Họ và tên: Nguyễn Thái Bảo

MSSV: 23120023

Bài tập miễn thi Cuối kì môn Thực hành Toán tổ hợp – lớp 23CTT1

Bài toán 1.

Theo đề bài, ta có: $|A| = |B|$ và $f : A \rightarrow B$ là ánh xạ.

Theo định nghĩa, ta có f là song ánh → f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

Nhận xét: Nếu chứng minh được f là toàn ánh ⇔ f là đơn ánh thì ta cũng suy ra f là song ánh ⇔ f là toàn ánh ⇔ f là đơn ánh, tức là điều phải chứng minh.

Vậy ta chứng minh f là toàn ánh ⇔ f là đơn ánh.

Giả sử: f chỉ là toàn ánh.

Vì f không là đơn ánh: $\exists x, y \in A, x \neq y: f(x) = f(y)$

→ $|A| \geq |f(A)|+1 > |f(A)|$

Mà f là toàn ánh: $|f(A)| = |B|$

Suy ra: $|A| > |B|$ (mâu thuẫn)

Vậy f là toàn ánh → f là đơn ánh (1)

Giả sử: f chỉ là đơn ánh.

Vì f không là toàn ánh nên: $|f(A)| < |B|$

Mà f là đơn ánh: $|f(A)| = |A|$

Suy ra: $|A| < |B|$ (mâu thuẫn)

Vậy f là đơn ánh → f là toàn ánh (2)

Từ (1) và (2) suy ra f là toàn ánh ⇔ f là đơn ánh, f vừa là đơn ánh và toàn ánh nên f là song ánh.

Vậy: f là song ánh ⇔ f toàn ánh ⇔ f đơn ánh. (đpcm)

Bài toán 2.

Ta biểu diễn bài toán trên lưới tọa độ.

Mỗi cách điền bảng $2 \times n$ tương ứng với một đường đi từ điểm (0,0) đến (n,n) trên mặt phẳng tọa độ. Ta sử dụng 2 loại bước sau:

- Bước lên (U): Di chuyển từ (x, y) đến (x, y+1).
- Bước sang phải (R): Di chuyển từ (x, y) đến (x+1, y).

Để đạt tới (n,n), ta cần thực hiện đúng n bước lên (U) và n bước sang phải (R), tổng cộng 2n bước.

→ Số cách chọn thứ tự cho các bước U và R là: C_{2n}^{n}. (1)

Điều kiện thỏa mãn:

Để bảng thỏa mãn bài toán, tại cột i, số ở hàng trên a_i phải lớn hơn số ở hàng dưới b_i.

Điều kiện này tương ứng với việc đường đi luôn nằm dưới đường chéo d: y=x+1 trong biểu diễn tọa độ. Tức là, đường đi không được chạm hoặc cắt d: $y = x + 1$.

Ta chứng minh mọi cách chọn đúng thì phải thỏa mãn điều kiện trên.

Giả sử có một cách chọn hợp lệ cắt ngang hoặc chạm d tại điểm (k, k+1). Nghĩa là sau khi chọn được k số vào mỗi hàng trên và dưới từ dãy 1, 2, …, 2k, ta chọn số 2k+1 cho hàng trên rồi chọn tiếp các số còn lại cho hai hàng trên và dưới. Trong dãy số 2k+2, 2k+3, …, 2n, tồn tại 1 số nhỏ hơn 2k+1 để điền vào cột k+1 ở hàng dưới ➔ Vô lý.

Vậy tất cả các đường đi hợp lệ phải nằm hoàn toàn bên dưới d.

Các đường đi không hợp lệ là những đường chạm hoặc cắt qua đường $y = x + 1$ tại một điểm $(k, k + 1)$.

Từ điểm này, phần còn lại của đường đi được phản chiếu qua đường $y = x + 1$, dẫn đến một đường đi từ $(k, k + 1)$ đến (n - 1, n + 1).

Số cách đi không hợp lệ tương ứng với số đường đi từ (0, 0) đến (n - 1, n + 1) với việc thực hiện n + 1 bước lên và n – 1 bước sang phải trong tổng cộng 2n bước.

Vậy số đường đi không hợp lệ là: C_{2n}^{n+1} (2)

Từ (1) và (2), ta có số đường đi hợp lệ: C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1}.

Vậy số cách điền cần tìm là: C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} (khớp với công thức số Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$).