Vtp2-Tuần 1 Giới thiệu hàm số nhiều biến

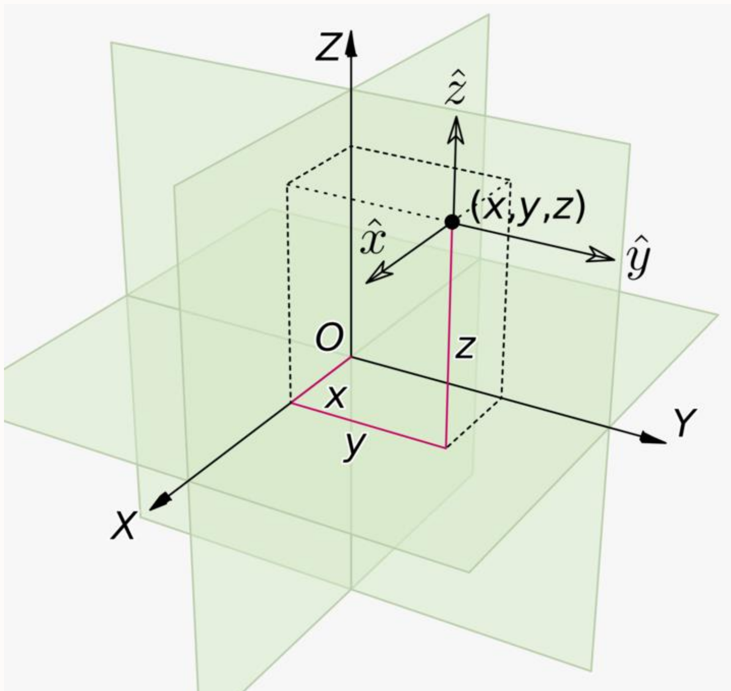
Bộ môn Giải tích, khoa Toán-tin học

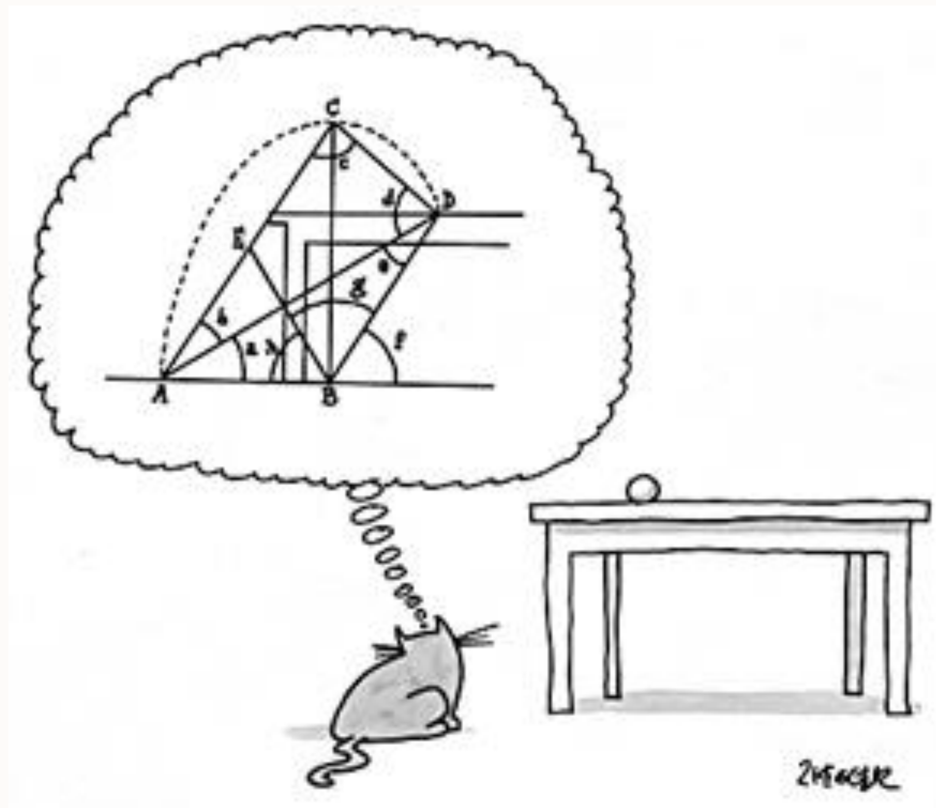
Quy ước tên tài liệu:

[1] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình vi tích phân 2*, tài liệu điện tử.

[2] J. Stewart, *Calculus 7th*, tài liệu điện tử. (Chỉ để tham khảo một ít lượng bài tập)

Không gian Euclide





Không gian $\mathbb{R}^2$

- Ký hiệu $\mathbb{R}^2$ là tập hợp
$$\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x_1; x_2) |\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = (x; y) |\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$
- $\mathbb{R}^2$ được gọi là *không gian vectơ* khi trên đó có các phép toán như sau: với mọi $\mathbf{u_1} = (x_1; y_1)$ và $\mathbf{u_2} = (x_2; y_2)$ thuộc $\mathbb{R}^2$ và với mọi số thực α,
$$\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \qquad \alpha\mathbf{u_1} = (\alpha x_1; \alpha y_1)$$
- Các phép toán nói trên thỏa các tính chất giống như phép toán đối với vectơ hình học đã biết ở bậc phổ thông, như tính giao hoán, kết hợp, phân phối v.v..
- Phần tử của $\mathbb{R}^2$ được ký hiệu bằng chữ đứng in đậm như trên. Tuy nhiên, một số giáo trình vẫn dùng chữ in nghiêng thường (vốn dùng cho biến số), ví dụ $x = (x_1; x_2)$. Trong những trường hợp như vậy, người đọc nên hiểu theo ngữ cảnh và không nên nhầm lẫn.

Không gian $\mathbb{R}^2$

- Không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ như trên được gọi là không gian *Euclide* khi trong đó được xét *độ dài Eulclide* (còn gọi là *chuẩn*) định bởi

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \forall \mathbf{u} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ còn có *tích trong* (cũng gọi là *tích vô hướng*) cho bởi: $\forall \mathbf{u_1} = (x_1; y_1), \mathbf{u_2} = (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$,

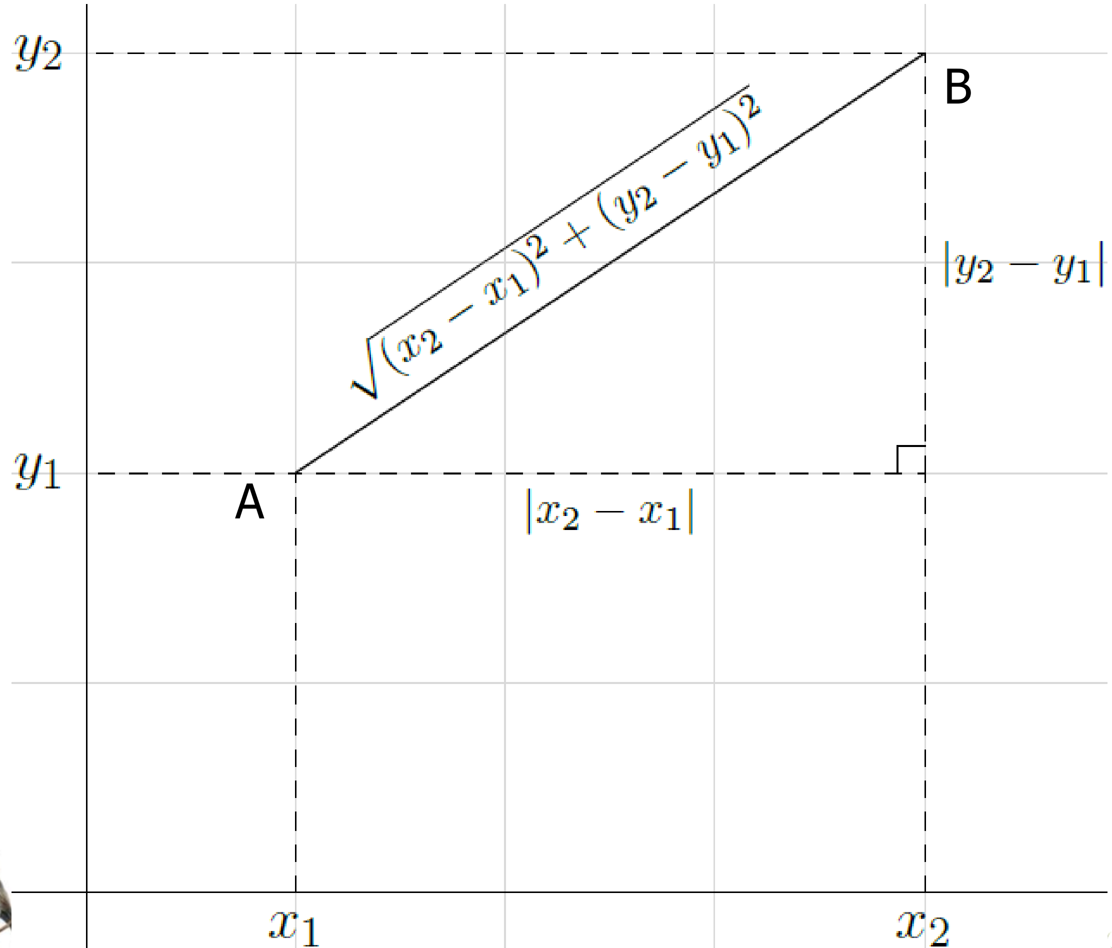
$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

- Không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ mô phỏng mặt phẳng hình học theo kiểu tọa độ Descartes: mỗi phần tử $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ mô phỏng điểm $A(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy như đã biết ở bậc phổ thông. Do đó phần tử của $\mathbb{R}^2$ cũng được gọi là *điểm*.
- Mỗi phần tử của $\mathbb{R}^2$ đôi khi cũng được gọi là vectơ vì $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ mô phỏng vectơ hình học (đoạn thẳng có hướng) có tọa độ $(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy. Nếu không nói rõ điểm đầu thì các vectơ hình học này được gọi là *vectơ tự do*.

Không gian $\mathbb{R}^2$

- Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ có *khoảng cách Euclide* cho bởi:
  $\forall \mathbf{u_1} = (x_1; y_1), \mathbf{u_2} = (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Khoảng cách Euclide mô phỏng "độ xa cách" giữa hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ trong mặt phẳng tọa độ. Cụ thể, với $\mathbf{u} = (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$ thì $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = AB$.

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$

Xét n là số tự nhiên khác 0, thì ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_1; \dots; x_n) |\, x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = \overline{1; n}\}, \text{ quy ước } \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}.$$

Tập hợp $\mathbb{R}^n$ được gọi là không gian Euclide khi trên đó được trang bị các phép toán, độ dài, khoảng cách Euclide như sau:

- $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n), \forall \mathbf{y} = (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n), \qquad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1; \dots; \alpha x_n).$$

- *Tích trong* (vô hướng): $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n), \forall \mathbf{y} = (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

- *Độ dài Euclide* (còn được gọi là *chuẩn*): $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^2} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,.$$

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$

- $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n), \forall \mathbf{y} = (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n$, *Khoảng cách Euclide* giữa $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ là
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Các tính chất sau được suy trực tiếp từ các định nghĩa trên:

Với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ với $\mathbf{0} = (0; \dots; 0) \in \mathbb{R}^n$
3. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ với $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$
4. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$; $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x} = \beta(\alpha\mathbf{x})$.
5. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$; $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
6. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$; $\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y})$
7. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$; $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$

8. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
9. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
10. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$

Áp dụng các tính chất ở trên, hãy chứng minh các tính chất tiếp theo sau đây như là bài tập:

- Định lý Pythagore: nếu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ thì $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.
- $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, nếu $\|\mathbf{u}\| = 1$ thì
$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2 + \|\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}\|^2.$$
- Bất đẳng thức B.C.S: $\forall \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n), \forall \mathbf{y} = (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$
- Bất đẳng thức tam giác: Với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ thì
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,$$
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Tập hợp đóng, mở trong $\mathbb{R}^n$

- *Quả cầu mở*, *quả cầu đóng*, *mặt cầu* với tâm $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, bán kính bằng $\varepsilon > 0$, lần lượt là các tập hợp trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$B(\mathbf{u}, \varepsilon) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n |\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \varepsilon\},$$
$$B'(\mathbf{u}, \varepsilon) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n |\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \varepsilon\},$$
$$S(\mathbf{u}, \varepsilon) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n |\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \varepsilon\}.$$

- Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập mở* có nghĩa là mọi điểm thuộc D đều là tâm của một quả cầu nằm hoàn toàn trong D. Nghĩa này được diễn đạt bằng ký hiệu là "$\forall \mathbf{u} \in D, \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{u}, \varepsilon) \subset D$" (quả cầu được đề cập là đóng hay mở đều không thay đổi nghĩa).

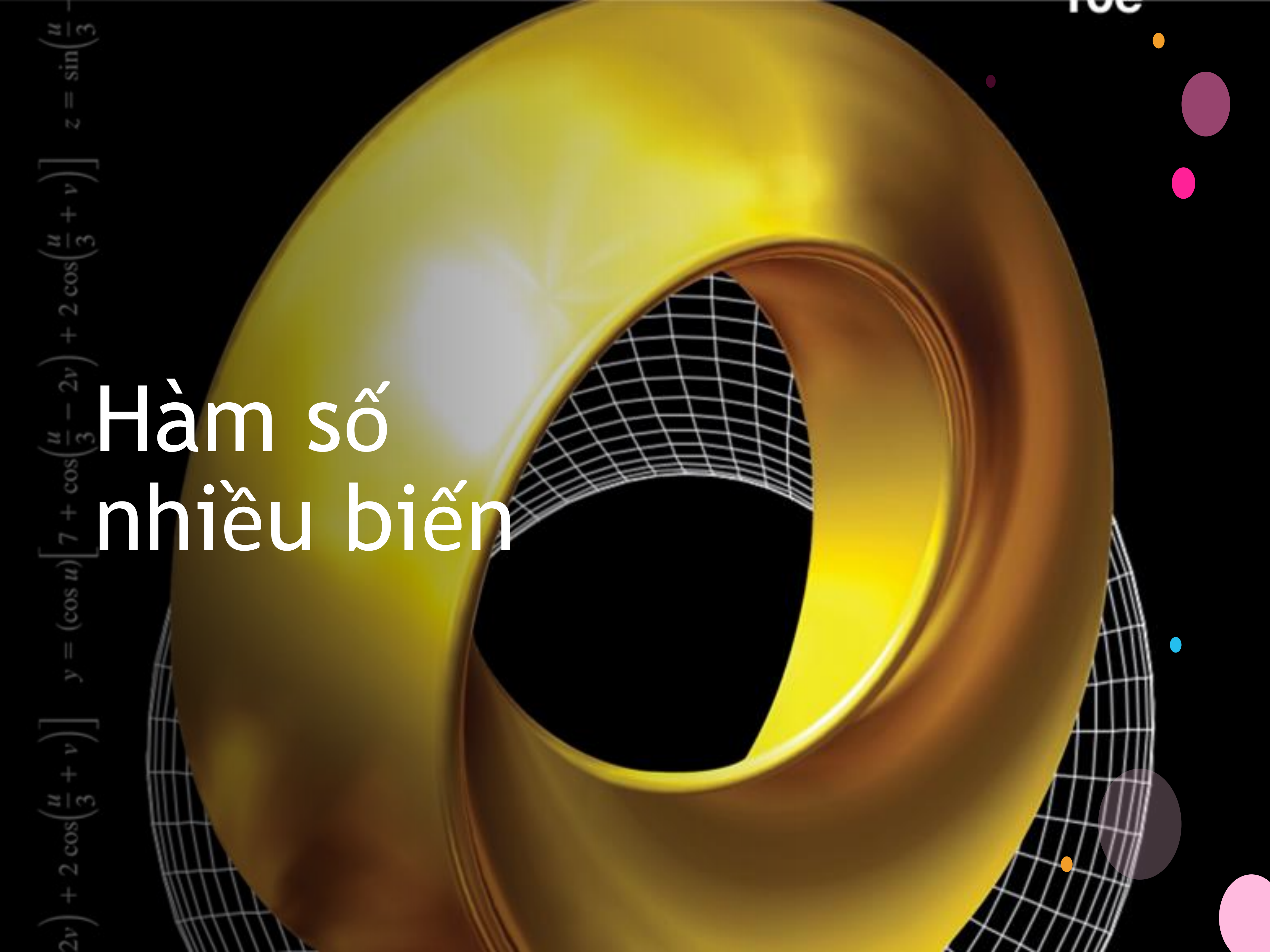
Bài tập. Hãy chứng minh tập $D = \{(x; y) |\ y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ và $B(\mathbf{u}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ là các tập mở.

Không gian $\mathbb{R}^2$ (đại diện cho $\mathbb{R}^n$ tổng quát)

- *Lân cận* của một điểm $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ được hiểu là một tập mở chứa $\mathbf{u}$.
- Điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm biên* của tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$ có nghĩa là mọi quả cầu $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ đều chứa ít nhất một điểm thuộc D và một điểm không thuộc D.
- *Biên của D*, ký hiệu bởi ∂D, là tập hợp tất cả các điểm biên của D. *Phần trong của D* là $D \setminus \partial D$.
- Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập đóng* khi mọi điểm biên của D đều thuộc D, nghĩa là $\partial D \subset D$.
- Điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *điểm tụ* hay là *điểm giới hạn* của tập D khi mọi quả cầu tâm $\mathbf{x}$ đều chứa ít nhất một điểm thuộc D và khác $\mathbf{x}$. (Lưu ý rằng điểm tụ của D có thể thuộc hoặc không thuộc D.)

Bài tập.

1. Cho tập $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0\}$. Chứng minh mọi điểm biên của D luôn có dạng $(a; 0)$, a là số thực. Hãy xác định ∂D.
2. Cho $D = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x; y) |\ x \in \mathbb{Z} \text{ và } y \in \mathbb{Z}\}$. Tập D có điểm tụ không?
3. Chứng minh $\partial B(\mathbf{u}, 1) = S(\mathbf{u}, 1)$.
4. Chứng minh rằng D là tập đóng đồng nghĩa với phần bù $\mathbb{R}^n \setminus D$ là tập mở.
5. Tham khảo thêm bài tập [1] mục 1.1.



Hàm số nhiều biến

Hàm số nhiều biến

- Hàm số n biến xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n, D \neq \emptyset$, là ánh xạ

$$f: D \to \mathbb{R},$$

tức là quy tắc liên kết mỗi điểm $\mathbf{u} = (x_1; \dots; x_n) \in D$ với duy nhất một số thực $f(\mathbf{u}) = f(x_1; \dots; x_n)$.

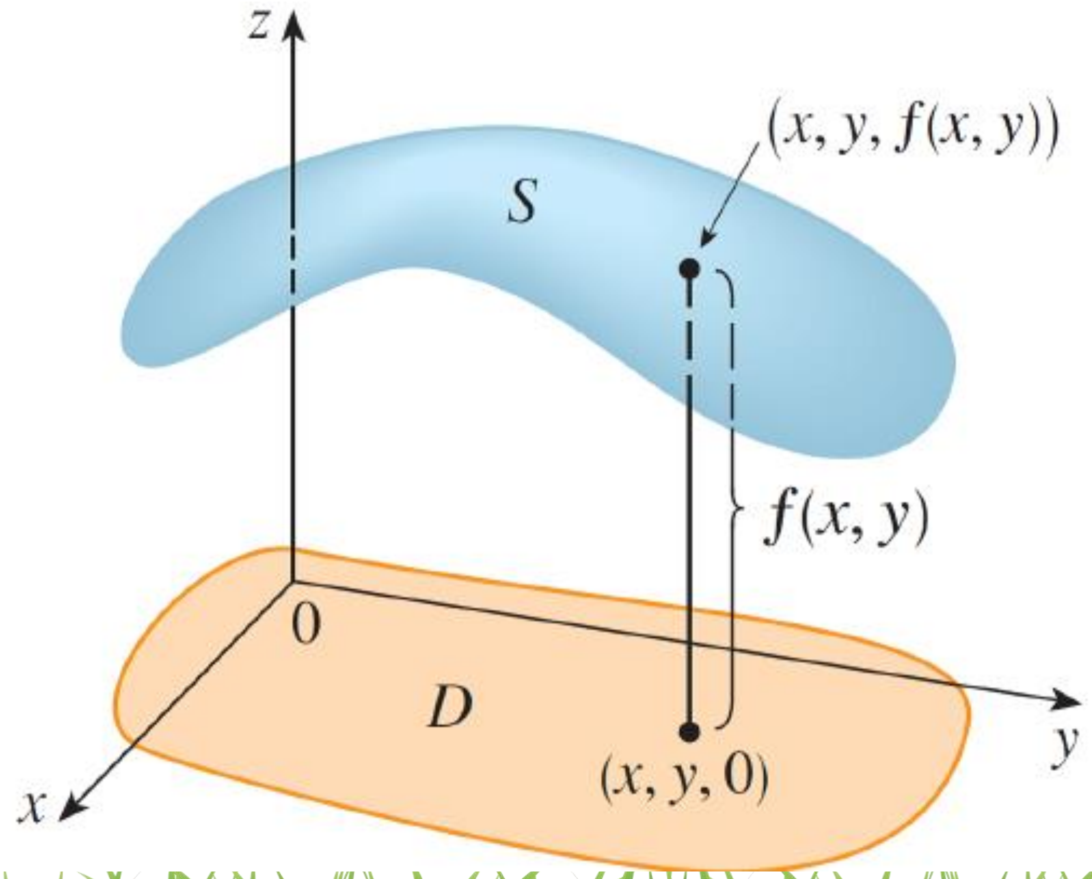
- Nếu không nêu rõ tập D, và giá trị $f(\mathbf{u})$ cho bởi biểu thức Toán học, ví dụ $f(x; y) = \sqrt{y - x}$, thì ta hiểu ngầm D là tập các điểm $\mathbf{u}$ làm cho biểu thức Toán học đó có nghĩa. Trong trường hợp của ví dụ vừa nêu thì $D = \{(x; y) | \, y \geq x\}$.
- Tập hợp $G = \{(\mathbf{u}; f(\mathbf{u})) | \, \mathbf{u} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là đồ thị của f.

Hàm số nhiều biến

- Nếu $D \subset \mathbb{R}^2$ thì đồ thị của f (hàm 2 biến) là tập hợp

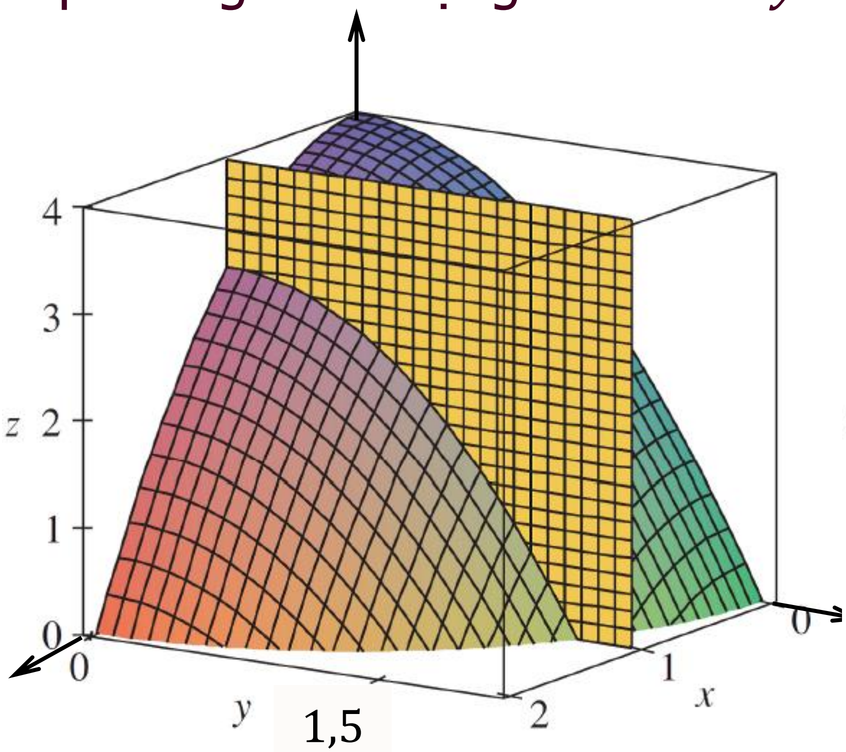
$$S = \{(x; y; z) |\ (x; y) \in D \text{ và } z = f(x; y)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

thường là tập mô phỏng mặt cong trong không gian tọa độ Oxyz.

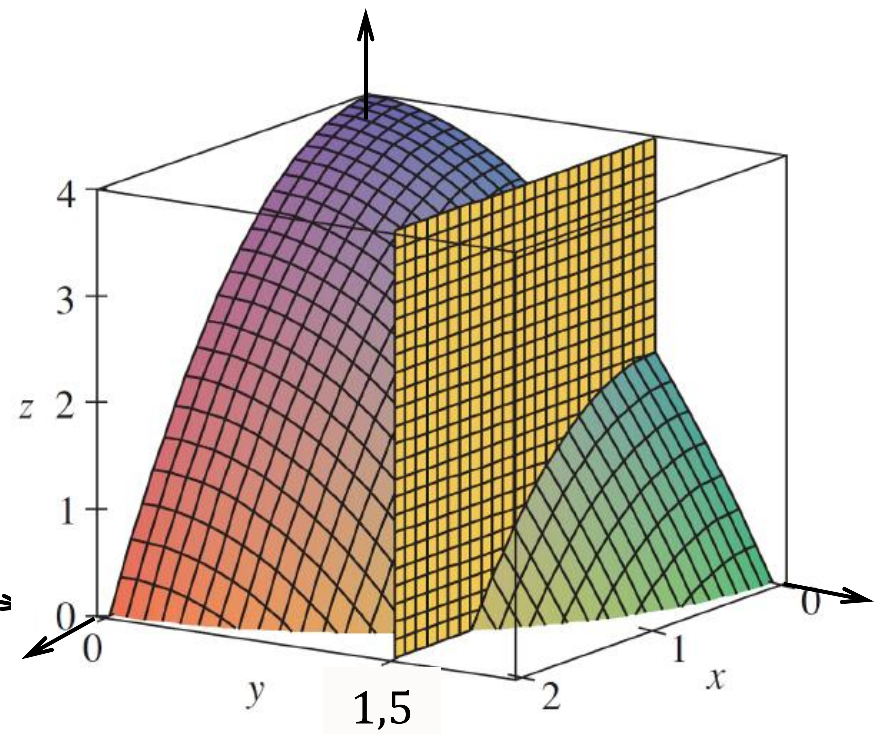


Đồ thị hàm số nhiều biến

- Đồ thị của hàm số 2 biến là mặt cong được hình dung bởi nhiều đường lưới, là *vết* cắt của đồ thị bởi các mặt phẳng đứng có phương trình dạng $x = a$ và $y = b$ như minh họa sau



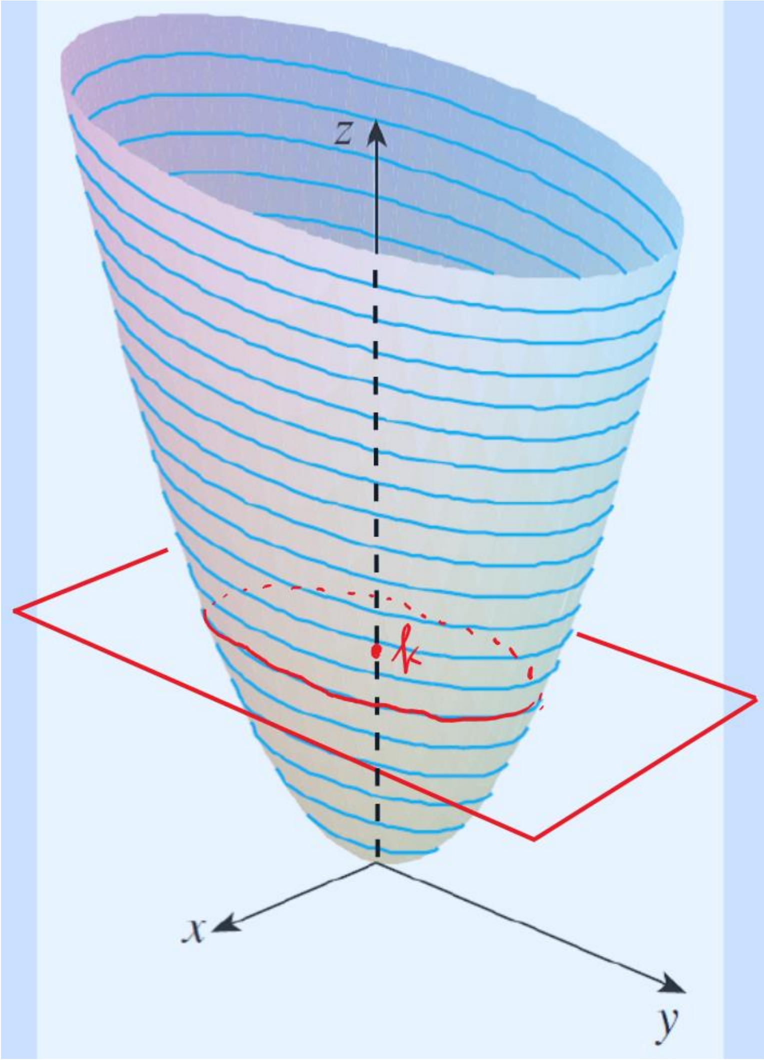
Mặt phẳng $x = 1$ màu vàng



Mặt phẳng $y = 1,5$ màu vàng

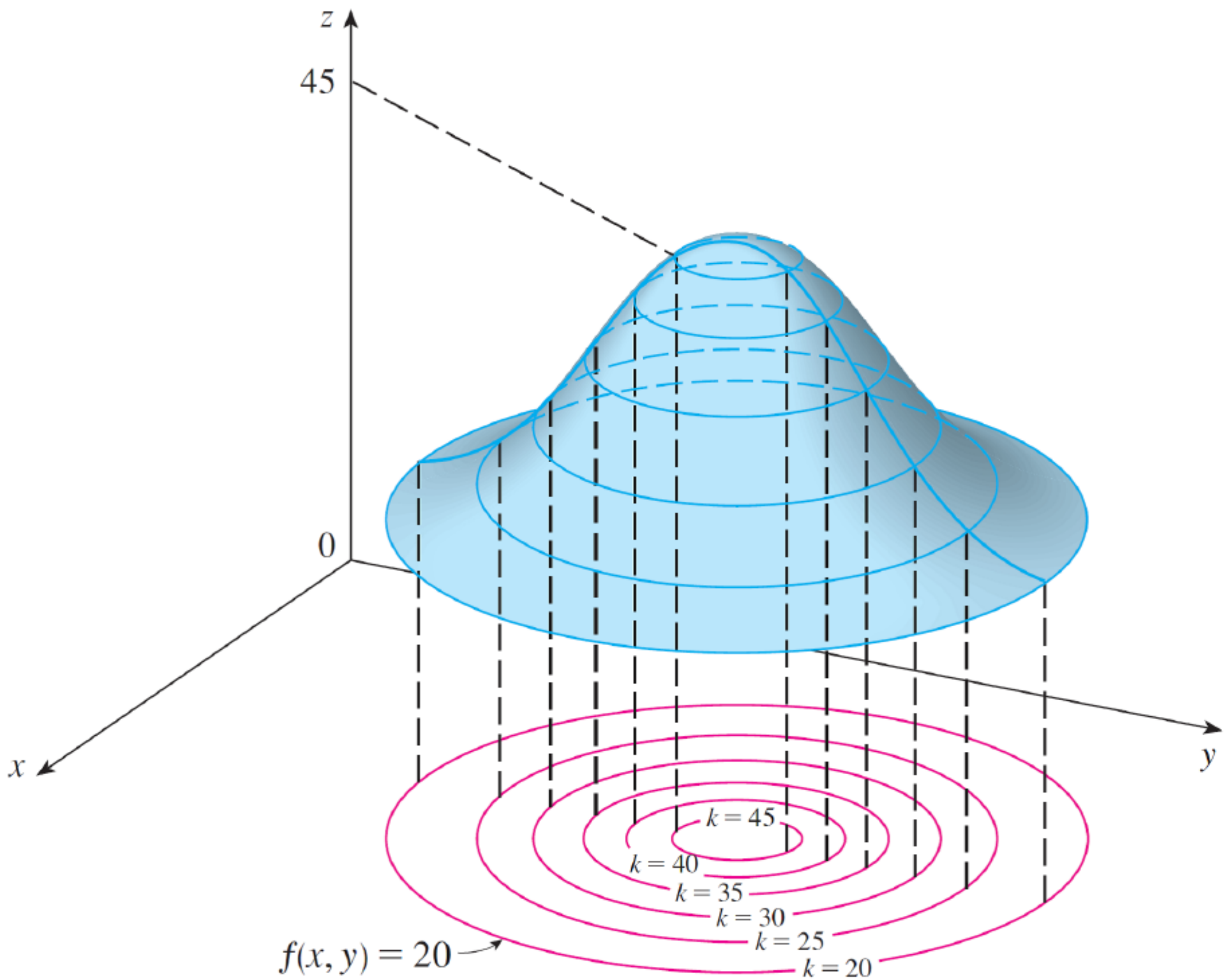
Đồ thị hàm số nhiều biến

- Người ta cũng dùng *vết cắt ngang* của đồ thị bởi mặt phẳng ngang có phương trình $z = k$ để giúp hình dung mặt cong đồ thị của hàm 2 biến.
- Đối với hàm số 2 biến f, *đường đẳng trị* là đường cong trong tập xác định D có phương trình $f(x; y) = k$ với các trị số k nhất định.
- Các giá trị của hàm số trên một đường đẳng trị là bằng nhau.



Đường đẳng trị

Đường đẳng trị chính là hình chiếu của các vết cắt ngang của đồ thị hàm số lên mặt phẳng Oxy.



Mặt đẳng trị của hàm số 3 biến

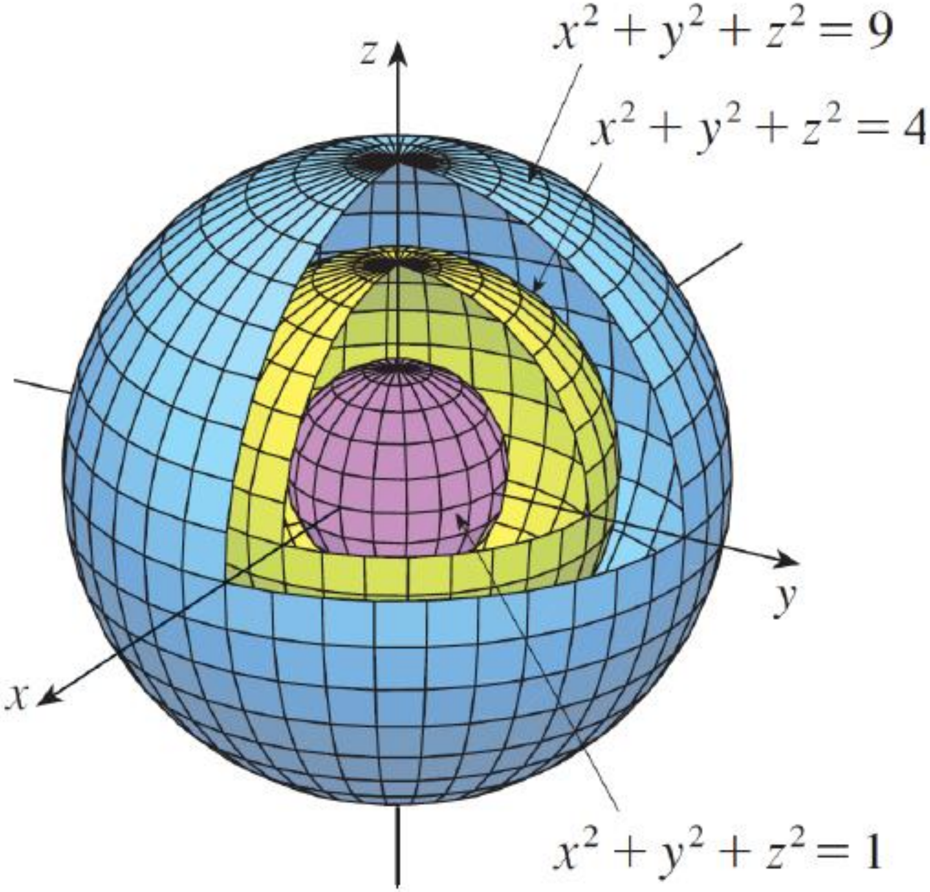
- Với hàm số 3 biến f xác định trên $D \subset \mathbb{R}^3$, *mặt đẳng trị* của f là tập hợp
$$\{(x; y; z) \in D |\ f(x; y; z) = k\} \subset \mathbb{R}^3,$$

nói cách khác tập hợp trên mô phỏng mặt cong trong không gian tọa độ Oxyz có phương trình $f(x; y; z) = k$.

- Các giá trị của hàm số 3 biến tại các điểm trên một mặt đẳng trị là bằng nhau.

Mặt đẳng trị của hàm số 3 biến

Hình bên minh họa ba mặt đẳng trị của hàm số f cho bởi công thức $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2$, xác định trên $D = \mathbb{R}^3$.



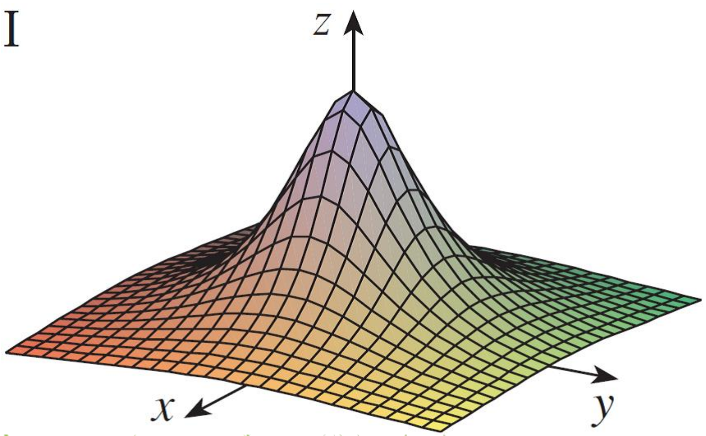
Bài tập mẫu

1. Cho hàm số f định bởi $f(x;y) = \ln(x + y - 1)$. Tính $f(2;1)$ và $f(e;1)$; Tìm và phác họa tập xác định trong mặt phẳng tọa độ; Tìm miền giá trị của f.
2. Tìm và phác họa tập xác định của $f(x;y) = \sqrt{1 + x - y^2}$ trong mặt phẳng tọa độ. Tìm miền giá trị của f.
3. Cho hàm số $f(x;y;z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$. Tính $f(2;-1;6)$; Tìm miền xác định và miền giá trị của f.
4. Cho hàm số $g(x;y;z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$. Tính $g(2;-2;4)$; Tìm miền xác định và miền giá trị của g.
5. Hàm số nào sau đây có đồ thị là hình bên, tại sao?

   a) $f(x;y) = (x^2 - y^2)^2$

   b) $g(x;y) = (x - y)^2$

   c) $h(x;y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$



Bài tập mẫu

6. Xét từng hình bên, chọn đúng hàm số có đồ thị là hình đó.

a) $f(x;y) = |x| + |y|$

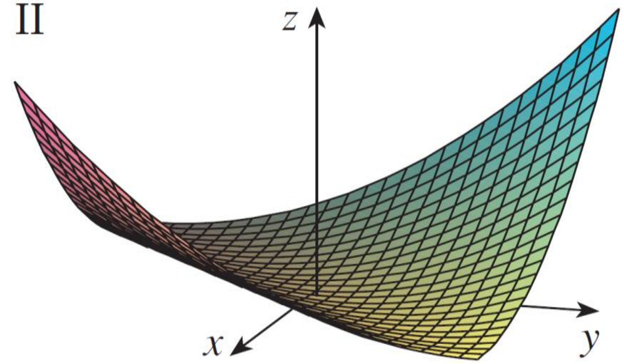
b) $g(x;y) = |xy|$

c) $h(x;y) = (x^2 - y^2)^2$

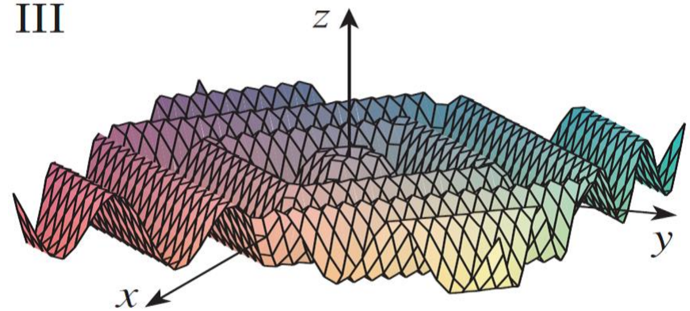
d) $k(x;y) = (x - y)^2$

e) $p(x;y) = \sin(|x| + |y|)$

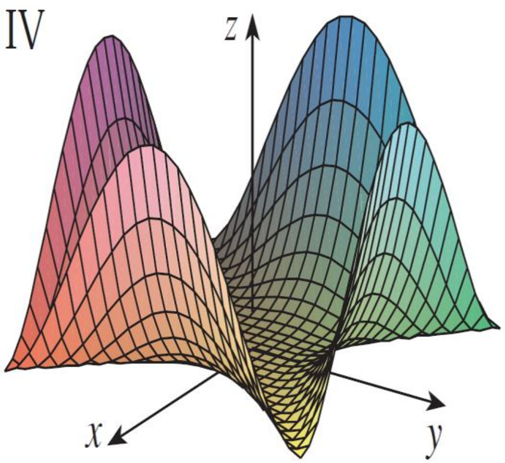
II



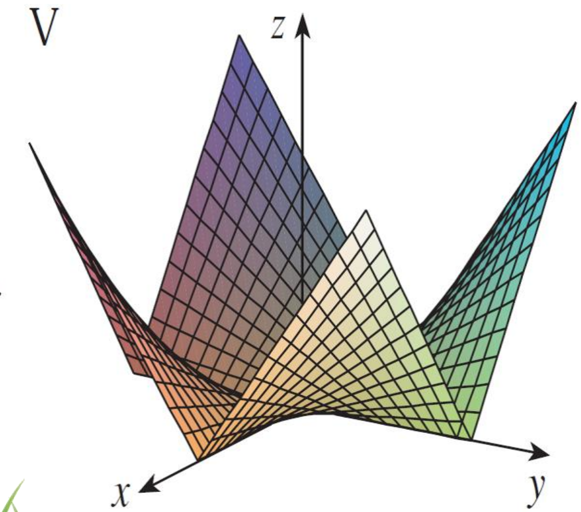
III



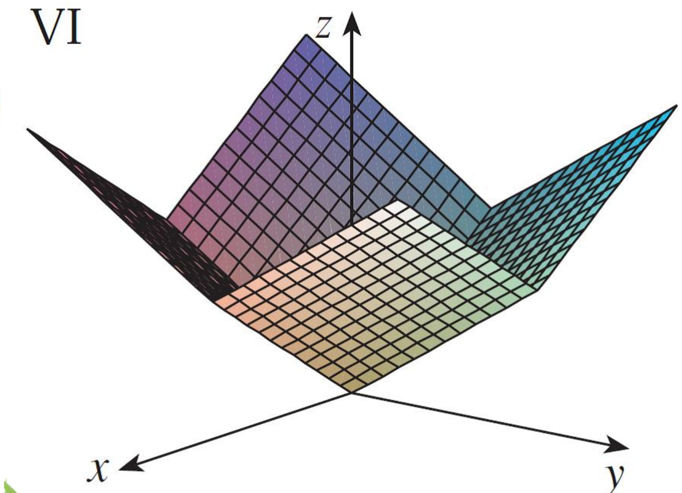
IV



V

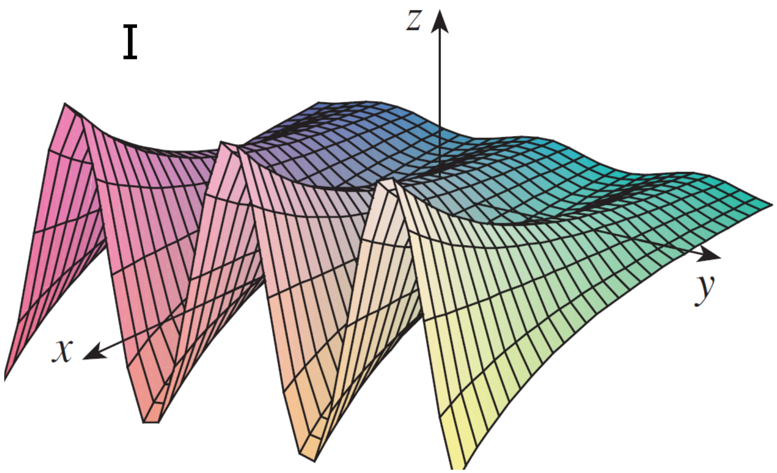


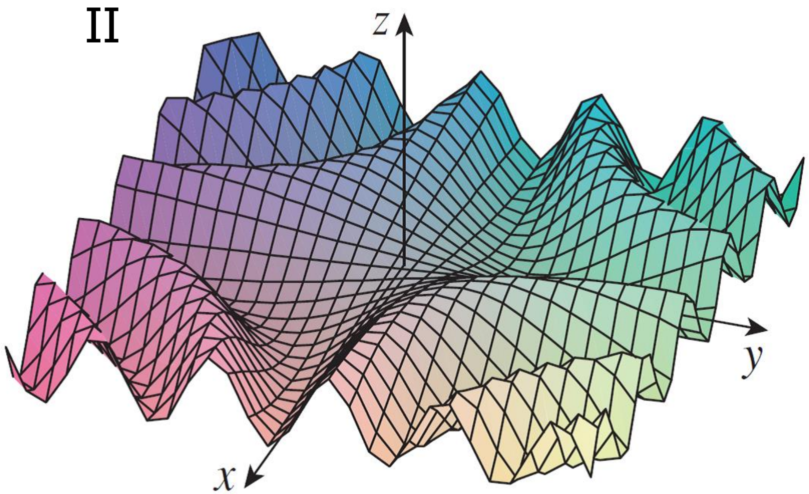
VI

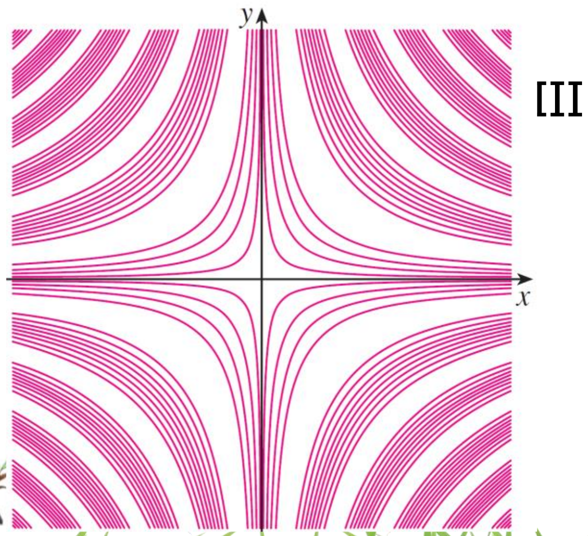


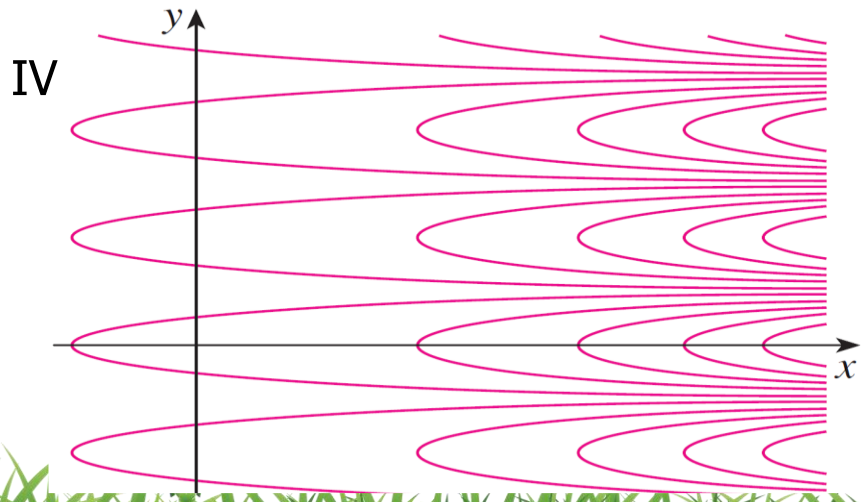
Bài tập mẫu

7. Hãy chọn đúng đồ thị và bản đồ đường đẳng trị của mỗi hàm số sau đây: a) $z = f(x;y) = \sin(xy)$ b) $z = g(x;y) = e^{x}\cos y$





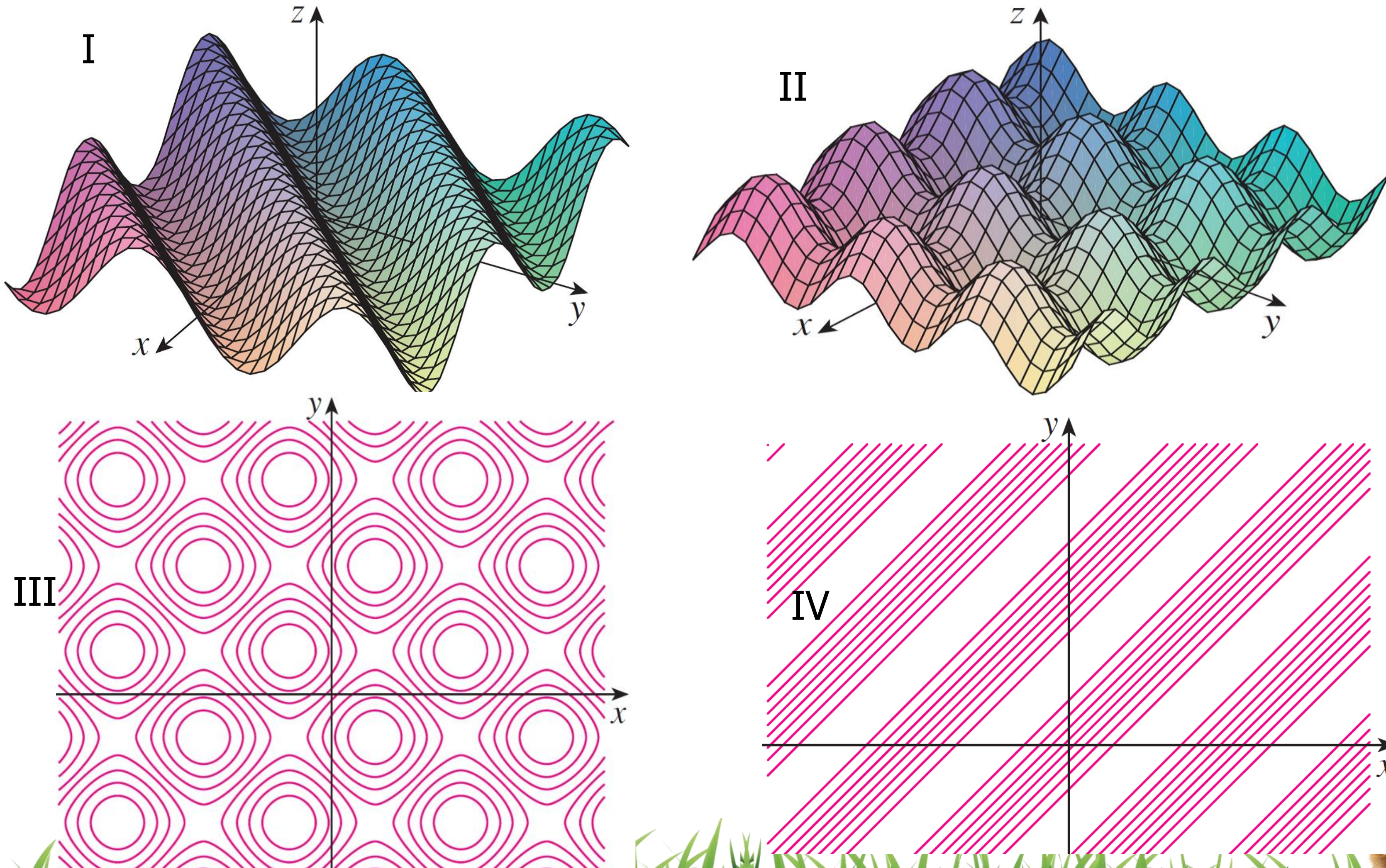




Bài tập mẫu

8. Yêu cầu như bài 7 đối với hai hàm số sau:

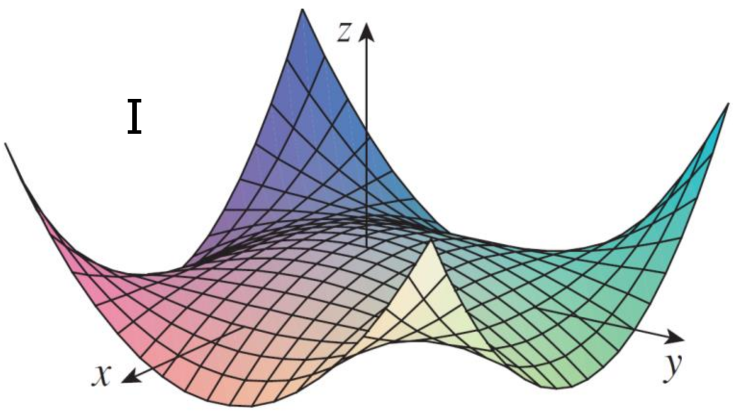
a) $z = f(x; y) = \sin(x - y)$ b) $z = g(x; y) = \sin x - \sin y$

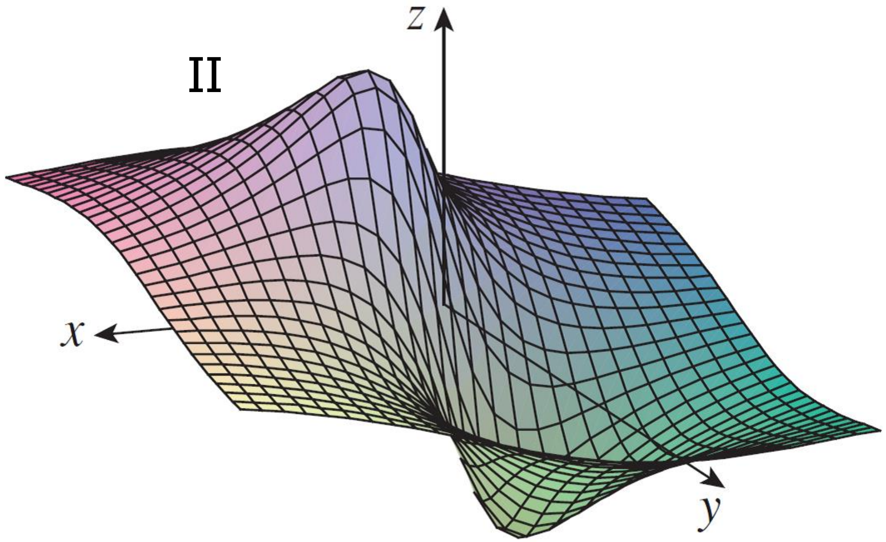


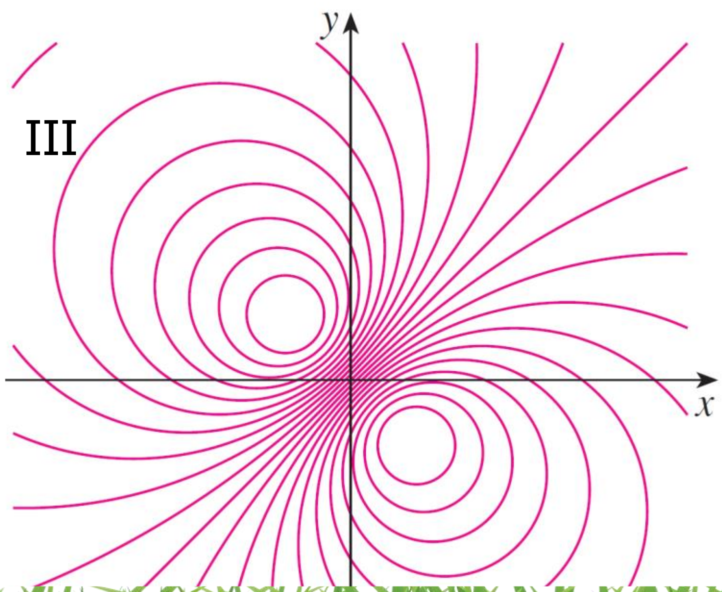
Bài tập mẫu

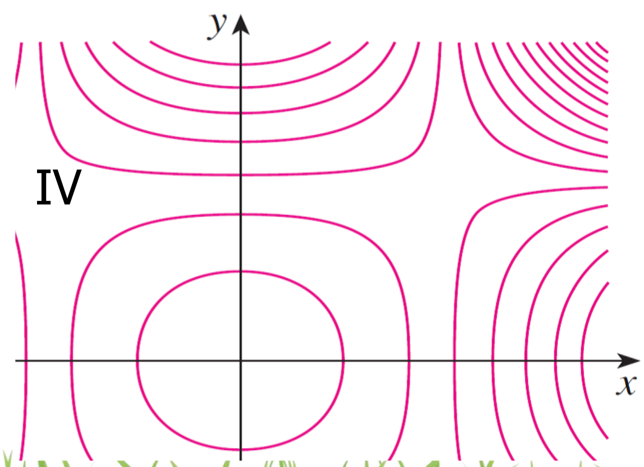
9. Yêu cầu như bài 8 đối với hai hàm số sau:

a) $f(x;y) = (1-x^2)(1-y^2)$ b) $g(x;y) = (x-y)/(1+x^2+y^2)$









Giới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến

Giới hạn hàm số nhiều biến

Định nghĩa chính xác sau đây của giới hạn hàm số nhiều biến có hình thức chung bao hàm cả hình thức của trường hợp 1 biến trong học kỳ trước:

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ theo biến $\mathbf{x}$ và $\mathbf{a}$ là một điểm tụ của D. Ta nói giới hạn của $f(\mathbf{x})$ là số thực L khi $\mathbf{x}$ tiến tới $\mathbf{a}$ có nghĩa là khoảng cách giữa $f(\mathbf{x})$ và L nhỏ tùy ý miễn là khoảng cách (Euclide) giữa $\mathbf{x}$ và $\mathbf{a}$ đủ nhỏ nhưng khác 0, tức là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in D, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon,$$

hay viết cách khác là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in (B(\mathbf{a}; \delta) \cap D) \setminus \{\mathbf{a}\}, f(\mathbf{x}) \in B(L, \varepsilon).$$

Nghĩa trên được viết ngắn gọn là

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L.$$

Giới hạn hàm số nhiều biến

- Từ định nghĩa giới hạn, ta thấy ngay

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f(\mathbf{x})| = 0.$$

- Với hàm số hằng, $f(\mathbf{x}) = c$, và *hàm số thành phần tọa độ* $p_k(\mathbf{x}) = x_k\ \forall \mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, thì ta có thể suy trực tiếp từ định nghĩa để cho kết quả sau

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} c = c \ \text{ và } \ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p_k(\mathbf{x}) = a_k \ \text{ với } \mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n).$$

Kết quả trên được phát biểu là *nếu* $\mathbf{x}$ *tiến đến* $\mathbf{a}$ *thì các thành phần tọa độ của* $\mathbf{x}$ *tiến đến các thành phần tọa độ của* $\mathbf{a}$ *tương ứng*.

- Ở trường hợp hàm 2 biến, ta hay viết kết quả trên như sau

$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} c = c;\ \lim_{(x;y)\to(a;b)} x = a;\ \lim_{(x;y)\to(a;b)} y = b.$$

- Cũng từ định nghĩa, ta cũng chứng minh được các tính chất sau của giới hạn, tương tự trong Vi Tích Phân 1,

Các tính chất của giới hạn hàm số nhiều biến

Giả sử f và g là hai hàm số n biến đều có giới hạn tại $\mathbf{a}$. Khi đó

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}[f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \pm \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}[kf(\mathbf{x})] = k\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ với k là hằng số.
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})}$ nếu $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0$
- Nếu $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ với $\mathbf{x}$ trong lân cận của $\mathbf{a}$ thì $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
- Nếu $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ với $\mathbf{x}$ trong lân cận của $\mathbf{a}$

và $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = L$ thì $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = L$. (Định lý giới hạn kẹp.)

Giới hạn hàm số nhiều biến

- Từ giới hạn của các hàm thành phần tọa độ đã nói trước và các tính chất của giới hạn vừa được phát biểu, ta suy ra

$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} (2x^2 - 3xy)$$
$$= 2\left(\lim_{(x;y)\to(a;b)} x\right)^2 - 3\left(\lim_{(x;y)\to(a;b)} x\right)\left(\lim_{(x;y)\to(a;b)} y\right)$$
$$= 2a^2 - 3ab.$$

- Tổng quát hơn, nếu P và Q là các đa thức n biến (tức là tổng các đơn thức có dạng $cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$, ví dụ $P(x;y) = 2x^2 + 5xy^7$) và nếu $Q(\mathbf{a}) \neq 0$ thì

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = \frac{P(\mathbf{a})}{Q(\mathbf{a})}.$$

Nói cách khác, khi tính giới hạn của phân thức như trên tại $\mathbf{a}$, ta chỉ việc thay $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, miễn là phân thức xác định tại $\mathbf{a}$.

Hàm số liên tục

- Ngoài những hàm nhiều biến như phân thức vừa nêu trên, còn những hàm nào khác mà việc tính giới hạn tại $\mathbf{a}$ chỉ đơn giản là thay $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ hay không?

Định nghĩa. Hàm số f được gọi là *liên tục tại* $\mathbf{a}$ nghĩa là chỉ xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- f xác định tại $\mathbf{a}$ nhưng $\mathbf{a}$ không là điểm tụ của tập xác định.
- f xác định tại $\mathbf{a}$, đồng thời $\mathbf{a}$ là điểm tụ của tập xác định và

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

- Khi nói f liên tục, thì ta hiểu ngầm là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.
- Như vậy hàm phân thức nhiều biến đề cập ở trước là liên tục.

Hàm số liên tục

Tính chất liên tục. Trong học kỳ trước, ta biết rằng tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm 1 biến liên tục cũng là hàm liên tục. Điều này vẫn đúng cho hàm nhiều biến, và có thể được suy ra ngay từ các tính chất tương ứng của giới hạn, giống như cách đã làm cho hàm một biến.

Ví dụ. Hàm một biến sơ cấp sin là liên tục, hợp với hàm phân thức nhiều biến như sau sẽ tạo ra hàm liên tục

$$(x;y) \mapsto f(x;y) = \sin\left(\frac{2xy + y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Do đó ta có thể tính giới hạn của hàm này bằng cách thế trực tiếp

$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} \sin\left(\frac{2xy + y^2}{x^2 + y^2}\right) = \sin\left(\frac{2ab + b^2}{a^2 + b^2}\right) \text{ miễn là } (a;b) \neq (0;0).$$

Ví dụ. Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

Giải. Ta thấy

$$\forall(x;y) \neq (0;0), 0 \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \leq |x|.$$

Mà $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} |x| = 0$ và do định lý giới hạn kẹp nên

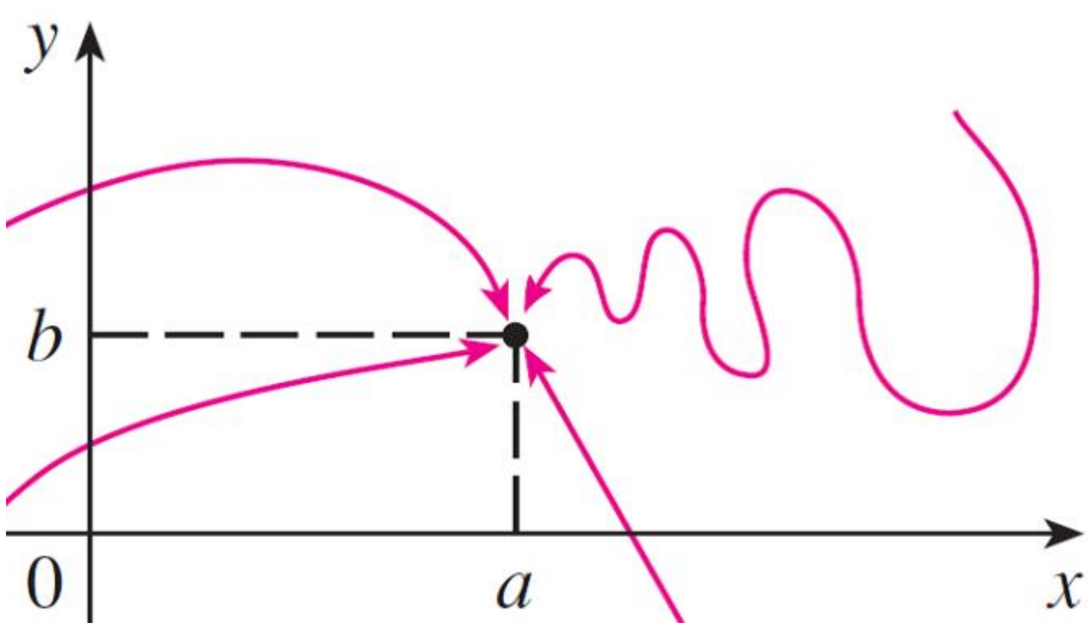
$\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$

Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

- Trong học kỳ trước ta biết rằng, đối với hàm số 1 biến f,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L.$$

- Đối với hàm nhiều biến, nếu tồn tại giới hạn $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ thì dù điểm $\mathbf{x}$ tiến đến $\mathbf{a}$ theo bất kỳ đường đi nào trong tập xác định của f, giá trị của $f(\mathbf{x})$ luôn tiến về L.



Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

Giả sử có hai đường đi C_1 và C_2 trong tập xác định D của hàm số nhiều biến f, hai đường này cùng dẫn đến $\mathbf{a}$ và

- Khi $\mathbf{x}$ tiến đến $\mathbf{a}$ theo đường đi C_1, $f(\mathbf{x})$ tiến đến số L_1;
- Khi $\mathbf{x}$ tiến đến $\mathbf{a}$ theo đường đi C_2, $f(\mathbf{x})$ tiến đến số $L_2 \neq L_1$.

Khi đó ta kết luận f không có giới hạn tại $\mathbf{a}$.

Ví dụ. Tìm $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ nếu có.

Giải. Ta xét $(x; y) \to (0; 0)$ dọc theo trục Ox, với $(x; y) \neq (0; 0)$, thì

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} \to L_1 = 0.$$

Xét $(x; y) \to (0; 0)$ dọc theo đường thẳng $y = x$, chỉ xét $(x; y) \neq (0; 0)$, thì

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+x^2} \to L_2 = \frac{1}{2} \neq L_1.$$

Vậy giới hạn đang xét không tồn tại.

Giới hạn của hàm số nhiều biến

Chú ý lỗi hay gặp: Khi thấy rằng có hai đường đi C_1 và C_2 trong tập xác định của f cùng dẫn đến điểm $\mathbf{a}$, và khi điểm $\mathbf{x}$ tiến đến $\mathbf{a}$ trên hai đường ấy mà giá trị hàm $f(\mathbf{x})$ cùng tiến về một số *L* thì vội kết luận rằng giới hạn của f tại $\mathbf{a}$ là tồn tại và bằng *L*. Phải tránh lỗi này!

Bài tập mẫu

1. Xét tính liên tục của hàm số trong giới hạn và tìm giới hạn

$$\lim_{(x;y)\to(1;0)} (x^3 + y^3) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

2. Tìm giới hạn $\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^3 + y^3) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$.

3. Xét tính liên tục của hai hàm số sau:

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

$$g(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0) \\ 9 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Bài tập mẫu

4. Tìm giới hạn nếu có

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{xy-2}{x^2+y^2-5}.$$

5. Xét hàm số

$$f(x;y) = \frac{\sin(xy)}{e^{x^2y}+y^4}.$$

Hàm số có liên tục trên miền xác định của nó không?

6. Xét tính liên tục của hai hàm số sau:

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y}{\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^3} & \text{nếu } (x;y) \neq (1;0) \\ 0 & \text{nếu } (x;y) = (1;0) \end{cases}$$

7. Tham khảo thêm bài tập [1] mục 1.2.