Họ và tên: Nguyễn Thái Bảo
MSSV: 23120023

Đề thi mẫu Toán rời rạc (đợt 2)

Câu 1.

Theo đề bài, ta có: $x_0 = 3, x_1 = -8$ (*) và $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} + 3^n(5n+9)$ $(n \geq 1)$. (**)
Đây là một hệ thức đệ qui tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với $\lambda = 5, \mu = -6, \alpha = 3$ và $\varphi_1(n) = 5n + 9$ có $\deg(\varphi_1) = 1$.

Xét hệ thức đệ qui thuần nhất tương ứng $\cancel{f(x) = x^2 - 5x + 6}$ $x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0, \forall n \geq 1$. (I) và đa thức tương ứng $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ có $\alpha = 3$ là 1 nghiệm.

(I) có nghiệm tổng quát: $x'_n = p.2^n + q.3^n, \forall n \geq 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$

(**) có một nghiệm cụ thể có dạng: $x''_n = 3^n.n.\psi_1(n) = 3^n.n(sn+t)$ $(s, t \in \mathbb{R}, s \neq 0)$ $\forall n \geq 0$

Thay $x''_n = 3^n.(sn^2 + tn)$ vào (**), ta có:

$$3^{n+1}.[s(n+1)^2 + t(n+1)] = 5.3^n.(sn^2 + tn) - 6.3^{n-1}[s(n-1)^2 + t(n-1)] + 3^n(5n+9), \forall n \geq 1$$

$$9[s(n+1)^2 + t(n+1)] = 15(sn^2 + tn) - 6[s(n-1)^2 + t(n-1)] + 15n + 27, \forall n \geq 1. \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

Thay $n = 0$ và $n = 1$, ta có: $\begin{cases} 9(s+t) = -6(s-t) + 27 \\ 9(4s+2t) = 15(s+t) + 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{7}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x''_n = 3^n.(\frac{5}{2}n^2 - \frac{7}{2}n), \forall n \geq 0$

Do đó (**) có nghiệm tổng quát là: $x_n = x'_n + x''_n$
$= p.2^n + q.3^n(q + \frac{5}{2}n^2 - \frac{7}{2}n), \forall n \geq 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$

Từ (*) ta có: $\begin{cases} 3 = p + q \\ -8 = 2p + 3(q-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 14 \\ q = -11 \end{cases}$

Vậy $x_n = 14.2^n + 3^n.(\frac{5}{2}n^2 - \frac{7}{2}n - 11), \forall n \geq 0$ là nghiệm của hệ thức trong bài trên.

Câu 2.

a) Ta có: $m = 2.3^3.7^2.67$
$n = 3^2.11.13.67$

Do đó: $d = (m, n) = 3^2.67 = 603$
$e = [m, n] = 2.3^3.7^2.11.13.67 = 8450442$

Đặt $m' = \frac{m}{d}$, $n' = \frac{n}{d}$, ta có: $m' = 294$, $n' = 143 \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{294}{143}$

Vậy $\frac{m}{n}$ có 2 dạng tối giản là $\frac{294}{143}$ ✓ và $\frac{-294}{-143}$ vì $(294, 143) = 1 = (-294, -143)$

Tất cả các ước nguyên của m có dạng: $\pm 2^a.3^b.7^c.67^d$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $a \leq 1, b \leq 3, c \leq 2, d \leq 1$.

Số ước nguyên dương của m là: $(1+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 2.4.3.2 = 48$ (ước)

b) Chia Euclid liên tiếp:

$a = 984940$, $b = 42350$

$a = 23b + 10890$ (1)

$b = 3.10890 + 9680$ (2)

$10890 = 1.9680 + 1210$ (3)

$9680 = 8.1210 + 0$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4), ta có $\overset{p}{d} = (a,b) = (b, 10890) = (10890, 9680) = (9680, 1210) = 1210$

Từ (3),(2),(1), ta biểu diễn liên tiếp các số dư:

$pd = 1210 = 10890 - 1.9680$

$= 10890 - (b - 3.10890) = 4.10890 - b$

$= 4.(a - 23b) - b = 4a - 93b$

Vậy $p = 1210 = ra + sb$ với $r = 4$ và $s = -93$.

Ta có: $pq = |ab| \Rightarrow q = \frac{|ab|}{p} = \frac{984940}{1210} . 42350 = 34472900$ với $q = [a,b]$

Do $ab > 0$ và $p = ra + sb$ với $r = 4, s = -93$ nên:

$\frac{1}{q} = \frac{p}{|ab|} = \frac{4a - 93b}{ab} = -\frac{93}{a} + \frac{4}{b}$. Vậy $\frac{1}{q} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$ với $u = -93$, $v = 4$

Vậy $p = 1210$, $q = 34472900$, $r = v = 4$, $s = u = -93$.

Câu 3.

a) Ta có: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow 7(x + 2023) + 4(y - 2023) \equiv 8 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 7x + 4y + 3.2023 \equiv 8 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 7x + 4y + 3.2024 \equiv 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 7x + 4y \equiv 0 \pmod{11}$

- $\mathcal{R}$ phản xạ vì $\forall x \in \mathbb{Z}$, $7x + 4x \equiv 11x \equiv 0 \pmod{11}$ nên $x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ đối xứng vì $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y \Rightarrow 7x + 4y \equiv 0 \pmod{11}$

$\Rightarrow 11(x + y) - (7x + 4y) \equiv 0 \pmod{11}$

$\Rightarrow 4x + 7y \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow y \mathcal{R} x$

- $\mathcal{R}$ truyền vì $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 4y \equiv 0 \pmod{11} \\ 7y + 4z \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \Rightarrow 7x + 4z + 11y \equiv 0 \pmod{11}$

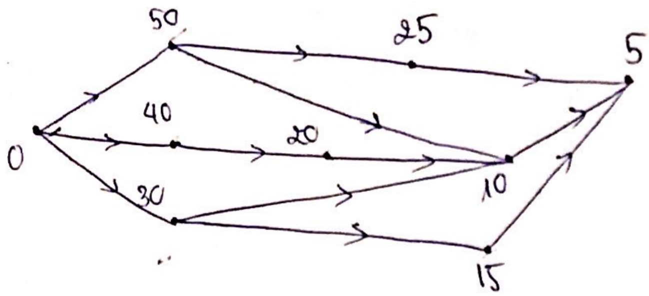
$\Rightarrow 7x + 4z \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Vậy $\mathcal{R}$ là 1 quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

23120023 - Nguyễn Thái Bảo

b) : là thứ tự bán phần vì $\exists\ 10, 25 \in S$ có $10 \nmid 25$ và $25 \nmid 10$

Sơ đồ Hasse cho $(S, \mathcal{R})$:



Phần tử min: 0

Phần tử max: 5

Phần tử tối tiểu: 0

Phần tử tối đại: 5

c)

Trên $\mathbb{Z}_{100}$: $\overline{15}\bar{x} + \overline{275} = \overline{60} \Leftrightarrow \overline{15}\bar{x} = \overline{60} - \overline{275} = \overline{-215} = \overline{85}$ (1)

Ta có: $\overline{15} \notin U(\mathbb{Z}_{100})$ vì $d(15, 100) = 5$ và $85 \vdots 5$.

Do $15 = 3.5$, $85 = 17.5$, $100 = 20.5$ nên (1) tương ứng với phương trình:

$\overline{3}.\bar{X} = \overline{17}$ (trong $\mathbb{Z}_{20}$) (2)

Ta có $\overline{3} \in U(\mathbb{Z}_{20})$ vì $(3, 20) = 1$ và $\overline{3}^{-1} = \overline{7}$ từ đẳng thức $7.3 - 1.20 = 1$

Phương trình (2) cho nghiệm duy nhất trong $\mathbb{Z}_{20}$ là $\bar{X} = \overline{3}^{-1}.\overline{17} = \overline{7}.\overline{17} = \overline{119} = \overline{19}$ (trong $\mathbb{Z}_{20}$)

Vậy (1) có đúng 5 nghiệm trong $\mathbb{Z}_{100}$ là: $\bar{x} = \overline{19 + 20j}$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, nghĩa là $\bar{x} = \overline{19}$, $\overline{39}$, $\overline{59}$, $\overline{79}$ hoặc $\overline{99}$.

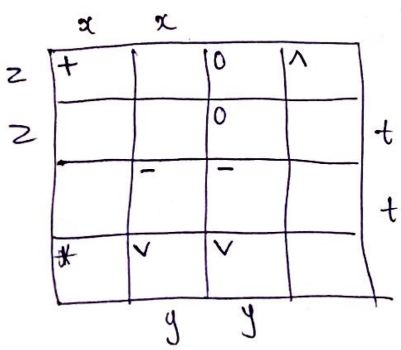
Trên $\mathbb{Z}_{24}$: $\overline{14}\bar{x} - \overline{16} = \overline{7} \Leftrightarrow \overline{14}\bar{x} = \overline{23}$ (1)

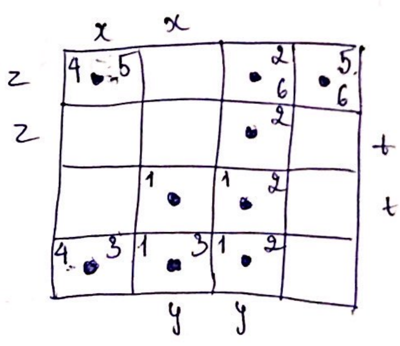
Ta có: $\overline{14} \notin U(\mathbb{Z}_{24})$ vì $d(14, 24) = 2$, $23 \not\vdots 2$ và $24 = 2.12$

(1) $\Rightarrow \overline{12}.\overline{14}\bar{x} = \overline{12}.\overline{23} \Rightarrow \overline{0}\bar{x} = \overline{12} \neq \overline{0}$: phương trình vô nghiệm.

Câu 4.

a) $S = Kar(f) = \underset{(+)}{K(x\bar{y}z\bar{t})} \cup \underset{(-)}{K(y\bar{z}t)} \cup \underset{(\wedge)}{K(\bar{x}\bar{y}z\bar{t})} \cup \underset{(\vee)}{K(y\bar{z}\bar{t})} \cup \underset{(\circ)}{K(\bar{x}yz)} \cup \underset{(\times)}{K(x\bar{y}\bar{z}\bar{t})}$





$S = Kar(f)$

S có 6 tế bào lớn: $T_1 = y\bar{z}$; $T_4 = x\bar{y}\bar{t}$;

$T_2 = \bar{x}y$; $T_5 = \bar{y}z\bar{t}$

$T_3 = x\bar{z}\bar{t}$; $T_6 = \bar{x}z\bar{t}$

23120023 - Nguyễn Thái Bảo

b) Thực hiện thuật toán, ta có sơ đồ phủ của S :

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_5 \arrow[r] \arrow[d] & T_3 \\ T_5 & T_4 \arrow[l] \arrow[d] & T_4 & \\ & T_6 & & \end{tikzcd}$$

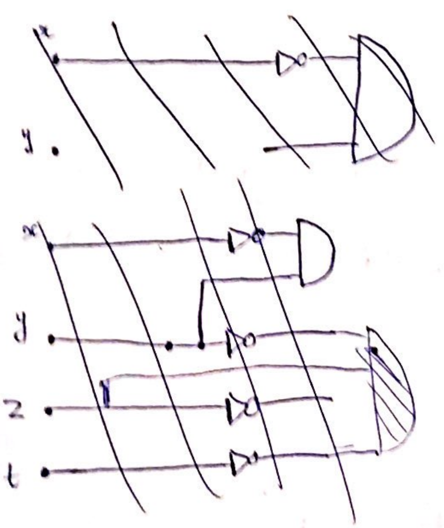
Vậy ta có 4 phép phủ cho S là: $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_3$ (1) , $S = T_1 \cup T_2 \cup T_5 \cup T_4$ (2),
$S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_5$ (3) , $S = T_1 \cup T_2 \cup T_4 \cup T_6$ (4)

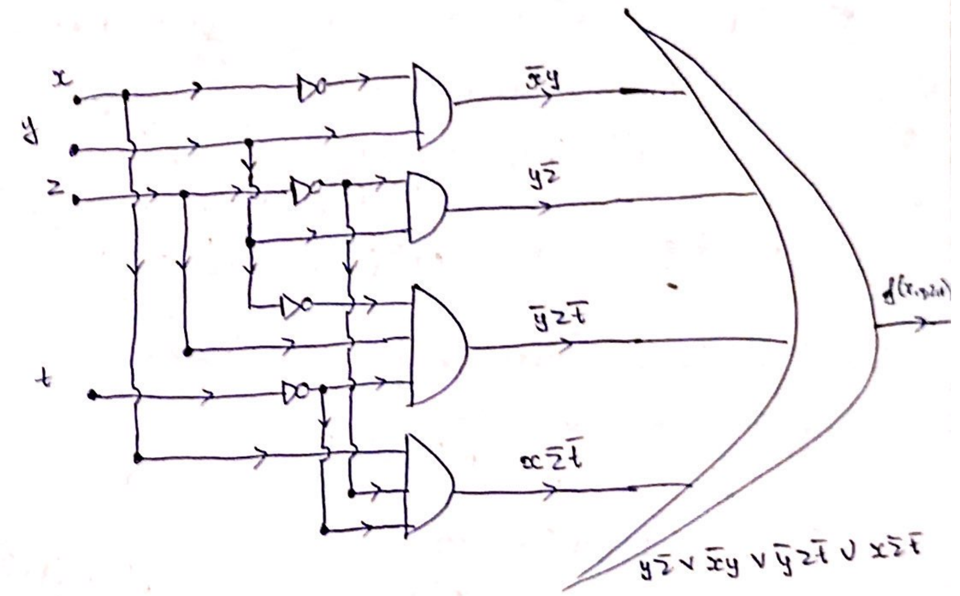
Phép phủ (2) và (3) trùng nhau nên ta có 3 phép phủ tối tiểu là (1), (2), (4). Từ đây, ta có:

$$f(x,y,z,t) = y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{z}\bar{t}$$
$$f(x,y,z,t) = y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{t}$$
$$f(x,y,z,t) = y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}z\bar{t}$$

3 công thức trên đơn giản như nhau nên đều là công thức đa thức tối tiểu của f.

Chọn công thức 1 để vẽ mạng logic:





23120023 - Nguyễn Thái Bảo