TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 2 – Năm học 2020 - 2021

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng KT-ĐBCL ghi)
CK20212_MTH00050

Tên học phần:	**TOÁN HỌC TỔ HỢP**	**Mã HP:**	**MTH00050**
Thời gian làm bài:	**90 phút**	Ngày thi:	**26 / 10 / 2021**

Ghi chú: *Sinh viên* ***không được phép sử dụng tài liệu*** *khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: .... **MSSV**: .... **STT**: .....

CÂU 1: (1,5 đ)

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách xếp k viên bi y hệt nhau vào 6 hộp sao cho số bi ở hộp 1 và hộp 2 là tùy ý, số bi ở hộp 3 ít nhất là 2, số bi ở hộp 4 và hộp 5 đều ≥ 3 và số bi ở hộp 6 là một số nguyên tố trong khoảng từ 4 đến 12. Viết hàm sinh $F(x)$ cho dãy $\{ a_k \mid k \geq 0 \}$ và tính giá trị a_{38}.

CÂU 2: (1,5 đ)

$\forall k \geq 0$, đặt b_k là số cách xếp k hộ dân vào 4 khối nhà chung cư sao cho số hộ dân ở khối 1 là tùy ý, khối 2 không bị bỏ trống, số hộ dân ở khối 3 là một số nguyên chẵn và số hộ dân ở khối 4 là một số nguyên lẻ. Viết hàm sinh mũ $E(x)$ cho dãy $\{ b_k \mid k \geq 0 \}$ và $\forall k \geq 0$, hãy tính b_k theo k.

CÂU 3: (3 đ)

Đặt $U = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in \mathbf{N}^4 \mid x + y + z + t = 21 \}$. Tính $|X|$, $|Y|$, $|Z|$ và $|T|$ với

a) $X = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in U \mid \alpha$ thỏa $x \geq 5$ **(1)** hay $y \geq 5$ **(2)** hay $z \geq 10$ **(3)** hay $t \geq 10$ **(4)** $\}$.

b) $Y = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in U \mid \alpha$ thỏa $x \leq 4$, $y \leq 4$, $z \leq 9$ và $t \leq 9 \}$.

c) $Z = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in U \mid \alpha$ thỏa đúng một trong các điều kiện **(1)**, **(2)**, **(3)** và **(4)** $\}$.

d) $T = \{ \alpha = (x, y, z, t) \in U \mid \alpha$ thỏa ít nhất hai điều kiện trong các điều kiện **(1)**, **(2)**, **(3)** và **(4)** $\}$.

CÂU 4: (2đ)

Các ca sĩ a, b, c, d, e chọn các bài hát 1, 2, 3, 4, 5, 6 để trình diễn (mỗi ca sĩ chỉ hát một bài mình thích và không hát trùng bài với các ca sĩ khác). Biết rằng a không thích các bài 1 và 2, b không thích các bài 1, 2 và 3, c không thích bài 5, d không thích các bài 4, 5 và 6, e không thích bài 6. Hỏi nhóm các ca sĩ nói trên có bao nhiêu cách chọn bài hát để trình diễn ?

CÂU 5: (2đ = 1đ + 1đ).

a) Tính các số B_1, B_2 và B_3 từ định nghĩa của số đếm Bell. Từ đó tính tiếp các số B_4, B_5 và B_6 bằng các công thức đệ qui.

b) Phân tích N = 1005290 thành tích các số nguyên tố dương.

Có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của hai số nguyên ≥ 2 ?

Có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của các số nguyên ≥ 2 ?

HẾT

(Đề thi gồm 1 trang)

Họ tên người ra đề/MSCB: .... Chữ ký: ....

Họ tên người duyệt đề: .... Chữ ký: ....

Câu 1:

Date:

Đa thức nhân tử cho hộp 1 và 2 là:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Đa thức nhân tử cho hộp 3 là: $\sum_{k=2}^{+\infty} x^k = \frac{x^2}{1-x}$

Đa thức nhân tử cho hộp 4 và 5 là:

$$\sum_{k=3}^{+\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}$$

Đa thức nhân tử cho hộp 6 là: $x^5+x^7+x^{11}$

Vậy hàm sinh là:

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{x^6}{(1-x)^2}\left(x^5+x^7+x^{11}\right)$$

$$= \left(x^{13}+x^{15}+x^{19}\right)\frac{1}{(1-x)^5}$$

$$= \left(x^{13}+x^{15}+x^{19}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{13+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+15} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+4}^{k} x^{k+19}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Suy ra $a_{38} = C_{29}^{25} + C_{27}^{23} + C_{23}^{19}$

Date: /

Câu 2:

Đa thức nhân tử khử 1: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Đa thức nhân tử khử 2: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = e^x - 1$

Đa thức nhân tử khử 3: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Đa thức nhân tử khử 4: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Vậy $E(x) = e^x(e^x - 1)\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$

$= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^x)(e^{2x} - e^{-2x})$

$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1 - e^{3x} + e^{-x})$

$= \frac{1}{4}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k x^k}{k!} - 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} (4^k - 3^k + (-1)^k) \cdot \frac{x^k}{k!}\right]$

Suy ra $b_0 = 0$ và $b_k = \frac{1}{4}(4^k - 3^k + (-1)^k)$ $\forall k > 0$.

Date: /

Câu 3: pt $x+y+z+t=21, x,y,z,t \in \mathbb{N}$ (*)

$A_1 = \{$nghiệm (*): $x \geq 5\}$, $A_2 = \{$nghiệm (*): $y \geq 5\}$

$A_3 = \{$nghiệm (*): $z \geq 10\}$, $A_4 = \{$nghiệm (*): $t \geq 10\}$

$X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

c) Có: $|X| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$

ta có: $S_4 = 0$

$S_3 = |A_1A_2A_3| + |A_1A_2A_4| + |A_1A_3A_4| + |A_2A_3A_4|$

$= |A_1A_2A_3| + |A_1A_2A_4| + 0 + 0$

$= 2|A_1A_2A_4| = 2 \cdot 4 = 8$

$S_2 = |A_1A_2| + |A_1A_3| + |A_1A_4| + |A_2A_3| + |A_2A_4|$

$+ |A_3A_4|$

$= C_{14}^3 + C_9^3 + C_9^3 + C_9^3 + C_9^3 + C_4^3 = 704$

$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = C_{19}^3 + C_{19}^3 + C_{14}^3 + C_{14}^3$

$= 2666$

$\Rightarrow |X| = 1970$

Date: /

b) $Y := \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$

$\to |Y| = n(U) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

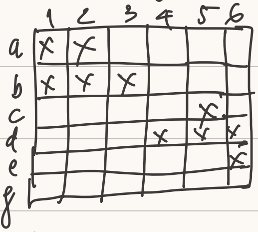
$= C_{24}^3 - 1970 = 54$

c) $|Z| = S_1 - C_2^1 S_2 + C_3^2 S_3 - C_4^3 S_4$

$= 1282$

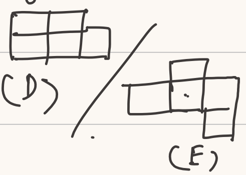
d) $|T| = S_2 - C_2^1 S_3 + C_3^1 S_4 = 688$

Câu 4: Số cách chọn bằng $\frac{1}{11} \times$ số cách đặt 6 quân xe vào bàn cờ với các ô cấm như hình



(C)

Bàn cờ (C) ứng với các ô cấm là:



(C)

$P(x, D) = 1 + 5x + 4x^2$

$P(x, E) = xP(x, D) + P(x, \ldots)$

$= x(1+x) + (1+x)(1+3x+x^2)$

$= x^3 + 5x^2 + 5x + 1$

Suy ra $P(x, C) = (1+5x+4x^2)(x^3+5x^2+5x+1)$

$= 1 + 10x + 34x^2 + 46x^3 + 5x^4 + 4x^5$

Date: /

Vậy số cách thỏa yêu cầu là

$$\frac{1}{1!}\left(6! - 5!\,10 + 4!\,34 - 3!\,46 + 2!\,5 - 1!\,4 + 0!\,0\right)$$
$$= 66 \text{ (cách)}$$

Câu 5) a) $B_0 = 1$, $B_1 = 1$,

Xét tập $\{a, b\}$, ta có các cách phân hoạch tập là

1) $\{a, b\}$

2) $\{a\}, \{b\}$

$\Rightarrow B_2 = 2$

Xét tập $B = \{a, b, c\}$, ta có các cách phân hoạch B là

1) $\{a, b, c\}$ 2) $\{a\}, \{b, c\}$ 3) $\{b\}, \{a, c\}$ 4) $\{c\}, \{a, b\}$

5) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\Rightarrow B_3 = 5$

$$B_4 = C_3^0 B_0 + C_3^1 B_1 + C_3^2 B_2 + C_3^3 B_3 = 15$$

$$B_5 = C_4^0 B_0 + C_4^1 B_1 + C_4^2 B_2 + C_4^3 B_3 + C_4^4 B_4 = 52$$

$$B_6 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k B_k = 203$$

Date: /

b) $1005290 = 2.5.11.13.29.37 = N$

Số cách phân tích N thành 2 số nguyên dương >1 là:

$$S_6^2 = 2^5 - 1 = 31$$

Số cách phân tích N thành tích các số >1 là:

$$B_6 = 203.$$

Date: /

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 1 – Năm học 2022 - 2023

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng ĐTSĐH ghi)
CK22231
MTH00050

Tên học phần:	**TOÁN HỌC TỔ HỢP (KHÓA 2021)**	**Mã HP:**	**MTH 000050**
Thời gian làm bài:	**90 phút**	Ngày thi:	**09 / 01 / 2023**

Ghi chú: *Sinh viên **không được phép sử dụng tài liệu** khi làm bài.*

CÂU 1: (1,5 đ)

Dùng hàm sinh để tìm số nghiệm nguyên của phương trình $y+z+t+u=44$ (4 ẩn số là y, z, t, u) trong đó y là số nguyên tố dương <11, $z\geq 3$, $t\geq 4$ và $u\geq 5$.

CÂU 2: (1,5 đ = 0,5đ + 1đ)

Dùng $F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2x^k=\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ để tìm biểu thức của $G(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^3x^k$ và áp dụng để tính tổng

$S_k = 1^2.2+2^2.3+3^2.4+\cdots+k^2(k+1)$ với $k\geq 1$.

CÂU 3: (2đ = 1đ + 0,5đ + 0,5đ)

Một shipper giao 6 hộp bánh khác nhau cho 6 khách hàng (mỗi người đã đặt mua 1 hộp). Hỏi

a) Có bao nhiêu trường hợp mà cả 6 khách hàng đều không nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?

b) Có bao nhiêu trường hợp mà chỉ có đúng 3 khách hàng nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?

c) Có bao nhiêu trường hợp mà có không quá 3 khách hàng nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?

CÂU 4: (2đ)

Các sinh viên năm cuối a, b, c, d, e và f được giao thực hiện các đề tài tốt nghiệp 1, 2, 3, 4, 5 và 6. Biết rằng a không hợp với đề tài 1, b không hợp với đề tài 2, c không hợp với các đề tài 1 và 2, d không hợp với đề tài 4, e không hợp với các đề tài 4, 5, 6, còn f không hợp với các đề tài 3, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu cách giao đề tài phù hợp cho 6 sinh viên (mỗi sinh viên nhận một đề tài khác nhau) ? 128

CÂU 5: (2đ = 0,25đ + 1đ + 0,75đ).

Cho N = 67737945. 3.5.11.17.19.31.41

a) Phân tích N thành tích các số nguyên tố dương.

b) Dùng công thức đệ qui để tìm các số nguyên dương a, b, c, d thỏa $S_7^4 = aS_5^4 + bS_4^3 + cS_5^2 + dS_4^2$.

Từ đó tính S_7^4 và cho biết có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của 4 số nguyên > 1 ?

c) Cho $B_4 = 15$, $B_5 = 52$ và $B_6 = 203$. Dùng công thức đệ qui để tính B_7 và cho biết có bao nhiêu cách phân tích N thành tích của các số nguyên > 1 ?

CÂU 6: (1đ)

Cho $a_0 = 1$ và $a_{n+1} = 3(n+1)a_n + 2(n+1)(1-3n)$, $\forall n\geq 0$. Dùng hàm sinh mũ tính a_n theo $n\geq 0$.

HẾT

GHI CHÚ: Yêu cầu trình bày bài làm rõ ràng và đầy đủ.

Họ tên người ra đề/MSCB: ....Chữ ký: ..
Họ tên người duyệt đề:..Chữ ký:..................

(Đề thi gồm 1 trang)

Date: /

Câu 1:

Đa thức nhân tử của y: $\sum_{k=1}^{10} x^k = \frac{1-x^{10}}{1-x}$

Đa thức nhân tử của z: $\sum_{k=3}^{+\infty} x^k = \frac{x^3}{1-x}$

Đa thức nhân tử của t: $\sum_{k=4}^{+\infty} x^k = \frac{x^4}{1-x}$

Đa thức nhân tử của u: $\sum_{k=5}^{+\infty} x^k = \frac{x^5}{1-x}$

Hàm sinh của bài toán là:

$$\frac{x^{12}}{(1-x)^4}(1-x^{10}) = (x^{12}-x^{22})\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$= (x^{12}-x^{22})\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^{k} x^{k+12} - \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^{k} x^{k+22}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Suy ra $a_{44} = C_{35}^{32} + C_{25}^{22} = 8845$

Date:

Câu 2: Ta có:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k^3x^{k-1} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3x^k$$

Đặt $a_n = n^2(n+1)$ $\forall n \geq 0 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Đặt $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} S_k x^k = \frac{G(x)}{1-x}$

Ta có: $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k^2+k^3)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k^3x^k$

$$= \frac{x^2+x}{(1-x)^3} + \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$= (4x^2+2x)\frac{1}{(1-x)^4} = (4x^2+2x)\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+3}^{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 4C_{k+3}^{k} x^{k+2} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2C_{k+3}^{k} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} 4C_{k+1}^{k-2} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} 2C_{k+2}^{k-1} x^k$$

Date: /

Suy ra: $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, $S_n = 4C_{n+1}^{n-2} + 2C_{n+2}^{n-1}$ $\forall n \geq 2$.

Câu 3: Gọi A_i là tập các cách xếp sao cho khách thứ i ngồi đúng $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

a) $n(\bigcap_{i=1}^{6} \overline{A_i}) = n(U) - n(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = 6! - n(\bigcup_{i=1}^{6} A_i)$

Ta có: $n(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6$

* $S_1 = C_6^1 . 5! = 720$

$S_2 = C_6^2 4! = 360$, $S_3 = C_6^3 3! = 120$

$S_4 = C_6^4 2! = 30$, $S_5 = C_6^5 . 1! = 6$, $S_6 = 1$

$\Rightarrow n(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = 455$

Suy ra có $6! - 455 = 265$ cách thỏa yêu cầu

b) Số cách thỏa yêu cầu là

$$N_3 = S_3 - C_4^1 S_4 + C_5^2 S_5 - C_6^3 S_6$$

$= 40$ cách

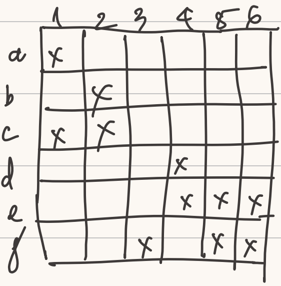
c) Số cách thỏa yêu cầu là

Date: /

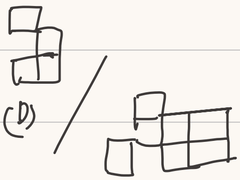
$$n(U) - N_4^* = 6! - (S_4 - C_4^1 S_5 + C_5^2 S_6)$$
$$= 704 \text{ (cách)}.$$

Câu 4:

Số cách thoả yêu cầu bằng số cách đặt 6 quân xe vào bàn cờ dưới (gồm ô cấm) sao cho 2 quân xe bất kỳ ko tấn công nhau.



Bàn cờ (C) tạo bởi các ô cấm là



(D)

(E)

(C)

$$P(x,D) = 1 + 4x + 3x^2$$

$$P(x,E) = xP(\square\ \square\square) + P(x, \square\ \boxplus)$$
$$= x(1+3x) + (1+x)(1+5x+4x^2)$$
$$= 1 + 7x + 12x^2 + 4x^3$$

$$\Rightarrow P(x,C) = 1 + 11x + 43x^2 + 73x^3 + 52x^4 + 12x^5$$

Date: /

Số cách làm là

$6!.1 - 5!\,11 + 4!\,43 - 3!\,73 + 2!\,52 - 1!\,12 + 0!\,0$

$= 86$ (cách)

Câu 5: a) $N = 3.5.11.17.19.31.41$

b) $S_7^4 = S_6^3 + 4S_6^4 = S_5^2 + 3S_5^3 + 4(S_5^3 + 4S_5^4)$

$= S_5^2 + 16S_5^4 + 7(S_4^2 + 3S_4^3)$

$= 16S_5^4 + 21S_4^3 + S_5^2 + 7S_4^2$

$\rightarrow a = 16,\ b = 21,\ c = 1,\ d = 7$

Ta có: $S_5^4 = C_5^2 = 10,\ S_4^3 = C_4^2 = 6,\ S_5^2 = 2^4 - 1 = 15$

$S_4^2 = 2^3 - 1 = 7$

Suy ra $S_7^4 = 350$

Số cách phân tích N thành tích 4 số nguyên > 1 là 350

c) $B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_4 = 15,\ B_5 = 52,\ B_6 = 203$

$B_7 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k B_k = 877$

Vậy số cách phân tích N thành tích các số nguyên > 1 là:

$B_7 = 877$ cách

Date: /

Câu 6: Đặt $F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, ta có

$\forall k \geq 0$ thì

$$a_{k+1} = 3(k+1)a_k + 2(k+1)(1-3k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = 3\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k!} - 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1-3k}{k!} \cdot x^{k+1}$$

$$\Rightarrow F(x) - 1 = 3x F(x) - 2\left[x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 3x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}\right]$$

$$= 3xF(x) - 2\left[xe^x - 3x^2e^x\right]$$

$$\Rightarrow F(x)(1-3x) = 1 - 2xe^x(1-3x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-3x} - 2xe^x$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k x^k - 2x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^k}{(k-1)!}$$

Suy ra $a_0 = 1$, $a_n = n!\left(3^n - \frac{2}{(n-1)!}\right) = 3^n . n! - 2n$.

$\forall n \geq 1$.

Date: /