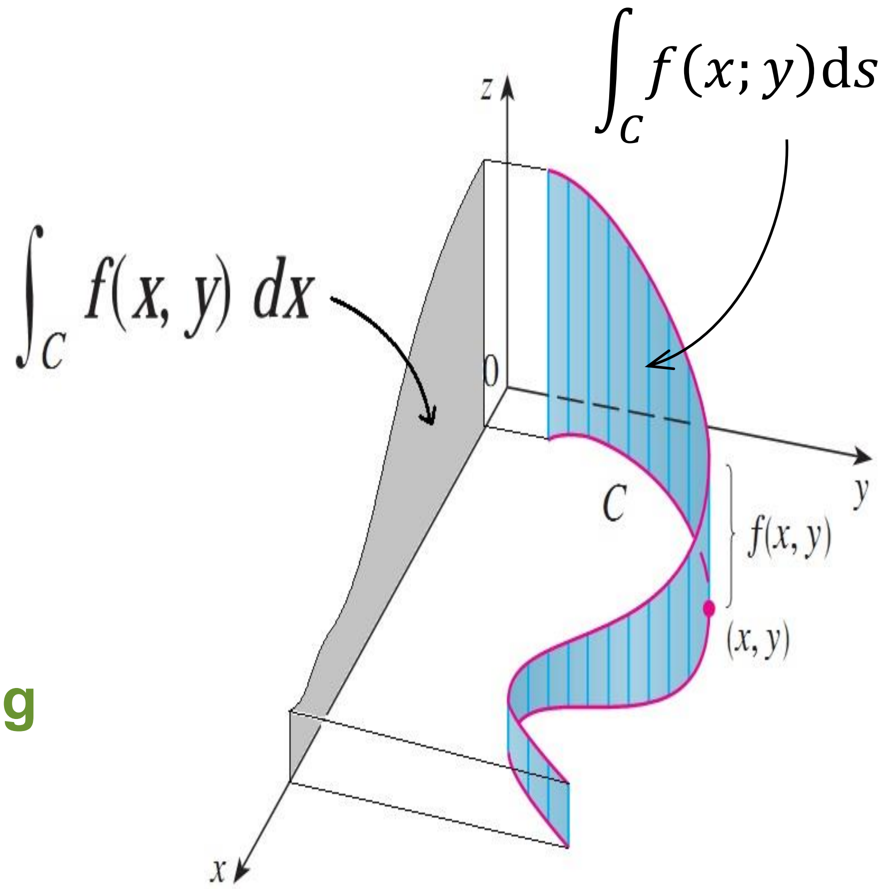
Tuần 7
Tích phân đường

Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin học, Đhkhtn tpHCM

Tích phân đường

Ký hiệu tích phân và hình bên mang ý nghĩa gì?

Diện tích bức tường cong, tích phân đường loại 1



Đường cong và lộ trình trên đường cong

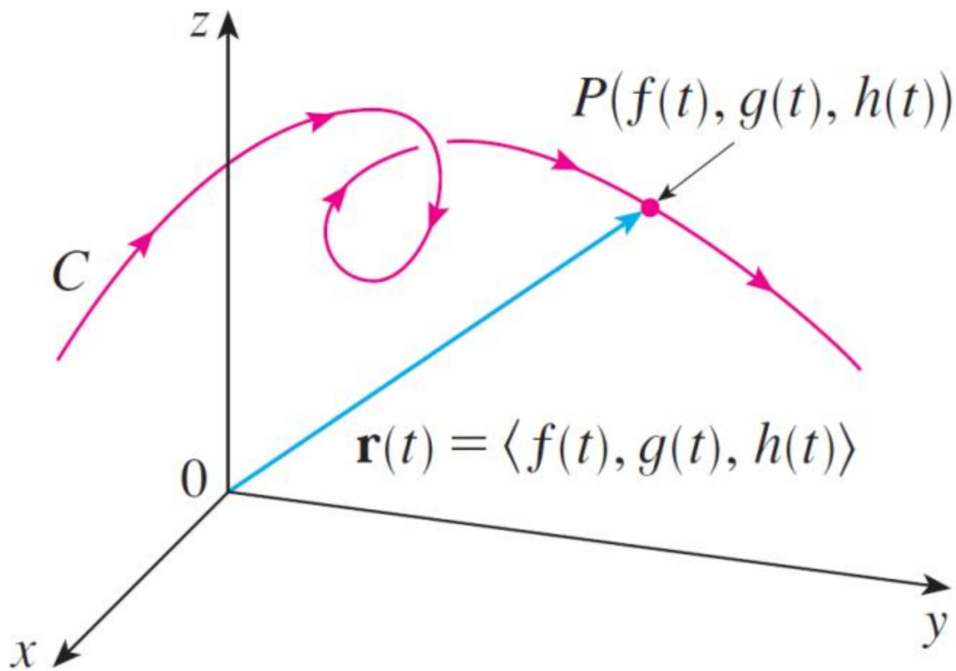
Đường cong và lộ trình trên đường cong.

- Trong chương vi phân, ta có đề cập một hàm vectơ một biến $\mathbf{r}: [a; b] \mapsto \mathbb{R}^n$, với $n = 2$ hay $n = 3$, mô phỏng sự chuyển động theo thời gian *t* của chất điểm P trong mặt phẳng hay không gian tọa độ. Do đó hàm vectơ **r** được gọi là một *đường đi* hay *lộ trình*.

- Hàm vectơ một biến **r** cho hai thông tin:

1) Tập hợp các vị trí mà chất điểm P đi qua mà ta gọi là *đường cong* (hay là quỹ đạo, *vết*) của lộ trình.

2) Cách thức mà P di chuyển trên đường cong này.



- ***Chú ý.*** Cùng một đường cong, có thể có nhiều lộ trình khác nhau trên đó.

Đường cong và lộ trình trên đường cong

Ví dụ. Xét hai lộ trình $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ định bởi

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos t\,; \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi,$$
$$\mathbf{r}_2(t) = (\cos t\,; -\sin t), 0 \leq t \leq 4\pi,$$

thì hai lộ trình này di chuyển trên cùng đường tròn tâm đặt tại gốc, bán kính 1 trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Nhưng lộ trình của $\mathbf{r}_1$ khởi đầu từ điểm $(1; 0)$ đi 1 vòng ngược chiều kim đồng hồ về trị trí cũ. Còn lộ trình $\mathbf{r}_2$ khởi đầu từ điểm $(1; 0)$ đi 2 vòng thuận chiều kim đồng hồ về vị trí cũ.

Ví dụ. Lộ trình $\mathbf{r}_1(t) = (t; 0)$ với $t \in [-1; 1]$ di chuyển theo đoạn thẳng từ điểm $A(-1; 0)$ đến điểm $B(1; 0)$ trong mặt phẳng tọa độ, khi t tăng, và không qua vị trí nào hơn một lần. Trong khi lộ trình $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t\,; 0)$ với $t \in [0; 2\pi]$ cũng di chuyển trên đoạn thẳng này, khởi đầu từ B đến A rồi quay lại B.

Phương trình tham số của lộ trình

- Hình thức

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle f(t); g(t); h(t)\rangle, \qquad a \le t \le b$$

để mô tả lộ trình được gọi là dạng phương trình vectơ.

- Một dạng mô tả khác là

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \\ z = h(t) \end{cases} \qquad a \le t \le b.$$

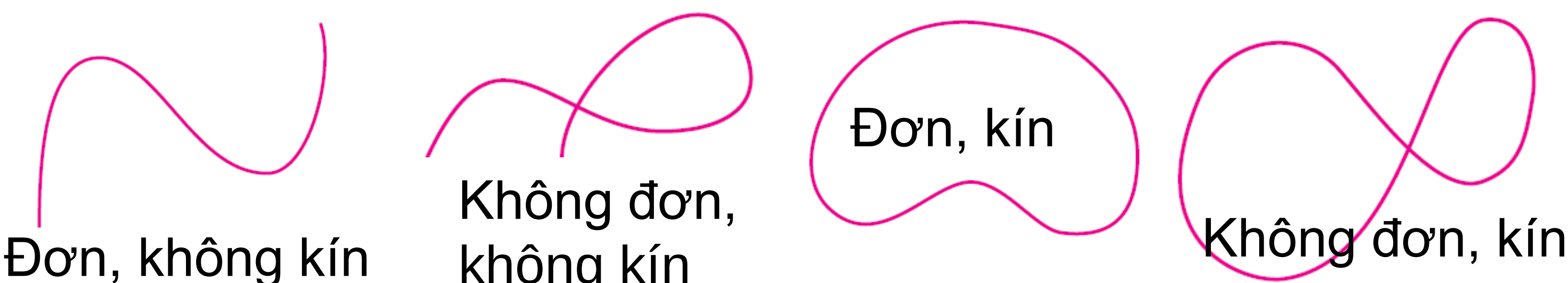
được gọi là dạng tham số hóa của đường cong.

Đường cong và lộ trình trên đường cong

- Lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *kín* hay *đóng* khi điểm đầu và cuối trùng nhau, tức là $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.
- Lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *lộ trình đơn* khi nó không đi qua vị trí nào nhiều hơn một lần (ngoại trừ điểm đầu và cuối có thể trùng nhau hoặc không trùng nhau), nghĩa là

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b),\ \text{nếu } t_1 \neq t_2 \text{ thì } \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2).$$

- Lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *liên tục* khi hàm vectơ $\mathbf{r}$ liên tục trên $[a; b]$.
- Lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *trơn* khi hàm vectơ $\mathbf{r}$ xác định và có đạo hàm $\mathbf{r}'$ liên tục trên khoảng mở chứa $[a; b]$.



Lộ trình trên đoạn thẳng.

Sau đây, ta thiết lập một lộ trình thẳng: cho trước hai điểm A và B trong không gian hay trong mặt phẳng tọa độ Descartes, thì một điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB sẽ thỏa

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right), 0 \leq t \leq 1$$

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, 0 \leq t \leq 1.$$

Với hai điểm A, B cho trước trong mặt phẳng hay không gian tọa độ Descarte, lộ trình

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

là lộ trình thẳng, trơn, đơn, bắt đầu từ A và kết thúc ở B.

Đường cong và lộ trình trên đường cong

Phép đổi biến trên lộ trình

- Một hàm số đơn điệu φ có đạo hàm φ' xác định và liên tục trên một khoảng mở chứa $[\alpha; \beta]$ được gọi là phép đổi biến. Nếu biến τ thay đổi trong $[\alpha; \beta]$ thì biến $t = \varphi(\tau)$ thay đổi trong $[\varphi(\alpha); \varphi(\beta)]$.
- Phép đổi biến φ được gọi là *bảo toàn định hướng* khi $\forall\tau \in [\alpha; \beta], \varphi'(\tau) > 0$, φ đồng biến; được gọi là *đảo ngược định hướng* khi $\forall\tau \in [\alpha; \beta], \varphi'(\tau) < 0$, φ nghịch biến.
- Hai lộ trình $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ trên cùng một đường cong được gọi là *sai khác một phép đổi biến* có nghĩa là tồn tại một phép đổi biến φ sao cho $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ \varphi$. Chúng là hai cách tham số hóa khác nhau, mô tả hai cách di chuyển trên cùng đường cong mà hai cách này hoặc là hoàn toàn giống nhau, hoặc ngược nhau.

Đường cong và lộ trình trên đường con

Ví dụ. Cho nhận xét về hai lộ trình $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$ và mô tả sự chuyển động trên đường cong lộ trình của chúng. Lộ trình có đơn không?

- $\mathbf{r}_1(t) = \langle t; 0\rangle, t \in [0; 2]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle 2t; 0\rangle, t \in [0; 1]$.
- $\mathbf{r}_1(t) = \langle t; 0\rangle, t \in [0; 2]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle 2(t+1); 0\rangle, t \in [-1; 0]$.
- $\mathbf{r}_1(t) = \langle t; 0\rangle, t \in [0; 2]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle 2\cos t\,; 0\rangle, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
- $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t\,; \sin t\rangle, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sin t\,; \cos t\rangle, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
- $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t\,; 0\rangle, t \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sin t\,; 0\rangle, t \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
- $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t\,; \sin t\rangle, t \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sin t\,; \cos t\rangle, t \in [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

Độ dài của lộ trình

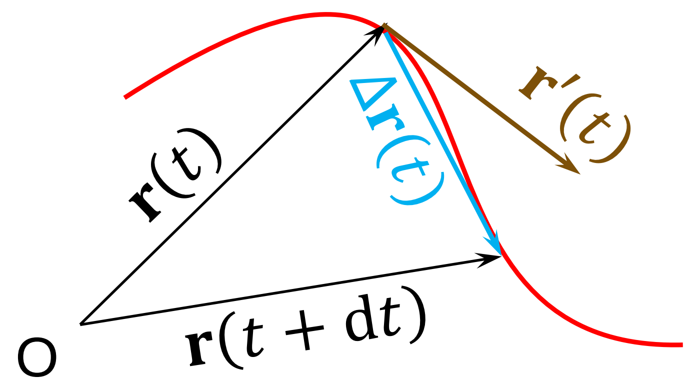
- Với lộ trình trơn, đạo hàm vectơ $\mathbf{r}'(t)$ mô phỏng vận tốc của chất điểm trên lộ trình, và $|\mathbf{r}'(t)|$ là tốc độ tức thời của chất điểm. Do đó, trong khoảng thời gian rất ngắn $[t; t + \mathrm{d}t]$ thì quãng đường chất điểm di chuyển xấp xỉ bằng $|\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$. Từ đó, người ta đưa ra định nghĩa độ dài của lộ trình như sau

Định nghĩa (độ dài của lộ trình)

Độ dài của một lộ trình trơn $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{r} = (x; y), (x; y; z)$, là

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \ \left(\text{hoặc thêm } \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right).$$

- Về phương diện hình học, trong đoạn $[t; t + \mathrm{d}t]$, biến thiên của vectơ lộ trình là $\Delta\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$ (phép xấp xỉ vi phân), suy ra $|\Delta\mathbf{r}(t)| \approx |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$. Lập tổng Riemann sẽ đi đến tích phân trên.



Tích phân đường

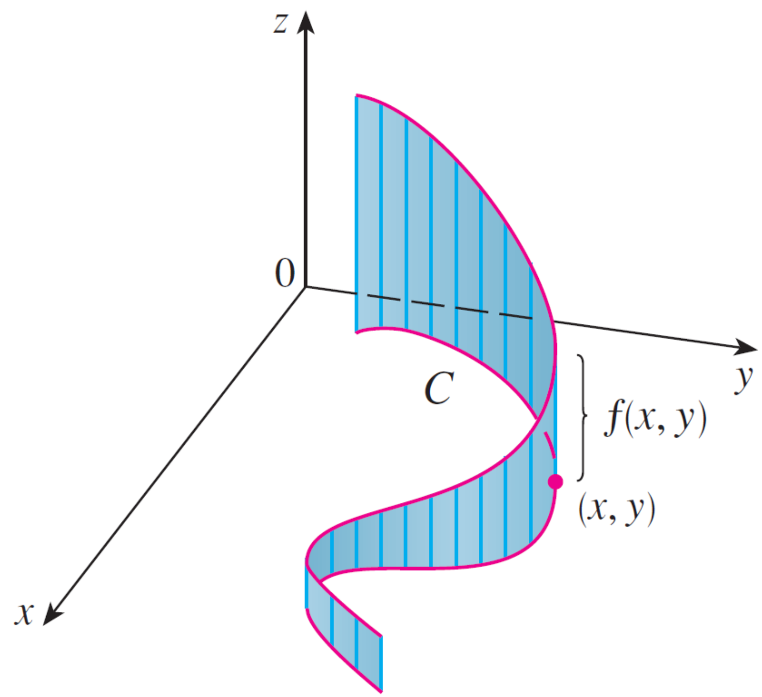
Tích phân đường

Định nghĩa tích phân đường loại 1 (của hàm số)

Một hàm số f (nhiều biến) liên tục, xác định trên đường cong (vết) của một lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ trơn từng khúc trên $[a; b]$. Tích phân đường (loại 1) của hàm số này trên lộ trình $\mathbf{r}$ là

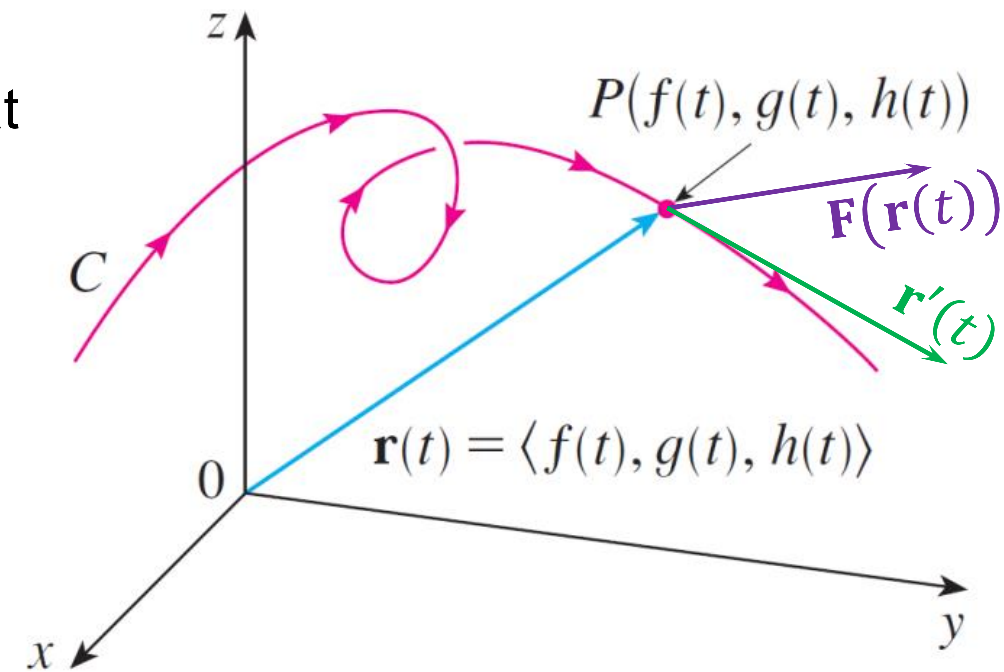
$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t := \int_{\mathbf{r}} f\,\mathrm{d}s \ \ \text{(ký hiệu).}$$

- Một số sách dùng ký hiệu $\mathrm{d}l$ trong tích phân trên thay cho $\mathrm{d}s$, hàm ý "l là length", đại lượng độ dài.
- ***Ý nghĩa.*** Nếu hàm số f hai biến dương, xác định trên đường cong C của lộ trình đơn $\mathbf{r}$ trong mp Oxy như hình bên thì tích phân trên là diện tích "bức tường cong".



Tích phân đường

- Xét một chất điểm P di chuyển theo lộ trình $\mathbf{r}: [a; b] \to \mathbb{R}^n$, chịu tác động bởi một lực, là đại lượng vectơ được mô phỏng bởi $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \in \mathbb{R}^n$, nghĩa là tại mỗi vị trí của P luôn xác định một lực $\mathbf{F}$, nói cách khác $\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm vectơ n chiều, có n biến, mà ta gọi là *trường vectơ* trên D, đường cong của lộ trình nằm trong miền D.
- Trong khoảng thời gian rất ngắn $[t; t + \mathrm{d}t]$, công của lực $\mathbf{F}$ thực hiện là $\mathrm{d}W \approx \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$, ở đây lượng $\mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t$ xấp xỉ bằng độ dời (chuyển dịch) của chất điểm trong khoảng thời gian ngắn này.



- Lập tổng Riemann và tích phân ta sẽ được tích phân đường loại 2

Tích phân đường

Định nghĩa tích phân đường loại 2 (của trường vectơ)

Với trường vectơ liên tục $\mathbf{F}$, xác định trên tập mở (trong $\mathbb{R}^n$) chứa đường cong của một lộ trình $\mathbf{r}\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ trơn từng khúc trên $[a;b]$, tích phân đường (loại 2) của trường $\mathbf{F}$ trên lộ trình $\mathbf{r}$ là

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t := \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \ \ (\text{ký hiệu}).$$

Định lý (phép đổi biến trong tích phân đường)

- Tích phân đường loại 1 của hàm số không thay đổi qua phép đổi biến trên lộ trình lấy tích phân.
- Tích phân đường loại 2 của trường vectơ không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng trên lộ trình lấy tích phân, và đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Ghi chú. Công của trường lực sẽ đổi dấu khi xét lộ trình theo hướng ngược lại

Tích phân đường

- Một lộ trình $\mathbf{r}$ được gọi là *chính quy* có nghĩa nó là lộ trình trơn và vectơ đạo hàm $\mathbf{r}'$ luôn khác vectơ không.
- Người ta chứng minh được rằng hai lộ trình đơn, chính quy trên cùng một đường cong chỉ sai khác một phép đổi biến, từ đó người ta đưa ra định nghĩa sau

Định nghĩa tích phân đường trên đường cong

- Tích phân đường của hàm số f trên một đường cong C được ký hiệu bởi $\int_C f\,\mathrm{d}s$ và được định nghĩa là $\int_{\mathbf{r}} f\,\mathrm{d}s$, với $\mathbf{r}$ là một lộ trình đơn, chính quy bất kỳ trên C.
- Với đường cong C có một hướng cho trước trên đó thì tích phân đường của trường vectơ $\mathbf{F}$ trên C được ký hiệu bởi $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, và được định nghĩa là $\int \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ với $\mathbf{r}$ là một lộ trình đơn, chính quy bất kỳ theo đúng hướng đã cho trên C.

Tích phân đường

- Với một đường cong C kèm một hướng cho trước, người ta ký hiệu $-C$ là đường cong đó nhưng định hướng ngược lại. Với quy ước này thì

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,.$$

- Với C là hợp của nhiều đường cong $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nối tiếp nhau thì ta thường viết $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_m$, đồng thời

$$\int_{C} \quad = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_m} \quad .$$

- Với trường 2 chiều $\mathbf{F} = (P; Q)$, trong đó $P = P(x; y)$ và $Q = Q(x; y)$ là hai hàm số 2 biến, và lộ trình $\mathbf{r}\colon [a; b] \to \mathbb{R}^2$ có dạng $\mathbf{r} = \big(x(t); y(t)\big)$, $a \leq t \leq b$, thì $\mathbf{r}'(t) = \big(x'(t); y'(t)\big)$ và $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t = P \cdot x'(t)\mathrm{d}t + Q \cdot y'(t)\mathrm{d}t.$ Do đó tích phân đường loại 2 còn có một dạng ký hiệu khác như sau

Tích phân đường

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\,.$$

- Tương tự, với trường vectơ 3 chiều $\mathbf{F} = (P; Q; R)$, trong đó $P; Q; R$ là ba hàm số 3 biến, thì tích phân đường của trường $\mathbf{F}$ trên đường cong C cũng được ký hiệu bởi

$$\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Tích phân đường

Các bước để tìm tích phân đường trên đường cong C.

- Xác định loại tích phân đường đang tìm.
- Chọn một lộ trình $\mathbf{r}$ đơn, chính quy trên đường cong C. Nếu tích phân đường đang tìm là loại 2 thì kiểm tra thêm:

  * Nếu lộ trình $\mathbf{r}$ chọn đúng hướng cho sẵn trên C thì viết phương trình tham số biểu diễn đường cong là $C: (x; y) = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$.

  * Nếu lộ trình chọn là ngược hướng cho sẵn trên C thì viết phương trình tham số biểu diễn đường cong là $-C: (x; y) = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$.

- Thay tham số hóa biểu diễn đường cong vào công thức định nghĩa tích phân đường để tính. Nếu tích phân đường là loại 2 và $\mathbf{r}$ ngược với chiều đã cho trên C thì $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_a^b P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ v.v..

Bài tập

- Làm bài tập mục 3.1 của [1]
- Làm bài tập thêm mục 16.2 của [2], đơn cử 3 bài sau

45. A 160-lb man carries a 25-lb can of paint up a helical staircase that encircles a silo with a radius of 20 ft. If the silo is 90 ft high and the man makes exactly three complete revolutions climbing to the top, how much work is done by the man against gravity?

46. Suppose there is a hole in the can of paint in Exercise 45 and 9 lb of paint leaks steadily out of the can during the man's ascent. How much work is done?

48. The base of a circular fence with radius 10 m is given by $x = 10 \cos t$, $y = 10 \sin t$. The height of the fence at position (x, y) is given by the function $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, so the height varies from 3 m to 5 m. Suppose that 1 L of paint covers 100 m^2. Sketch the fence and determine how much paint you will need if you paint both sides of the fence.