 = (-1, 0, 1)$

Vì các không gian nghiệm đều có số chiều bằng số bội của lũy thừa nên A chéo hóa được.

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vector u_1, u_2, u_3 thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ - SV tự giải

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, hãy chéo hóa ma trận trên.

Ví dụ - SV tự giải

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, hãy chéo hóa ma trận trên.

Outlines

Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, hãy tìm A^n.

Để tìm A^n, ta chéo hóa ma trận A trên, vì nếu A chéo hóa được thì

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

- Trị riêng, A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$

Vector riêng

$$u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2)$$

Vậy A chéo hóa được, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$A = PDP^{-1}$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Tiếp theo ta tìm được

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Ví dụ - SV tự giải

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, hãy tìm A^{100}.

Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Ví dụ

Cho các dãy số thực u_n, v_n thỏa công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

và $u_0 = 2, v_0 = 1$. Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n, v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Điều kiện ban đầu của dãy số có thể được viết lại như sau

$$X_{n+1} = AX_n \text{ với } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta tính được $X_n = A^n X_0$ Bằng cách chéo hóa ma trận A, ta có

$$A^n = \begin{pmatrix} x^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

Vậy

$$\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1} \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n \end{cases}$$

Ví dụ - Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy vô hạn các số

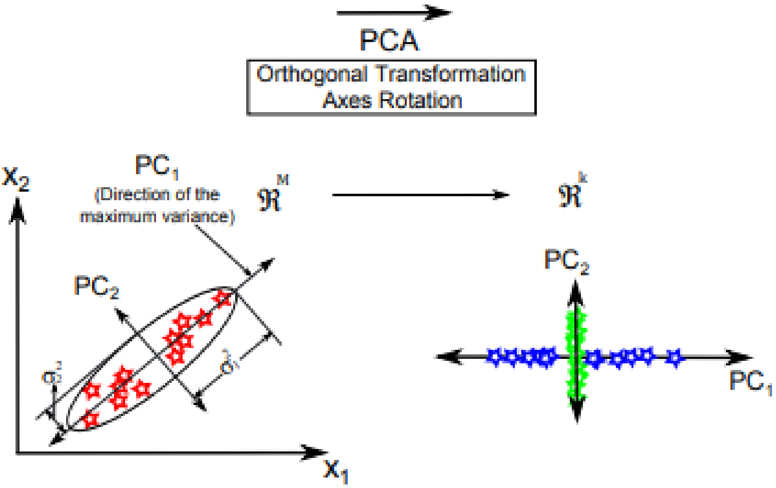
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

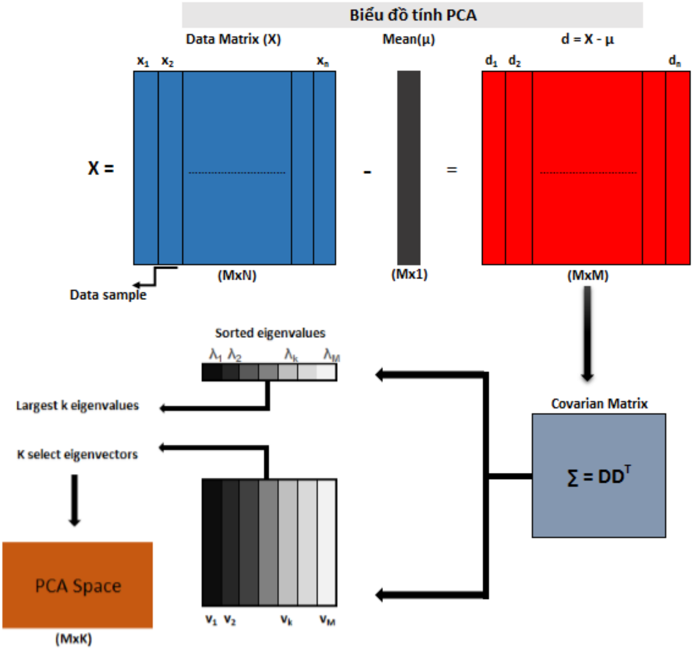
Mỗi số hạng trong dãy Fibonnacci, kể từ số hạng thứ ba, bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó.

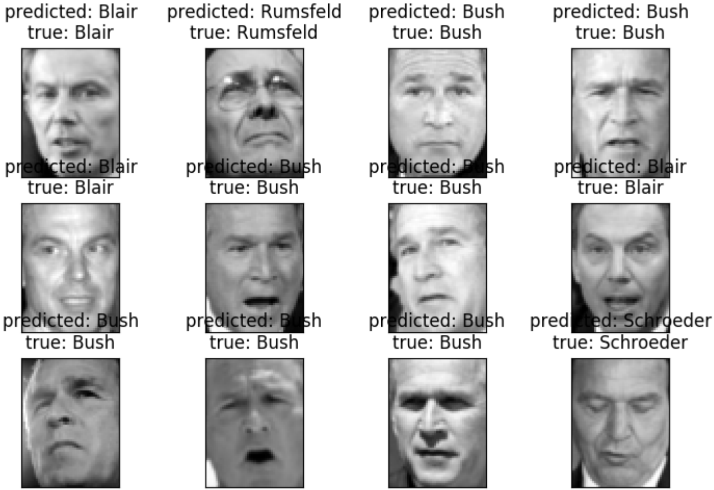
$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 1, F_1 = 1$$

Hãy tìm công thức tổng quát để xác định số hạng F_n.

Ứng dụng trong nhận diện khuôn mặt




Biểu đồ tính PCA
Data Matrix (X)
Mean(µ)
d = X - µ
X =
-
=
(MxN)
(Mx1)
(MxM)
Data sample
Sorted eigenvalues
Largest k eigenvalues
K select eigenvectors
Covarian Matrix
∑ = DD^T
PCA Space
(MxK)


predicted: Blair
true: Blair
predicted: Rumsfeld
true: Rumsfeld
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Blair
true: Blair
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Blair
true: Blair
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Bush
true: Bush
predicted: Schroeder
true: Schroeder