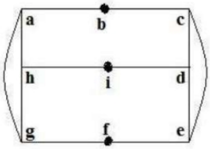
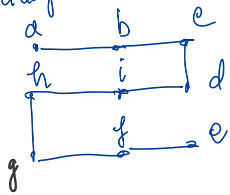
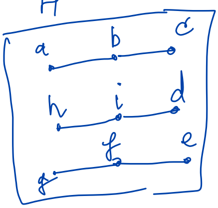
Câu 3(0.5+1.5 điểm): Tìm đường đi Hamilton và giải thích tại sao không tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị sau:



Đồ thị có đường đi Hamilton như sau



H



Giả sử phản chứng G có chu trình Hamilton H. Khi đó $ab, bc, hi, di, gf, fe \in E(H)$. Ta ký hiệu $deg_K(x)$ là bậc của x khi xét đồ thị K.

Ta có $deg_K(u) = 2 \ \forall u \in V(G)$ (*)

Xét đỉnh a, ta có phải có đúng 1 trong các TH sau xảy ra.

TH1: $ah \in E(H) \Longrightarrow ag, hg \notin E(H) \rightarrow deg_H(g) = 1$ (mâu thuẫn (*))

$\Longrightarrow$ Ko xảy ra

TH2: $ag \in E(H)$, tương tự TH trên

TH3: $hg \in E(H)$, //

Vậy ta có điều vô lý. Suy ra G ko có chu trình Hamilton.

Câu 4(1+0.5 điểm):

a. Chứng minh trong mọi đồ thị đơn (có ít nhất 2 đỉnh) luôn tồn tại 2 đỉnh cùng bậc.

b. Cho đồ thị đơn có 50 cạnh. Số đỉnh ít nhất mà đồ thị có thể có là bao nhiêu? Tại sao

a) Đặt $S = \{deg(u) : u \in V(G)\}$

Ta có $\left[\begin{array}{l} S \subset \{0,1,\dots,n-2\} \\ S \subset \{1,2,\dots,n-1\} \end{array}\right. \Rightarrow |S| \le n-1$

Suy ra $\exists u,v \in G: deg(u) = deg(v)$

b) Gọi $n = |V(G)|$, ta có $deg(v) \le n-1 \ \forall v \in V(G)$

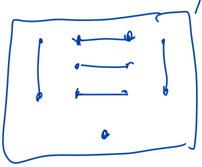
Theo bổ đề bắt tay, ta có:

$$n(n-1) \ge \sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)| = 100$$

$\rightarrow n^2 - n - 100 \ge 0 \Rightarrow n \ge 10\dots \Rightarrow n \ge 11$

Ta chỉ ra đồ thị 11 đỉnh, gồm $\rightarrow$ 10 đỉnh bậc 9, $\rightarrow$ 1 đỉnh bậc 10 như sau

Xét G $\rightarrow$ 10 đỉnh bậc 2, $\rightarrow$ 1 đỉnh bậc 0



G

Khi đó $\overline{G}$ là đồ thị thỏa yêu cầu

$\rightarrow$ Suy ra số đỉnh min là 11.

Câu 7. (0.5 điểm)

Một ngôi chùa linh thiêng có 5 trụ bằng kim cương. Người ta đúc các dây xích bằng vàng để nối các trụ lại với nhau, với điều kiện mỗi trụ chỉ được nối với đúng 3 trụ khác. Các nhà sư nghĩ mãi không tìm ra cách nối. Hãy giải thích tại sao không thể thực hiện được cách nối ?

Giả sử phản chứng các nhà sư nghĩ ra cách làm được

Xét đồ thị G gồm 5 đỉnh ứng vs 5 ~~trụ~~. Hai đỉnh nối đc vs nhau bởi cạnh nếu 2 trụ tương ứng nối vs nhau.

Khi đó $deg(v) = 3 \ \forall v \in V(G)$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V(G)} deg(v) = 5 \cdot 3 = 15 \text{ (vô lý)}$$

Suy ra các nhà sư ko thể làm được

CÂU 5: (1 đ = 0,5đ + 0,5đ)

Cho K là đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và n cạnh ($n \geq 1$).

Chứng minh K có ít nhất một đỉnh có bậc ≤ 2 và có ít nhất một đỉnh có bậc ≥ 2.

vì $|E(K)| \geq |V(K)| \Rightarrow K$ có chu trình C.

Lấy $u \in V(C) \Rightarrow deg(v) \geq 2$

$\Rightarrow K$ có ít nhất 1 đỉnh bậc ≥ 2.

· Giả sử K ko có đỉnh bậc $\leq 2 \Rightarrow deg(v) \geq 3 \ \forall v \in V(K)$

Theo bổ đề bắt tay ta có

$$2n = 2|E(K)| = \sum_{v \in V(K)} deg(v) \geq 3|V(K)| = 3n$$

$\Rightarrow 2n \geq 3n$ (vô lý)

Vậy K phải có đỉnh bậc ≤ 2.

Bài tập thêm

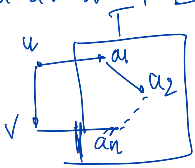
① G là đồ thị vô hướng có trọng số. G có nhiều hơn 2 cạnh có trọng số min.

a) Chứng minh rằng: Mỗi MST phải đi qua một cạnh có trọng số min nào đó

b) Biết rằng ko có chu trình nào chứa nhiều hơn 1 cạnh có trọng số min. Cm mọi MST phải chứa tất cả các cạnh có trọng số min

a) Giả sử phản chứng T là MST không đi qua bất kỳ cạnh nào có trọng số min. Xét uv là cạnh có trọng số min của G.

Khi đó $uv \notin E(T)$



Vì T là cây khung của G
⇒ tồn tại đường đi nối uv trong T, gọi là $u a_1 a_2 \dots a_n v$.

Từ T, bỏ đi a_1a_2, bổ sung uv, ta có cây khung T' thỏa

$$w(T') = w(T) + w(uv) - w(a_1a_2)$$

Vì T' ko chứa cạnh có trọng số min ⇒ $w(a_1a_2) > w(uv)$

$\Rightarrow w(T') < w(T)$ (mâu thuẫn).

Vậy mọi MST phải đi qua cạnh có trọng số min nào đó

b) Giả sử phản chứng cây khung T không chứa cạnh uv có trọng số min

Vì T là cây khung ⇒ tồn tại đường đi $u a_1 a_2 \dots a_n v$ trong T nối u,v

Từ T, bỏ a_1a_2, bổ sung uv, ta có cây khung T' thỏa

$$w(T') = w(T) - w(a_1a_2) + w(uv)$$

Vì $v u a_1 a_2 \dots a_n v$ là chu trình của G chứa uv ⇒ $w(a_1a_2) > w(uv)$

$\Rightarrow w(T') < w(T)$ (mâu thuẫn)

Vậy ta có đpcm.

② Cho đồ thị G thoả $\deg(u) + \deg(v) \geq |V| + 1 \ \forall u, v \in V(G)$

Chứng minh rằng luôn tồn tại đường đi độ dài 2 nối 2 đỉnh u, v bất kỳ trong G.

Với $u, v \in V(G)$

Đặt $N(u) = \{a \in V(G) : au \in E(G)\}$, $N(v) = \{a \in V(G) : av \in E(G)\}$

Ta có: $|N(u)| = \deg(u)$, $|N(v)| = \deg(v)$.

Nếu $N(u) \cap N(v) = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad |N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| \geq |V| + 1$$

Mà $N(u) \cup N(v) \subset V(G)$

$$\Rightarrow |N(u) \cup N(v)| \leq |V(G)|$$

$$\Rightarrow |V(G)| \geq |V(G)| + 1 \text{ (vô lý)}$$

$\Rightarrow N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$

Lấy $b \in N(u) \cap N(v) \Rightarrow bu, bv \in E(G)$

$\Rightarrow vbu$ là đg đi cần tìm.

(3) Một hội nghị có 35 người tham dự. Biết 2 người bất kỳ thì hoặc quen nhau hoặc cùng không quen nhau. Giả sử mỗi người quen ít nhất 28 người. Chứng minh rằng có ít nhất 6 người có cùng số người quen.

Xét đồ thị G có 35 đỉnh ứng vs 35 người tham gia hội nghị.
2 đỉnh bất kỳ kề nhau nếu hai người tương ứng quen nhau.

Ta có: $\deg(u) \geq 28 \ \forall u \in V(G)$

Ta chứng minh có ít nhất 6 đỉnh cùng bậc

Giả sử phản chứng không có 6 đỉnh nào cùng bậc

$\Rightarrow \forall i \in \underbrace{\{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34\}}_{S}$: ∃ tối đa 5 đỉnh có bậc i

$\Rightarrow \quad |V(G)| \leq 5.7 = 35$

Mà $|V(G)| = 35$

$\Rightarrow \forall i \in S$. tồn tại đúng 5 đỉnh bậc i

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 5.(28+29+30+31+32+33+34)$ (lẻ)

(mâu thuẫn)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

④ Có tồn tại hay không đồ thị lưỡng phân với bậc các đỉnh là

6, 6, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3.

Giả sử phản chứng tồn tại đồ thị lưỡng phân thỏa yêu cầu với phân hoạch của V(G) là X_1, X_2.

Khi đó

$$\sum_{v \in X_1} deg(v) = \sum_{v \in X_2} deg(v) = 22.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử đỉnh bậc 5 thuộc X_1

$\Rightarrow$ các đỉnh thuộc X_2 chỉ có bậc 3 hoặc 6

$\Rightarrow$ $22 = 3.x + 6y$ (x là số đỉnh bậc 3, y — bậc 6)

(vô lý vì VT $\not\vdots$ 3, VP $\vdots$ 3)

$\Rightarrow$ Không có đồ thị lưỡng phân như hình vẽ.