Hệ phương trình tuyến tính

Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 23 tháng 2 năm 2023

1. Hệ phương trình tuyến tính

Outlines

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Một hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

Trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là các hệ số, b_i là các hệ số tự do,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$

Nếu các hệ số tự do $= 0$ thì ta nói hệ phương trình (*) là thuần nhất.

Ta đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ta gọi A là ma trận các hệ số, X gọi là cột các ẩn, B là cột các hệ số tự do của hệ. Khi đó hệ (*) được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\bar{A} \equiv [A|\, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Trong đó $\bar{A}$ được gọi là ma trận bổ sung.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- Hoán đổi hai phương trình cho nhau,
- Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0,
- Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp:

- Vô nghiệm,
- Nghiệm duy nhất,
- Vô số nghiệm.

Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

Với một hệ phương trình tuyến tính, ta giải hệ theo các yêu cầu sau

YC 1. Viết (*) dưới dạng phương trình ma trận $AX = B$ và viết ma trận bổ sung $\bar{A}$,

YC 2. Biến đổi $\bar{A}$ về dạng bậc thang theo dòng,

YC 3. Từ ma trận bậc thang theo dòng nhận được, xem xét các dòng của A gồm toàn số 0 để xem hệ có thể có nghiệm không. Nếu hệ có nghiệm, viết lại hệ phương trình tuyến tính tương đương với (*) và giải bằng phép thế ngược (back-substitution).

Giải thuật cho Yêu cầu 2

- B1. Xác định cột đầu tiên không chứa toàn số 0.
- B2. Đổi chỗ hai dòng, nếu cần thiết, để đưa số hạng khác 0 nào đó ở dưới về đầu cột nhận được ở bước 1.
- B3. Với số hạng đầu cột nhận được từ bước 2 là $a \neq 0$, nhân dòng 1 với $\frac{1}{a}$ để nhận được một số dẫn đầu (leading 1).
- B4. Cộng một bội số thích hợp của dòng 1 với từng dòng dưới để biến các số hạng này về số 0.
- B5. Loại bỏ các dòng đã làm xong. Trở lại bước 1 cho ma trận con này.

Giải thuật cho Yêu cầu 3

B1. Biện luận trên các dòng gồm toàn số 0 của ma trận các hệ số. Nếu có một dòng gồm toàn số 0 của A mà hệ số vế phải (tự do) tương ứng là một số khác 0 thì kết luận hệ vô nghiệm và giải thuật chấm dứt. Ngược lại, bỏ tất cả các dòng gồm toàn số 0 (của ma trận các hệ số cũng như của vectơ các hệ số vế phải (tự do) và chuyển qua bước 2.

B2. Phép thế ngược (back substitution). Xác định các ẩn cơ sở là các ẩn tương ứng với các số dẫn đầu. Các ẩn còn lại được gọi là ẩn tự do (free variable) . Xét hai khả năng :

- Không có ẩn tự do. Hệ có nghiệm duy nhất nhận được bằng cách giải từ dưới lên trên (backward).
- Có ít nhất một ẩn tự do. Hệ có vô số nghiệm và nghiệm tổng quát nhận được bằng cách giải từ dưới lên tìm biểu thức của các ẩn dẫn đầu theo các tham số của ẩn tự do (tùy ý).

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & -2x_3 & & & + & 7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 10x_3 & + & 6x_4 & + & 12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 5x_5 & = & -1 \end{array}$$

Ma trận hóa hệ phương trình $AX = B$ với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ma trận bổ sung

$$\bar{A} \equiv [A|\ b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Biến đổi $\bar{x}$ về dạng bậc thang theo dòng

Cột đầu tiên không chứa toàn số không là cột 1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \downarrow & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Đổi chỗ dòng 1 với dòng 2 để đưa số hạng khác 0 lên đầu cột

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân dòng đầu với $\frac{1}{2}$ để nhận được số dẫn đầu (leading 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân dòng 1 với rồi cộng với dòng 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Loại bỏ các dòng đã làm xong (dòng 1),

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \overset{xong}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

và trở về bước 1, thực hiện lần lượt các bước như với dòng 1 và ta nhận được

$$\overline{A'} \equiv [A' | \, b'] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Trong đó các số dẫn đầu nằm ở cột 1, cột 3, cột 5 và hệ phương trình tương đương nhận được là

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 14 \\ & & & & x_3 & & & - & \frac{7}{2}x_5 & = & -6 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array}$$

Với ma trận bậc thang theo dòng vừa nhận được, ta thấy dấu hiệu là hệ sẽ có nghiệm.
Biện luận trên các dòng gồm toàn số 0 của ma trận các hệ số. Không cần xét vì không có dòng nào của A' gồm toàn số 0. Hệ sẽ có nghiệm.
Phép thế ngược (back substitution). Hệ cho các ẩn cơ sở là x_1, x_3, x_5.
Các ẩn còn lại x_2, x_4 trở thành các ẩn tự do và ta giải nghiệm.
Chuyển các ẩn tự do qua vế phải,

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & - & 5x_3 & + & 6x_5 & = & -2x_2 - 3x_4 & (1) \\ & & x_3 & - & \frac{7}{2}x_5 & = & -6 & (2) \\ & & & & x_5 & = & 2 & (3) \end{array}$$

và coi chúng như là hằng số, mà người ta thường gọi là tham số (parameter), bằng cách gán $x_2 = \alpha, x_4 = \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta được

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 5x_3 & + & 6x_5 & = & -2\alpha - 3\beta & (1) \\ & & x_3 & - & \frac{7}{2}x_5 & = & -6 & (2) \\ & & & & x_5 & = & 2 & (3) \end{array}$$

Giải từ dưới lên, ta có

(3) $x_5 = 2$,

(2) $x_3 - \frac{7}{5}(2) = -6$ nên $x_3 = -6 + \frac{14}{5} = -\frac{16}{5}$,

(1) $x_1 - 5\left(-\frac{16}{5}\right) + 6(2) = -2\alpha - 3\beta$ và $x_1 = -28 - 2\alpha - 3\beta$

Ta nhận được nghiệm tổng quát

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -28 - 2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ -\frac{16}{5} \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -\frac{16}{5} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\beta \\ 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -28 \\ 0 \\ -\frac{16}{5} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ với } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Giải hệ phương trình

Ví dụ 1

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 18 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình

Ví dụ 2

Giải hệ phương trình sau

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\
3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3 \\
-2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5 \\
3x_1 + 3x_3 - 10x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

Giải hệ phương trình

Ví dụ 3

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$