Vector

Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 23 tháng 2 năm 2023

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

Outlines

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

So sánh 2 ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}$, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là hai ma trận bằng nhau, ký hiệu $A = B$.

Ví dụ

Tìm x, y, z để

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$$

Phép chuyển vị

Chuyển vị ma trận

Cho $A \in M_{m\times n}$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Các phép toán trên ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ngoài ra, trên ma trận còn các phép toán khác như: cộng, trừ, nhân 2 ma trận và đặc biệt là các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Outlines

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

Ma trận chéo

Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông kích thước $n \times n$, ta gọi A là ma trận chéo nếu ma trận có các hệ số ngoài đường chéo chính đều là số 0.

Ví dụ ma trận chéo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận chéo

Tính chất

Nếu A là ma trận chéo có các hệ số trên đường chéo chính đều khác 0 thì ma trận nghich đảo của A, A^{-1} được xác định như sau

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_4 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_4 \end{pmatrix}$$

Ma trận chéo

Tính chất

Nếu A là ma trận chéo, ma trận lũy thừa của A, A^k với k là một số nguyên dương được xác định như sau

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_4 \end{pmatrix} \to A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_4^k \end{pmatrix}$$

Ma trận chéo

Ví dụ

Cho A là một ma trận chéo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -243 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Tìm A^{-5}

Ma trận tam giác

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông, nếu tất cả các hệ số phía trên đường chéo chính đều bằng 0 thì A được gọi là ma trận tam giác trên, nếu tất cả hệ số bên dưới đường chéo chính đều bằng 0 thì A được gọi là ma trận tam giác dưới.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ là dạng biểu diễn ma trận tam giác trên cấp 3

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ là dạng biểu diễn ma trận tam giác dưới cấp 3

Ma trận tam giác

Tính chất

- Nếu A là một ma trận tam giác trên thì ma trận chuyển vị của A, A^T là một ma trận tam giác dưới và ngược lại.
- Tích của 2 ma trận tam giác là một ma trận cùng loại.
- Ma trận tam giác chỉ khả nghich được nếu và chỉ nếu tất cả phần tử trên đường chéo chính là hệ số khác 0.
- Ma trận nghich đảo của ma trận tam giác là một ma trận cùng loại.

Ma trận đối xứng

Định nghĩa

Cho A là một ma trận vuông, A được gọi là đối xứng nếu $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tính chất

Nếu A, B là các ma trận đối xứng cùng kích thước, với $k \in \mathbb{R}$,

- A^T là ma trận đối xứng.
- $A + B, A - B$ là ma trận đối xứng.
- kA là ma trận đối xứng
- Tích của 2 ma trận đối xứng $A.B$ là một ma trận đối xứng khi và chỉ khi A, B giao hoán với nhau.

Outlines

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(K)$. Ta nói A khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$. Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là ma trận nghịch đảo của A.
Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất và ký hiệu A^{-1}.

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(K)$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó

- A^{-1} khả nghịch và $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- A^T khả nghịch và $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
- $\forall k \neq 0 \in \mathbb{R}$, kA khả nghịch và $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$

Mệnh đề

Cho $A, B \in M_n$, nếu A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Định lý

Cho $A \in M_n$, khi đó các khẳng định sau tương đương

- A khả nghịch.
- $R(A) = n$.
- $A \sim I_n$.
- Tồn tại các phép biến đổi sơ cấp biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n. Hơn nữa, qua chính các phép biến đổi sơ cấp đó, ma trận đơn vị sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

- Lập ma trận $(A|I_n)$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng biến A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \rightarrow \dots$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp

- TH1: tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất 1 dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A sẽ không khả nghịch.
- TH2: mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|B)$, ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận A.

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của ma trận A và tìm A^{-1} nếu có

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của ma trận A và tìm A^{-1} nếu có

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của ma trận A và tìm A^{-1} nếu có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Outlines

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n$. Định thức của A được ký hiệu là $det(A)$ hay $|A|$, là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, nghĩa là $A = (a)$ thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $|A| = ad - bc$.
- Nếu $n > 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ thì

  $$|A| = a_{11}\,|A(1|1)| - a_{12}\,|A(1|2)| + \dots a_{11}(-1)^{1+n}\,|A(1|n)| \text{ dòng 1}$$

  trong đó $A(i|j)$ là ma trận có được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j của A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 4.5 - (-2).3 = 26$

Ví dụ

Tính định thức ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quy tắc Sarrus

Ngoài ra, nếu A là ma trận vuông cấp 3, ta có định thức ma trận A được xác định bằng cách quy tắc Sarrus.

Tính định thức ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Định thức và ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n$. Đặt $C = c_{ij}$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j|)$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị C^T của C là ma trận phụ hợp của A, ký hiệu là $adj(A)$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, tìm ma trận phụ hợp của A.

Định lý

Cho A là ma trận vuông, A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$, hơn nữa nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A)$

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Outlines

1. Các phép tính trên ma trận
2. Các dạng ma trận đặc biệt
3. Ma trận khả nghịch
4. Định thức
5. Phương trình ma trận

Định lý

Cho các ma trận $A, A' \in M_n$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}, C \in M_{m\times n}, D \in M_n$. Khi đó

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}D(A')^{-1}$

Ví dụ

Giải phương trình

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Giải phương trình

$$X\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

Ví dụ

Giải phương trình

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Cho các ma trận và nghịch đảo của chúng như sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Tìm X thỏa $A(X - B) = C$

b) Tìm Y thỏa $(Y + B)C = A$

c) Tìm Z thỏa $A(Z - I)B = C$

d) Tìm T thỏa $AT^{-1} = BC$