KIỂM TRA CUỐI KỲ

Câu 1:

a.

Hàm sinh đã cho ban đầu:

$$F(x) = \frac{e^{4x} - x\,e^{3x} - 4x^2e^{6x}}{3}$$

Phân tích từng thành phần:

$$\frac{1}{3}\ e^{4x} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4x)^k}{k!} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}x^k$$

$$-\frac{1}{3}\ xe^{3x} = -\frac{1}{3}\ x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!} = -\frac{1}{3}\ x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}x^k = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{(k-1)!}x^k$$

$$-\frac{1}{3}\ 4x^2e^{6x} = -\frac{1}{3}\ 4x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6x)^k}{k!} = -\frac{4}{3}\ x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6^k}{k!}x^k = -\frac{4}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{6^{k-2}}{(k-2)!}x^k$$

Hàm sinh sau đó:

$$F(x) = \frac{1}{3}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{4^r}{r!}x^r - \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{3^{r-1}}{(r-1)!}x^r - \frac{4}{3}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{6^{r-2}}{(r-2)!}x^r$$

Hệ số của a_r:

- Với $r = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{3}\frac{4^r}{r!} = \frac{1}{3}\frac{4^0}{0!} = \frac{1}{3}$$

- Với $r = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{3}\frac{4^r}{r!} - \frac{1}{3}\frac{3^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{1}{3}\frac{4^1}{1!} - \frac{1}{3}\frac{3^0}{0!} = 1$$

- Với $r \geq 2$:

$$a_r = \frac{1}{3}\frac{4^r}{r!} - \frac{1}{3}\frac{3^{r-1}}{(r-1)!} - \frac{4}{3}\frac{6^{r-2}}{(r-2)!}$$

b.

Hàm sinh đã cho ban đầu:

$$F(x) = -\frac{9x^4 - 43x^3 + 91x^2 - 49x + 8}{(x-1)^3(3x-1)^2} + 3e^{x^2}$$

Ta xét:

$$-\frac{9x^4 - 43x^3 + 91x^2 - 49x + 8}{(x-1)^3(3x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(3x-1)^2}$$

Ta có:

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r$$

$$\frac{2}{(x-1)^2} = 2\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+1}{r} x^r$$

$$-\frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4}{(1-x)^3} = 4\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+2}{r} x^r$$

$$\frac{1}{(3x-1)^2} = \frac{1}{(1-3x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+1}{r} (3x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+1}{r} 3^r x^r$$

Lại xét:

$$3e^{x^2} = 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x^2)^r}{r!} = 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{r!}$$

Ở đây, ta thấy rằng chỉ có các bậc chẵn của x, tức là x^{2r}. Vì vậy, hệ số của x^r trong phần này sẽ bằng 0 khi r lẻ và có giá trị $\frac{3}{\left(\frac{r}{2}\right)!}$ khi r chẵn.

Hàm sinh đã cho có hệ số:

$$a_r = 1 + 2\binom{r+1}{r} + 4\binom{r+2}{r} + 3^r\binom{r+1}{r} + \frac{3}{\left(\frac{r}{2}\right)!}\ , với\ r\ chẵn.$$

$$a_r = 1 + 2\binom{r+1}{r} + 4\binom{r+2}{r} + 3^r\binom{r+1}{r}, với\ r\ lẻ.$$

Câu 2:

a. .

Câu 2:

a. Ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le r \quad \forall x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r \text{ với } x_5 \ge 0$$

Để tìm hàm sinh $\{a_r\}$ ta xây dựng các nhân tử đa thức có dạng:

$$y^{x_1} y^{x_2} y^{x_3} y^{x_4} y^{x_5} \quad \forall x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}$$

Như vậy cần tìm 5 nhân tử, với mỗi nhân tử:

$$y^0 + y^1 + y^2 + \ldots = \frac{1}{1-y}$$

Vậy hàm sinh cần tìm là

$$G(y) = \frac{1}{(1-y)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^{k} y^k$$

Vậy $a_r = C_{r+4}^{r}$, $\forall r \ge 0$

Do đó $a_{2025} = C_{2025+4}^{2025} = C_{2029}^{2025} = C_{2029}^{4}$

b. .

b. Với $x_1 \ge -2$ và $x_i \ge 0$ với $i \ne 1$ thì (3) được viết lại:

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 \le r + 2$$

với $x_1' \ge 0$ và $x_1' = x_1 + 2$

Suy ra $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r + 2$ $(x_5 \ge 0)$

$$\Leftrightarrow x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = t \quad (t = r + 2)$$

Coi hàm sinh cần tìm là $G(y) = \frac{1}{(1-y)^5} = \sum_{k \geq 0} C_{k+4}^{k} y^k$

Hệ số $b_t = C_{t+4}^{t}$ $\forall r \geq 0$ thì $a_r = b_{r+2}$

do $t = r+2$

$\Rightarrow a_r = C_{r+6}^{r+2}$

<u>Câu 3:</u>

a.

$\forall k \geq 0$, đặt a_k là số cách chọn k quả bóng từ các loại bóng màu xanh, đỏ, vàng thỏa yêu cầu của bài toán. Ta cần tìm a_{30} = số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 = 30$$

Trong đó $e_1 \geq 6, e_2 \geq 2, e_3 \ \vdots\ 3$.

Hàm sinh của $\{a_k \mid k \geq 0\}$ là

$$G(x) = (x^6 + x^7 + x^8 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

$$= x^6(1 + x + x^2 + \cdots)x^2(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)$$

$$= x^8.\frac{1}{(1-x)^2}.\frac{1}{1-x^3}.$$

Muốn tìm hệ số của x^{30} trong $G(x)$ ta tìm hệ số của x^{22} trong biểu thức:

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.\frac{1}{1-x^3}$$

Đặt:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x^3}$$

Gọi a_r là hệ số của x^r trong $f(x)$, b_r là hệ số của x^r trong $g(x)$.

Khi đó $b_r = \begin{cases} 1 \text{ nếu } r \text{ chia hết cho } 3 \\ 0 \text{ nếu } r \text{ không chia hết cho } 3 \end{cases}$

Do $b_{22-k} = 1$ khi $22 - k \ \vdots\ 3$ nên ta sẽ chỉ cần xét các giá trị k sao cho $22 - k \ \vdots\ 3$, tức là $22 - k = 3m$ với $m \in Z$.

Ta có các giá trị k thỏa mãn điều kiện $22 - k \ \vdots\ 3$ là $22 - k = 3m$ với

$\mathrm{m} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \Rightarrow \mathrm{k} = 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1.$

Hệ số của x^{22} trong $h(x)$ là:

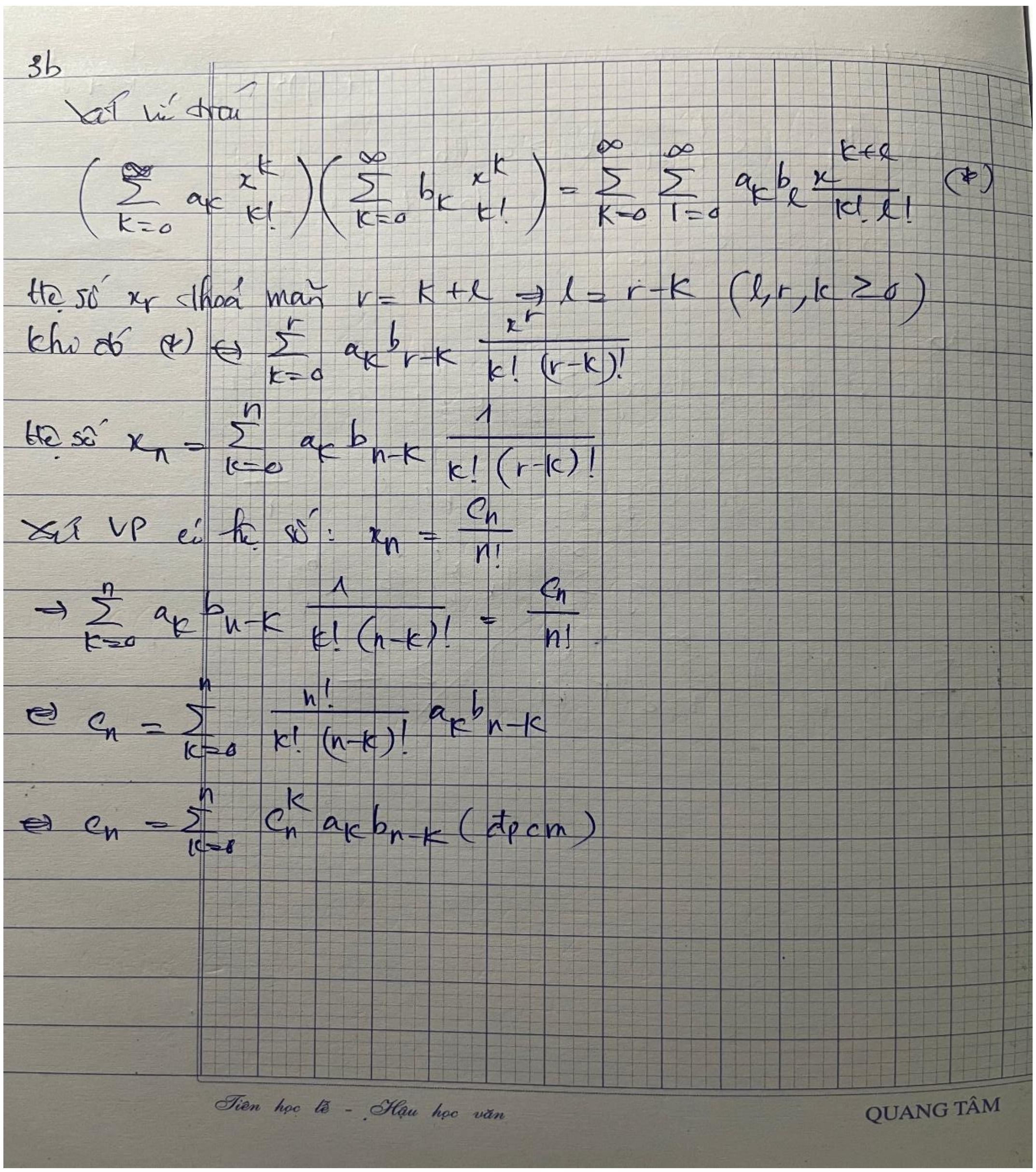
$$a_{22}b_0 + a_{21}b_1 + a_{20}b_2 + \cdots + a_0 b_{22}.$$

Thu gọn ta được:

$a_{22}b_0 + a_{19}b_3 + a_{16}b_6 + a_{13}b_9 + a_{10}b_{12} + a_7 b_{14} + a_4 b_{18} + a_1 b_{21}$

$= \binom{23}{22}.1 + \binom{20}{19}.1 + \binom{17}{16}.1 + \binom{14}{13}.1 + \binom{11}{10}.1 + \binom{8}{7}.1 + \binom{5}{4}.1 + \binom{2}{1}.1 = 100.$

b. .



3b

Xét vế trái

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l \frac{x^{k+l}}{k!\,l!}$ (*)

Hệ số x_r thoả mãn $r = k + l \Rightarrow l = r - k$ $(l, r, k \geq 0)$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} \frac{x^r}{k!\,(r-k)!}$

Hệ số $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \frac{1}{k!\,(r-k)!}$

Xét VP có hệ số: $x_n = \frac{c_n}{n!}$

$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \frac{1}{k!\,(n-k)!} = \frac{c_n}{n!}$

$\Leftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_k b_{n-k}$

$\Leftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k}$ (đpcm)

Tiên học lễ - Hậu học văn

QUANG TÂM

c. .

3c.

Gọi e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 lần lượt là số chữ số 0, 1, 2, 3, 4

($e_4 : 2$, $e_3 \le 9$, $e_i \ge 0$ $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Số chuỗi ngũ phân độ dài k thoả yêu cầu là số nghiệm

nguyên của pt :

$$e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$$

~~Nhân tử đa thức ứng với~~, mỗi nhân tử có dạng:

$\cancel{e_0}$ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

~~e_1 : $1 + x +$~~

Hàm sinh cần tìm :

$F(x) =$

Nhân tử đa thức ứng với

e_0 : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

e_1 : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

e_2 : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

e_3 : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^9}{9}$

QUANG TÂM

Tiên học lễ - Hậu học văn

e_4 : $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Hàm sinh cần tìm:

$$F(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^9}{9!}\right)$$

$$= e^{3x}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\sum_{k=0}^{9}\frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{2x}\right)\sum_{k=0}^{9}\frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4^l x^l}{l!}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2^l x^l}{l!}\right)\sum_{k=0}^{9}\frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(4^l+2^l\right)\frac{x^l}{l!}\sum_{k=0}^{9}\frac{x^k}{k!}$$

Đặt $G(x) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(4^l+2^l\right)\cancel{\sum_{k=0}}\frac{x^l}{l!}$

Khi đó hệ số hàm sinh trong $G(x)$ là $\frac{1}{2}\left(4^l+2^l\right)\cdot\frac{1}{l!}$ $\forall l \geq 0$

$\Rightarrow F(x) = G(x)\sum_{k=0}^{9}\frac{x^k}{k!}$

$\Leftrightarrow F(x) = G(x) + G(x)x + G(x)\frac{x^2}{2!} + \dots + G(x)\frac{x^9}{9!}$

. $0 \leq r \leq 9$, hệ số a_r của hàm là:

$$a_r = \sum_{k=0}^{r}\frac{4^{r-k}+2^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$$

. $r \geq 9$, hệ số a_r của hàm là:

$$a_r = \sum_{k=0}^{9}\frac{4^{r-k}+2^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$$

Vậy số chuỗi ngũ phân độ dài k thoả yêu cầu là hệ số a_k trong hàm $F(x)$

$$a_k = \begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{4^{k-i}+2^{k-i}}{i!\,(k-i)!} & (0 \leq k < 9)\\[2ex] \displaystyle\sum_{i=0}^{9}\frac{4^{k-i}+2^{k-i}}{i!\,(k-i)!} & (k \geq 9)\end{cases}$$

Câu 4:

Câu 4 a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^{k+2} = \frac{x^4+x^3}{(1-x)^3}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+2)x^{k+1} = \frac{(4x^3+3x^2)(1-x)^3+(x^4+x^3)3(1-x)^2}{(1-x)^6}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+2)x^{k+1} = \frac{(4x^3+3x^2)(1-x)+3(x^4+x^3)}{(1-x)^4}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+2)x^{k} = \frac{(4x^3+3x^2)(1-x)+3(x^3+x^2)}{(1-x)^4}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+2)x^{k} = \frac{-x^3+4x^2+3x}{(1-x)^4}$

Tiên học lễ - Hậu học văn QUANG TÂM

Vậy hàm sinh với hệ số $a_r = r^2(r+2)$ là $G(x) = \frac{-x^3+4x^2+3x}{(1-x)^4}$

4b) Gọi $H(x) = \frac{G(x)}{1-x} = \frac{-x^3+4x^2+3x}{(1-x)^4}$

$= (-x^3+4x^3+3x)\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^{k} x^k$

. $n=0$, $S_n = 0$

. $n=1$, $S_n = 3C_{n+3}^{n-1}$

. $n=2$, $S_n = 3C_{n+3}^{n-1} + 4C_{n+2}^{n-2}$

. $n\geq 3$, $S_n = 3C_{n+3}^{n-1} + 4C_{n+2}^{n-2} - C_{n+1}^{n-3}$

Vậy ta có: $S_{2025} = 3C_{2025+3}^{2025-1} + 4C_{2025+2}^{2025-2} - C_{2025+1}^{2025-3}$

$= 3C_{2028}^{2024} + 4C_{2027}^{2023} - C_{2026}^{2022}$

Câu 5:

Câu 5a

Gọi $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Theo đề $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_1 x - a_0 = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Leftrightarrow G(x) - x - 1 = x\left[G(x) - 1\right] + x^2 G(x)$$

$$\Leftrightarrow G(x) - x^2 G(x) - x G(x) = 1 + x - x$$

$$\Leftrightarrow G(x)\left(1 - x^2 - x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{1}{-\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{G(x) = \frac{-1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - x\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - x\right)}}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{5+\sqrt{5}}{10\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} + \frac{5-\sqrt{5}}{10\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}$$

Hệ số a_n của dãy là: $a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\forall n \geq 0$

b) Gọi $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

Theo đề ta có $a_{n+2} = -2(n+2)a_{n+1} + 3(n^2+3n+2)a_n + n^2(n+2)!$
$(\forall n \geq 0)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} -2(n+2)a_{n+1}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)a_n \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} n^2(n+2)!\,\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = -2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\frac{x^{n+2}}{(n+1)!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow E(x) + \frac{1}{2} + 2x = -2x\left[E(x) + \frac{1}{2}\right] + 3x^2E(x) + \frac{x^2 \cdot x(x+1)}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{8x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 3x - 1}{2(-x+1)^3(1+2x-3x^2)}$$

Ta có:

$$\frac{8x^4 - 15x^3 + 15x^2 - 3x - 1}{2(-x+1)^3(1+2x-3x^2)} = \frac{1}{2(x-1)^4} + \frac{11}{8(x-1)^3} + \frac{39}{32(x-1)^2} + \frac{155}{128(x-1)} + \frac{47}{128(1+3x)}$$

Do đó

$$E(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} C^3_{n+3}x^n - \frac{11}{8}\sum_{n=0}^{\infty} C^2_{n+2}x^n + \frac{39}{32}\sum_{n=0}^{\infty} C^1_{n+1}x^n - \frac{155}{128}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{47}{128}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}C^3_{n+3} - \frac{11}{8}C^2_{n+2} + \frac{39}{32}(n+1) - \frac{155}{128} + \frac{47}{128}(-3)^n\right]x^n$$

Hệ số a_r của dãy là:

$$a_r = n!\left[\frac{1}{2}C^3_{n+3} - \frac{11}{8}C^2_{n+2} + \frac{39}{32}(n+1) - \frac{155}{128} + \frac{47}{128}(-3)^n\right] \quad \forall n \ge 0$$

Câu 6:

Câu 6a

Gọi U là tập các số nguyên dương nhỏ hơn 10 000

$\Rightarrow |U| = 9999$ số

Gọi A_0 là tập các phần tử $x \in U$ sao cho x có chữ số 0

— A_5 ——————————— 5

Gọi B là tập các phần tử $x \in U$ và chia hết cho 2

Theo đề ta cần tính $|A_0 A_5 B|$

Ta có $|A_0 A_5 B| = |U| - |\overline{A_0} \cup \overline{A_5} \cup \overline{B}|$

Khi xét đó các tập hợp con, ta sẽ xét tất cả các số có 1 chữ số, 2 chữ số, 3 chữ số, 4 chữ số mà bé hơn 10000

ta có:

$|\overline{A_0}| = 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 7380$

$|\overline{A_5}| = 8 + 8.9 + 8.9.9 + 8.9.9.9 = 6560$

$|\overline{B}| = 5 + 9.5 + 9.10.5 + 9.10.10.5 = 5000$

$|\overline{A_0}\,\overline{A_5}| = 8 + 8.8 + 8.8.8 + 8.8.8.8 = 4680$

$|\overline{A_0}\,\overline{B}| = 5 + 9.5 + 9.9.5 + 9.9.9.5 = 4100$

$|\overline{A_5}\,\overline{B}| = 4 + 8.4 + 8.9.4 + 8.9.9.4 = 2916$

$|\overline{A_0}\,\overline{A_5}\,\overline{B}| = 4 + 8.4 + 8.8.4 + 8.8.8.4 = 2340$

Vậy $|\overline{A_0} \cup \overline{A_5} \cup \overline{B}| = |\overline{A_0}| + |\overline{A_5}| + |\overline{B}| - |\overline{A_0}\,\overline{A_5}| - |\overline{A_0}\,\overline{B}|$

$- |\overline{A_5}\,\overline{B}| + |\overline{A_0}\,\overline{A_5}\,\overline{B}|$

$= 7380 + 6560 + 5000 - 4680 - 4100 - 2916 + 2340 = 9584$

Do đó $|A_0 A_5 B| = |U| - |\overline{A_0} \cup \overline{A_5} \cup \overline{B}| = 9999 - 9584 = 415$

Vậy có 415 số thỏa yêu cầu.

6b

Gọi A_i là tập hợp các ánh xạ $f: X \mapsto Y$

sao cho $f(a_i) \neq f(b_i)$, $i = \overline{1,n}$

Với mỗi a_i ta có thể chọn bất kỳ một ảnh b_i nào đó

$\Rightarrow$ Tập hợp tất cả các ánh xạ $|U| = n^n$.

Theo đề ta cần tính:

$$|A_1 A_2 A_3 \ldots A_n|$$

Mặt khác:

$$|A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots A_n| = |U| - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n|$$

Xét $\bar{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ gồm các ánh xạ thoả $f(a_i) = b_i$

Gọi a_m $(m \neq i)$ là các điểm còn lại ánh xạ vào tập

$$Y = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$$

Khi đó với mỗi a_m $(m \neq i)$ ta có thể chọn n ảnh b_i trong tập

$$Y = \{b_1, b_2 \ldots b_n\}, i = \overline{1,n}.$$

$\rightarrow |\bar{A}_i| = n^{n-1}$ $(1 \leq i \leq n)$

Tương tự:

$|\bar{A}_i \bar{A}_j| = n^{n-2}$ $(1 \leq i < j \leq n)$

$|\bar{A}_i \bar{A}_j \bar{A}_k| = n^{n-3}$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$

....

$|\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_m| = n^{n-m}$ $(1 \leq m \leq n)$

.....

$|\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_n| = n^0 = 1$

$$\Rightarrow |A_1 A_2 \ldots A_n| = |U| - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n|$$

$$= n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n n^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n^{n-k} C_n^k$$

$$= (n-1)^n$$

Vậy số ánh xạ thoả yêu cầu là $(n-1)^n$.

Câu 7:

a.

$$R(C,x) = xR\left(\quad ,x \right) + R\left(\quad ,x \right)$$

$$= x\left[xR\left(\quad ,x \right) + R\left(\quad ,x \right) \right] + xR\left(\quad ,x \right) + R\left(\quad ,x \right)$$

$$= x[x(1+3x+2x^2) + 1 + 5x + 6x^2]$$

$$+xR\left(\quad ,x \right) R\left(\quad ,x \right) + R\left(\quad ,x \right) R\left(\quad ,x \right)$$

$$= x[x(1+3x+2x^2) + 1 + 5x + 6x^2] + x(1+5x+6x^2)(1+2x) + (1+6x+9x^2)(1+3x)$$

$$= 1 + 11x + 40x^2 + 52x^3 + 14x^4$$

b. Gọi $S_1 = \{A, B, C, D, E\}$, $S_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Gọi $S_3 = S_1 \cup \{\mathrm{F}, \mathrm{G}\}$.

Bài toán sắp xếp nhiệm vụ với việc phân bổ 5 bạn cho 7 nhiệm vụ sao cho mỗi ban nhận một nhiệm vụ giống như số đơn ánh từ tập S_1 vào S_2.

Mặt khác giả sử ta thêm 2 bạn F,G và hai bạn này đều làm tất cả công việc. Vậy số cách xây dựng đơn ánh từ tập S_3 vào S_2 chính là số cách phân bổ 7 bạn cho 7 nhiệm vụ.

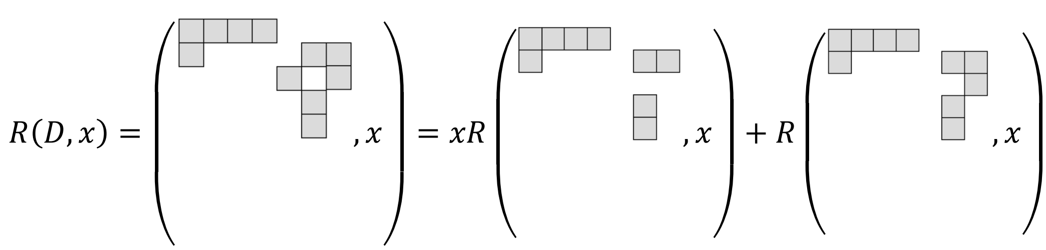
Có $2! = 2$ cách xây dựng song ánh từ tập S_3 vào S_2.

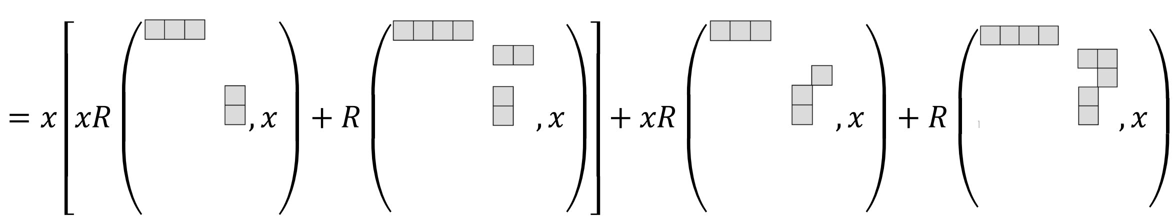
(Vì có 2! Cách chọn công việc cho F và G).

Ta biểu diễn 7 bạn A, B, C, D, E, F, G và 7 nhiệm vụ a, b, c, d, e, f, g thành một bàn cờ 5 x 7 như hình sau. Đây cũng chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

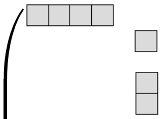
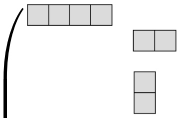
	a	b	c	d	e	f	g
A	X	X	X	X			
B	X					X	X
C					X		X
D						X	
E						X	
F							
G							

Gọi D là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm. Khi đó ta cần tìm đa thức quân xe:





$$= x[x(1 + 5x + 6x^2) + 1 + 8x + 18x^2 + 8x^3] + x(1 + 6x + 11x^2 + 6x^3)$$

$+xR\Big($  $, x\Big) + R\Big($  $, x\Big)$

$$= x[x(1 + 5x + 6x^2) + 1 + 8x + 18x^2 + 8x^3] + x(1 + 6x + 11x^2 + 6x^3)$$

$$+x(1 + 7x + 12x^2) + (1 + 4x)(1 + 4x + 2x^2)$$

$$= 1 + 11x + 40x^2 + 54x^3 + 20x^4$$

Số song ánh từ tập S_3 vào S_2 thoả yêu cầu là:

$$\sum_{k=0}^{7} (-1)^k\,(7-k)!\,r_k(D)$$

$= (7!.1 - 6!.11 + 5!.40 - 4!.54 + 3!.20 - 2!.0 + 1!.0 - 0!.0) = 744$

Vậy số cách phân bổ 5 bạn cho 7 nhiệm vụ thoả yêu cầu là: $\frac{744}{2} = 372$ cách.

<u>Câu 8:</u>

a.

$S_4^2 = \left\{ {4 \atop 2} \right\} = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 1 + 2.(\,2^{3-1} - 1) = 7$

$S_5^2 = \left\{ {5 \atop 2} \right\} = \left\{ {4 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 1 + 2.(\,2^{4-1} - 1) = 15$

$S_4^3 = \left\{ {4 \atop 3} \right\} = \left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3\left\{ {3 \atop 3} \right\} = (2^{3-1} - 1) + 3.1 = 6$

$S_5^4 = \left\{ {5 \atop 4} \right\} = \left\{ {4 \atop 3} \right\} + 4\left\{ {4 \atop 4} \right\} = 6 + 4.1 = 10$

b.

Ta phân tích $N = 2790090303$ thành tích các số nguyên tố.

Ta có:

$2790090303 = 3.7.11.13.17.31.41.43$

Do đó mỗi nhân tử trong phân tích số 2790090303 là tích của các phần tử của tập con khác rỗng của $\{3, 7, 11, 13, 17, 31, 41, 43\}$. Do đó số cách phân tích 2790090303 thành tích của nhiều hơn 3 số nguyên lớn hơn 1 là số phân hoạch của {3,7,11,13,17,31,41,43} thành nhiều hơn 3 tập con.

Ta có tam giác Stirling loại 2:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Vậy ta có số cách phân tích 2790090303 thành tích của nhiều hơn 3 số nguyên lớn hơn 1 là:

$$S = \sum_{k=4}^{8} \left\{ {8 \atop k} \right\} = \left\{ {8 \atop 4} \right\} + \left\{ {8 \atop 5} \right\} + \left\{ {8 \atop 6} \right\} + \left\{ {8 \atop 7} \right\} + \left\{ {8 \atop 8} \right\} = 1701 + 1050 + 266 + 28 + 1 = 3046$$

c.

Ta phân tích $M = 147874786059$ thành tích các số nguyên tố.

Ta có:

$147874786059 \; = 3.7.11.13.17.31.41.43.53$

Do đó mỗi nhân tử trong phân tích số 147874786059 là tích của các phần tử của tập con khác rỗng của $\{3,7,11,13,17,31,41,43,53\}$. Do đó số cách phân tích 147874786059 là số phân hoạch của $\{3,7,11,13,17,31,41,43,53\}$.

Tam giác Bell:

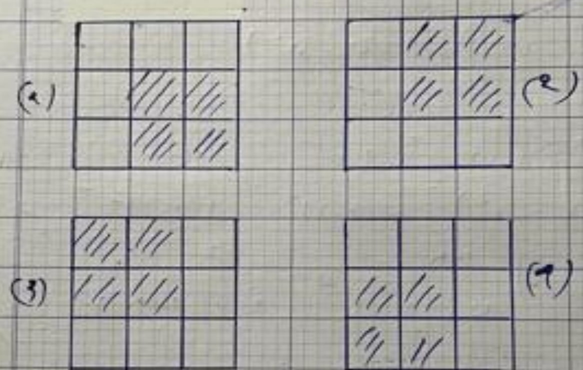
1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	67	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140
4140	5017	6097	7432	9080	11155	13744	17007

Như vậy ta có $B_9 = 21147$ cách.

Câu 9:

Câu 9a

Ta xét bàn cờ 3x3, khi đó bàn cờ 2x2 được tô đỏ là



Gọi A_i là tập số cách tô bàn cờ với trạng thái thứ i, $1 \le i \le 4$

với kích thước $(n-1) \times (n-1)$ xuất hiện.

Theo đề bài ta có số cách tô bàn cờ là $2^{n^2} = |U|$

Số cách tô không thoả yêu cầu: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

. TH1 chỉ có 1 bàn cờ con xuất hiện

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 2^{2n-1} \Rightarrow S_1 = 4 \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n+1}$ cách

. TH2 có 2 bàn cờ con xuất hiện

$|A_1A_2| = 2^n$, $|A_1A_3| = 2^2$, $|A_1A_4| = 2^n$
$|A_2A_3| = 2^n$, $|A_3A_4| = 2^2$, $|A_3A_4| = 2^n$
$\Rightarrow S_2 = 4.2^n + 2.2^2$
$= 2^{n+2} + 2^3 = 2^{n+2} + 8$

. TH3 có 3 bàn cờ con xuất hiện
$|A_1A_2A_3| = 2$, $|A_1A_2A_4| = 2$, $|A_2A_3A_4| = 2$
$|A_1A_3A_4| = 2 \Rightarrow S_3 = 8$

. TH4 có 4 bàn cờ con xuất hiện
$|A_1A_2A_3A_4| = 1 \Rightarrow S_4 = 1$

Vậy $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$
$= 2^{2n+1} - (2^{n+2} + 2^3) + 8 - 1$
$= 2^{2n+1} - 2^{n+2} - 1$

Vậy số cách tô thoả yêu cầu là
$|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |\bar{A_1}\bar{A_2}\bar{A_3}\bar{A_4}|$
$= 2^{n^2} - 2^{2n+1} + 2^{n+2} + 1$

9b)
Ta chọn ra 6 phần tử từ tập hợp 1, 2, 3, ... 1323
Rồi đặt chúng là x_i sao cho $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6$
Dễ thấy $\begin{cases} x_1 \text{ là một kích thước của hộp} \\ x_2 \text{ là một kích thước của gạch} \end{cases}$

. TH1 : x_2 là kích thước của hộp
Khi đó ta chỉ cần chọn thêm một số trong tập $\{x_3, x_4, x_5\}$

để làm kích thước còn lại của hộp

⇒ có 3 cách chọn kích thước hộp

. TH2: x_2 là kích thước gạch, x_3 là kích thước hộp

Khi đó x_1, x_3 là kích thước hộp và x_2, x_6 là kích thước gạch

Lúc này ta phải chọn kích thước hộp từ tập $\{x_4, x_5\}$

⇒ có 2 cách chọn kích thước hộp.

. TH3: x_2, x_3 là kích thước gạch, x_4 là kích thước hộp

Khi đó kích thước hộp là $x_1 . x_4 . x_5$

và kích thước gạch là $x_2 . x_3 . x_6$

Mà $x_4 < x_3$ nên không thể bỏ gạch vào hộp

⇒ không tồn tại cách bỏ.

Tương tự trường hợp x_2, x_3 là kích thước gạch và x_5 là kích thước hộp cũng không tồn tại.

⇒ số cách tạo kích thước hộp từ 6 giá trị là

$$C_6^3 = 20.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{3+2}{20} = \frac{1}{4}$.

Câu 10:

Câu 10a

Chọn ra 3 số trong 9 chữ số có C_9^3 cách

Chọn ra 6 chỗ cho 3 chữ số, mỗi chữ số xuất hiện 2 lần có $C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2$ cách

$\Rightarrow$ Số cách chọn 3 chữ số trong 9 chữ số sao cho mỗi chữ số xuất hiện đúng 2 lần là

$$C_9^3 C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 = 6985440 \text{ (cách)}$$

Lúc này tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ còn lại 6 số và không còn số nào trong tập hợp này xuất hiện đúng 2 lần.

Số có 12 chữ số ta cần lập còn 6 chỗ trống.

Gọi A_i là số thứ i trong tập 6 số còn lại, không số nào xuất hiện đúng 2 lần với $i = \overline{1,6}$

Ta cần tìm $|A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6|$

Số cách tạo 1 chuỗi hoàn chỉnh sau khi điền vào 6 chỗ còn trống từ tập 6 số còn lại là: 6^6 cách

Ta có $|A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6| = 6^6 - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \bar{A}_4 \cup \bar{A}_5 \cup \bar{A}_6|$

Lại có

$|\bar{A}_i| = C_6^2 5^4$ với $1 \le i \le 6$

$|\bar{A}_i \bar{A}_j| = C_6^2 C_4^2 4^2$ với $1 \le i < j \le 6$

$|\bar{A}_i \bar{A}_j \bar{A}_k| = C_6^2 C_4^2 C_2^2$ với $1 \le i < j < k \le 6$

$|\bar{A}_i \bar{A}_j \bar{A}_k \bar{A}_l| = 0$

Vì vai trò các A_i $(i = \overline{1,6})$ là như nhau, ta có:

$S_1 = 6C_6^2 5^4$

$S_2 = C_6^2 C_6^2 C_4^2 4^2$

$S_3 = C_6^3 C_6^2 C_4^2 C_2^2$

$S_4 = S_5 = S_6 = 0$

$\Rightarrow |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5} \cup \overline{A_6}| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6$

$= 6C_5^2 5^4 - C_6^2 C_6^2 C_4^2 4^2 + C_6^3 C_6^2 C_4^2 C_2^2 - 0 + 0 - 0$

$= 36450$

$\Rightarrow |A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6| = 6^6 - 36450 = 10206$

Vậy số các số có thể lập thoả yêu cầu:

$6985440 . 10206 = 71293400640$

b) Gọi $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

Gọi S là tập các số được tạo bằng cách chọn các số từ tập A tạo thành một số có 12 chữ số và mỗi chữ số xuất hiện đúng 2 lần.

Chọn 6 chữ số từ tập A có $C_9^6 = 84$ cách

Điền 6 chữ số này vào 12 chỗ trống sao cho mỗi chữ số được chọn xuất hiện đúng 2 lần, ta có

$C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 7484400$ cách

$\Rightarrow |S| = 84 . 7484400 = 628689600$

Chọn 6 số từ tập A, ta đặt 6 số lần lượt là

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

Đặt A_i là tập hợp các chuỗi mà 2 chữ số a_i đứng cạnh nhau sao cho các chuỗi đó thuộc tập S

Với $i, j, k, l, m, n \in \mathbb{N}$ ta có:

$|A_i| = C_{11}^1 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2$ với $1 \le i \le 6$

$|A_iA_j| = 2!\, C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2$ với $1 \le i < j \le 6$

$|A_iA_jA_k| = \ldots\, 3!\, C_9^3 C_6^2 C_4^2 C_2^2$ với $1 \le i < j < k \le 6$

$|A_iA_jA_kA_l| = 4!\, C_8^4 C_4^2 C_2^2$ với $1 \le i < j < k < l \le 6$

$|A_iA_jA_kA_lA_m| = 5!\, C_7^5 C_2^2$ với $1 \le i < j < k < l < m \le 6$

$|A_iA_jA_kA_lA_mA_n| = 6!$ với $1 \le i < j < k < l < m < n \le 6$

Vì A_i có vai trò như nhau $\forall i \in \mathbb{N}$ với $i = \overline{1,6}$ nên

$S_1 = 6\, C_{11}^1 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 7484400$

$S_2 = C_6^2\, 2!\, C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 3402000$

$S_3 = C_6^3\, 3!\, C_9^3 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 907200$

$S_4 = C_6^4\, 4!\, C_8^4 C_4^2 C_2^2 = 151200$

$S_5 = 6.5!\, C_7^5 C_2^2 = 15120$

$S_6 = 6! = 720$

Khi đó $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6$

$= 7484400 - 3402000 + 907200 - 151200 + 15120 - 72$

$= 4852800$

Vậy có 4852800 số thoả yêu cầu có độ dài 12 chữ số có xuất hiện 2 chữ số giống nhau đứng cạnh nhau từ 6 số $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ cho trước

$\Rightarrow$ Số các số xuất hiện 2 chữ số giống nhau đứng cạnh nhau có độ dài 12 chữ số với mỗi chữ số xuất hiện đúng 2 lần từ việc chọn ra các chữ số trong tập A là:

$$C_9^6 \cdot 4852800 = 407635200$$

Vậy số các số thoả yêu cầu bài toán:

$$|S| - 407635200 = 628689600 - 407635200$$
$$= 221054400 \text{ số}$$