1 Bài toán 1

Bài toán 1. Cho G là đồ thị đơn vô hướng có n đỉnh với $n \geq 2$ đỉnh và chỉ có đúng hai đỉnh cùng bậc nhau. Chứng minh hai đỉnh đó không thể bậc 0 hoặc $n-1$.

Chứng minh. Giả sử G có hai đỉnh cùng bậc duy nhất là u và v.
Giả sử phản chứng $\deg(u) = \deg(v) = n-1$. Khi đó $ua, va \in E(G)$ với mọi $a \in V(G)$. Xét đồ thị G' thu được từ việc loại bỏ u và v ra khỏi G. Ta kí hiệu $\deg(a)$ là bậc của a trong G và $\deg'(a)$ là bậc của a trong G'. Khi đó với mọi $a \neq u, v$ thì $\deg'(a) = \deg(a) - 1$.
Vì $\deg(a) \neq \deg(b)$ với mọi $a, b \neq u, v$ (theo giả thiết) nên $\deg'(a) \neq \deg'(b)$ với mọi $a \neq b \in V(G')$. Điều này là **vô lý** vì *trong một đồ thị bao giờ cũng tồn tại hai đỉnh cùng bậc*. Suy ra $\deg(u) = \deg(v) \neq n-1$.
Gỉa sử phản chứng $\deg(u) = \deg(v) = 0$. Khi đó u, v là hai đỉnh cô lập. Sử dụng các kí hiệu $G', \deg, \deg'$ như trên ta có với mọi $a, b \neq u, v$ thì $\deg(a) = \deg'(a)$ và do đó $\deg'(a) \neq \deg'(b)$ với mọi $a \neq b \in V(G')$. Điều này là **vô lý** vì *trong một đồ thị bao giờ cũng tồn tại hai đỉnh cùng bậc*. Suy ra $\deg(u) = \deg(v) \neq 0$. □

Bài toán 2. Câu lạc bộ X có sẵn $2n$ người và sau đó A tham gia vào câu lạc bộ đó (lúc này câu lạc bộ X có $2n+1$ người). Biết hai người bất kì có thể cùng quen nhau hoặc cùng không quen nhau và A nhận thấy rằng "Ngoài A ra, tất cả những người còn lại có số người quen (kể cả A) là đôi một khác nhau. Hỏi A có bao nhiêu người quen.

Chứng minh. Xét đồ thị G có $2n+1$ đỉnh ứng với $2n+1$ thành viên của câu lạc bộ và a là đỉnh ứng với a. Hai đỉnh bất kì liền kề nhau khi hai người tương ứng quen nhau. Khi đó G có đúng hai đỉnh cùng bậc là a và một đỉnh nào đó. Ta chứng minh $\deg(a) = n$.
Thật vậy, đặt $S := \{\deg(u) : u \in V(G), u \neq a\}$ ta có $S = \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$ hoặc $S = \{1, 2, \cdots, 2n\}$. Gọi u_1, v_1 là hai đỉnh khác a có bậc lớn nhất và nhỏ nhất trong G. Ta ký hiệu $\deg_K(u)$ là bậc của đỉnh u đối với đồ thị K (*vì phần lời giải này sẽ xuất hiện nhiều đồ thị khác G*). Ta gọi G_1 là đồ thị thu được từ việc loại ra khỏi G đúng hai đỉnh u_1, v_1 (và các cạnh đi ra từ chúng). Ta chứng minh $\deg_G(a) = \deg_{G_1}(a) + 1$.
Ta xét hai trường hợp của S.

i) Khi $S = \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$ thì $\deg_G(u_1) = 2n-1$ và $\deg_G(v_1) = 0$. Suy ra $u_1 a \in E(G)$ và $v_1 a \notin E(G)$ vì v_1 lúc này là điểm cô lập. Suy ra cạnh $u_1 a$ bị mất đi trong G_1. Suy ra $\deg_{G_1}(a) + 1 = \deg_G(a)$.

ii) Khi $S = \{1, 2 \cdots, 2n\}$ thì $\deg_G(u_1) = 2n$ và $\deg_G(v_1) = 1$. Từ đó chỉ có duy nhất 1 cạnh nối từ v_1 là $u_1 v_1$. Suy ra $u_1 a \in E(G)$ và $v_1 a \notin E(G)$ vì v_1 lúc này là điểm cô lập. Suy ra cạnh $u_1 a$ bị mất đi trong G_1. Suy ra $\deg_{G_1}(a) + 1 = \deg_G(a)$.

Tóm tại ta có $\deg_G(a) = \deg_{G_1}(a) + 1$.
Tiếp tục lập luận tương tự cho G_1, ta thu được G_2 thỏa $\deg_{G_1}(a) = \deg_{G_2}(a) + 1$. Lập luận cho G_2,...
Sau $2n$ lần thì ta thu được đồ thị G_n chỉ có đỉnh a và đo đó $\deg_{G_n}(a) = 0$. Suy ra

$$\deg_G(a) = \deg_{G_1} + 1 = \deg_{G_2}(a) + 2 = \cdots = \deg_{G_n} + n = n.$$

□

2 Bài toán miễn thi đợt hai tuần 10

Cho hai tập hợp A và B có hữu hạn phần tử. Xét một ánh xạ $f : A \to B$. Ta có các định nghĩa sau:

1. Ánh xạ f được gọi là *đơn ánh* nếu với mọi $a_1, a_2 \in A$ thì $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.
2. Ánh xạ f gọi là *toàn ánh* nếu với mọi $b \in B$ thì có $a \in A$ sao cho $b = f(a)$.
3. Ánh xạ f gọi là song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ta kí hiệu $|A|$ và $|B|$ lần lượt là số lượng phần tử của A và B. Khi đó

- Nếu f là đơn ánh thì $|A| \leq |B|$.
- Nếu f là toàn ánh thì $|A| \geq |B$.
- Nếu f là song ánh thì $|A| = |B|$.

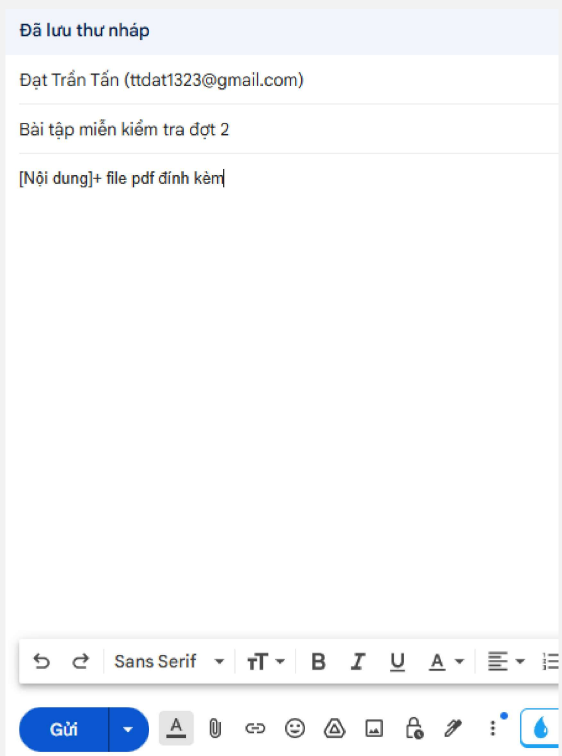
Giải các bài toán sau.

Bài toán 1. Cho A, B là hai tập hợp có cùng số phần tử và $f : A \to B$ là ánh xạ. Chứng minh rằng f là song ánh $\Longleftrightarrow f$ toàn ánh $\Longleftrightarrow f$ đơn ánh.

Bài toán 2. Cho $n \geq 3$ và bảng $2 \times n$. Ta tiến hành điền các số $1, 2, 3, \cdots, 2n$ vào các ô của bảng sao cho mỗi số xuất hiện đúng một lần và tất cả các ô đều có số. Có bao nhiêu cách điền sao cho trên cùng một hàng, khi xét từ trái qua phải ta thu được các dãy tăng và trong cùng một cột, số ở hàng một luôn lớn hơn số ở hàng hai.

Yêu cầu:

- Đánh word hoặc latex và gửi **file pdf** vào địa chỉ mail ttdat1323@gmail.com với nội dung như sau



- Hạn chót: Chủ nhật trước tuần học cuối cùng.