BÀI TẬP TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ

Homework 5: Tối ưu lồi – Data fitting

Sinh viên: Nguyễn Thái Bảo - 23120023

Ngày 10 tháng 5 năm 2025

Bài 1

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Kiểm tra $\lambda_i \geq 0$ của $\nabla^2 f = A$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 6x_2 + 4x_1 + 2x_3 \\ 8x_3 + 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = A$$

Tìm trị riêng của A: $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Suy ra: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12$

Vì $\lambda_i > 0$ nên $A \geq 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ là hàm lồi.

f đạt GTNN tại $\nabla f(u) = 0$. Xét $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_2 + 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 8x_3 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$f_{min} = f(0, 0, 0) = 0$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

Kiểm tra $\lambda_i \geq 0$ của $\nabla^2 f = A$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -4x_1 + 4x_2 \\ -2x_2 + 4x_1 + 4x_3 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Tìm trị riêng của A: $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

Suy ra: $\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -8 < 0, \lambda_3 = 4 > 0$

Vì tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ và $\lambda_3 > 0$ nên A không xác định $\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ không phải hàm lồi cũng không phải hàm lõm.

Xét điểm dừng: $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_2 + 4x_1 + 4x_3 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Do hàm f không phải lồi cũng không phải lõm nên $(0, 0, 0)$ không phải điểm cực trị.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

Kiểm tra $\lambda_i \geq 0$ của $\nabla^2 f = A$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ -4x_2 + 2x_1 + 2x_3 \\ -6x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = A$$

Tìm trị riêng của A: $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Suy ra: $\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -8 < 0, \lambda_3 = -6 < 0$

Vì $\lambda_i < 0$ với mọi i nên $A \leq 0$ (xác định âm) $\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3)$ là hàm lõm.

f đạt GTLN tại $\nabla f(u) = 0$. Xét $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 = 0 \\ -4x_2 + 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ -6x_3 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$f_{max} = f(0, 0, 0) = 0$

Bài 2

Cho dữ liệu của 2 đại lượng X, Y khảo sát có kết quả như sau:

X	1	2	3	4
Y	2	2	5	8

a) Mô hình tuyến tính $Y = \theta_1 + \theta_2 X$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Tính $\hat{\beta} = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{Y} = -1 + 2.1X$$

b) Mô hình cubic $Y = \theta_1 + \theta_2 X^2$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\hat{\beta} = (A^TA)^{-1}(A^TY)$:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 30 \\ 30 & 354 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{59}{86} & \frac{-5}{86} \\ \frac{-5}{86} & \frac{1}{129} \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 183 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{59}{86} & \frac{-5}{86} \\ \frac{-5}{86} & \frac{1}{129} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 183 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{43} \\ \frac{37}{86} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{Y} = 1.0232 + 0.4302X^2$$

c) Mô hình đa thức $Y = \theta_1 + \theta_2 X + \theta_3 X^2$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 7.75 & -6.75 & 1.25 \\ -6.75 & 6.45 & -1.25 \\ 1.25 & -1.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 53 \\ 183 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (A^TA)^{-1}(A^TY) = \begin{pmatrix} 2.75 \\ -1.65 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \hat{Y} = 2.75 - 1.65X + 0.75X^2$

d) Mô hình tuyến tính - log $Y = \theta_1 + \theta_2 \ln X$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.6931 \\ 1 & 1.0986 \\ 1 & 1.3863 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 3.178 \\ 3.178 & 3.6092 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8322 & -0.732 \\ -0.732 & 0.9223 \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 17 \\ 17.969 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (A^TA)^{-1}(A^TY) = \begin{pmatrix} 0.9795 \\ 4.1163 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \hat{Y} = 0.9795 + 4.1163 \ln X$

e) Mô hình log - tuyến tính $\ln Y = \theta_1 + \theta_2 X$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - \ln Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \ln Y = \begin{pmatrix} 0.6931 \\ 0.6931 \\ 1.6094 \\ 2.0794 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 5.0751 \\ 15.225 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (A^TA)^{-1}(A^TY) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5075 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ln \hat{Y} = 0.5075X \Rightarrow \hat{Y} = e^{0.5075X}$$

f) Mô hình log - log: $\ln Y = \theta_1 + \theta_2 \ln X$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - \ln Y||^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.6931 \\ 1 & 1.0986 \\ 1 & 1.3863 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \ln Y = \begin{pmatrix} 0.6931 \\ 0.6931 \\ 1.6094 \\ 2.0794 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 3.178 \\ 3.178 & 3.6092 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8322 & -0.732 \\ -0.732 & 0.9223 \end{pmatrix}$$

$$A^TY = \begin{pmatrix} 5.0751 \\ 5.1313 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (A^TA)^{-1}(A^TY) = \begin{pmatrix} 0.4634 \\ 1.0136 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ln \hat{Y} = 0.4634 + 1.0136 \ln X \Rightarrow \hat{Y} = e^{0.4634 + 1.0136 \ln X}$$

Tính độ dài vector phần dư

a) $r_1 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ -1.2 \\ -0.3 \\ 0.6 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_1|| = \sqrt{0.9^2 + (-1.2)^2 + (-0.3)^2 + 0.6^2} = \sqrt{2.7} = 1.643168$

b) $r_2 = \begin{pmatrix} 0.54651163 \\ -0.74418605 \\ 0.10465116 \\ 0.09302326 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_2|| = 0.933859$

c) $r_3 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ -0.45 \\ 0.45 \\ -0.15 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_3|| = 0.670820$

d) $r_4 = \begin{pmatrix} 1.0204987 \\ -1.83274051 \\ -0.50177846 \\ 1.31402028 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_4|| = 2.525626$

e) $r_5 = \begin{pmatrix} 0.1856298 \\ -0.32188758 \\ 0.08688577 \\ 0.04937202 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_5|| = 0.384781$

f) $r_6 = \begin{pmatrix} 0.22972588 \\ -0.47289461 \\ 0.03238948 \\ 0.21077925 \end{pmatrix} \Rightarrow ||r_6|| = 0.567345$

Bài 3

Mô hình tuyến tính $y = a + bx$

Theo đề bài, ta có:
- Khi $x = 6.1$ inch, $y = 0$ pounds (chiều dài tự nhiên)
- Khi $x = 7.6$ inch, $y = 2$ pounds
- Khi $x = 8.7$ inch, $y = 4$ pounds
- Khi $x = 10.4$ inch, $y = 6$ pounds

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6.1 \\ 1 & 7.6 \\ 1 & 8.7 \\ 1 & 10.4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Tính $\hat{\beta} = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6.1 & 7.6 & 8.7 & 10.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6.1 \\ 1 & 7.6 \\ 1 & 8.7 \\ 1 & 10.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 32.8 \\ 32.8 & 278.82 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 7.0694 & -0.831 \\ -0.831 & 0.1014 \end{pmatrix}$$

$$A^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6.1 & 7.6 & 8.7 & 10.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 112.4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 7.0694 & -0.831 \\ -0.831 & 0.1014 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 112.4 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -8.643 \\ 1.4198 \end{pmatrix}$

Vậy $\hat{a} = -8.643$ và $\hat{b} = 1.4198$

Phương trình hồi quy: $y = -8.643 + 1.4198x$

Khi lò xo ở trạng thái tự nhiên (không có lực tác dụng), ta có $y = 0$:
$-8.643 + 1.4198x = 0$
$1.4198x = 8.643$
$x = 6.087$ inch. Giá trị này gần với chiều dài tự nhiên 6.1 inch đã cho.

Kết luận: Độ cứng của lò xo là $b = 1.4198$ pounds/inch.

Bài 4

Mô hình tuyến tính $y = a + bx$

Theo đề bài, ta có các điểm: $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$

Giải $L(\beta) = ||A\beta - Y||^2$

Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Tính $\hat{\beta} = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$:

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

$A^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$

$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vậy $\hat{a} = 1.5$ và $\hat{b} = 1$

Phương trình đường thẳng phù hợp nhất theo phương pháp bình phương bé nhất là:
$y = 1.5 + 1x = x + 1.5$

Kết luận: Đường thẳng phù hợp với 4 điểm đã cho là $y = x + 1.5$.