Lớp 23CTT1A

Nhóm 02

Tên thành viên:

- Hồ Hồ Gia Bảo – 23120021
- Hoàng Gia Bảo – 23120022
- Nguyễn Thái Bảo – 23120023
- Nguyễn Thanh Bình – 23120024
- Phan Thị Phương Chi – 23120025
- Nguyễn Hải Đăng – 23120027

2.1 Tính các định thức cấp hai sau

a/

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3.5 - 4.(-2) = 31$$

b/

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4.(-2) - (-1)(-5) = -13$$

c/

$$\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha \\ sin\beta & cos\beta \end{vmatrix} = sin\alpha.cos\beta - cos\alpha.sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$$

d/

$$\begin{vmatrix} sin\alpha & -cos\alpha \\ cos\alpha & -sin\alpha \end{vmatrix} = sin\alpha.(-sin\alpha) - (-cos\alpha).cos\alpha = \text{cosα. cosα} - \text{sinα. sinα} = \text{cos2α}$$

2.3 Giả sử $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha}$**. Hãy tính theo α các định thức sau:**

a/ Ta có:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{\substack{d_1 \leftrightarrow d_3 \\ d_2 \leftrightarrow d_3}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$$

b/ Ta có:

$$\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{d_1 - d_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$$

c/

$$\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix} = 3.2.(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6\alpha$$

d/

$$\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\alpha$$

e/

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$$

$$\begin{vmatrix} i & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha$$

f/ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d - 3\mathrm{g} & 2e - 3\mathrm{h} & 2f - 3\mathrm{i} \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$\xRightarrow{d_2 := d_2 + 3d_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= 2.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\alpha$

2.5 Tính các định thức cấp năm sau

a/

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{d_2+3d_1 \\ d_3+4d_1 \\ d_4-5d_1 \\ d_5-3d_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 15 & 12 & -3 & 9 \\ 0 & 20 & 19 & -4 & 14 \\ 0 & -18 & -17 & 9 & -11 \\ 0 & -9 & -11 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 15 & 12 & -3 & 9 \\ 20 & 19 & -4 & 14 \\ -18 & -17 & 9 & -11 \\ -9 & -11 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-3). \begin{vmatrix} -5 & -4 & 1 & -3 \\ 20 & 19 & -4 & 14 \\ -18 & -17 & 9 & -11 \\ -9 & -11 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1+5c_3 \\ c_2+4c_3 \\ c4+3c_3}}{=} (-3). \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 27 & 19 & 9 & 16 \\ 31 & 21 & 8 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= (-3). \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 27 & 19 & 16 \\ 31 & 21 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2-c_3\\c_3-2c_2}}{=} (-3).\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & 3 & 10 \\ 31 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= (-3).(-1).\begin{vmatrix} 27 & 10 \\ 31 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 3.(27.12 - 31.10)$$

$$= 42$$

Vậy định thức của ma trận đã cho là 42.

b/

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2\\c_2-c_3}}{=} \begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-1)^{5+5}.\begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{5+3}.\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{d_4+2d_1}{=} 2.\begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 13 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-1).(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 13 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 3.(-1).(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2.\begin{vmatrix} 0 & 22 & 15 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 46 & 31 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 31 & 44 \end{vmatrix}$$
$$= 2.(-1).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 22 & 15 \\ 46 & 31 \end{vmatrix} + 3.(-1).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 31 & 44 \end{vmatrix}$$
$$= 2.(22.31 - 46.15) + 3.(15.44 - 31.20)$$
$$= 2.(-8) + 3.40 = 104$$

Vậy định thức của ma trận đã cho là 104.

c/

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 8 & 0 & 3 & 9 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 36 & -9 & 9 & -78 \\ 0 & 15 & -1 & 4 & -28 \\ 0 & 32 & -13 & 9 & -73 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 14 & -6 & 3 & -34 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 36 & -9 & 9 & -78 \\ 15 & -1 & 4 & -28 \\ 32 & -13 & 9 & -73 \\ 14 & -6 & 3 & -34 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -99 & 0 & -27 & 174 \\ 15 & -1 & 4 & -28 \\ -163 & 0 & -43 & 291 \\ -76 & 0 & -21 & 134 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -99 & -27 & 174 \\ -163 & -43 & 291 \\ -76 & -21 & 134 \end{vmatrix}$$
$$= -99\begin{vmatrix} -43 & 291 \\ -21 & 134 \end{vmatrix} + 27\begin{vmatrix} -163 & 291 \\ -76 & 134 \end{vmatrix} + 174\begin{vmatrix} -163 & -43 \\ -76 & -21 \end{vmatrix} = -183$$

2.7 Tìm các giá trị của x để các định thức sau bằng 0.

a/ Ta có:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$
$= -1 + x^3 + x^3 - (-x^2 - x^2 - x^2)$ (Áp dụng quy tắc Sarrus)
$= 2x^3 + 3x^2 - 1$

Để $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ thì $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$

Vậy để định thức đã cho bằng 0 thì $x = \frac{1}{2} hoặc\ x = -1$.

b/ Ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$$
$= 1 + x^6 + x^3 - (x^3 + x^3 + x^3)$ (Áp dụng quy tắc Sarrus)
$= x^6 - 2x^2 + 1$

Để $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ thì $x^6 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

c/

$$\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 1 & -x-3 & x+2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -x-3 & x+2 \\ 5 & x-3 & 2 \\ x+3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -x-3 & x+2 \\ 0 & 6x+12 & -5x-8 \\ 0 & (x+3)^2 & -(x+3)(x+2) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6x+12 & -5x-8 \\ (x+3)^2 & -(x+3)(x+2) \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)(x+2)(6x+12) + (-5x-8)(x+3)^2$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(6x+12) + (-5x-8)(x+3)^2 = 0(*)$$

$Giải\ phương\ trình\ (*)\ ta\ có\ các\ nghiệm\ x = -3, x = -1, x = 0$

d/

$$A = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 8x+13 \end{vmatrix}$$
$$= (x+2)\begin{vmatrix} 3x+4 & 4x+5 \\ 5x+8 & 8x+13 \end{vmatrix} - (2x+3)\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 \\ 5x+8 & 8x+13 \end{vmatrix} + (3x+5)\begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 \\ 3x+4 & 4x+5 \end{vmatrix}$$
$$= (x+2)(4x^2+14x+12) - (2x+3)(4x^2+15x+14) + (3x+5)(x^2+4x+4)$$
$$= -x^3 - 4x^2 - 5x - 2$$
$$A = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 4x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy để $\begin{vmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ 5 & x-3 & 2 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0\ thì\ x = -3\ hoặc\ \ x = -1\ hoặc\ x = 0$

2.9 Tìm ma trận phụ hợp (hay ma trận phó) của các ma trận sau:

a/

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$c_{11} = 8, c_{12} = -5, c_{21} = -3, c_{22} = 7$$
$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận phụ hợp của $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ là $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

b/

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$c_{11} = -57, c_{12} = 51, c_{13} = -3$$

$$c_{21} = 33, c_{22} = -30, c_{23} = 6$$

$$c_{31} = -3, c_{32} = 6, c_{33} = -3$$
$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -57 & 51 & -3 \\ 33 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -57 & 33 & -3 \\ 51 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận phụ hợp của $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ là $\begin{pmatrix} -57 & 33 & -3 \\ 51 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

c/

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$Ta\ có\ c_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$

$c_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12$

$c_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$

$c_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$

$c_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

$c_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$c_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$c_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$c_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7$

Ta có $C = \begin{pmatrix} 18 & -12 & -6 \\ -7 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $vậy\ ta\ có\ adj(A) = \ C^T = \begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d/

$$Đặt\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = (-1)^{\ 1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$ $\qquad$ $c_{12} = (-1)^{\ 1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 16$

$c_{13} = (-1)^{\ 1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20$ $\qquad$ $c_{14} = (-1)^{\ 1+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$Tương\ tự\ ta$ được$: c_{21} = -2, c_{22} = -12, c_{23} = 15, c_{24} = -8$

$c_{31} = 16, c_{32} = 0, c_{33} = -8, c_{34} = 0$

$c_{41} = -6, c_{42} = -4, c_{43} = -3, c_{44} = 8$

$$Suy\ ra\ C = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -20 & 0 \\ -2 & -12 & 15 & -8 \\ 16 & 0 & -8 & 0 \\ -6 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \to adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 16 & -6 \\ 16 & -12 & 0 & -4 \\ -20 & 15 & -8 & -3 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2.11 Tìm điều kiện của tham số để các ma trận sau khả nghịch, sau đó tìm ma trận nghịch đảo tương ứng của nó.

a/

Đặt $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

Để A khả nghịch thì $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{array}\right.$

$Ta\ có\ C = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj(A)} = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$

$$Vậy\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{m^2-1}.\begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m^2-1} & \frac{-1}{m^2-1} \\ \frac{-1}{m^2-1} & \frac{m}{m^2-1} \end{pmatrix} \forall m, m \neq 1\ và\ m \neq -1$$

b/

$$Đặt\ A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 \end{pmatrix}$$

$$\to |A| = (1-m)(-m^2-m+2)$$

$$Để\ A\ khả\ nghịch\ thì\ |A| \neq 0 \to (1-m)(-m^2-m+2) \neq 0 \to m \neq 1\ và\ m \neq -2.$$

$Ta\ có$: $c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m.$ $Tương\ tự\ ta\ có\ c_{12} = m^2 - 1, c_{13} = 1 - m, c_{21} = m - 1,\ c_{22} = 1 - m$

$c_{23} = m^2 - 1, c_{31} = m^2 - 1, c_{32} = 1 - m, c_{33} = 1 - m$

$$Suy\ ra\ C = \begin{pmatrix} 1-m & m^2-1 & 1-m \\ m-1 & 1-m & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 1-m \end{pmatrix} \to adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} 1-m & m-1 & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$\to A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{(1-m)(-m^2-m+2)}\begin{pmatrix} 1-m & m-1 & m^2-1 \\ m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{m^2+m-2} & \frac{-1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \\ \frac{m+1}{m^2+m-2} & \frac{-1}{m^2+m-2} & \frac{-1}{m^2+m-2} \\ \frac{-1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} & \frac{-1}{m^2+m-2} \end{pmatrix}$$

c/

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix} khả\ nghịch \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (2-2m) - (1-m^2) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$$

- Tìm ma trận khả nghịch của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2-2m & m^2-1 & 0 \\ -1 & 1 & m-2 \\ m & -m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 2-2m & -1 & m \\ m^2-1 & 1 & -m \\ 0 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(m-1)^2}\begin{pmatrix} 2-2m & -1 & m \\ m^2-1 & 1 & -m \\ 0 & m-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-m} & -\frac{1}{(m-1)^2} & \frac{m}{(m-1)^2} \\ \frac{m+1}{m-1} & \frac{1}{(m-1)^2} & -\frac{m}{(m-1)^2} \\ 0 & \frac{m-2}{(m-1)^2} & \frac{1}{(m-1)^2} \end{pmatrix}$$

d/ Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -\mathrm{m} & 2m & 1 \end{pmatrix}$

Khi đó:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -\mathrm{m} & 2m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3:=c_3-2c_1]{c_2:=c_2+3c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & m-1 \\ -\mathrm{m} & -\mathrm{m} & 2m+1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ -\mathrm{m} & 2m+1 \end{vmatrix}$$

$= 2.(2m + 1) - (-\mathrm{m}).(\mathrm{m} - 1) = (\mathrm{m} + 1).(\mathrm{m} + 2)$

Như vậy để A nghịch đảo thì:

$detA = 0$

$\Leftrightarrow (m + 1).(m + 2) \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq -1$ và $\mathrm{m} \neq -2$

Đồng thời ta cũng có:

$c_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -7 & m+5 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = -2m^2 - 10\mathrm{m} - 7;\ c_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & m+5 \\ -m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5\mathrm{m} - 3;$

$c_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -\mathrm{m} & 2m \end{vmatrix} = -\mathrm{m};\ c_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 4\mathrm{m} + 3;$

$c_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -\mathrm{m} & 1 \end{vmatrix} = 2m + 1;\ c_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -m & 2m \end{vmatrix} = m;$

$c_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & m+5 \end{vmatrix} = -3\mathrm{m} - 1;\ c_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m+5 \end{vmatrix} = -m + 1;$

$c_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 2$

$\Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2m^2 - 10\mathrm{m} - 7 & -m^2 - 5\mathrm{m} - 3 & -m \\ 4m + 3 & 2m + 1 & m \\ -3m - 1 & -m + 1 & 2 \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} -2m^2 - 10\mathrm{m} - 7 & 4m + 3 & -3m - 1 \\ -m^2 - 5\mathrm{m} - 3 & 2m + 1 & -m + 1 \\ -m & m & 2 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

$A^{-1} = \dfrac{1}{detA}.adj(A)$

$$= \frac{1}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)}.\begin{pmatrix} -2m^2-10\mathrm{m}-7 & 4m+3 & -3m-1 \\ -m^2-5\mathrm{m}-3 & 2m+1 & -m+1 \\ -m & m & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2m^2-10\mathrm{m}-7}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{4m+3}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{-3m-1}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} \\ \frac{-m^2-5\mathrm{m}-3}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{2m+1}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{-m+1}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} \\ \frac{-m}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{m}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} & \frac{2}{(\mathrm{m}+1).(\mathrm{m}+2)} \end{pmatrix}$$

2.13 Ma trận $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n(K)}$ được gọi là trực giao nếu $\boldsymbol{A.A^T = I_n}$. Chứng minh rằng, nếu A trực giao thì detA = ±1. Cho ví dụ về một ma trận trực giao có định thức bằng 1 và một ví dụ về ma trận trực giao có định thức bằng −1.

Ta có: $detA = det(A^T)$ với $A \in M_n(K)$

Do đó:

$det(A.A^T) = det(I_n)$

$\Rightarrow detA.det(A^T) = 1$

$\Rightarrow (detA)^2 = 1$

$\Rightarrow detA = \pm 1$

Do đó nếu A trực giao thì detA = ±1 (điều phải chứng minh).

Ta xét 1 ma trận $A \in M_2(K)$ có dạng $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, khi A trực giao thì:

$A.A^T = I_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \ (*) \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Với các bộ số (a, b, c, d) thỏa hệ (*) thì A sẽ trực giao.

+ Ví dụ ta chọn bộ số (a, b, c, d) = ($\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$), khi đó ta thu được ma trận trực giao $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, đồng thời ta có

$detA = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) . \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

+ Ví dụ ta chọn bộ số (a, b, c, d) = ($-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$), khi đó ta thu được ma trận trực giao $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, đồng thời ta có

$detA = -\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$

2.15 Giải và biện luận (theo tham số m) các hệ phương trình sau:

a/

$\begin{cases} (m - 3)x + 2y = m + 3 \\ -(2m + 1)x + (m + 2)y = 6 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m - 3 & 2 \\ -(2m + 1) & m + 2 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = (m - 1)(m + 4)$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m + 3 & 2 \\ 6 & m + 2 \end{vmatrix} = m^2 + 5m - 6 = (m - 1)(m + 6)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-3 & m+3 \\ -(2m+1) & 6 \end{vmatrix} = 2m^2 + 13m - 15 = (m-1)(2m+15)$$

$TH1: \Delta \neq 0 \leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -4 \end{cases}$. *Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là* $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{m+6}{m+4}, \dfrac{2m+15}{m+4}\right)$

$TH2: \Delta = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$

m $= -4, \Delta_1 = -10 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

$m = 1$, *ta có* $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. *Khi đó hệ phương trình trở thành*:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có x_2 *là ẩn tự do. Suy ra nghiệm của hệ là* $(x_1, x_2) = (-2 + t, t)$ *với* $t \in R$.

b/

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4m^2 - 9m + 5 = (m-1)(4m-5)$$

$TH1: \Delta \neq 0 \leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}. Khi$ đó $hệ$ có $nghiệm$ duy $nhất$ là $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{m - 2}, \frac{1}{m - 2}, \frac{4m - 5}{m - 2})$

$TH2: \Delta = 0 \leftrightarrow \left[\begin{matrix} m = 1 \\ m = 2 \end{matrix}\right.$

- m $= 2, \Delta_1 = -1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- $m = 1$, ta có $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó $hệ$ $phương$ $trình$ $trở$ $thành$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có x_3 là ẩn tự do. Suy ra $nghiệm$ $của$ $hệ$ là $(x_1, x_2, x_3) = (2 - t, 1, t)$ $với$ $t \in R$.

c/

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \ (1)$$

$-$ $Áp$ $dụng$ quy $tắc$ $Cramer$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -m + 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m + 2$$

- Trường hợp $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 2 \end{cases}$
  - Phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(1, \frac{1}{m+3}, \frac{1}{m+3}\right)$$

- Trường hợp $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$
  - $m = -3$:
    - $\Delta_1 = 0;\ \Delta_2 = \Delta_3 = -1 \Rightarrow Hệ\ (1) vô\ nghiệm$
  - $m = 2$
    - $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$
    - $Hệ\ phương\ trình\ trở\ thành$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

    - Ma trận hoá phương trình:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow Phương\ trình\ 2\ tương\ đương$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 2t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d/

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - mx_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - mx_3 = 0 \end{cases} (1)$$

$-\ Áp\ dụng\ quy\ tắc\ Cramer$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 1 & 3 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -m & 3 \\ 0 & 3 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -m \end{vmatrix} = 1 - m$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = m - 1$$

- $Trường\ hợp\ \Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

- Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(1, -\frac{1}{m+3}, \frac{1}{m+3}\right)$$

- $Trường\ hợp\ \Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m = 1 \\ m = -3 \end{matrix}\right.$
  - $m = -3$:

$$\Delta_2 = 4 \Rightarrow Phương\ trình\ (1) vô\ nghiệm$$

  - $m = 1$:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

    - $Hệ\ phương\ trình\ (1) tương\ đương$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} (2)$$

    - Ma trận hoá phương trình (2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Phương trình (2) tương đương:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4t+3}{2} \\ x_2 = \dfrac{2t-1}{2} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e/ $\begin{cases} (2m+1)x_1 - mx_2 + (m+1)x_3 = m-1 \\ (m-2)x_1 + (m-1)x_2 + (m-2)x_3 = m \quad (*) \\ (2m-1)x_1 + (m-1)x_2 + (2m-1)x_3 = m \end{cases}$

Ta biện luận hệ phương trình (*) theo qui tắc Cramer. Ta có:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m+1 & -\mathrm{m} & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow{c_1 := c_1 - c_3} \begin{vmatrix} m & -\mathrm{m} & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m.[(m-1).(2m-1) - (\mathrm{m}-1).(\mathrm{m}-2)]$$

$$= m.(m-1).(\mathrm{m}+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m-1 & -\mathrm{m} & m+1 \\ m & m-1 & m-2 \\ m & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{vmatrix} m-1 & -\mathrm{m} & m+1 \\ m & m-1 & m-2 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1).(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} m-1 & -m \\ m & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1).[(m-1).(m-1) - \mathrm{m}.(-\mathrm{m})]$$

$$= (m+1).(2m^2 - 2\mathrm{m} + 1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2m+1 & \mathrm{m}-1 & m+1 \\ m-2 & m & m-2 \\ 2m-1 & m & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow{c_1 := c_1 - c_3} \begin{vmatrix} m & \mathrm{m}-1 & m+1 \\ 0 & m & m-2 \\ 0 & m & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m & m-2 \\ m & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$= m.[m.(2m-1) - \mathrm{m}.(\mathrm{m}-2)]$$

$$= m^2.(m+1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2m+1 & -\mathrm{m} & m-1 \\ m-2 & m-1 & m \\ 2m-1 & m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \begin{vmatrix} 2m+1 & -\mathrm{m} & m-1 \\ m-2 & m-1 & m \\ m+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1).(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -m & m-1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m+1).[(-m).m - (\mathrm{m}-1).(\mathrm{m}-1)]$$

$$= -(m+1).(2m^2 - 2\mathrm{m} + 1)$$

Ta có $\Delta = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(\mathrm{m}+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $\Delta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$, khi đó hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{(m+1).(2m^2 - 2\mathrm{m} + 1)}{m.(m-1).(\mathrm{m}+1)} = \dfrac{2m^2 - 2\mathrm{m} + 1}{m.(m-1)} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m^2.(m+1)}{m.(m-1).(\mathrm{m}+1)} = \dfrac{m}{m-1} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-(m+1).(2m^2 - 2\mathrm{m} + 1)}{m.(m-1).(\mathrm{m}+1)} = \dfrac{-2m^2 + 2\mathrm{m} - 1)}{m.(m-1)} \end{cases}$$

TH2: $m = 0$, khi đó $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = 1 \neq 0$, do đó hệ phương trình (*) vô nghiệm.

TH3: $m = 1$, khi đó $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = 2 \neq 0$, do đó hệ phương trình (*) vô nghiệm.

TH4: $m = -1$, khi đó $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, do đó hệ phương trình (*) trở thành:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases} (1)$$

Ma trận hóa hệ phương trình (1) ta được:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1:=-d_1]{\substack{d_3:=d_3-d_2\\ d_2:=d_2-3d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{5}d_2]{d_1:=d_1-\frac{1}{5}d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy hệ phương trình (1) tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 = 1 \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (*) có vô số nghiệm với 1 ẩn tự do có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}t + 1 \\ x_2 = -\frac{3}{5}t - 1 \\ x_3 = \mathrm{t} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

f/ $\begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + 2x_3 = m \\ (m-2)x_1 + (m-3)x_2 + x_3 = -m \quad (*) \\ (m+2)x_1 + 3x_2 + (m-1)x_3 = 2m \end{cases}$

Ta biện luận hệ phương trình (*) theo qui tắc Cramer. Ta có:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2 \\ m-2 & m-3 & 1 \\ m+2 & 3 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow[c_3 := c_3 - 2c_2]{c_1 := c_1 - (m+1)c_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -m^2 + 3m + 1 & m-3 & -2\mathrm{m} + 7 \\ -2m - 1 & 3 & m-7 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -m^2 + 3m + 1 & -2\mathrm{m} + 7 \\ -2m - 1 & m-7 \end{vmatrix}$$

$$= -[(-m^2 + 3m + 1).(m-7) - (-2m-1).(-2\mathrm{m} + 7)]$$

$$= m.(m-2).(\mathrm{m} - 4)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ -m & m-3 & 1 \\ 2m & 3 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xRightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 + d_1} \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 3 \\ 0 & 1 & m-5 \end{vmatrix}$$

$$= m.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m-2 & 3 \\ 1 & m-5 \end{vmatrix}$$

$$= m.[(m-2).(m-5) - 1.3]$$

$$= m.(m^2 - 7\mathrm{m} + 7)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m+1 & \mathrm{m} & 2 \\ m-2 & -m & 1 \\ m+2 & 2m & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 + d_1} \begin{vmatrix} m+1 & \mathrm{m} & 2 \\ 2m-1 & 0 & 3 \\ -\mathrm{m} & 0 & m-5 \end{vmatrix}$$

$$= m.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2m-1 & 3 \\ -m & m-5 \end{vmatrix}$$
$$= -m.[(2m-1).(m-5) - (-\mathrm{m}).3]$$
$$= -\mathrm{m}.(2m^2 - 8\mathrm{m} + 5)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m \\ m-2 & m-3 & -\mathrm{m} \\ m+2 & 3 & 2m \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 2d_1]{d_2 := d_2 + d_1} \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m \\ 2m-1 & m-2 & 0 \\ -m & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2m-1 & m-2 \\ -m & 1 \end{vmatrix}$$
$$= m.[(2m-1).1 - (-\mathrm{m}).(\mathrm{m}-2)]$$
$$= m.(m-1).(m+1)$$

Ta có $\Delta = 0 \Leftrightarrow m.(m-2).(\mathrm{m}-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \\ m = 4 \end{array}\right.$

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $\Delta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 4 \end{cases}$, khi đó hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m.(m^2 - 7\text{m} + 7)}{m.(m-2).(\text{m}-4)} = \dfrac{m^2 - 7\text{m} + 7}{(m-2).(\text{m}-4)} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-\text{m}.(2m^2 - 8\text{m} + 5)}{m.(m-2).(\text{m}-4)} = \dfrac{-2m^2 + 8\text{m} - 5}{(m-2).(\text{m}-4)} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{m.(m-1).(m+1)}{m.(m-2).(\text{m}-4)} = \dfrac{(m-1).(m+1)}{(m-2).(\text{m}-4)} \end{cases}$$

TH2: $m = 0$, khi đó $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, do đó hệ phương trình (*) trở thành:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} (1)$$

Ma trận hóa hệ phương trình (1) ta được:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 := d_2 + 2d_1]{d_3 := d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 := -d_2]{d_1 := d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy hệ phương trình (1) tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (*) có vô số nghiệm với 1 ẩn tự do có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -7t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = \mathrm{t} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

TH3: $m = 2$, khi đó $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = -6 \neq 0$, do đó hệ phương trình (*) vô nghiệm.

TH4: $m = 4$, khi đó $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = -20 \neq 0$, do đó hệ phương trình (*) vô nghiệm.