

HOMEWORK 6 - MARKOV CHAINS

Sinh viên: Nguyễn Thái Bảo - 23120023

Ngày 24 tháng 5 năm 2025

Bài 1

Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P :

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Tìm π_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ta có:

$$\pi_1 = P\pi_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = P\pi_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = P\pi_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = P\pi_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5 = P\pi_4 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6125 \\ 0.3875 \end{pmatrix}$$

Kết luận:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 0.6125 \\ 0.3875 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Bài 2

Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tìm π_n , $n = 1, 2, 3$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ta có:

$$\pi_1 = P\pi_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = P\pi_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.52 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = P\pi_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.52 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.273 \\ 0.396 \\ 0.331 \end{pmatrix}$$

Kết luận:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.52 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0.273 \\ 0.396 \\ 0.331 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Bài 3

Cho xích Markov với 3 trạng thái 1, 2, 3 với ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Và phân phối đầu $\alpha = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Tính $P(X_2 = 2, X_1 = 2|X_0 = 1)$

Ta có:

$$P(X_2 = 2, X_1 = 2|X_0 = 1) = \frac{P(X_2 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \quad (9)$$

$$= \frac{P(X_2 = 2|X_1 = 2, X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \quad (10)$$

$$= P(X_2 = 2|X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1) \quad (11)$$

Mà:

$$P(X_1 = 2|X_0 = 1) = P_{21} = 0.3 \quad (12)$$

$$P(X_2 = 2|X_1 = 2) = P_{22} = 0.3 \quad (13)$$

Vậy: $P(X_2 = 2, X_1 = 2|X_0 = 1) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$

b) Tính $P(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3)$

Theo tính chất Markov, trạng thái tương lai chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại:

$$P(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3) = P(X_{10} = 2|X_7 = 1) = P(X_3 = 2|X_0 = 1) = [P^3]_{21}$$

Ta tính P^3 :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.276 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix}$$

Vậy: $P(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_0 = 3) = P_{21}^3 = 0.254$

c) Tính $P(X_4 = 2, X_3 = 1)$

Ta có:

$$P(X_4 = 2, X_3 = 1) = P(X_4 = 2 | X_3 = 1)P(X_3 = 1) = P_{21} \cdot \pi_3(1) \quad (14)$$

$$\text{Mà } \pi_3 = P^3 \pi_0 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.276 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.468 \\ 0.244 \\ 0.288 \end{pmatrix}$$

Suy ra: $\pi_3(1) = 0.468$

Lại có: $P_{21} = 0.3$

Vậy: $P(X_4 = 2, X_3 = 1) = 0.3 \times 0.468 = 0.1404$

Bài 4

Tìm phân phối dừng π trong các trường hợp ma trận chuyển trạng thái được cho như sau:

a) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

Vì $P^5 > 0$ ($P_{ij} > 0$) nên P chính quy, do đó phân phối dừng là duy nhất.

Ta có:

$$\text{Ma trận } (P - I_2) = \begin{pmatrix} -2/3 & 3/4 \\ 2/3 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hệ } (P - I_2)\pi = 0 \text{ tương đương với: } \begin{pmatrix} -2/3 & 3/4 \\ 2/3 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi(1) \\ \pi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2/3 & 3/4 & 0 \\ 2/3 & -3/4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -9/8 & 0 \\ 2/3 & -3/4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -9/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Suy ra: $\pi(1) - \frac{9}{8}\pi(2) = 0 \Rightarrow \pi(1) = \frac{9}{8}\pi(2)$

$$\text{Mà: } \pi(1) + \pi(2) = 1 \Rightarrow \frac{9}{8}\pi(2) + \pi(2) = 1 \Rightarrow \frac{17}{8}\pi(2) = 1 \Rightarrow \pi(2) = \frac{8}{17}$$

$$\text{Do đó: } \pi(1) = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{17} = \frac{9}{17}$$

Vậy phân phối dừng là: $\pi = (\frac{9}{17}, \frac{8}{17})$

$$\text{b) } P = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}$$

Vì $P^5 > 0$ ($P_{ij} > 0$) nên P chính quy, do đó phân phối dừng là duy nhất.

Ta có:

$$\text{Ma trận } (P - I_2) = \begin{pmatrix} -0.19 & 0.26 \\ 0.19 & -0.26 \end{pmatrix}$$

Ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.19 & 0.26 & 0 \\ 0.19 & -0.26 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{26}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Suy ra: } \pi(1) - \frac{26}{19}\pi(2) = 0, \text{ suy ra } \pi(1) = \frac{26}{19}\pi(2)$$

$$\text{Mà: } \pi(1) + \pi(2) = 1 \Rightarrow \frac{26}{19}\pi(2) + \pi(2) = 1 \Rightarrow \frac{45}{19}\pi(2) = 1 \Rightarrow \pi(2) = \frac{19}{45}$$

$$\text{Do đó: } \pi(1) = \frac{26}{19} \cdot \frac{19}{45} = \frac{26}{45}$$

Vậy phân phối dừng là: $\pi = (\frac{26}{45}, \frac{19}{45})$

$$\text{c) } P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Vì $P^5 > 0$ ($P_{ij} > 0$) nên P chính quy, do đó phân phối dừng là duy nhất.

Ta có:

$$\text{Ma trận } (P - I_3) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1/4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Suy ra:

$$\pi(1) - \frac{1}{4}\pi(3) = 0 \Rightarrow \pi(1) = \frac{1}{4}\pi(3) \quad (15)$$

$$\pi(2) - \frac{1}{3}\pi(3) = 0 \Rightarrow \pi(2) = \frac{1}{3}\pi(3) \quad (16)$$

$$\text{Mà: } \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\pi(3) + \frac{1}{3}\pi(3) + \pi(3) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1\right) \pi(3) = 1 \Rightarrow \frac{19}{12}\pi(3) = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{12}{19}$$

$$\text{Do đó: } \pi(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{19} = \frac{3}{19} \quad \pi(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{19} = \frac{4}{19}$$

$$\text{Vậy phân phối dừng là: } \pi = \left(\frac{3}{19}, \frac{4}{19}, \frac{12}{19}\right)$$