Lớp 23CTT1A

Nhóm 02

Tên thành viên:

- Hồ Hồ Gia Bảo – 23120021
- Hoàng Gia Bảo – 23120022
- Nguyễn Thái Bảo – 23120023
- Nguyễn Thanh Bình – 23120024
- Phan Thị Phương Chi – 23120025
- Nguyễn Hải Đăng – 23120027

3.21 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức sau:

a) $f_1 = 1 + 2t - 5t^2, f_2 = -4 - t + 6t^2, f_3 = 6 + 3t - 4t^2$

Đặt các vector hệ số tương ứng: $u_1 = (1,2,-5), u_2 = (-4,-1,6), u_3 = (6,3,-4)$.

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ nên S là tập sinh của W. (1)

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow detA = 56 \neq 0$ nên S độc lập tuyến tính. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.

Vậy $\{f_1, f_2, f_3\}$ là một cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức f_1, f_2, f_3.

b) $f_1 = 1 - 2t, f_2 = 1 - t + t^2, f_3 = 1 - 7t + 10t^2$

Đặt các vector hệ số tương ứng: $u_1 = (1, -2,0), u_2 = (1, -1,1), u_3 = (1, -7,10)$.

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ nên S là tập sinh của W. (1)

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow detA = 15 \neq 0$ nên S độc lập tuyến tính. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là 1 cơ sở của W.

Vậy $\{f_1, f_2, f_3\}$ là một cơ sở cho không gian sinh bởi các đa thức f_1, f_2, f_3.

c)

Gọi W là *không gian* sinh *bởi* $S = (f_1, f_2, f_3)$

Do đó *ta* có *phương trình* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$, *với* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Từ đây *ta có hê phương trình*:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta có:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{d_2 - 3d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -3\alpha_3 \\ \alpha_1 = -5\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow f_3 = 5f_1 + 3f_2$$

Do đó f_3 *là tổ hợp tuyến tính của* f_1, f_2 *do* đó $\{f_1, f_2\}$ *là tập* sinh *của* W

*v*à $\{f_1, f_2\}$ độ*c lập tuyến tính nên* $\{f_1, f_2\}$ *là cơ sở của* W

d) $f_1 = 1 + 2t - 3t^2 - 2t^3, f_2 = 2 + 5t - 8t^2 - t^3, f_3 = 1 + 4t - 7t^2 + 5t^3$

Đặ*t* $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ *v*à $W = \langle S \rangle$ (1)

*X*ét *phương trình*: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 8\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta đượ*c*:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -8 & -7 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 - 2d_1 \\ d_3 + 3d_1 \\ d_4 + 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_3 \leftrightarrow d_4 \\ d_4 + 2d_2 \\ d_3 - 3d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow r(\tilde{A}) = 3$$

$\longrightarrow S\ độc\ lập\ tuyến\ tính \quad (2)$

$Từ$ (1) và (2) $\Rightarrow S\ là\ cơ\ sở\ của\ W$

3.22 Tìm cơ sở cho không gian sinh bởi các ma trận sau:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow S = \{A_1, A_2, A_3\}$ độc lập tuyến tính. (1)

Lại có W = $\langle S \rangle$ hay S là tập sinh của W. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{A_1, A_2, A_3\}$ là một cơ sở của W.

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow S = \{A_1, A_2, A_3\}$ độc lập tuyến tính. (1)

Lại có W = $\langle S \rangle$ hay S là tập sinh của W. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S = $\{A_1, A_2, A_3\}$ là một cơ sở của W.

c)

$$Gọi\ W\ là\ không\ gian\ \text{sinh}\ bởi\ S = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$Do\ đó\ ta\ có\ phương\ trình\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0\ , với\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$Từ\ đây\ ta\ có\ hệ\ phương\ trình:$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có:$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_2]{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4+\frac{1}{5}d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ta\ có\ rank(\tilde{A}) = 3 = Số\ ẩn\ nên\ hệ\ phương\ trình\ chỉ\ có\ nghiệm\ tầm\ thường\ do\ \text{đó}\ S\ độc\ lập\ tuyến\ tính$$

$$Vậy\ S\ \text{là}\ cơ\ sở\ của\ W$$

d) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Đặt $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ và $W = \langle S \rangle$

Xét phương trình: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 8\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta$ được:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3-2d_1 \\ d_4-3d_1 \\ d_5-2d_1 \\ d_6-d_1}]{\substack{d_2-4d_1 \\ -\frac{1}{10}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -21 \\ 0 & -4 & -17 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_6+2d_1 \\ d_5+3d_6 \\ d_6-5d_4 \\ d_4\leftrightarrow d_3}]{\substack{d_3+7d_2 \\ d_4+4d_1 \\ d_5+3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow r(\tilde{A}) = 3 \longrightarrow S \text{ độc lập tuyến tính}$$

Vì S $vừa$ độc $lập\ tuyến\ tính\ vừa$ là $tập\ sinh\ của\ W\ nên\ S$ là $cơ\ sở\ của\ W$.

3.23 Tìm cơ sở và chiều cho không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính sau:

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_3-2d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra nghiệm của hệ là:

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t + 3s, -t + 2s, t, s)\ với\ t, s \in \mathbb{R}$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là:

$$u_1 = (-1,-1,1,0), u_2 = (3,2,0,1)$$

Do đó, nếu W là không gian nghiệm thì $\beta = \{u_1, u_2\}$ là cơ sở của W và dimW = 2.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có: $detA = -1 \neq 0$

Suy ra nghiệm của hệ là:

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0,0,0)\ là\ nghiệm\ tầm\ thường$$

Do đó, nếu W là không gian nghiệm thì dimW = 0 và không có cơ sở.

c)

$$Gọi\ W\ là\ không\ gian\ nghiệm\ của\ hệ\ phương\ trình\ trên$$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2-2d_1]{d_3-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2s + \dfrac{2}{7}t \\ x_2 = s \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}t \\ x_4 = t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathrm{W} = \left\{ \left(2s + \frac{2}{7}t, s, -\frac{5}{7}t, t \right) \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathrm{s}(2,1,0,0) + t\left(\frac{2}{7}, 0, \frac{-5}{7}, 1 \right) \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Đặt $u_1 = (2,1,0,0), u_2 = \left(\frac{2}{7}, 0, \frac{-5}{7}, 1 \right)$ $ta\ có\ với\ u$

$\in\ W\ thì\ u$ là $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2\ nên\ \{u_1, u_2\}\ là\ tập$ sinh $của\ W\ mà\ \{u_1, u_2\}$ độ$c\ lập\ tuyến\ tính$

$nên\ \{u_1, u_2\}\ là\ cơ\ sở\ của\ W$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta$ được:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1 \\ d_1+\frac{1}{2}d_2 \\ d_1+\frac{1}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$Suy\ ra\ nghiệm\ của\ hệ\ l$à:

$u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-t, s, v, s, v, t)\ với\ s, v, t \in R$.

$Các\ nghiệm\ cơ\ bản\ của\ hệ\ l$à:

$u_1 = (0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1)$ và $u_3 = (-1, 0, 0)$.

$\longrightarrow$ Nếu W là $không\ gian\ nghiệm\ th$ì $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là $cơ\ sở\ của\ W\ v$à $dimW = 3$.

3.24 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,-1,1,-1), u_3 = (1,3,1,3)$$

$$v_1 = (1,2,0,2), v_2 = (1,2,1,2), v_3 = (3,1,3,1)$$

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Hãy tìm một cơ sở cho mỗi không gian con U, W, U +W và U ∩ W.

Lập:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó U có dimU = 2 và có một cơ sở: $\{a_1 = (1,0,1,0)\ ;\ a_2 = (0,1,0,1)\}$

Lập:

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W có dimW = 3 và có một cơ sở: $\{b_1 = (1,0,0,0)\ ;\ b_2 = (0,1,0,1)\ ;\ b_3 = (0,0,1,0)\}$

Ta có U + W sinh bởi các vector:

$$a_1 = (1,0,1,0)\ ;\ a_2 = (0,1,0,1)\ ;\ b_1 = (1,0,0,0)\ ;\ b_2 = (0,1,0,1)\ ;\ b_3 = (0,0,1,0)$$

Lập:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra U + W có số chiều là 3 và một cơ sở của U + W là $\{b_1, a_2, b_3\}$.

Giả sử $u = (x, y, z, t) \in U \cap W$

Vì $u \in U$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

$$(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \;|u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & 3 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in U$ thì $z - x = 0$ (1)

Vì $u \in W$ nên u là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3.

$$(v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T \;|u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \\ 2 & 2 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 3 & z \\ 0 & 0 & -5 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & t-y \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W$ thì $t - y = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} z - x = 0 \\ t - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ là: $u = (x, y, z, t) = (x, y, x, y)\ với\ x, y \in \mathbb{R}$.

Các nghiệm cơ bản của hệ là: $(1,0,1,0)$và $(0,1,0,1)$.

Vậy $U \cap W$ có cơ sở là {(1,0,1,0) ; (0,1,0,1)}.

3.25. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

u = (1, 1, 0, −1), v = (1, 0, 0, −1) và w = (1, 0, −1, 0).

Đặt U = ⟨u, v, w⟩ và W = $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

a) Chứng tỏ rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$

$\mathbf{0} = (0{,}0{,}0{,}0) \in W$

$$\begin{aligned}
&Với\ \forall a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W:\\
&a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)\\
&a_1 + b_1 + a_2 + b_2 - (a_3 + b_3) + 2(a_4 + b_4) = a_1 + a_2 - a_3 + 2a_4 + b_1 + b_2 - b_3 + 2b_4\\
&\text{mà } a_1 + a_2 - a_3 + 2a_4 = b_1 + b_2 - b_3 + 2b_4 = 0\\
&\Rightarrow a + b \in W
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Với\ \forall \alpha \in \mathbb{R}:\\
&\alpha b = (\alpha b_1, \alpha b_2, \alpha b_3, \alpha b_4)\\
&Ta\ có: \alpha b_1 + \alpha b_2 - \alpha b_3 + 2\alpha b_4 = \alpha(b_1 + b_2 - b_3 + 2b_4) = 0\\
&\Rightarrow \alpha b \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W$ là $một\ không\ gian\ con\ của\ \mathbb{R}^4$

b) Tìm một cơ sở cho không gian U

Lập $A_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(A_1) = 3 \Rightarrow A_1 độc\ lập\ tuyến\ tính$

$mà\ số\ vector\ của\ \{u, v, w\} = 3 = dim\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow Một\ cơ\ sở\ của\ U$ là $S_1 = \{u, v, w\}$

Tìm một cơ sở cho không gian W

Giải hệ phương trình: $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a + b - 2c \\ x_2 = a \in \mathbb{R} \\ x_3 = b \in \mathbb{R} \\ x_4 = c \in \mathbb{R} \end{cases}$

$W = \{(-a + b - 2c, a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-a, a, 0,0) + (b, 0, b, 0) + (-2c, 0,0, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
$= \{a(-1,1,0,0) + b(1,0,1,0) + c(-2,0,0,1) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow$ *Một cơ sở của* W là $S_2 = \{(-1,1,0,0), (1,0,1,0), (-2,0,0,1)\}$

Tìm một cơ sở cho không gian $U + W$:

$U = \langle S_1 \rangle, W = \langle S_2 \rangle \Rightarrow U + W = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$

Đặt $m = (-1,1,0,0), n = (1,0,1,0), p = (-2,0,0,1)$
$\Rightarrow S_1 \cup S_2 = \{u, v, w, m, n, p\}$

Đặt $A = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{d_5-d_1 \\ d_6+2d_1}]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-d_1 \\ d_4+d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_3-d_2 \\ d_4+2d_2 \\ d_5-d_2 \\ d_6+2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_5+d_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_5+2d_4 \\ d_6-d_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U + W$ *có một cơ sở l*à $\{(1,1,0,-1), (0,-1,0,0), (0,0,-1,1), (0,0,0,-1)\}$

Tìm một cơ sở cho $U \cap W$

Đặt $\varphi = (a, b, c, d) \in (U \cap W) \Leftrightarrow \varphi$ *l*à *tổ hợp tuyến tính của* S_1 *v*à S_2

Điều kiện φ là tổ hợp tuyến tính $S_1: \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = \varphi$ *có nghiệm*

Xét $(u \quad v \quad w|\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ -1 & -1 & 0 & d \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_4+d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 & a+d \end{array}\right) \xrightarrow{d_4+d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & a+c+d \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = \varphi \text{ có nghiệm} \Rightarrow a + c + d = 0 \ (1)$$

Điều kiện φ là tổ hợp tuyến tính của S_2: $\alpha_1 m + \alpha_2 n + \alpha_3 p = \varphi$ *có nghiệm*

Xét $(m \quad n \quad p|\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{d_2+d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 0 & 2 & -a-b+c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow[d_4-2d_3]{d_3\leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c-2d \end{array}\right)$$

$$\alpha_1 m + \alpha_2 n + \alpha_3 p = \varphi \text{ có nghiệm} \Rightarrow -a - b + c - 2d = 0(2)$$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+c+d=0 \\ -a-b+c-2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c-d \\ b = 2c-d \\ c \in \mathbb{R} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow U \cap W = \{(-c-d, 2c-d, c, d) | c, d \in \mathbb{R}\}$

$= \{c(-1,2,1,0) + d(-1,-1,0,1) | c, d \in \mathbb{R}\}$
$\Rightarrow$ *Cơ sở của* $U \cap W$ *l*à $\{(-1,2,1,0), (-1,-1,0,1)\}$

3.26 Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (1,1,1,0)$$

$$v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,3,0,1)$$

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, W = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Tính dim(U + W) và dim(U ∩ W)

Lập:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó U có dimU = 2

Lập:

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó W có dimW = 2

Ta có U + W sinh bởi các vector:

$$a_1 = (1,0,2,-1)\ ; a_2 = (0,1,-1,1)\ ;\ b_1 = (1,0,1,0)\ ; b_2 = (0,3,-1,1)$$

Lập:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra U + W có số chiều là 3 và một cơ sở của U + W là $\{a_1, a_2, b_1\}$.

Giả sử $u = (x, y, z, t) \in U \cap W$

Vì $u \in U$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

$$(u_1^T \quad u_2^T\ |u^T) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x - z \\ 0 & 1 & y - 2t \\ 0 & 0 & 2t - y + z \\ 0 & 0 & t - x + z \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in U$ thì $\begin{cases} 2t - y + z = 0 \\ t - x + z = 0 \end{cases}$ (1)

Vì $u \in W$ nên u là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2.

$$(v_1^T \quad v_2^T\ |u^T) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x - t \\ 0 & 3 & y \\ 0 & 0 & z - x + t \\ 0 & 0 & t - \frac{1}{3}y \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W$ thì $\begin{cases} z - x + t = 0 \\ t - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} 2t - y + z = 0 \\ t - x + z = 0 \\ t - \dfrac{1}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ là: $u = (x, y, z, t) = (2t, 3t, t, t)\ với\ t \in \mathbb{R}$.

Các nghiệm cơ bản của hệ là: $(2,3,1,1)$

Vậy $U \cap W$ có cơ sở là $\{(2,3,1,1)\}$.

3.27 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của vectơ u = (3, 1, 4) theo cơ sở $\mathcal{B}$ = {u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)}.

Ta có: $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

$$\Leftrightarrow (3,1,4) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha_1 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [u]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (3, -2,3)$$

3.28. $Trong\ không\ gian\ R_2[t], cho\ các\ đa\ thức$

$$f_1(t) = 1 + t - t^2, f_2(t) = t + t^2, f_3(t) = 3 + 4t - t^2$$

a) *Chứng minh tập hợp* $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ *là cơ sở của* $R_2[t]$.

Xét phương trình: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow r(\tilde{A}) = 3 \longrightarrow B \text{ độc lập tuyến tính.} \quad (1)$$

Với $f_4(t) = x + yt + zt^2 \in R_2[t]$, *ta xét phương trình* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = f_4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = y \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = z \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 1 & 1 & 4 & y \\ -1 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x + y \\ 0 & 0 & 1 & 2x - y + z \end{array}\right) \longrightarrow \text{Hệ có nghiệm, suy ra } B \text{ là tập sinh của } R_2[t]. \ (2)$$

Từ (1) *và* (2) *suy ra* B *là cơ sở của* $R_2[t]$.

b) $Cho\ f(t) = 3 + t\ -\ 2t^2. Hãy\ tìm\ tọa\ độ\ của\ f\ theo\ cơ\ sở\ B.$

$Xét\ phương\ trình$: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 +\ \alpha_3 f_3 = f$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta$ được:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$Vậy\ tọa$ độ $của\ f\ theo\ cơ\ sở\ B$ là $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.29) Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$, cho các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B}$ =$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

$$Với\ mọi\ A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x, y, z, t\ \in \mathbb{R}$$

$$Xét\ phương\ trình\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 +\ \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 =\ A\ ta\ có\ hệ\ phương\ trình$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = z \\ \alpha_1 = t \end{cases}$$

$$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có$$

$$E = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$Ta\ có\ hệ\ phương\ trình\ có\ nghiệm\ duy\ nhất \begin{cases} \alpha_1 = t \\ \alpha_2 = z - t \\ \alpha_3 = 2t - z - y \\ \alpha_4 = -3t + z + y + x \end{cases} \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

$$nên\ A\ là\ tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ B$$

$$do\ đó\ B\ là\ tập\ sinh\ của\ M_2(\mathbb{R})\ mặt\ khác\ do\ hệ\ có\ nghiệm\ duy\ nhất\ nên\ B\ độc\ lập\ tuyến\ tính\ do\ đó\ B\ là\ cơ\ sở\ của\ M_2(\mathbb{R})$$

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của A theo cơ sở $\mathcal{B}$.

$$Nếu\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ thì$$

$$E=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_2 = -2\\ \alpha_3 = 4\\ \alpha_4 = -5\end{cases}$$

$$Vậy\ tọa\ độ\ A\ theo\ cơ\ sở\ B : [A]_B = \begin{pmatrix}3\\ -2\\ 4\\ -5\end{pmatrix}$$

3.30 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

u_1 = (2, 1, −1), u_2 = (2, −1, 2), u_3 = (1, 1, −1).

a) Chứng minh tập hợp B = {u_1, u_2, u_3} là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Đặt u = (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$, ta lập:

$\tilde{A}_1 = (u_1^T, u_2^T, u_3^T|u^T)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 2 & -1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 := d_3 + d_1]{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_2 := d_2 - d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & x - y \\ 0 & -4 & 1 & -x + 2y \\ 0 & 5 & -1 & x - y + z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 5d_2]{\substack{d_2 := d_2 + d_3 \\ d_1 := d_1 - 3d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - 4y - 3z \\ 0 & 1 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & -1 & x - 6y - 4z \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := -d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - 4y - 3z \\ 0 & 1 & 0 & y + z \\ 0 & 0 & 1 & -x + 6y + 4z \end{array}\right) \ (*)$$

Do đó u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, do đó B là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ (a)

Ta cũng lập:

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 := d_2 - 2d_1]{\substack{d_1 \leftrightarrow d_3 \\ d_3 := d_3 - d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do $r(A_1) = 3$ và bằng số vector trong B nên B độc lập tuyến tính (b)

Từ (a) và (b) ta suy ra B = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm $[u]_B$, biết rằng u = (1, 3, −2).

Từ (*) ở câu a) ta có:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 - 4.3 - 3.(-2) \\ 3 + (-2) \\ -1 + 6.3 + 4.(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Tìm v ∈ $\mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Đặt v = (a, b, c) ∈ $\mathbb{R}^3$, từ $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kết hợp với (*) ở câu a) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - 4\mathrm{b} - 3\mathrm{c} = 2 \\ b + c = -3 \\ -\mathrm{a} + 6\mathrm{b} + 4\mathrm{c} = 4 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ma trận hóa hệ phương trình (I) ta có:

$$\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_2]{d_1 := d_1 + 4d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 := -d_3]{\substack{d_1 := d_1 + d_3 \\ d_2 := d_2 + d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Do đó v = $(2, 9, -12)$

3.31 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ u_1 = (1, 0, –1), u_2 = (1, 2, –2), u_3 = (0, –3, 2) và đặt $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

a) Chứng minh B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = (1,0,-1), u_2 = (1,2,-2), u_3 = (0,-3,2)$$

Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(1,2,-2) + \alpha_3(0,-3,2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \ \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ \alpha_1 = \ \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Vậy S độc lập tuyến tính. Mặt khác $\mathbb{R}^3$ là không gian 3 chiều. Nên S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của các vecto ε_1= (1, 0, 0), ε_2 = (0, 1, 0) và ε_3 = (0, 0, 1) theo cơ sở $\mathcal{B}$.

* Với $\varepsilon_1 = (1,0,0) \ \epsilon \ \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow x_1u_1 + \ x_2u_2 + x_3u_3 = \ \varepsilon_1$$

$$\Leftrightarrow \ x_1(1,0,-1) + x_2(1,2,-2) + x_3(0,-3,2) = (1,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \ x_2 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (\varepsilon_1)_s = (-2,3,2)$$

* Với $\varepsilon_2 = (0,1,0) \ \epsilon \ \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow x_1u_1 + \ x_2u_2 + x_3u_3 = \ \varepsilon_2$$

$$\Leftrightarrow \ x_1(1,0,-1) + x_2(1,2,-2) + x_3(0,-3,2) = (0,1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \ x_2 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (\varepsilon_2)_s = (-2,2,1)$$

* Với $\varepsilon_2 = (0,0,1) \epsilon \ \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow x_1u_1 + \ x_2u_2 + x_3u_3 = \ \varepsilon_3$$

$$\Leftrightarrow \ x_1(1,0,-1) + x_2(1,2,-2) + x_3(0,-3,2) = (0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \ x_2 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ (\varepsilon_3)_s = (-3,3,2)$$

3.32 Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ u_1 = (1, 2, 2), u_2 = (1, −1, 1), u_3 = (−1, 2, −1), u'_1 = (1, 1, 2), u'_2 = (1, −2, 1), u'_3 = (2, 1, 4).

a) Chứng minh các tập hợp $\mathcal{B}$ = $\{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Đặt u = (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$, ta lập:

$$\tilde{A}_1 = (u_1^T, u_2^T, u_3^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 2 & -1 & 2 & y \\ 2 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -3 & 4 & -2x + y \\ 0 & -1 & 1 & -2x + z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 + d_2]{\substack{d_2 := d_2 - 4d_3 \\ d_1 := d_1 - d_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5x - y + 4z \\ 0 & 1 & 0 & 6x + y - 4z \\ 0 & 0 & 1 & 4x + y - 3z \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 := d_1 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x + z \\ 0 & 1 & 0 & 6x + y - 4z \\ 0 & 0 & 1 & 4x + y - 3z \end{array}\right) \ (*)$$

Do đó u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, do đó B là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ (a)

Ta cũng lập:

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 + d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - 4d_2]{d_2 := d_2 + d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do $r(A_1) = 3$ và bằng số vector trong $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính (b)

Từ (a) và (b) ta suy ra $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Ta cũng lập:

$$\tilde{A}_2 = ((u'_1)^T, (u'_2)^T, (u'_3)^T \mid u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & -2 & 1 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & -1 & -x + y \\ 0 & -1 & 0 & -2x + z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 + d_2}]{d_2 := d_2 - 4d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -6x - y + 4z \\ 0 & 1 & -1 & 7x + y - 4z \\ 0 & 0 & -1 & 5x + y - 3z \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_2 := d_2 - d_3 \\ d_3 := -d_3}]{d_1 := d_1 + 3d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9x + 2y - 5z \\ 0 & 1 & 0 & 2x - z \\ 0 & 0 & 1 & -5x - y + 3z \end{array}\right)$$

Do đó u là tổ hợp tuyến tính của u'_1, u'_2, u'_3, do đó $\mathcal{B}'$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ (c)

Ta cũng lập:

$$A_2 = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 := d_3 + d_2]{d_2 := d_2 - 4d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Do $r(A_2) = 3$ và bằng số vector trong $\mathcal{B}'$ nên $\mathcal{B}'$ độc lập tuyến tính (d)

Từ (c) và (d) ta suy ra $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b) Tìm $[u]_B$ biết rằng u = (1, 2, 3).

Từ (*) ở câu a) ta có:

$$[u]_B = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 6.1+2-4.3 \\ 4.1+2-3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Tìm v ∈ $\mathbb{R}^3$, biết rằng $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Đặt v = (a, b, c) ∈ $\mathbb{R}^3$, từ $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ kết hợp với (*) ở câu a) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + c = 2 \\ 6a + b - 4c = 3 \\ 4a + b - 3c = -1 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ma trận hóa hệ phương trình (I) ta có:

$$\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_1 := -d_1]{\substack{d_2 := d_2 + 6d_1 \\ d_3 := d_3 + 4d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := -d_3]{\substack{d_1 := d_1 - d_3 \\ d_2 := d_2 + 2d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Do đó v = (6, −1, 8)

d) Tìm $[w]_{B'}$ biết rằng biết rằng $[w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Đặt w = (p, q, r) ∈ $\mathbb{R}^3$, từ $[w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ kết hợp với (*) ở câu a) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -p + \mathrm{r} = 1 \\ 6p + q - 4\mathrm{r} = -3 \\ 4\mathrm{p} + \mathrm{q} - 3\mathrm{r} = 2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ma trận hóa hệ phương trình (I) ta có:

$$\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_3 := d_3 + 4d_1 \\ d_1 := -d_1}]{d_2 := d_2 + 6d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_3 \\ d_2 := d_2 + 2d_3 \\ d_3 := -d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Do đó w = (−4, 9, −3), kết hợp với (**) ở câu a) ta cũng có:

$$[w]_{B'} = \begin{pmatrix} 9.(-4) + 2.9 - 5.(-3) \\ 2.(-4) - (-3) \\ -5.(-4) - 9 + 3.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(B \longrightarrow B')$ và $(B' \longrightarrow B)$.

Từ (*) ở câu a) ta có:

$$[u'_1]_B = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 6.1 + 1 - 4.2 \\ 4.1 + 1 - 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[u'_2]_B = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 6.1+(-2)-4.1 \\ 4.1+(-2)-3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[u'_3]_B = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 6.2+1-4.4 \\ 4.2+1-3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Do đó ma trận chuyển cơ sở $(B \longrightarrow B')$ là:

$$(B \longrightarrow B') = ([u'_1]_B\ [u'_2]_B\ [u'_3]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, -1)$

Từ (**) ở câu a) ta có:

$$[u_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 9.1+2.2-5.2 \\ 2.1-2 \\ -5.1-2+3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[u_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 9.1 + 2.(-1) - 5.1 \\ 2.1 - 1 \\ -5.1 - (-1) + 3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[u_3]_{B'} = \begin{pmatrix} 9.(-1) + 2.2 - 5.(-1) \\ 2.(-1) - (-1) \\ -5.(-1) - 2 + 3.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do đó ma trận chuyển cơ sở $(B' \longrightarrow B)$ là:

$$(B' \longrightarrow B) = ([u_1]_{B'}, [u_2]_{B'}, [u_3]_{B'}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.33 Trong không gian $\mathbb{R}_2[t]$, cho các đa thức $f_1(t) = 1 + t + t^2$, $f_2(t) = 2 + 2t + t^2$, $f_3(t) = 2 + 3t + t^2$, $g_1(t) = 1 + 2t$, $g_2(t) = t$, $g_3(t) = 1 + t^2$.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ và $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$.

Đặt các vector hệ số tương ứng cho $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$:

$$u_1 = (1,1,1)\ ; u_2 = (2,2,1); u_3 = (2,3,1)$$

Đặt các vector hệ số tương ứng cho $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$:

$$v_1 = (1,2,0); v_2 = (0,1,0); v_3 = (1,0,1)$$

Lập $B_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $\det(B_1) = 1$ nên u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Lại có số vector = 3 = $\dim(\mathbb{R}^3)$.

Do đó $\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow \beta = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$. (1)

Tương tự, lập $B_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $\det(B_2) = 1$ nên v_1, v_2, v_3 độc lập tuyến tính. Lại có số vector = 3 = $\dim(\mathbb{R}^3)$.

Do đó $\{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow \beta' = \{g_1, g_2, g_3\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}_2[t]$. (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ và $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Lập ma trận mở rộng:

$$(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T | v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Suy ra: $(\beta \longrightarrow \beta') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Đồng thời: $(\beta' \longrightarrow \beta) = (\beta \longrightarrow \beta')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

Ta có $\tilde{A} = (\beta \longrightarrow \beta' | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[]{\substack{d_3+d_1 \\ -d_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{d_3+d_2 \\ -d_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{d_1+d_3 \\ d_2+d_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_3 | \beta' \longrightarrow \beta)$$

Suy ra: $(\beta' \longrightarrow \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.34 Cho W là không gian sinh bởi các vectơ u_1 = (1, 0, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 1, 0).

a) Chứng minh tập hợp $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W.

$$Xét\ phương\ trình\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$Lập\ ma\ trận\ A = ({u_1}^T, {u_2}^T, {u_3}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - d_1]{d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 + d_2]{d_3 + d_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ta\ có\ rank(A) = 3 = \ số\ ẩn\ nên\ B\ độc\ lập\ tuyến\ tính\ do\ đó\ B\ là\ cơ\ sở\ của\ W$$

b) Cho u = (a, b, c, d) ∈ $\mathbb{R}^4$. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c, d để u ∈ W. Với điều kiện đó, hãy xác định $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

$B\ là\ cơ\ sở\ của\ W\ nên\ W = \{\alpha_1(1,0,1,1) + \alpha_2(1,1,0,1) + \alpha_3(1,1,1,0) |\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \in\ \mathbb{R}\}$

$$Xét\ phương\ trình\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = u$$

$$Ta\ có\ hệ\ phương\ trình$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + \alpha_3 = b \\ \alpha_1 + \alpha_3 = c \\ \alpha_1 + \alpha_2 = d \end{cases}$$

$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có\ \tilde{A}$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-d_1]{d_3-d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow[d_3+d_2]{d_3+d_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+d+b-2a \\ 0 & 0 & -1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & d-a \\ 0 & 0 & 0 & c+d+b-2a \end{array}\right)$$

$$\text{Để } u \in W \text{ thì } c+d+b-2a \neq 0$$

$$\text{Từ } \tilde{A} \text{ ta được} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a-b \\ \alpha_2 = b+d-a \\ \alpha_3 = a-d \end{cases}$$

$$\text{Và ta có } [u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b+d-a \\ a-d \end{pmatrix}$$

c) Đặt $\mathcal{B}' = \{u'_1 = (0, 1, 2, -3), u'_2 = (2, 0, 1, 3), u'_3 = (0, 1, -2, 1)\}$. Chứng minh $\mathcal{B}'$ là cơ sở của W và xác định $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

$$\text{Với } u = (a, b, c, d) \text{ bất kì thuộc } W$$

$$\text{Xét phương trình } \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3 = u \text{ ta có hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 + \alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = c \\ -3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = d \end{cases}$$

$$Ma\ trận\ hóa\ hệ\ phương\ trình\ ta\ có$$

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&0&a\\1&0&1&b\\2&1&-2&c\\-3&3&1&d\end{array}\right)\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&2&0&a\\2&1&-2&c\\-3&3&1&d\end{array}\right)\xrightarrow[d_4+3d_1]{d_3-2d_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&2&0&a\\0&1&-4&c-2b\\0&3&4&d+3b\end{array}\right)\xrightarrow[d_3-2d_2]{\substack{d_3\leftrightarrow d_2\\ d_4-3d_2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&1&-4&c-2b\\0&0&8&a+4b-2c\\0&0&16&d+9b-3c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4-2d_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&b\\0&1&-4&c-2b\\0&0&8&a+4b-2c\\0&0&0&d+b+c-2a\end{array}\right)$$

$Ta\ có\ c+d+b-2a\neq 0\ nên\ hệ\ có\ nghiệm\ duy\ nhất\ do$ đó B'là $tập$ sinh và B'độ$c\ lập\ tuyến\ tính$

Do đó B' là $cơ\ sở\ của\ W$

$$Ta\ có\text{: }[u'_1]_B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$[u'_2]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[u'_3]_B=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$V\text{ậ}y\ (B\ \to B')=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&1&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

3.35 $Cho\ W$ là $không\ gian\ con\ của\ R^4\ sinh\ bởi\ các\ vector\ u_1 = (1,1,1,2), u_2 = (1,2,1,-1)$ và $u_3 = (2,3,1,1)$

a) $Chứng\ tỏ\ rằng\ B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là $cơ\ sở\ của\ W$.

$$Lập\ A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow r(A) = 3.$$

$\longrightarrow B$ độc $lập\ tuyến\ tính \longrightarrow B$ là $cơ\ sở\ của\ W$.

b) $Cho\ u = (a, b, c, d) \epsilon R^4. Tìm$ điều $kiện\ của\ a, b, c, d$ để $u \epsilon W. Với$ điều $kiện$ đó, $hãy\ tìm\ [u]_B$

$theo\ a, b, c, d$.

Để $u \epsilon W$ thì $u\ phải$ là $tổ\ hợp\ tuyến\ tính\ của\ u_1, u_2, u_3$.

$$({u_1}^T {u_2}^T {u_3}^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 2 & -1 & 1 & d \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a - b + c \\ 0 & 1 & 0 & -2a + b + c \\ 0 & 0 & 1 & a - c \\ 0 & 0 & 0 & -5a + 3b + d \end{array}\right)$$

Để $hệ$ có $nghiệm\ thì\ -5a + 3b + d = 0. Với$ điều $kiện$ đó thì $[u]_B = \begin{pmatrix} a - b + c \\ -2a + b + c \\ a - c \end{pmatrix}$

c) $Cho\ u'_1 = (1,1,-1,2), u'_2 = (2,4,1,-2)$ $và\ u'_3 = (1,0,0,5). Chứng\ tỏ\ rằng\ B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$

là $cơ\ sở\ của\ W$ $và\ xác\ định\ ma\ trận\ chuyển\ cơ\ sở$ từ $B\ sang\ B'$ và từ $B'\ sang\ B$.

$Do\ cả\ ba\ vector\ u'_1, u'_2, u'_3$ đều $thỏa\ -5a + 3b + d = 0\ nên\ các\ vector\ này$ đều $thuộc\ W$

$$Lập\ A' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow r(A') = 3$$

$\longrightarrow B'$ độc lập tuyến tính $\longrightarrow B'$ là cơ sở của W $(do\ dimW = |B| = 3 = |B'|)$.

$$Theo\ câu\ b)\ ta\ có: [u'_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, [u'_2]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, [u'_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Suy\ ra\ (B \longrightarrow B') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (B' \longrightarrow B) = (B \longrightarrow B')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.36 Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các vectơ $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 2, -2, 2)$ và $W = \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$.

a. Chứng tỏ rằng $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của W

Xét phương trình: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0, ma\ trận\ hoá\ phương\ trình$:

$$\tilde{A} = (u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+d_1]{d_3-d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-3d_2]{d_3+2d_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_4+3d_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Giải phương trình ta có: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ độc $lập\ tuyến\ tính$

$mà\ số\ vector\ của\ \boldsymbol{\mathcal{B}} = dimW = 3 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ là $cơ\ sở\ của\ W$

b) Cho u = (a, b, c, d) ∈ $\mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện của a, b, c, d để u ∈ W. Với điều kiện đó, hãy tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ theo a, b, c, d.

$u = (a, b, c, d) \in W \Leftrightarrow u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3\ có\ nghiệm$

Ma trận hoá phương trình:

$$\tilde{A} = (u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T | u^T) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 1 & -1 & -2 & c\\ -1 & 2 & 2 & d\end{array}\right)\xrightarrow[d_4+d_1]{d_3-d_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & -2 & -3 & c-a\\ 0 & 3 & 3 & d+a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-3d_2]{d_3+2d_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 0 & 1 & c-a+2b\\ 0 & 0 & -3 & d+a-3b\end{array}\right)\xrightarrow{d_4+3d_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 0 & 1 & c-a+2b\\ 0 & 0 & 0 & d+3c-2a+3b\end{array}\right)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2a + 3b + 3c + d = 0$

Ta có: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ \alpha_3 = -a + 2b + c \\ 0 = -2a + 3b + 3c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = b + c \\ \alpha_2 = 2a - 3b - 2c \\ \alpha_3 = -a + 2b + c \\ 0 = -2a + 3b + 3c + d \end{cases}$

$\Rightarrow [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b + c \\ 2a - 3b - 2c \\ -a + 2b + c \end{pmatrix}$

c) Cho $u'_1 = (2,1,0,1), u'_2 = (2,3,-3,4), và\ u'_3 = (3,3,-2,3)$. Chứng tỏ rằng $\mathrm{B}' = \{\mathrm{u}'_1, u'_2, u'_3\}$ là cơ sở của W và xác định ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ và từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

Xét phương trình: $\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3 = 0$

Ma trận hoá phương trình:

$$\tilde{A} = (u'_1 \quad u'_2 \quad u'_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - d_1]{\substack{d_1 \leftrightarrow d_2 \\ d_2 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 + 3d_2 \\ d_4 + 4d_2}]{d_2 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 - \frac{3}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}'}$ độc lập tuyến tính

mà số vector của $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = dimW = 3 \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}'}$ *là cơ sở của W*

Tìm $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$:

Từ kết quả câu b: $u = (a, b, c, d) \in W$

$$\Rightarrow [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b + c \\ 2a - 3b - 2c \\ -a + 2b + c \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$[u_1']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[u_2']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[u_3']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy: $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \left([u_1']_{\mathcal{B}} \quad [u_2']_{\mathcal{B}} \quad [u_3']_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tìm $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$

Đặt $v = (a, b, c, d) \in W \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3'$

Ma trận hoá hệ phương trình: $\tilde{A} = \left({u_1'}^T \quad {u_2'}^T \quad {u_3'}^T \middle| v \right)$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & -3 & -2 & c \\ 1 & 4 & 3 & d \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 - d_1]{\substack{d_1 \leftrightarrow d_2 \\ d_2 - 2d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & -4 & -3 & a - b \\ 0 & -3 & -2 & c \\ 0 & 1 & 0 & d - b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3+3d_2 \\ d_4+4d_2}]{d_2\leftrightarrow d_4}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & 1 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & -2 & c+3d-3b \\ 0 & 0 & -3 & a-5b+4d \end{array}\right)\xrightarrow{d_4-\frac{3}{2}d_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & b \\ 0 & 1 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & -2 & -3b+c+3d \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{1}{2}b-\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}d \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = b-3\alpha_2-3\alpha_3 \\ \alpha_2 = d-b \\ -2\alpha_3 = -3b+c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}c+\frac{3}{2}d \\ \alpha_2 = d-b \\ \alpha_3 = \frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}c+\frac{3}{2}d \\ d-b \\ \frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}d \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$[u_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[u_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[u_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy: $(\mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}'} \quad [u_2]_{\mathcal{B}'} \quad [u_3]_{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$ biết $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tìm $[v]$:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B}' \to \mathcal{B})[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3.37 Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm tọa độ $[u]_{\mathcal{B}}$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ của vectơ u = (2, 1, −1).

Ta có: $(\beta \longrightarrow \beta_0) = P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$u = (2,1,-1)$$

$$\Rightarrow [u]_\beta = (\beta \longrightarrow \beta_0)[u]_{\beta_0} = (\beta \longrightarrow \beta_0)u^T$$

$$\Rightarrow [u]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vậy: $[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Xác định các vectơ u_1, u_2, u_3 của cơ sở $\mathcal{B}$.

Ta có: $(\beta_0 \longrightarrow \beta) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & u_3^T \end{pmatrix}$

Ta có $\tilde{A} = (P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3+d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1+2d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2+2d_3]{d_1+4d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3|\beta_0 \longrightarrow \beta)$$

Suy ra $(\beta_0 \longrightarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T)$

Vậy các vector u_1, u_2, u_3 của cơ sở β là:

$$u_1 = (1,0,1); u_2 = (2,1,0); u_3 = (4,2,1)$$

3.38 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ u_1 = (3, 2, 3), u_2 = (2, 1, −5), u_3 = (−3, −1, 15). Đặt

$$\begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ v_2 = -2u_1 + 5u_2 + 3u_3 \\ v_3 = u_1 - 2u_2 - u_3 \end{cases}$$

a) Chứng minh $\mathcal{B}$ = $\{u_1, u_2, u_3\}$ và $\mathcal{B}'$ = $\{ v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = (3,2,3), u_2 = (2,1,-5), u_3 = (-3,-1,15)$$

Ta có: $\begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 - u_3 = (4,2,-7) \\ v_2 = -2u_1 + 5u_2 + 3u_3 = (-5,-2,14) \\ v_3 = u_1 - 2u_2 - u_3 = (2,1,-2) \end{cases}$

* Đặt W = $\langle S \rangle$ với S = $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(3,2,3) + \alpha_2(2,1,-5) + \alpha_3(-3,-1,15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 15\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Vậy S độc lập tuyến tính. Mặt khác $\mathbb{R}^3$ là không gian 3 chiều. Nên S = $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

* Với S' = $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Xét:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(4,2,-7) + \alpha_2(-5,-2,14) + \alpha_3(2,1,-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -7\alpha_1 + 14\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Vậy S' độc lập tuyến tính. Mặt khác $\mathbb{R}^3$ là không gian 3 chiều. Nên S' = $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$.

$(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$

Lập ma trận mở rộng:

$$\left(u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \middle| v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -3 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 15 & -7 & 14 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Suy ra: $(\beta \longrightarrow \beta') = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Suy ra: $(\beta' \longrightarrow \beta) = (\beta \longrightarrow \beta')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$