ÔN THI TOÁN RỜI RẠC CUỐI KỲ

<u>CÂU 1:</u> Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

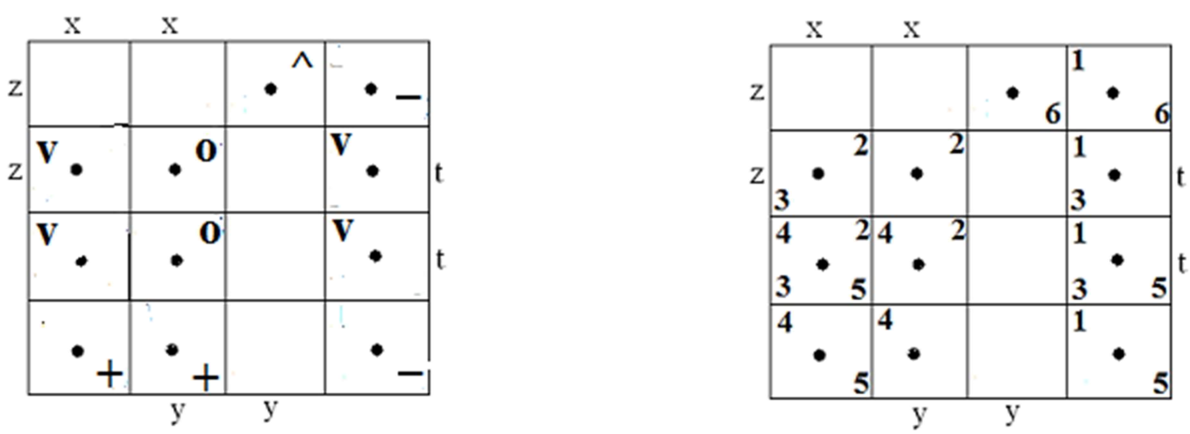
$$f(x, y, z, t) = (x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y\,z)\overline{t} \vee t\,(\overline{y} \vee x\,y) = x\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,y\,z\overline{t} \vee \overline{y}\,t \vee x\,y\,t$$

a) Vẽ biểu đồ $S = \text{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

<u>GIẢI</u>

a) $S = \text{Kar}(f) = K(x\overline{z}\,\overline{t})\ (+) \cup K(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t})\ (-) \cup K(\overline{x}\,y\,z\overline{t})\ (\wedge) \cup K(\overline{y}\,t)\ (\vee) \cup K(x\,y\,t)\ (\text{o})$



***S* = Kar(*f*)**

Các tế bào lớn của S là $T_1 = \overline{x}\,\overline{y}$, $T_2 = x\,t$, $T_3 = \overline{y}\,t$, $T_4 = x\overline{z}$, $T_5 = \overline{y}\,\overline{z}$ và $T_6 = \overline{x}\,z\overline{t}$.

b) Thực hiện thuật toán, ta có được 3 phép bao phủ cho S = Kar(f) :

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad T_1 \ (\text{tối tiểu}) \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ T_2 \to T_4 \to T_6 \to T_3 \to T_1 \ (\text{chưa tối tiểu}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad T_5 \ (\text{tối tiểu}) \end{array}$$

Ta có 3 phép phủ cho S = Kar(f) là

$S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_1$ (1), $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup \mathbf{T_3} \cup T_1$ (2) và $S = T_2 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_3 \cup T_5$ (3).

Phép phủ (2) chưa tối tiểu [vì dư $\mathbf{T_3}$ so với (1)]. Như vậy có hai phép phủ tối tiểu cho S = Kar(f) là (1) và (3). Từ (1) và (3), ta có

$f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,z\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}$ (nhận vì đơn giản hơn công thức dưới) [tự vẽ mạng các cổng cho f].

$f(x, y, z, t) = x\,t \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,z\overline{t} \vee \overline{y}\,t \vee \overline{y}\,\overline{z}$ (bị loại vì phức tạp hơn công thức trên).

CÂU 2: Cho hàm Boole f theo các biến x, y, z và t có dạng đa thức

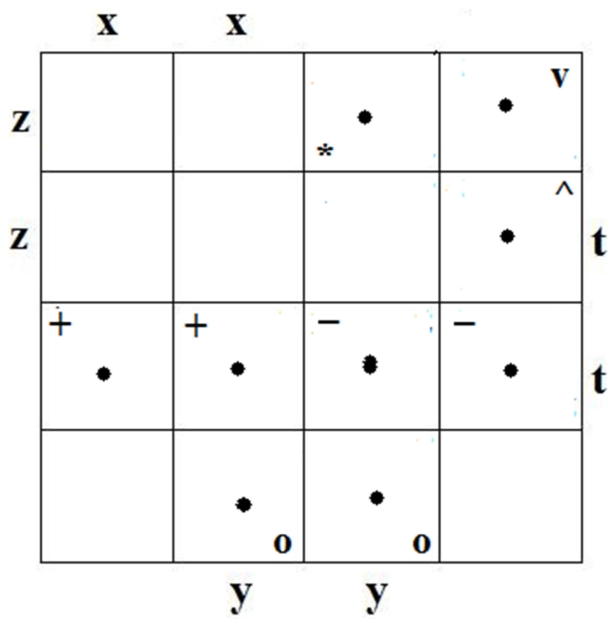
$$f(x,y,z,t) = (x\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z)\,t \vee \bar{t}\,(\bar{x}\,\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz)$$
$$= x\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}zt \vee \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee y\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}yz\bar{t}\,.$$

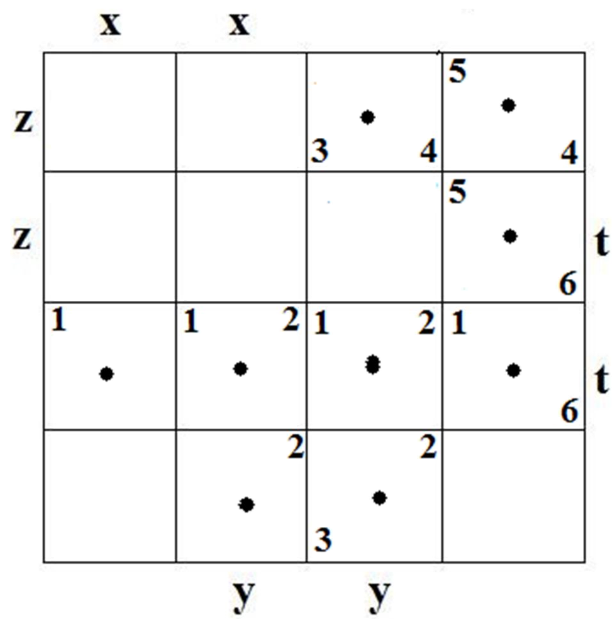
a) Vẽ biểu đồ $S = \mathrm{Kar}(f)$ và xác định các tế bào lớn của S.

b) Tìm các công thức đa thức tối tiểu của f. Từ đó vẽ một mạng các cổng tổng hợp f.

GIẢI

a) $S = \mathrm{Kar}(f) = K(x\bar{z}t)\,(+) \cup K(\bar{x}\,\bar{z}t)\,(-) \cup K(\bar{x}\,\bar{y}zt)\,(\wedge) \cup K(\bar{x}\,\bar{y}z\bar{t})\,(\vee) \cup K(y\bar{z}\,\bar{t})\,(\mathbf{o}) \cup K(\bar{x}yz\bar{t})\,(*)$





S = Kar(f)

S có 6 tế bào lớn $T_1 = \bar{z}t$, $T_2 = y\bar{z}$, $T_3 = \bar{x}y\bar{t}$, $T_4 = \bar{x}z\bar{t}$, $T_5 = \bar{x}\,\bar{y}z$ và $T_6 = \bar{x}\,\bar{y}t$.

b) S có 4 phép phủ như sau : $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (1), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (2),

$S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (3), $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (4),

$T_1 \to T_2 \to T_5 \to T_3$
$\quad\;\downarrow \quad\; \downarrow$
$T_5 \leftarrow T_4 \quad T_4$
$\quad\;\downarrow$
$\quad T_6$

Phép phủ (2) và (3) trùng nhau nên ta chỉ có 3 phép phủ tối tiểu là (1), (2) và (4). Từ (1), (2) và (4), ta có 3 công thức đa thức đơn giản như nhau cho f :

$f(x,y,z,t) = \bar{z}t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{t}$ (công thức đa thức tối tiểu của f và tự vẽ mạng các cổng)

$= \bar{z}t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}z$ (công thức đa thức tối tiểu của f)

$= \bar{z}t \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}t$ (công thức đa thức tối tiểu của f) .

CÂU 3 : $f(x,y,z,t) = y\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee \bar{x}\,\bar{t} \vee \bar{z}\,\bar{t}$ (*) $= y\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee \bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}z\bar{t}$ (**) : (*) đơn giản hơn (**).

CÂU 4 : Cho $T = \{ 1, 2, 3 \}$ và đặt $\forall x, y \in T,\ x\Re y \Leftrightarrow x+1 \geq y$.

a) Xác định tập hợp $L = \{ (x, y) \in T^2 \mid x\Re y \}$.

b) Xét các tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền của quan hệ hai ngôi $\Re$.

GIẢI

a) L = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) }.

b) $\Re$ phản xạ ($1\Re1$, $2\Re2$ và $3\Re3$). $\Re$ không đối xứng ($\exists 3, 1 \in T$, $3\Re1$ và $1 \overline{\Re}\, 3$).

$\Re$ không phản xứng ($\exists 1, 2 \in T$, $1\Re2$, $2\Re1$ và $1 \neq 2$). $\Re$ không truyền ($\exists 1, 2, 3 \in T$, $1\Re2$, $2\Re3$ và $1 \overline{\Re}\, 3$).

CÂU 5 : a) Giải phương trình trên $\mathbf{Z}_{14}$: $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79}$, $\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420}$ và $\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347}$.

b) Giải phương trình trên $\mathbf{Z}_{32}$: $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954}$ và $\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716}$.

Suy ra nghiệm của phương trình $-4(\overline{z} + \overline{23}) + \overline{339} = \overline{-505}$ trên $\mathbf{Z}_{32}$.

GIẢI

a) Trên $\mathbf{Z}_{14}$: $\overline{56}.\overline{x} = \overline{-79} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

$\overline{-532}.\overline{y} = \overline{420} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{y} = \overline{0}$: phương trình có 14 nghiệm tùy ý trong $\mathbf{Z}_{14}$ ($\overline{y} = \overline{0}, \overline{1}, .., \overline{13}$).

$\overline{275}.\overline{z} = \overline{-347} \Leftrightarrow \overline{9}.\overline{z} = \overline{3} \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{9}^{-1}.\overline{3} = \overline{11}.\overline{3} = \overline{33} = \overline{5}$

[nghiệm duy nhất vì (9, 14) = 1 và $\overline{9} \in U(\mathbf{Z}_{14})$].

b) Trên $\mathbf{Z}_{32}$: $\overline{-404}.\overline{y} = \overline{954} \Leftrightarrow \overline{12}.\overline{y} = \overline{26} \Rightarrow \overline{8}.\overline{12}.\overline{y} = \overline{8}.\overline{26} \Rightarrow \overline{96}.\overline{y} = \overline{208}$

$\Rightarrow \overline{0}.\overline{y} = \overline{16} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

[n = 32, a = 12, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** $\times$ 8 = **d**n' với n' = 8, b = 26 và $\overline{b \,\vdots\, d}$. Nhân $\overline{b'} = \overline{8}$ vào hai vế].

$\overline{668}.\overline{x} = \overline{-716} \Leftrightarrow \overline{28}.\overline{x} = \overline{20}$ (1) [n = 32, a = 28, b = 20, **d** = (a, n) = **4**, n = **4** $\times$ 8, a = **4** $\times$ 7, b = **4** $\times$ 5].

$\Leftrightarrow \overline{4}.\overline{7}.\ \overline{x} = \overline{4}.\overline{5}$ (trong $\mathbf{Z}_{4\times 8}$) đưa đến $\overline{7}.\overline{X} = \overline{5}$ (trong $\mathbf{Z}_8$) (2). Ta có (7, 8) = 1 nên $\overline{7} \in U(\mathbf{Z}_8)$.

Do $\overline{7}.\overline{7} = \overline{1}$ nên $\overline{7}^{-1} = \overline{7}$ và (2) có nghiệm duy nhất (trong $\mathbf{Z}_8$) là $\overline{X} = \overline{7}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{3}$.

Suy ra (1) có 4 nghiệm trong $\mathbf{Z}_{32}$ là $\overline{x} = \overline{3+8j}$ (j = 0, 1, 2, 3), nghĩa là $\overline{x} = \overline{3}, \overline{11}, \overline{19}$ hoặc $\overline{27}$.

$-4(\overline{z} + \overline{23}) + \overline{339} = \overline{-505} \Leftrightarrow \overline{-4}\overline{t} = \overline{-505} - \overline{339} = \overline{-844} = \overline{20}$ với $\overline{t} = \overline{z} + \overline{23} \Leftrightarrow \overline{-4}.\overline{t} = \overline{20} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{28}.\overline{t} = \overline{20}$ (3). Áp dụng (1) cho (3), ta có $\overline{t} = \overline{3}, \overline{11}, \overline{19}$ và $\overline{27}$, nghĩa là

$\overline{z} = \overline{t} - \overline{23} = \overline{-20}, \overline{-12}, \overline{-4}$ hoặc $\overline{4}$. Vậy $\overline{z} = \overline{4}, \overline{12}, \overline{20}$ hoặc $\overline{28}$ trong $\mathbf{Z}_{32}$.

CÂU 6:

$\forall x, y \in \mathbf{Z}$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ phụ thuộc vào x và y)

$\forall x, y \in \mathbf{N}$, đặt $x \,\gamma\, y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{N}, x^2 - y^2 = 8\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ phụ thuộc vào x và y)

a) Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{Z}$ mà không là quan hệ thứ tự.

b) Chứng minh γ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbf{N}$ mà không là quan hệ tương đương.

GIẢI

a) $\Re$ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists 0 \in \mathbf{Z}, (x^2 - x^2) = 8.0$ nên $x\Re x$.

$\Re$ đối xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{Z}, x\Re y \Rightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, (x^2 - y^2) = 8\boldsymbol{k} \Rightarrow \exists(-\boldsymbol{k}) \in \mathbf{Z}, (y^2 - x^2) = 8(-\boldsymbol{k}) \Rightarrow y\Re x$.

$\Re$ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{Z}, (x\Re y$ và $y\Re z) \Rightarrow [\, \exists \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' \in \mathbf{Z}, [\,(x^2 - y^2) = 8\boldsymbol{k}$ và $(y^2 - z^2) = 8\boldsymbol{k}'\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\, \exists(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \in \mathbf{Z}, (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = 8(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\,] \Rightarrow x\Re z$.

$\Re$ không phản xứng vì $\exists\, 1, (-1) \in \mathbf{Z}, 1\Re(-1), (-1)\Re 1$ và $1 \neq -1$.

$[\, 1^2 - (-1)^2 = (-1)^2 - 1^2 = 8.0$ với $0 \in \mathbf{Z}\,]$.

Vậy $\Re$ là một quan hệ tương đương nhưng không là quan hệ thứ tự trên $\mathbf{Z}$.

b) γ phản xạ vì $\forall x \in \mathbf{N}, \exists 0 \in \mathbf{N}, (x^2 - x^2) = 8.0$ nên $x \gamma x$.

γ phản xứng vì $\forall x, y \in \mathbf{N}, (x \gamma y$ và $y \gamma x) \Rightarrow [\, \exists \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' \in \mathbf{N}, (x^2 - y^2) = 8\boldsymbol{k} \geq 0$ và $(y^2 - x^2) = 8\boldsymbol{k}' \geq 0\,]$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

γ truyền vì $\forall x, y, z \in \mathbf{N}, (x \gamma y$ và $y \gamma z) \Rightarrow [\, \exists \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' \in \mathbf{N}, [\,(x^2 - y^2) = 8\boldsymbol{k}$ và $(y^2 - z^2) = 8\boldsymbol{k}'\,] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\, \exists(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \in \mathbf{N}, (x^2 - z^2) = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\,] \Rightarrow x \gamma z$. .

γ không đối xứng vì $\exists\, 5, 3 \in \mathbf{Z}, 5 \gamma 3$ và $3 \,\overline{\gamma}\, 5$

$[\, 5^2 - 3^2 = 8.2$ với $2 \in \mathbf{N}$ và $3^2 - 5^2 = -16 \neq 8k, \forall k \in \mathbf{N}\,]$.

Vậy γ là một quan hệ thứ tự nhưng không là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{N}$.

CÂU 7: Cho $S = \{ 3, 6, 7, 10, 12, 14 \}$.

$\forall x, y \in S$, đặt $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 = 5\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ phụ thuộc vào x và y).

a) Chứng minh $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S mà không phải là quan hệ thứ tự.

b) Viết các lớp tương đương do $\Re$ phân hoạch trên S.

GIẢI

a) Làm tương tự như phần a) của **CÂU 6**.

b) $\overline{10} = \{ 10 \}$, $\overline{6} = \{ 6, 14 \}$ (vì $14^2 - 6^2 = 196 - 36 = 160 = 5 \times 32$ nên $14 \,\Re\, 6$) và $\overline{3} = \{ 3, 7, 12 \}$

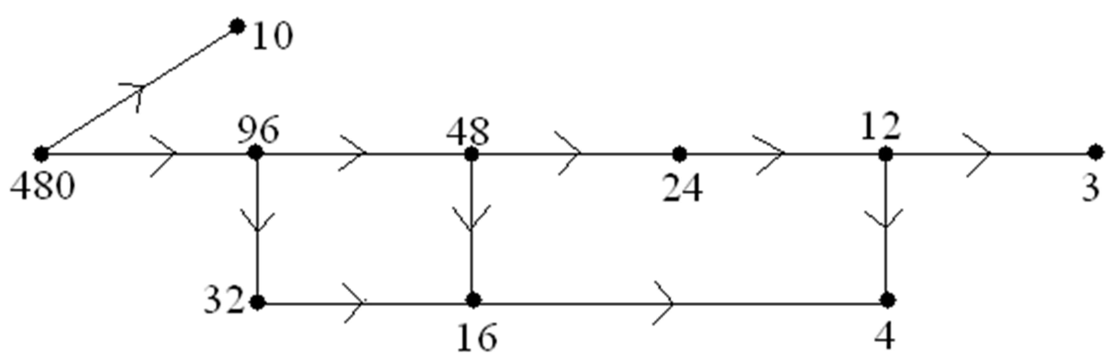
(vì $12^2 - 7^2 = 144 - 49 = 95 = 5 \times 19$ và $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40 = 5 \times 8$ nên $12 \,\Re\, 7$ và $7 \,\Re\, 3$).

CÂU 8 : Cho $S = \{ 3, 4, 10, 12, 16, 24, 32, 48, 96, 480 \}$. Xét quan hệ thứ tự $\vdots$ trên S như sau: $\forall x, y \in S$, $x \vdots y \Leftrightarrow x$ là một bội số của y

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \vdots)$ và tìm các phần tử cực tiểu (tối tiểu), cực đại (tối đại), nếu có.

Cho biết $\vdots$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* ? Tại sao ?

GIẢI



$(S, \vdots)$

$\min(S, \vdots) = 480$. Các phần tử tối đại là 3, 4 và 10.

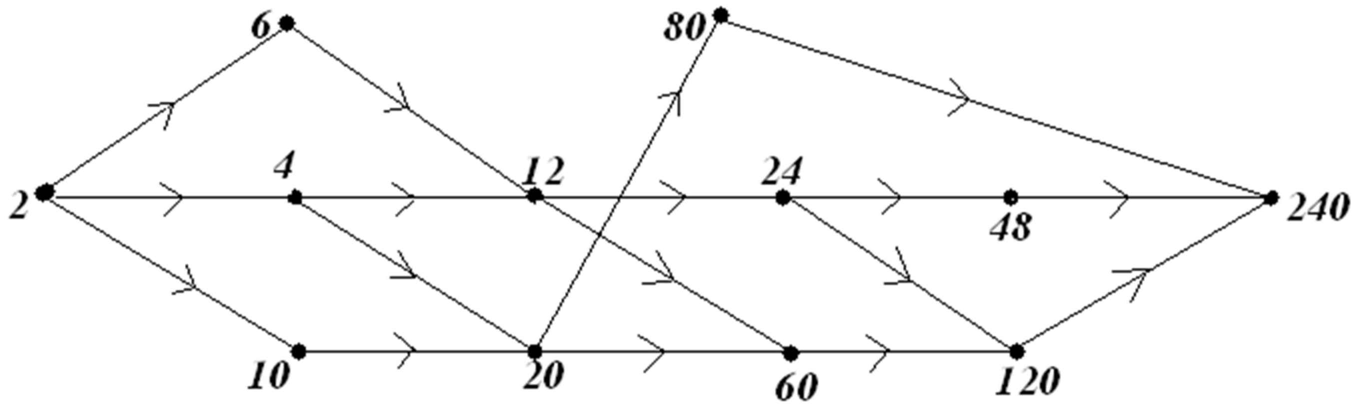
$\vdots$ là thứ tự bán phần trên S vì $3, 4 \in S$ có $\overline{3 \vdots 4}$ và $\overline{4 \vdots 3}$.

CÂU 9 : Cho $T = \{ 2, 4, 6, 10, 12, 20, 24, 48, 60, 80, 120, 240 \}$ và quan hệ thứ tự $|$ trên T như sau : $\forall x, y \in T$, $x \mid y \Leftrightarrow x$ là một ước số của y.

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(T, |)$ và tìm min, max, các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có).

Cho biết $|$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* ? Tại sao ?

GIẢI



(T, |)

min(T, |) = 2 và max(T, |) = 240 . | là thứ tự bán phần trên T vì 4, 6 ∈ T có $\overline{4|6}$ và $\overline{6|4}$.

CÂU 10 : **Ω** là một quan hệ tương đương trên *T* = { α, β, γ, δ, ε. φ, ψ, θ } và **Ω** phân hoạch *T* thành 4 lớp tương đương là { δ }, { β, ε }, { γ, ψ } và { α, φ, θ }. Liệt kê tập hợp **Ω** = { (u, v) ∈ T^2 | u **Ω** v }. **Ω** có phải là một quan hệ thứ tự trên *T* không ? Tại sao ?

GIẢI

Ω = { (δ, δ), (β, β), (ε, ε), (β, ε), (ε, β), (γ, γ), (ψ, ψ), (γ, ψ), (ψ, γ), (α, α), (φ, φ), (θ, θ), (α, φ), (φ, α), (α, θ), (θ, α), (φ, θ), (θ, φ) }.

Ω không phải là một quan hệ thứ tự trên T vì ∃β, ε ∈ T, β **Ω** ε, ε **Ω** β và β ≠ ε.

CÂU 11 : Σ là tập hợp các tam giác cân trên mặt phẳng và ~ là quan hệ đồng dạng trên Σ. Chứng minh ~ là một quan hệ tương đương nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên Σ.

GIẢI

Hai tam giác cân đồng dạng khi và chỉ khi góc ở đỉnh cân của chúng bằng nhau.

Σ phản xạ [∀α ∈ Σ (α có góc ở đỉnh cân là Â), Â = Â nên α ~ α].

Σ đối xứng [∀α, β ∈ Σ (α và β có góc ở đỉnh cân lần lượt là Â và $\hat{B}$), α ~ β ⇒ Â = $\hat{B}$ ⇒ $\hat{B}$ = Â nên β ~ α].

Σ truyền [∀α, β, γ ∈ Σ (α, β và γ có góc ở đỉnh cân lần lượt là Â, $\hat{B}$ và $\hat{C}$),

$\begin{cases} \alpha \sim \beta \\ \beta \sim \gamma \end{cases} \Rightarrow (\hat{A} = \hat{B}$ và $\hat{B} = \hat{C}) \Rightarrow (\hat{A} = \hat{C}) \Rightarrow (\alpha \sim \gamma)$].

Σ không phản xứng (hai tam giác đều δ và ε với cạnh lần lượt là 1 và 2 thỏa $\delta \sim \varepsilon, \varepsilon \sim \delta, \delta \neq \varepsilon$).

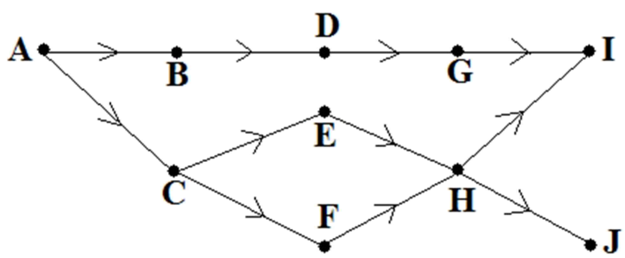
Do đó $\sim$ là một quan hệ tương đương nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên Σ.

<u>CÂU 12:</u> Cho $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$, $D = \{1, 2. 4\}$, $E = \{1, 3. 5\}$, $F = \{1, 3. 4\}$, $G = \{1, 2. 4, 5\}$, $H = \{1, 3, 4, 5\}$, $I = \{1, 2, 3. 4, 5\}$ và $J = \{1, 3. 4, 5, 6\}$.

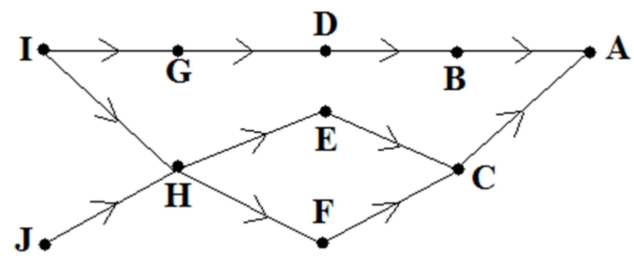
Đặt $\Omega = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \}$. Trên Ω, ta có hai quan hệ thứ tự $\subset$ và $\supset$.

Vẽ sơ đồ Hasse cho $(\Omega, \subset)$ và $(\Omega, \supset)$. Sau đó tìm min, max, các phần tử tối tiểu và tối đại của chúng (nếu có). $\subset$ và $\supset$ là thứ tự *toàn phần* hay *bán phần* trên Ω ? Tại sao ?

<u>GIẢI</u>



$(\Omega, \subset)$



$(\Omega, \supset)$

$\min(\Omega, \subset) = A$. Tối đại là I và J.

$\max(\Omega, \subset) = A$. Tối tiểu là I và J.

$\subset$ và $\supset$ đều là các thứ tự *bán phần* trên Ω vì $\exists B, C \in \Omega, B \not\subset C$ và $C \not\subset B$.

<u>CÂU 13:</u> Cho các số nguyên a và b. Cần quan tâm các vấn đề sau :

* Dùng thuật chia Euclide để tìm $d = (a, b)$ và tìm $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $d = ra + sb$.

Suy ra $e = [\, a, b \,]$ và dạng tối giản của $\frac{a}{b}$ rồi tìm $u, v \in \mathbf{Z}$ thỏa $\frac{1}{e} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$.

* Phân tích nguyên tố a và b để :

– Tìm $d = (a, b)$, $e = [\, a, b \,]$ và dạng tối giản của $\frac{a}{b}$.

– Xét tính nguyên tố cùng nhau của a và b.

– Mô tả và tính số lượng các ước số nguyên (các ước số nguyên âm hoặc dương) của a.

– Cho số nguyên dương b. Mô tả và tính số lượng các ước số nguyên (các ước số nguyên âm hoặc dương) của a sao cho các ước số này phải chia hết cho b.

CÂU 14 :

a) Tính tổng $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(-2)^k$ theo $n \geq 0$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$S_o = (0 + 1)(0 + 2)(-2)^o = 2$ và $S_n = S_{n-1} + (n + 1)(n + 2)(-2)^n$, $\forall n \geq 1$ ($\lambda = 1 \neq \alpha = -2$).

b) Tính tổng $T_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1).3^k$ theo $n \geq 1$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$T_1 = (2.1 - 1)3^1 = 3$ và $T_n = T_{n-1} + (2n - 1)3^n$, $\forall n \geq 2$ ($\lambda = 1 \neq \alpha = 3$).

c) Tính tổng $U_n = \sum_{k=2}^{n}(k^3 - 2k^2 + 4k)$ theo $n \geq 2$. Ta có hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất

$U_2 = (2^3 - 2.2^2 + 4.2) = 8$ và $U_n = U_{n-1} + (n^3 - 2n^2 + 4n)$, $\forall n \geq 3$ ($\lambda = 1 = \alpha$).

d) $a_o = -7$ và $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n - 2)$, $\forall n \geq 0$ ($\lambda = -4 = \alpha$).

e) $a_1 = -13$, $a_2 = 50$ và $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1).3^n$, $\forall n \geq 1$ [$f(\alpha) \neq 0$].

f) $a_o = 3$, $a_1 = -5$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}$, $\forall n \geq 2$ [$f(\alpha) = 0 \neq f'(\alpha)$].

g) $a_2 = -28$, $a_3 = -149$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4$, $\forall n \geq 3$ [$f(\alpha) = 0 = f'(\alpha)$].

CÂU 15: Giả sử vào tháng 1 năm 2024 dân số nước X là 100 triệu người. Sau mỗi năm, dân số nước X được tính lại như sau : lấy 110% của dân số năm trước (do dân số tăng tự nhiên) cộng thêm với 100.000 người nước ngoài đến nước X định cư hàng năm. Hỏi đến năm 2044 dân số của nước X là bao nhiêu ?

GIẢI

$\forall n \geq 2024$, đặt a_n = dân số nước X vào năm thứ n (đơn vị triệu người).

Khi đó $a_{2024} = 100$ và $a_{n+1} = \frac{11}{10}a_n + 0{,}1$, $\forall n \geq 2024$. Đây là hệ thức đệ qui cấp 1 không thuần nhất với $\lambda = 11/10$ và $0{,}1 = \varphi_o(n)\alpha^n$ với $\varphi_o(n) = 1$ và $\alpha = 1$. Giải hệ thức này để tìm trực tiếp a_n ($n \geq 2024$).

Từ đó tính ra a_{2044}.
