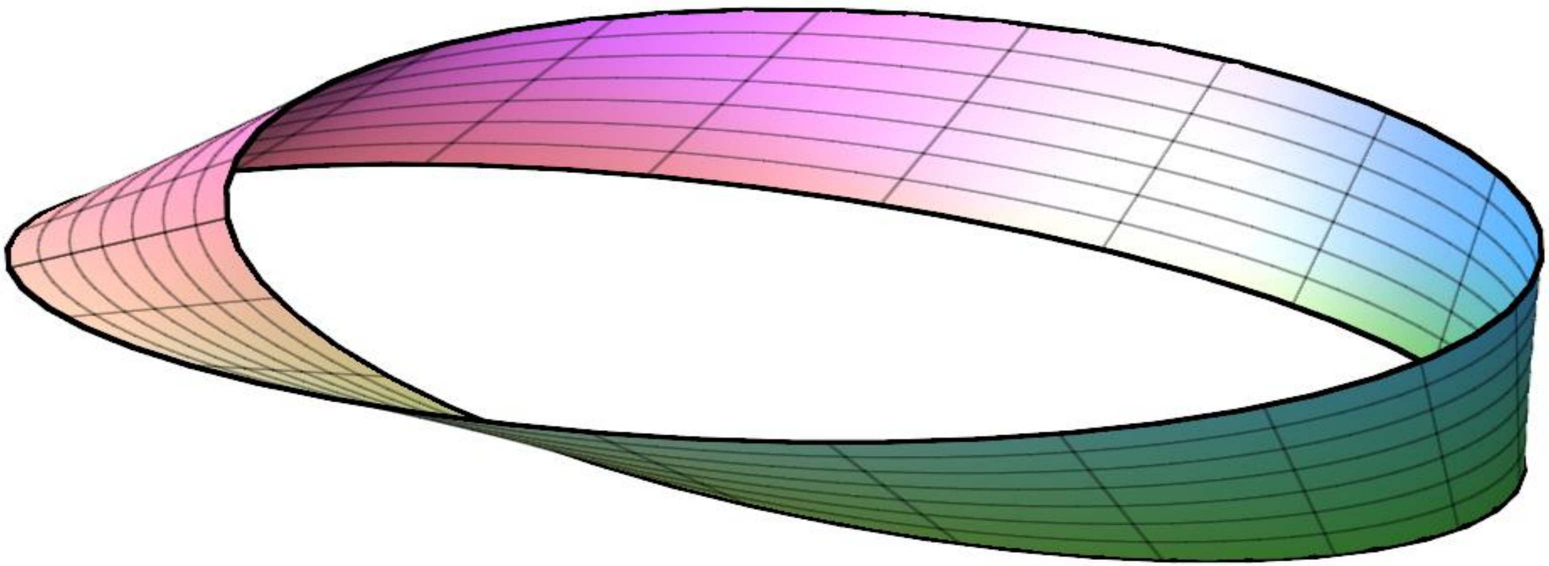
Sv tự đọc: Tích phân mặt

- Các khái niệm trong bài giảng được mô tả một cách trực quan. Định nghĩa chính xác của chúng vượt ngoài phạm vi của giáo trình này.
- Mục tiêu bài giảng là hướng dẫn tính toán và giải thích ý nghĩa các phép toán. Các giả thiết chặt chẽ được thỏa ngầm.



Diện tích mặt cong và tích phân mặt

Mặt cong và tham số hóa

- Cho tập hợp D trong $\mathbb{R}^2$, một hàm vectơ $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ liên tục được gọi là *tham số hóa* của mặt cong $\mathbf{r}(D)$ (ảnh của $\mathbf{r}$) trong $\mathbb{R}^3$.

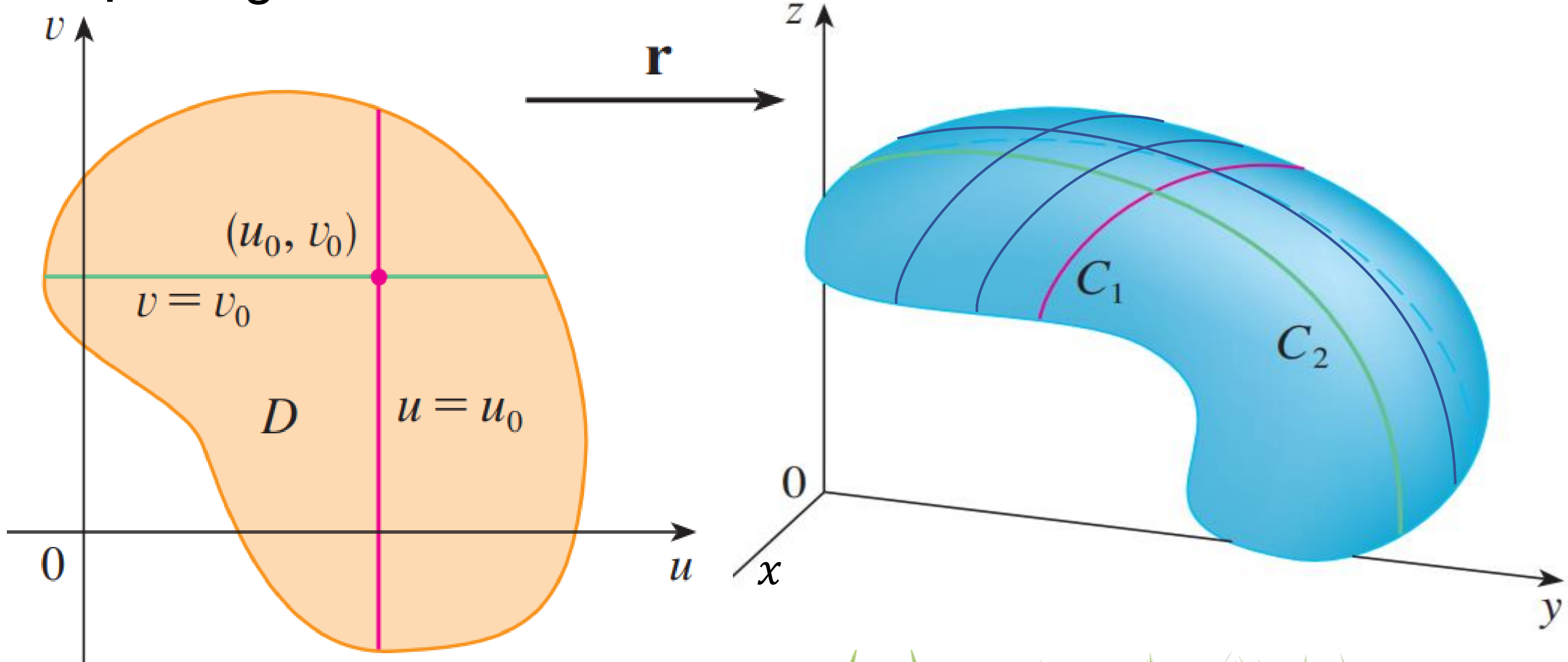
Ví dụ. Nếu f là hàm số hai biến xác định trên D thì hàm vectơ định bởi $\mathbf{r}(u; v) = \big(u; v; f(u; v)\big)$, với $(u; v) \in D$, là tham số hóa của mặt đồ thị của hàm số f.

Ví dụ. Nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, có tham số hóa định bởi $\mathbf{r}(x; y) = \left(x; y; \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right), (x; y) \in D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Ví dụ. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ có tham số hóa định bởi $\mathbf{r}(\theta; \phi) = (R \sin\phi \cos\theta\,; R \sin\phi \sin\theta\,; R\cos\phi), \phi \in [0; \pi], \theta \in [0; 2\pi]$. (Xem lại tọa độ cầu trong bài giảng tuần 6.)

Mặt cong và tham số hóa

- Với mặt cong tham số $\mathbf{r}$ thì khi cố định giá trị tham số $v = v_0$, hàm vectơ một biến $u \mapsto \mathbf{r}(u; v_0)$ mô phỏng đường cong C_2 trong hình dưới. Với nhiều giá trị cố định của tham số v thì ta có nhiều đường cong. Tương tự cố định các giá trị của u, ta được các đường cong $v \mapsto \mathbf{r}(u; v)$. Hàm vectơ $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ mô phỏng nhiều đường cong đan xen như mảnh lưới, gợi hình ảnh mặt cong.



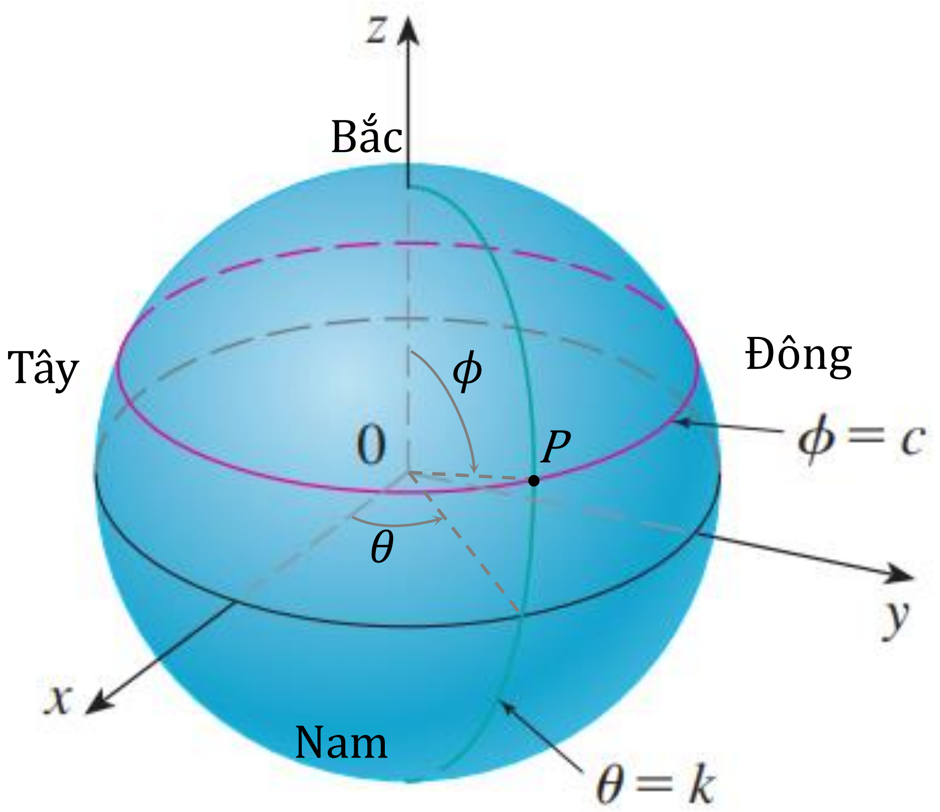
Mặt cong và tham số hóa

- **Ví dụ.** Xét mặt câu tâm tại O, bán kính R trong không gian tọa độ Descartes Oxyz, với tham số hóa định bởi

$$\mathbf{r}(\theta;\phi) = (R\sin\phi\cos\theta\,;R\sin\phi\sin\theta\,;R\cos\phi),$$
$$(\theta;\phi) \in [0;2\pi]\times[0;\pi].$$

Mỗi giá trị cố định của ϕ sẽ cho hàm vectơ $\theta \mapsto \mathbf{r}(\theta;\phi)$, $\theta \in [0;2\pi]$, mô phỏng đường tròn vĩ tuyến. Tương tự cho các nửa đường tròn kinh tuyến.

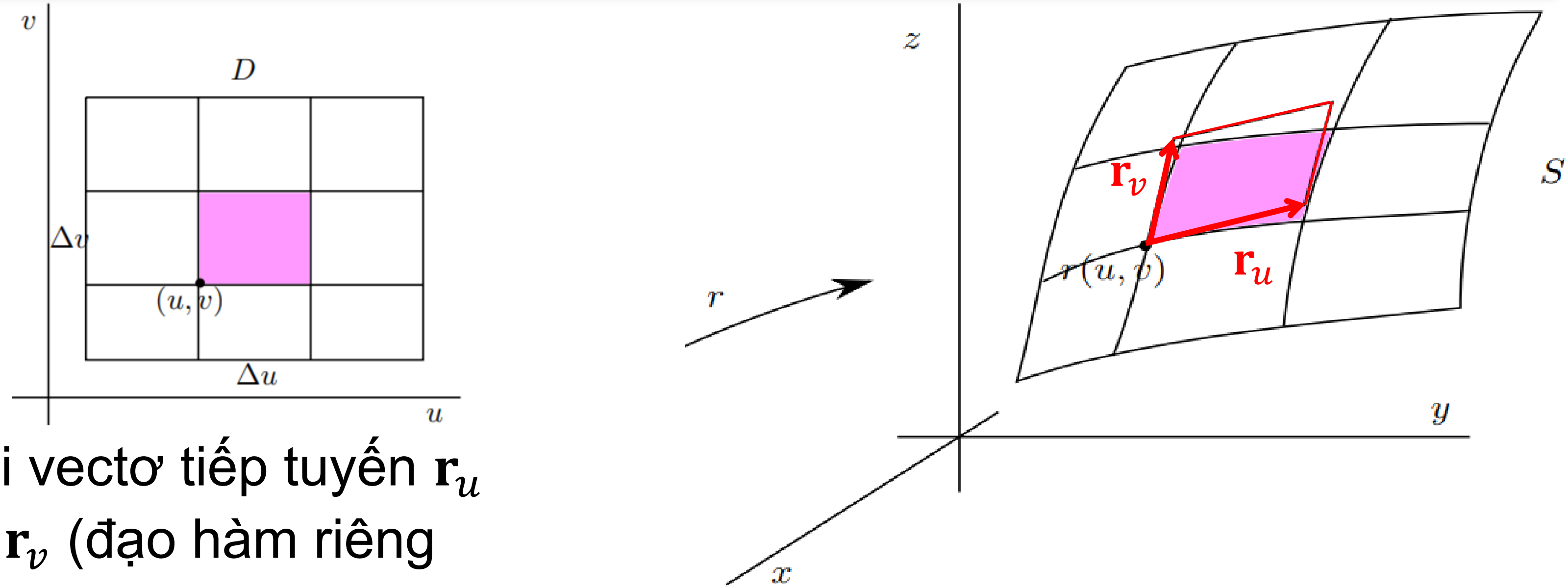
Trong hình bên, khi điểm P chạy trên vĩ tuyến đỏ, số đo $\phi = c$ không đổi, kinh tuyến xanh lá xoay quét trên mặt cầu và θ tăng từ 0 đến 2π. Khi P chạy trên kinh tuyến xanh lá, θ không đổi, ϕ tăng từ 0 đến π.



Mặt cong và tham số hóa

Định nghĩa mặt cong đơn và chính quy

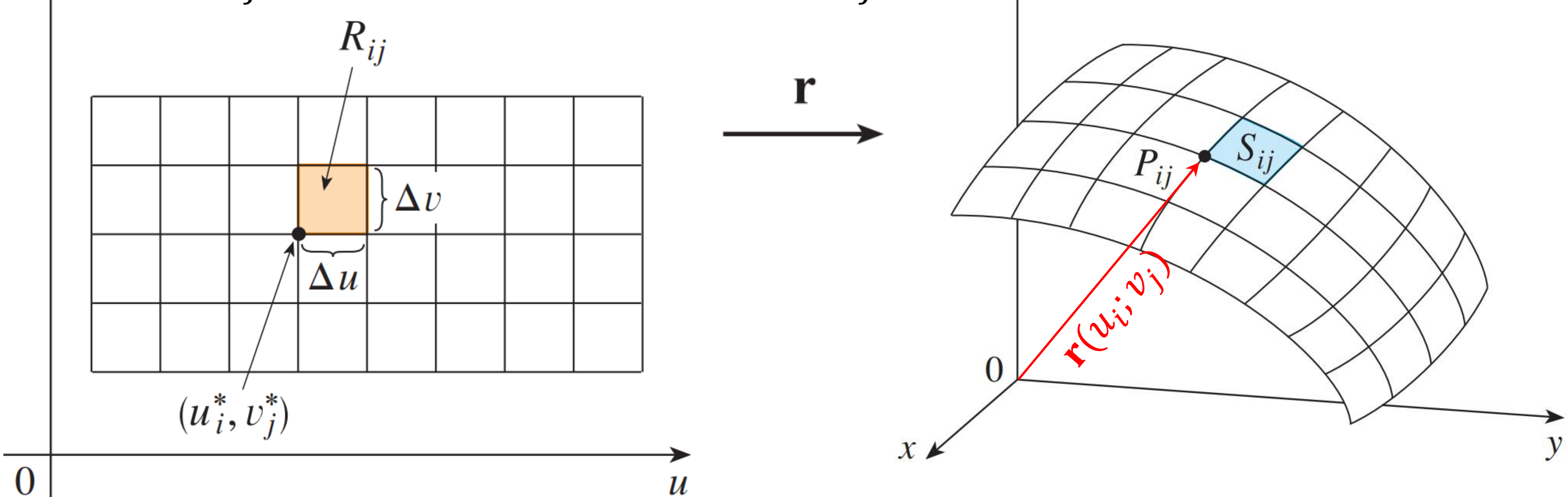
- Mặt cong tham số $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ được gọi là *đơn* có nghĩa là $\mathbf{r}$ là đơn ánh. (Vectơ $\mathbf{r}$ sơn phủ mặt cong chỉ một lần.)
- Mặt cong tham số $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ được gọi là *chính quy* nếu $\mathbf{r}$ trơn cấp 1 trên tập mở chứa D, hai vectơ $\mathbf{r}_u$ và $\mathbf{r}_v$ luôn khác phương, nghĩa là tích có hướng $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ luôn khác $\mathbf{0}$, cũng có nghĩa diện tích hình bình hành trong hình ở dưới luôn khác 0.



Hai vectơ tiếp tuyến $\mathbf{r}_u$ và $\mathbf{r}_v$ (đạo hàm riêng theo u và v) tạo hình bình hành như hình trên.

Diện tích của mặt cong tham số chính quy

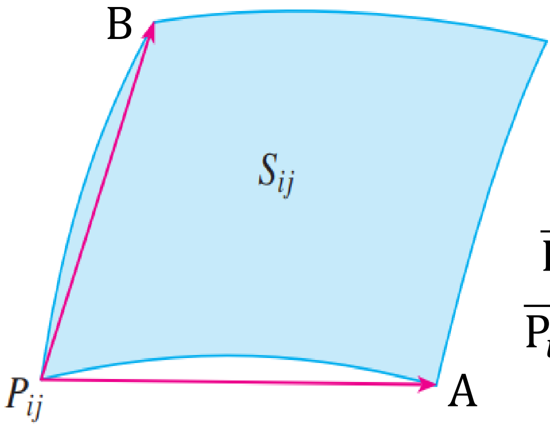
- Để đơn giản, ta xét $D \subset \mathbb{R}^2$ mô phỏng hình chữ nhật và xét mặt cong có tham số $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3$ chính quy. Ta phân hoạch D thành nhiều ô con R_{ij} và chọn điểm mẫu trong R_{ij} là $\left(u_i^*; v_j^*\right) = (u_i; v_j)$, góc dưới bên trái của ô R_{ij}.



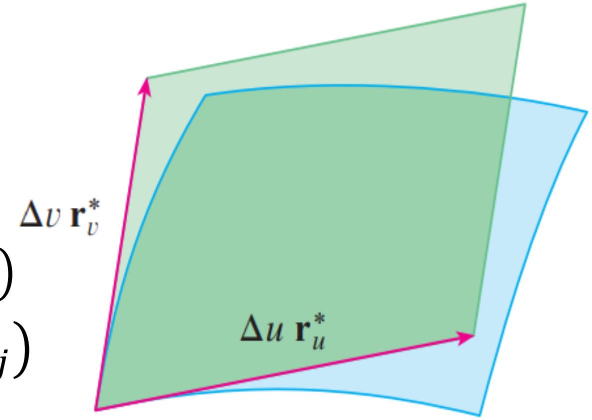
Gọi mảnh S_{ij} là ảnh của R_{ij} do $\mathbf{r}$ ánh xạ lên mặt cong $\mathbf{r}(D)$, tức là $S_{ij} = \mathbf{r}(R_{ij})$. Điểm P_{ij} với vectơ vị trí $\mathbf{r}(u_i; v_j)$ là một trong các góc của mảnh S_{ij}. Ký hiệu hai vectơ tiếp tuyến của đường lưới

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u\left(u_i; v_j\right); \ \ \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v\left(u_i; v_j\right).$$

Diện tích của mặt cong tham số chính quy



$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{A}} = \mathbf{r}(u_i + \Delta u; v_j) - \mathbf{r}(u_i; v_j)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{B}} = \mathbf{r}(u_i; v_j + \Delta v) - \mathbf{r}(u_i; v_j)$$



Xem hình trên, ta xấp xỉ diện tích mảnh cong S_{ij} bởi hình bình hành sinh bởi $\overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{A}}$ và $\overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{B}}$. Dùng phép xấp xỉ vi phân,

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{A}} \approx \Delta u\ \mathbf{r}_u^*; \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_{ij}\mathrm{B}} \approx \Delta v\ \mathbf{r}_v^*.$$

Vậy diện tích của S_{ij} được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ $\Delta u\ \mathbf{r}_u^*$ và $\Delta v\ \mathbf{r}_v^*$, tức là trị số của

$$|\Delta u\ \mathbf{r}_u^* \times \Delta v\ \mathbf{r}_v^*| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\Delta u \Delta v.$$

Lập tổng Riemann, lấy giới hạn thành tích phân, ta có định nghĩa sau

Diện tích của mặt cong, tích phân mặt

Định nghĩa tích phân mặt (loại 1) của hàm số

- Cho $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3, (u; v) \mapsto \mathbf{r}(u; v)$ là tham số hóa đơn và chính quy của mặt cong $\mathbf{r}(D)$. Diện tích của mặt $\mathbf{r}(D)$ định bởi

$$\int_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

- Cho hàm số 3 biến f xác định trên mặt $\mathbf{r}(D)$. Tích phân mặt (loại 1) của f trên $\mathbf{r}(D)$ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$\int_{\mathbf{r}} f \mathrm{d}\sigma = \int_D f |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Ghi chú.

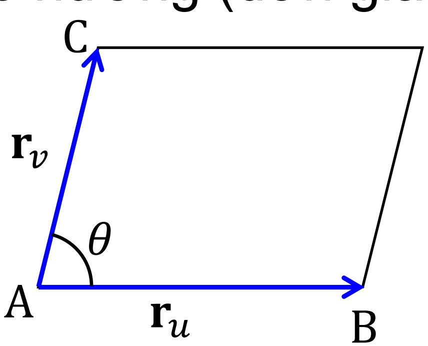
- Một số sách dùng ký hiệu $\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}\Sigma$ thay cho $\mathrm{d}\sigma$, hàm nghĩa của vi phân diện tích mặt.
- $\int_{\mathbf{r}} 1\mathrm{d}\sigma$ là diện tích của mặt cong $\mathbf{r}(D)$.

Tích phân mặt

- Nếu ρ là hàm mật độ khối lượng phân bố trên tấm mỏng $\mathbf{r}(D)$ không đồng chất thì $\int_{\mathbf{r}} \rho \mathrm{d}\sigma$ là khối lượng của cả tấm.
- Nếu q là mật độ điện tích phân bố trên mặt $\mathbf{r}(D)$ thì $\int_{\mathbf{r}} q \mathrm{d}\sigma$ là tổng đại số điện tích phân bố trên cả mặt.
- Về phương diện hình học, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ là diện tích hình bình hành sinh bởi hai cạnh kề $\mathbf{r}_u$ và $\mathbf{r}_v$ nên ta liên tưởng công thức sau

$$\boxed{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2}}$$

Công thức trên tiện dụng ở chỗ thay vì thực hiện phép nhân hữu hướng (rắc rối), ta chỉ thực hiện phép tính độ dài vectơ và nhân vô hướng (đơn giản hơn).



$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= 2S_{\Delta ABC} = |\mathbf{r}_u||\mathbf{r}_v|\sin\theta \\
&= |\mathbf{r}_u||\mathbf{r}_v|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (|\mathbf{r}_u||\mathbf{r}_v|\cos\theta)^2} \\
&= \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2}\,.
\end{aligned}$$

Tích phân mặt

- Trường hợp riêng, nếu mặt cong là đồ thị của hàm hai biến g trơn trên tập mở chứa D, được tham số hóa bởi

$$\mathbf{r}(x;y) = \big(x;y;g(x;y)\big) \in \mathbb{R}^3,$$

thì

$$\boxed{\int_{\mathbf{r}(D)} f\,\mathrm{d}\sigma = \int_D f\big(x;y;g(x;y)\big)\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Công thức trên được kiểm tra như sau

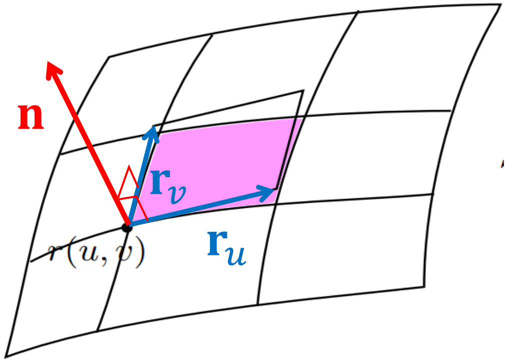
$$\mathbf{r}_x = (1;0;g_x), \qquad \mathbf{r}_y = \big(0;1;g_y\big),$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \big(-g_x;-g_y;1\big), \qquad \big|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\big| = \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,.$$

- Mặt đồ thị của g có diện tích là

$$\boxed{\int_D \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Tích phân mặt



Mặt cong ở hình bên có 2 phía, mọi vectơ $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ hướng về "phía trên". Một cách trực quan, ta nói mặt này là định hướng được, $-\mathbf{n}$ hướng "phía dưới".

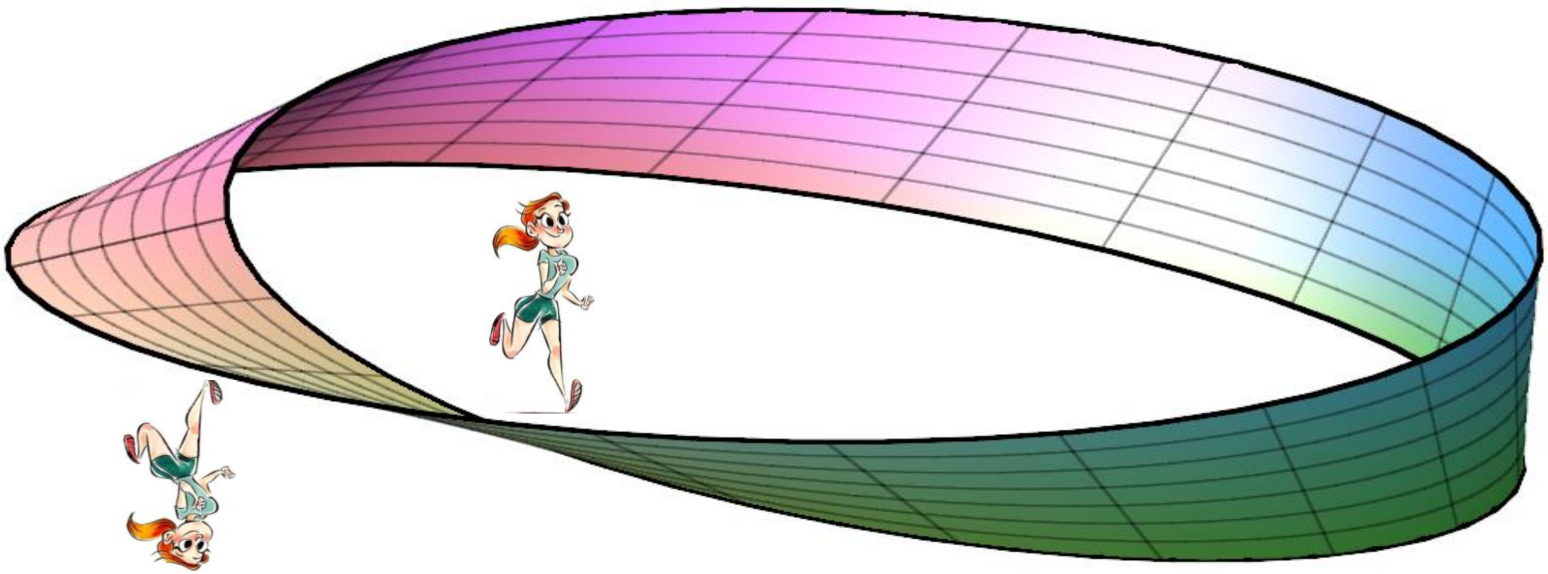
Định nghĩa tích phân mặt (loại 2) của trường vectơ

- Tham số hóa $\mathbf{r}: D \to \mathbb{R}^3, (u; v) \mapsto \mathbf{r}(u; v)$ của mặt cong $\mathbf{r}(D)$, đơn và chính quy, sẽ xác định trên $\mathbf{r}(D)$ một hướng, tức là hướng của vectơ pháp tuyến $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vuông góc với mặt. Vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt là $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$.
- Cho hàm vectơ $\mathbf{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ liên tục, $\mathbf{r}(D) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$, ($\mathbf{F}$ được gọi là trường vectơ 3 chiều trên Ω). Tích phân mặt (loại 2) của $\mathbf{F}$ trên $\mathbf{r}(D)$, cũng gọi là thông lượng của $\mathbf{F}$ qua $\mathbf{r}(D)$, được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} := \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Tích phân mặt

Mặt cong uốn vòng có dạng như hình dưới được gọi là lá Möbius, không thể xác định hai phía riêng biệt của nó, nghĩa là đi "liên tục" trên mặt "phía này" một vòng thì sẽ chuyển sang "phía kia". Ta nói lá Möbius không định hướng được.



Tích phân mặt

- Một số sách, thay vì dùng ký hiệu $\mathrm{d}\vec{\sigma}$, thì dùng $\mathrm{d}\vec{S}$, $\mathrm{d}\vec{\Sigma}$, $\mathrm{d}\mathbf{S}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ (chú ý cách in đậm và đứng).
- Về hình thức, ta có thể viết

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$\mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- Trường hợp đặc biệt, nếu mặt đang xét là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ có tham số hóa định bởi $\mathbf{r}(\theta;\phi) = (R\sin\phi\cos\theta\,;R\sin\phi\sin\theta\,;R\cos\phi)$ thì

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = R^2(\sin^2\phi\cos\theta\,;\sin^2\phi\sin\theta\,;-\sin\phi\cos\phi).$$

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \left|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = R^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}$$

- Nếu mặt đang xét là nửa trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, có tham số hóa định bởi $\mathbf{r}(x;y) = \left(x;y;\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)$ thì

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ý nghĩa của tích phân đường loại 2 trong Vật lý

- Nếu $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ là trường vectơ vận tốc trong một môi trường lưu chất (lỏng hoặc khí) thì $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ là thể tích lưu chất xuyên qua mặt $\mathbf{r}(D)$ trong một đơn vị thời gian. Nếu ρ là hàm số mật độ khối lượng trong môi trường lưu chất ấy thì $\int_{\mathbf{r}} \rho\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ là khối lượng lưu chất xuyên qua mặt $\mathbf{r}(D)$ trong một đơn vị thời gian.
- Nếu trường vectơ $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ là điện trường thì $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ là điện thông xuyên qua mặt $\mathbf{r}(D)$.
- Nếu trường vectơ $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ là từ trường thì $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ là từ thông xuyên qua mặt $\mathbf{r}(D)$.
- Nếu $\mathbf{F} = \mathbf{J}$ là trường mật độ dòng điện thì $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ là cường độ dòng điện xuyên qua mặt $\mathbf{r}(D)$.

Tích phân mặt

- Nhắc lại từ bài giảng tuần 6, với D là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, một song ánh $\varphi: D \to \varphi(D) \subset \mathbb{R}^3$ trơn cấp 1, đồng thời ánh xạ ngược φ^{-1} cũng trơn cấp 1 thì φ được gọi là phép đổi biến. Nếu $\det J_\varphi > 0$ thì φ được gọi là phép đổi biến bảo toàn định hướng. Nếu $\det J_\varphi < 0$ thì φ được gọi là phép đổi biến đảo ngược định hướng.
- Ta gọi miền trong của tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở $\overset{\mathrm{o}}{D} = D \setminus \partial D$, tức là D bỏ đi phần biên của nó. Ta thừa nhận kết quả sau

Tích phân mặt độc lập với tham số hóa

- Giả sử mặt cong $S \subset \mathbb{R}^3$ có hai tham số hóa $\mathbf{r}_1: D_1 \to \mathbb{R}^3$ và $\mathbf{r}_2: D_2 \to \mathbb{R}^3$ đơn, $S = \mathbf{r}_1(D_1) = \mathbf{r}_2(D_2)$, $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ chính quy trên miền trong của tập xác định của chúng. Khi đó $\varphi = \mathbf{r}_2^{-1} \circ \mathbf{r}_1: D_1 \to D_2$ là một phép đổi biến. Ta nói $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ chỉ sai khác một phép đổi biến, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ \varphi$. Hơn nữa $\int_{\mathbf{r}_1} f \mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbf{r}_2} f \mathrm{d}\sigma$.
- Từ kết quả trên, ký hiệu $\int_S f \mathrm{d}\sigma$ được hiểu là $\int_{\mathbf{r}} f \mathrm{d}\sigma$, với $\mathbf{r}$ là một tham số hóa tùy ý trên mặt S, miễn là $\mathbf{r}$ đơn và chính quy.

Tích phân mặt

Tích phân mặt độc lập với tham số hóa

- Nếu $\varphi = \mathbf{r}_2^{-1} \circ \mathbf{r}_1 : D_1 \to D_2$ bảo toàn định hướng thì
$$\int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}\,.$$
Nếu φ đảo ngược định hướng thì
$$\int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}\,.$$
- Xét mặt cong S được định trước "một phía của nó" mà vectơ pháp tuyến hướng về. Từ kết quả trên, ký hiệu $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$ được hiểu là $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$, với $\mathbf{r}$ là một tham số hóa tùy ý trên S sao cho $\mathbf{r}$ là đơn, chính quy và phù hợp với định hướng đã cho. Nếu $\mathbf{r}$ ngược với định hướng đã cho trên S thì $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = -\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$.
- Nếu S là ghép của $S_1, \dots, S_k$ không phủ chồng lên nhau thì
$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} + \cdots + \int_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}\,.$$

Một ký hiệu khác của tích mặt loại 2

Xét $\mathbf{r}(u;v) = (x;y;z)$, là tham số hóa đơn chính quy của một mặt cong, cặp tham số $(u;v) \in D$. Nhắc lại từ bài giảng tuần 3, ký hiệu định thức Jacobi

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \ v.v..$$

Do $\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ nên

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}; \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

Giả sử $\mathbf{F} = (P;Q;R)$. Ta có

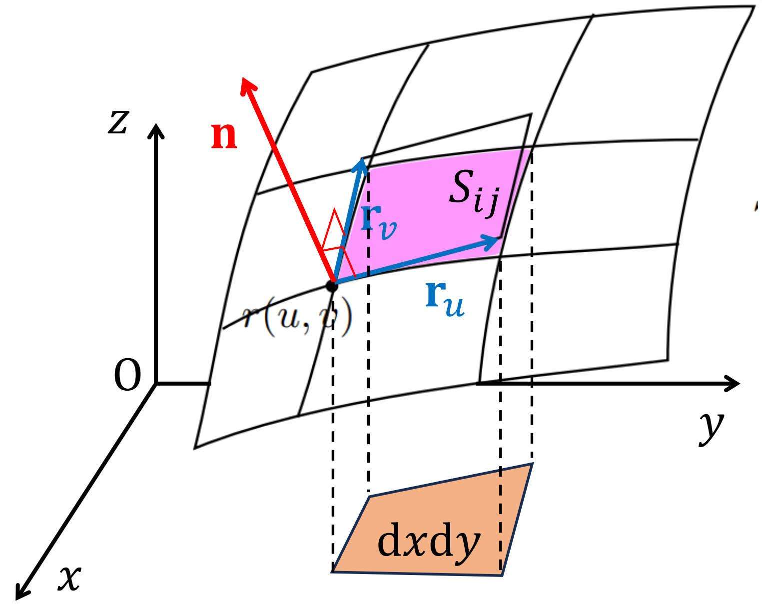
$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_D P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_D Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_D R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Tích phân mặt

Thành phần S_{ij} của mặt cong chiếu xuống mặt Oxy có diện tích được ký hiệu bởi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Diện tích của S_{ij} xấp xỉ bởi $\mathrm{d}\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Do đó

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\,\mathrm{d}\sigma,$$

trong đó $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ là thành phần thứ ba của vectơ $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$, tức là $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.



Vậy $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathrm{d}\sigma = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Từ đó, một số tài liệu đưa ra ký hiệu $\int_{\mathbf{r}} R(x;y;z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, được hiểu là $\int_D R(x;y;z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\mathbf{r}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Bài tập. [1], mục 3.3 hoặc trong [2] mục 16.7.

Công thức Stokes

Công thức Stokes

- Trường vectơ $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ trơn cấp 1 sẽ cho trường vectơ mới curl $\mathbf{F}$ như sau

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

- Nếu xem toán tử nabla (gradient) là vectơ (một cách hình thức)

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$ thì công thức dễ nhớ là

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P; Q; R).$$

- Người ta cũng dùng ký hiệu “rot” thay cho “curl”. Rot là viết tắt của từ rotation, là sự xoay vòng, gần nghĩa với curl (sự xoắn). Nhờ công thức Stokes, đề cập sau, chúng ta sẽ thấy curl $\mathbf{F}$ đóng vai trò phản ánh trạng thái xoay vòng của trường $\mathbf{F}$ tại từng điểm là mạnh hay yếu, cho nên curl $\mathbf{F}$ được gọi là trường xoay vòng của $\mathbf{F}$.

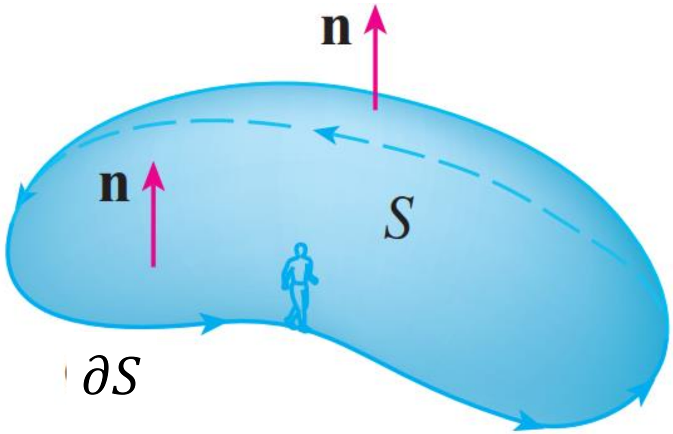
Công thức Stokes

Định lý Stokes

Cho mặt cong $S \subset \mathbb{R}^3$ có định hướng và cho trường vectơ $\mathbf{F}$ trơn cấp 1 trên tập mở chứa S. Khi đó

$$\int_S \text{curl}\, \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell},$$

trong đó $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell}$ là tích phân đường (loại 2) trên đường biên ∂S của mặt cong S, với "*chiều tương thích*" trên biên. Tưởng tượng nắm tay phải với ngón cái duỗi thẳng theo định hướng của mặt S thì chiều co của 4 ngón còn lại là "*chiều tương thích*" trên ∂S.



Người đi dọc theo biên ∂S, đầu hướng theo $\mathbf{n}$ là hướng định trước của S, đi theo chiều tương thích của biên ∂S là chiều của mũi tên trong hình bên.

Công thức Stokes

- Định lý trên là sự phát triển của định lý Green, bởi lẽ khi xét trường hợp đặc biệt, mặt S nằm trong mặt Oxy của không gian $\mathbb{R}^3$ với tham số hóa $\mathbf{r}(x;y) = (x;y;0)$, $(x;y) \in S$, định ra hướng của S là $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0;0;1) = \mathbf{n}$. Xét $\mathbf{F} = (P;Q;0)$ với giá trị các hàm số P, Q chỉ phụ thuộc biến x và y, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, thì curl $\mathbf{F} = \left(0;0;\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Công thức Stokes trở thành phiên bản của định lý Green:

$$\int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \Leftrightarrow \int_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$\Leftrightarrow \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\,.$$

- Hình thức khác của công thức Stokes là

$$\int_S (R_y - Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

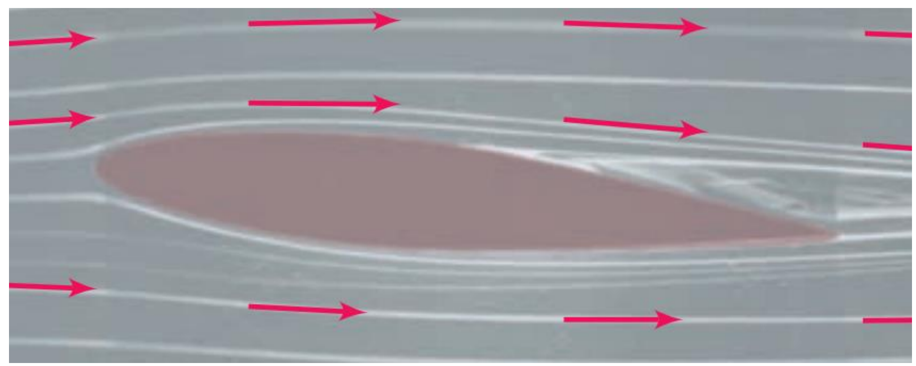
$$= \oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\,.$$

Công thức Stokes

Ý nghĩa của toán tử curl

Từ ý nghĩa hình học của tích vô hướng và của tích phân đường loại 2, nếu các vectơ của trường $\mathbf{F}$ phân bố dọc theo ∂S có xu hướng xuôi theo chiều của ∂S, $\mathbf{F}$ xoáy nhiều theo hướng của ∂S, giá trị $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ càng lớn. Lượng $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ được gọi là lưu số của $\mathbf{F}$ quanh mặt S, phản ánh độ xoáy của $\mathbf{F}$ quanh đó là nhiều hay ít.

Xoáy nhiều quanh S


Khí trượt qua thiết diện cánh máy bay, lưu số gần bằng 0, khí dường như xoáy ít quanh thiết diện này.

Ý nghĩa của toán tử curl

Xét một điểm $P(x_0; y_0; z_0)$ là tâm một đĩa tròn $S_a \subset \mathbb{R}^3$ với bán kính a rất nhỏ, vectơ pháp tuyến đơn vị của đĩa là $\mathbf{n}$. Với trường $\mathbf{F}$ trơn cấp 1 thì do bán kính a rất nhỏ nên các vectơ của $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ phân bố trên S_a xấp xỉ bằng $\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)$. Theo công thức Stokes thì

$$\oint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{S_a} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{S_a} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

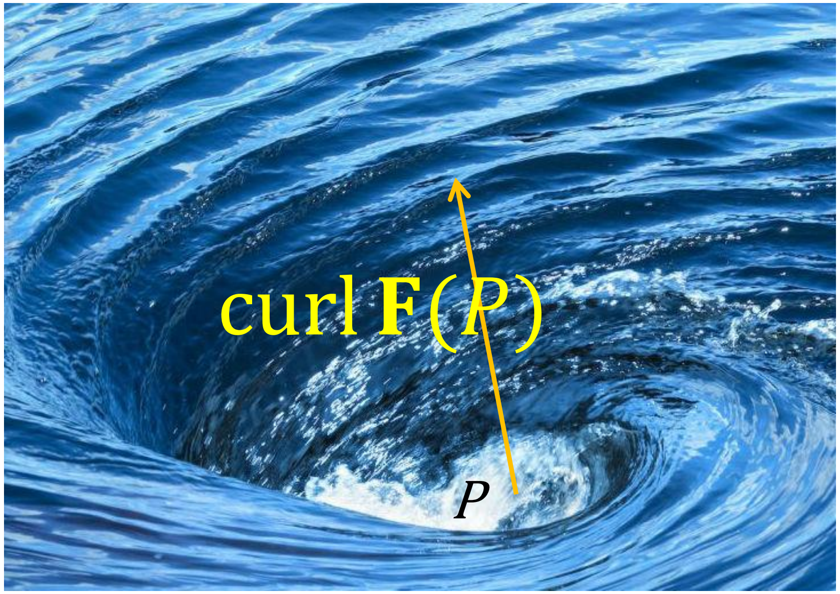
$$\approx (\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)\cdot \mathbf{n}) \int_{S_a} 1\mathrm{d}\sigma = \pi a^2 (\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)\cdot \mathbf{n}).$$

Suy ra $\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)\cdot \mathbf{n} \approx \frac{1}{\pi a^2}\oint_{\partial S_a} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$, phép xấp xỉ càng chính xác khi a càng nhỏ. Vậy lưu số (mức độ xoáy) của $\mathbf{F}$ quanh một đơn vị diện tích mặt, đặt tại điểm P, gần bằng $\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)\cdot \mathbf{n}$ và không vượt quá $|\operatorname{curl}\mathbf{F}(P)|$.

Công thức Stokes

Ý nghĩa của toán tử curl

curl $\mathbf{F}(x_0; y_0; z_0)$ là vectơ đặt tại $P(x_0; y_0; z_0)$, cho biết sự sắp xếp các vectơ của trường $\mathbf{F}$ ở khu vực gần điểm P có xu hướng xoáy nhiều ở xung quanh trục chứa curl $\mathbf{F}(P)$, đồng thời độ lớn của vectơ curl $\mathbf{F}(P)$ cũng phản ánh mức độ xoáy của $\mathbf{F}$ quanh trục của curl $\mathbf{F}(P)$.



Nhúng bánh guồng vào trường lực $\mathbf{F}$ trong nước tại P sao cho $\mathbf{n}$ cùng phương với curl $\mathbf{F}(P)$ thì bánh guồng quay quanh trục của nó dễ nhất.

Công thức Stokes

Ví dụ minh họa ý nghĩa của toán tử Curl

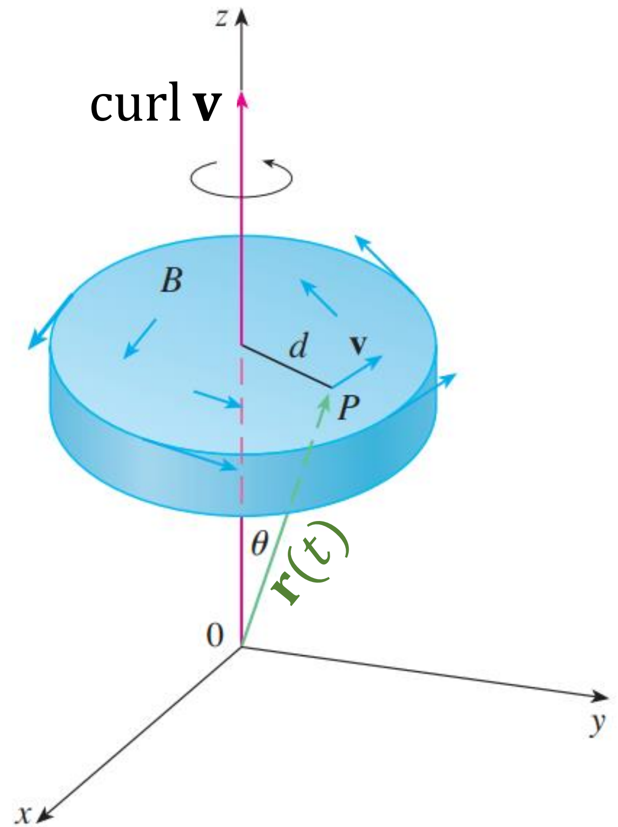
Xét một bánh xe quay đều quanh trục Oz với vận tốc góc ω như hình bên. Tại thời điểm t, mỗi điểm $P(x; y; z)$ trên bánh xe cách trục một khoảng d có vectơ vị trí là $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (d\cos\omega t\,; d\sin\omega t\,; z)$, z không đổi theo t. Trường vectơ vận tốc $\mathbf{v}$ trên bánh xe tại thời điểm t là

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) &= (-d\omega\sin\omega t\,; d\omega\cos\omega t\,; 0)\\ &= \omega\,(-y; x; 0).\end{aligned}$$

Tính toán, ta thu được

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} = \omega(0; 0; 2).$$

Ta thấy $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ là vectơ vuông góc với bánh xe.



Độ dài của $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ càng lớn có nghĩa là tốc độ góc $|\omega|$ càng lớn, trường $\mathbf{v}$ xoáy càng "mạnh" quanh trục của $\operatorname{curl}\mathbf{v}$.

Công thức Stokes

Điều kiện để một trường vectơ 3 chiều là bảo toàn

Định lý (Đặc trưng của trường bảo toàn 3 chiều)

- Hình thức cho thấy $\nabla \times \nabla = \mathbf{0}$, suy ra $\operatorname{curl} \nabla f = \mathbf{0}$, với f trơn đến cấp 2 trên tập mở. Do đó trường thế ∇f là trường không xoáy. (Tích phân trên mọi đường cong kín của trường thế liên tục luôn bằng 0, và nếu trường thế ấy là trơn cấp 1 thì trường xoáy của nó là $\mathbf{0}$.)
- Nếu trường $\mathbf{F}$ trơn trên một tập hợp mở hình sao (hoặc đơn liên) trong $\mathbb{R}^3$, đồng thời $\mathbf{F}$ không có xoáy, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, thì $\mathbf{F}$ là trường bảo toàn trên tập hợp đó.

Bài tập. Làm bài tập trong [1], mục 3.4, từ 3.4.1→3.4.10.

Công thức Gauss-Ostrogradsky

Công thức Divergence

- Xét trường $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ xác định và trơn trên một tập mở Ω của $\mathbb{R}^3$. Hàm số $\operatorname{div} \mathbf{F}$ xác định trên Ω cho bởi

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (x; y; z) \in \Omega,$$

được gọi là hàm phân tán của trường $\mathbf{F}$. Công thức Gauss-Ostrogradsky (sẽ được đề cập sau), cũng được gọi là Định lý Divergence, sẽ cho thấy ý nghĩa của hàm số này, đó là nó cho biết mức độ phát tán ($\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$) hay hút vào ($\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$) vào của trường $\mathbf{F}$ tại từng điểm.

- **Ví dụ.** $\mathbf{F}(x; y; z) = \left(\frac{x}{r^{3/2}}; \frac{y}{r^{3/2}}; \frac{z}{r^{3/2}}\right)$ với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$. Trường này chỉ sai khác hệ số hằng so với trọng trường của Trái đất và trường tĩnh điện gây bởi điện tích điểm đặt tại gốc tọa độ. Khi đó

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xr^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yr^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zr^{-\frac{3}{2}}\right) = \cdots = 0.$$

Công thức Divergence

Sau đây là nội dung chính.

Định lý Gauss-Ostrogradsky (định lý Divergence)

Cho $\mathbf{F}$ là trường trơn trên một tập mở chứa khối Ω đơn giản trong $\mathbb{R}^3$. (Xem lại miền đơn giản của bài giảng tuần 5.) Giả sử biên $\partial\Omega$ của Ω là mặt kín, định hướng ra ngoài Ω và được ghép bởi vài mặt cong đơn và chính quy. Khi đó

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Kết quả cũng đúng nếu Ω là khối có thể chia được thành nhiều miền đơn giản, ngăn cách nhau bởi các mặt cong đơn chính quy.

Ghi chú.

- Nếu thông lượng $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} > 0$, ta nói $\mathbf{F}$ đang thoát ra ngoài Ω.
- Nếu thông lượng $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\vec{\sigma} < 0$, ta nói $\mathbf{F}$ đang bị hút vào Ω.

Công thức Divergence

Ý nghĩa của toán tử div

Xét $P(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của quả cầu B_a có bán kính a rất nhỏ. Nếu trường $\mathbf{F}$ trơn thì $\operatorname{div}\mathbf{F}$ là hàm liên tục. Do bán kính a rất nhỏ nên giá trị của $\operatorname{div}\mathbf{F}$ bên trong B_a xấp xỉ bằng $\operatorname{div}\mathbf{F}(P)$. Công thức Gauss cho

$$\int_{\partial B_a} \mathbf{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{B_a} \operatorname{div}\mathbf{F} \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(P)\int_{B_a} 1 = |B_a| \operatorname{div}\mathbf{F}(P),$$

với $|B_a| = \frac{4\pi a^3}{3}$ là thể tích quả cầu. Suy ra $\operatorname{div}\mathbf{F}(P) \approx \frac{1}{|B_a|}\int_{\partial B_a} \mathbf{F}\cdot d\vec{\sigma}$. Xấp xỉ càng chính xác khi a càng nhỏ.

Vậy thông lượng của $\mathbf{F}$ thoát khỏi bề mặt của một đơn vị thể tích tại điểm P bằng $\operatorname{div}\mathbf{F}(P)$. Nếu $\operatorname{div}\mathbf{F}(P) > 0$ thì ta nói P là điểm nguồn của trường, các vectơ của trường gần P được sắp xếp theo xu hướng rời khỏi P nhiều hơn so với hướng vào P. Nếu $\operatorname{div}\mathbf{F}(P) < 0$ thì ta nói P là điểm giếng của trường, vectơ của trường gần P có xu hướng tụ vào P nhiều hơn so với tán ra.

Công thức Divergence

Định lý Gauss đóng vai trò quan trọng trong mô tả các định luật trong điện từ trường, thể hiện qua các phương trình Maxwell. Sinh viên tìm hiểu trong tài liệu [1] và có thể tham khảo thêm các sách về Vật lý nếu quan tâm.

Bài tập. Làm bài tập trong [1], 3.4.11→3.4.21.