Method of Optimization

Fields of Optimization

- **Convex programming** studies the case when
  - the objective function is convex
  - the constraints, if any, form a convex set.
  - **Linear programming** (LP)
    - the objective function f(x) is linear
    - the set of constraints is specified using only linear equalities and inequalities.
    - called a Polyhedron or a Polytope if it is bounded.
  - **Quadratic programming**
    - the objective function to have quadratic terms,
    - while the set A must be specified with linear equalities and inequalities.
  - **Geometric programming**
    - objective and inequality constraints expressed as posynomials and equality constraints as monomials can be transformed into a convex program.
- **Nonlinear programming**
  - the objective function or the constraints or both contain nonlinear parts.
  - This may or may not be a convex program. In general, the convexity of the pro gram affects the difficulty of solving more than the linearity.
- **Stochastic programming**
  - some of the constraints or parameters depend on random variables.

20.1 Basic Concepts : Optimization

- **จุดประสงค์ ของ optimization problem คือ**การหาค่าที่เหมาะสมที่ทำให้ function มีค่า max. หรือ min. ก็ได้
- function ที่นำมา optimize เรียกว่า ฟังก์ชันจุดประสงค์ **(objective function)**
- ตัวอย่างของ function ที่เราต้องการให้เกิดค่าสูงสุด (maximize)
  - จำนวนลูกค้าเข้ามารับบริการในธนาคารต่อชั่วโมง
  - จำนวนไมล์ที่รถวิ่งไปได้ต่อน้ำมัน 1 แกลลอนของรถชนิดหนึ่ง
  - ปริมาณการผลิตสินค้า ต่อ 1 ช.ม.
- ตัวอย่าง function ที่เราต้องการให้เกิดค่าต่ำสุด (minimize)
  - ต้นทุนต่อหน่วยในการผลิตสินค้า
  - เวลาที่ใช้ในการผลิตสินค้าต่อชิ้น

20.1 Basic Concepts : Unconstrained Optimization

- objective function แปรตามตัวแปรหลายๆ ตัว เช่น

$$f(x,y) \quad \text{หรือ} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ตัวแปร x,y หรือ $(x_1, \ldots, x_n)$ ที่เป็นตัวแปรต้นนี้ เรียกว่า control variables เรียก control เพราะเราสามารถเลือกค่าของตัวแปรเหล่านี้ได้เพื่อให้ได้ค่า Optimize

- การ optimization คือการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimal choice) ของตัวแปรต้นเหล่านี้ (control variables) ซึ่งจะทำให้เกิดค่า objective function ที่เหมาะสมที่สุด(max or min)

≥

20.1 Basic Concepts : Unconstrained Optimization

- บางปัญหานั้นตัวแปรต้นแต่ละค่า $(x_1,\ldots,x_n)$ อาจมีเงื่อนไขข้อจำกัด **(constraint)**
- เงื่อนไขที่กำหนดเพิ่มเติมของตัวแปรต้นแต่ละตัว อาจเกิดโดยธรรมชาติของตัวแปรต้นนั้น เช่น ถ้า x_1 คือต้นทุน $x_1 \geq 0$ เพราะต้นทุนไม่มีติดลบ และ ตัวแปรอื่นๆ เช่น น้ำหนัก,ระยะทาง,เวลา ฯลฯ ที่จะไม่มีทางเป็นค่าลบ

General Description of Optimization

- The **function f(x)** can be called,
  - an **objective function**, **cost function**, **or energy function**.
  - A **feasible solution** that minimizes (or maximizes, if that is the goal) the objective function is called an **optimal solution**.
- Generally
  - **when the feasible region or the objective function of the problem**
    - **not present convexity,**
  - **there may be several local minima and maxima,**
    - **where a local minimum x* is defined**

$$\left\| x - x^* \right\| \leq \delta$$

$$f(x^*) \leq f(x)$$

How can an Optimum be found?

- One of **Fermat's theorems** states that
- **Optima of unconstrained problems** are found at stationary points,
    - where the **1st derivative** or the **gradient of the objective function is zero**
  - More generally, they may be found at **critical points**,
    - where the 1st derivative or gradient of the objective function is zero or
    - **undefined**, or **on the boundary of the choice set**.
- **Optima of inequality-constrained** problems are instead
  - found on **the boundary of the constrained set or**
  - found by the gradient values using **Lagrange multiplier** method.

CONSTRAINED OPTIMIZATION

(LINEAR PROGRAMMING)

20.2 Linear Programming

- Mathematics Programming จะประกอบด้วยวิธีสำหรับแก้ปัญหา

optimization problem แบบที่มีเงื่อนไขข้อจำกัด

(constraint) เพื่อหาค่า max or min สำหรับ objective

function $z=f(x_1,\ldots,x_n)$

- Linear Programming (Linear Optimization) หมายถึง Mathematics Programming ที่มีo

bjective function เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$$z = f(x_1,\ldots, x_n) = ax_1 +\ldots+ ax_n$$

และมีข้อจำกัดอยู่ในรูป linear equalities (อสมการเชิงเส้น) เช่น $3x_1+ 4x_2 \leq 36$,หรือ $x_1 \geq 0$ เป็นต้น

เนื่องจากปัจจุบันประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์มีมากขึ้นดังนั้นเราสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยการคำนวณสมการที่มีตัวแปรเป็นพันๆ ตัวได้

20.2 Linear Programming

- วิธีเซ็ตสมการ linear
- และแนวคิดทางเรขาคณิต geometric solution ตามตัวอย่างต่อไปนี้

EX1 บ. Silvex Products ผลิตถังแก๊สโซลีน ชนิด J และ ชนิด K เครื่องจักรมี 2 เครื่อง(คือ M_1และ M_2) แต่ละเครื่องจะใช้เวลาในการผลิตถังแก๊สทั้ง 2 ชนิด ในอัตราการผลิตที่คงที่ดังนี้คือ

เครื่อง M_1: ถ้าผลิตถังแก๊ส J จะใช้เวลาในการผลิต 2 นาทีต่อถัง

ถ้าผลิตถังแก๊ส K จะใช้เวลาในการผลิต 8 นาทีต่อถัง

เครื่อง M_2: ถ้าผลิตถังแก๊ส J จะใช้เวลาในการผลิต 5 นาทีต่อถัง

ถ้าผลิตถังแก๊ส K จะใช้เวลาในการผลิต 2 นาทีต่อถัง

โดยที่ ถัง J ขายถังละ 40$ และ ถัง K ขายถังละ 88$ จงหาจำนวนชิ้นในการผลิตถัง J (x ถัง) และจำนวนชิ้นในการผลิตถัง K (yถัง) ที่จะทำให้เกิดรายได้ต่อ ช.ม. สูงสุด

20.2 Linear Programming

Solution ∵ จำนวนชิ้นเป็นลบไม่ได้

∴ จะเขียน objective function และconstraint ได้ดังนี้

(0)	$z = 40x_1 + 88x_2$		
(1)	$2x_1 + 8x_2$	≤ 60	(จำนวนนาทีของเครื่อง M_1)
(2)	$5x_1 + 2x_2$	≤ 60	(จำนวนนาทีของเครื่อง M_2)
(3)	x_1	≥ 0	
(4)	x_2	≥ 0	

20.2 Linear Programming

- Fig.442 แสดงกราฟที่ plot จากสมการ **(0)** ถึง สมการ**(4)**

$O: z = 0$

$A: z = 40 \bullet 12 = 480$

$B: z = 40 \bullet 10 + 88 \bullet 5 = 840$

$C:: z = 88 \bullet 7.5 = 660$

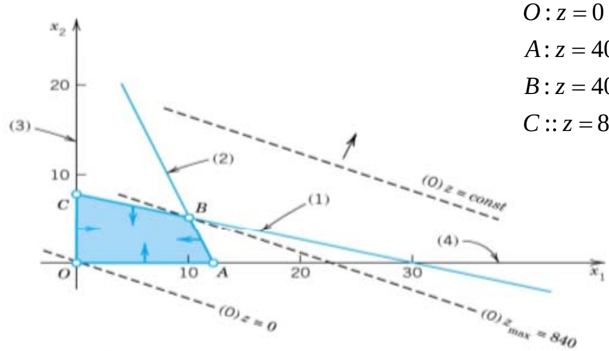

Fig. 442. Linear programming in Example 1

Linear Programming

- จุด 0 : x_1 =0 และ x_2 =0 ดังนั้น z =0
- สมการที่ (1) ตัดจุด C เมื่อ x_1 =0 ดังนั้น x_2 = 60/8=7.5
- สมการที่ (2) ตัดจุด A เมื่อ x_2 =0 ดังนั้น x_1 = 60/5=12
- ตัดจุด B หาจาก

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 8x_2 \le 60 \qquad (a)\\
&5x_1 + 2x_2 \le 60 \qquad (b)\\
&4\times(b); \quad 20x_1 + 8x_2 \le 240 \quad (c)\\
&(c)-(a); \quad 18x_1 \le 180\\
&\qquad \therefore x_1 = 10\\
&instead\ x_1 = 10 \quad in\ (a)\\
&\qquad \therefore x_2 = 5
\end{aligned}
$$

20.2 Linear Programming

- คำตอบที่เกิดประโยชน์สูงสุด หาโดยเลื่อนกราฟรายได้คงที่ขึ้นข้างบนโดยไม่เลยผ่าน feasibility region จะเห็นว่าค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ จะเกิดขึ้นได้ เมื่อเลื่อนเส้นกราฟผ่านมาถึงจุด B ซึ่งเป็นจุดตัดของ (1) และ (2) และ
- จะได้รายได้สูงสุดคือ

  Z = 40(10) + 88(5) = 840 ซึ่งจะเกิดเมื่อแต่ละชั่วโมง จะต้อง ผลิตถังแก๊ส J 10 ถัง และ ผลิตถังแก๊ส K 5 ถัง
- แต่ถ้ามีตัวแปรหลายตัวคงใช้วิธีดูกราฟลำบากเราจะมาดูวิธีอื่น

20.2 Linear Programming: Normal Form

- **เตรียมความพร้อมของสมการ** linear **ไม่ให้ติดในรูปอสมการ โดยใช้** slack variable
- Normal Form **ของโจทย์** Linear Programming

เงื่อนไขข้อจำกัด(constraint) ของโจทย์ต่างๆ สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันได้

เช่น จาก EX1 เงื่อนไข **(1)**

$$2x_1 + 8x_2 \le 60$$

$$60 - 2x_1 - 8x_2 \ge 0$$

ซึ่งสามารถกำหนดตัวแปรใหม่ได้ คือ $x_3 = 60 - 2x_1 - 8x_2$

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$$

$$x_3 \ge 0$$

X_3 คือ ตัวแปรช่วยที่ไม่เป็นลบที่กำหนดขึ้นใหม่เพื่อจะเปลี่ยนอสมการให้อยู่ในรูปสมการ ตัวแปรนี้เรียก ตัวแปร slack

20.2 Linear Programming :Normal form

Maximize:

$$z = f(\vec{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1)$$

ภายใต้เงื่อนไข:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\
a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots\\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\\
 & x_i & \ge & 0 & (i=1,\ldots,n) & &
\end{array}
$$

20.3 Simplex Method

- 1. จัดรูป Normal Form
- 2. สร้าง Simplex Table
- 3. หา basic variable และ non basic variable แล้วเซ็ตค่า

non basic variable ให้เป็น 0 ทั้งหมดเพื่อหา feasible solution

3.1 กรณีหา Maximize: ถ้าไม่มีสมาชิกแถวที่ 1 ใน Simplex Table ไม่มีสมาชิกตัวใดมีค่า < 0 ให้หยุดการทำงาน ไม่เช่นนั้นไปทำข้อ 4

3.2 กรณีหา Minimize: ถ้าไม่มีสมาชิกแถวที่ 1 ใน Simplex Table ไม่มีสมาชิกตัวใดมีค่า > 0 ให้หยุดการทำงาน ไม่เช่นนั้นไปทำข้อ 4

- 4 หา Pivot

4.1 หา column pivot

4.2 หา row pivot

4.3 ทำ row operation คือการกำจัดสมาชิกตัวอื่นๆ ที่ไม่ได้เป็น pivot ให้มีค่าเป็น 0 แล้วกลับไปทำข้อ 3

20.3 Simplex Method

- วิธีนี้การดำเนินการจาก basic feasible solution หนึ่ง ไปยังอีก basic feasible solution หนึ่ง จะต้องทำให้ objective function มีค่าเพิ่มขึ้นเสมอ

จากโจทย์เดิม

maximize $z = 40x_1 + 88x_2$

ภายใต้ constraint

$$2x_1 + 8x_2 \le 60$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 60$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

20.3 Simplex Method

จะได้ Normal Form ของโจทย์ซึ่งเขียนรวมกับ objective function ได้ดังนี้

$$z - 40x_1 + 88x_2 = 0$$
$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$$
$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 60$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$

20.3 Simplex Method

หา optimal solution จาก augmented matrix ต่อไปนี้

$$T_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1 & -40 & -88 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 8 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \end{array}$$

ในตาราง simplex table จะมีตัวแปร 2 ชนิด คือ

- basic variable คือ ตัวแปรในคอลัมน์ใดๆ มีสมาชิกที่ไม่เป็น 0 เพียงตัวเดียว เช่น x_3 และ x_4 ในตาราง T_0
- nonbasic variable คือ ตัวแปรอื่นๆที่ไม่ใช่ basic variable
- Feasible solution for which at least n-m of variables $x_1,\ldots,x_n$ are zero
- From fig.422 we have n =2, m=4

20.3 Simplex Method

ซึ่งหา basic feasible solution ได้โดย

เซตค่า nonbasic variable ให้เป็น 0 หมด จะสามารถแก้สมการหาค่า

basic feasible solution ได้ดังนี้

$$T_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1 & -40 & -88 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 8 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4)$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 60/1 = 60$, $x_4 = 60/1 = 60$, $z = 0$

โดย x_3หาจาก row2 , x_4หาจาก row3

20.3 Simplex Method

- optimal solution หาได้จากการทำ pivoting พิจารณาจาก basic feasible solution ที่ให้ค่า z มากขึ้นจนได้ค่า z ที่สูงที่สุด (ในกรณีที่ต้องการค่า objective function สูงสุด)

step<u>ที่1</u>

Operation O1 : เลือก pivot column

แถวที่ 1 เลือก column แรกที่พบว่ามีสมาชิกเป็นค่าติดลบ เช่นในสมการที่ (4) พบที่คอลัมน์ที่ 2 คือค่า -40 นั่นคือ คอลัมน์ที่ 2 เป็น pivot column (กรณี Maximize)

Operation O2 : เลือก pivot row โดยหารค่าด้านขวาสุดของแต่ละแถวด้วยสมาชิกของ pivot column (เช่นในสมการที่ (4) คือ 60/2= 30,60/5 = 12) เลือกแถวที่ให้ค่าผลหารที่ต่ำสุด ตามตัวอย่างสมการที่ (4) คือแถวที่ 3 เป็น pivot row

Operation O3: ทำการกำจัดด้วยวิธี row operation เพื่อทำให้ค่าที่อยู่ในแถวอื่นๆ ณ ตำแหน่ง pivot column เป็น 0 ทั้งหมดยกเว้นแถวที่เป็น pivot row

จากสมการที่ (4) จะได้

20.3 Simplex Method

$$T_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1 & 0 & -72 & 0 & 8 & 480 \\ \hline 0 & 0 & 7.2 & 1 & -0.4 & 36 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} Row1 + 8Row3 \\ Row2 - 0.4Row3 \\ \end{array}$$

- ในตอนนี้ x_1และ x_3จะเป็น basic variable ทำการ set ค่า non basic variable คือ x_2และ x_4ให้เป็น 0 จะได้ค่า basic feasible solution

$x_1 = 60/5 = 12$, $x_2 = 0$, $x_3 = 36/1 = 36$, $x_4 = 0$, $z = 480$

ซึ่งก็คือจุด A ในรูป 442

20.3 Simplex Method

<u>Step ที่2</u> คำตอบที่ได้ ยังไม่ optimal เนื่องจากยังมีค่า -72 ใน row 1 อยู่อีก เราต้องใช้ **O1** ถึง **O3** อีกครั้ง

O1: เลือก column 3 (เนื่องจาก -72 < 0)

O2: เราจะได้สมการ 36/7.2 = 5 และ 60/2 = 30 เลือก7.2 เป็นค่า pivot (เนื่องจากได้ค่าผลหารน้อยกว่า) เลือกแถวที่ 3

O3: ทำการกำจัดด้วยวิธี row operation จะได้

$$T_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 10 & 4 & 840 \\ \hline 0 & 0 & 7.2 & 1 & -0.4 & 36 \\ 0 & 5 & 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{0.9} & 50 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} Row1 + 10Row2 \\ \\ Row3 - \frac{2}{7.2}Row2 \end{array}$$

20.3 Simplex Method

จะเห็นว่าในตอนนี้ x_1, x_2 เป็น basic และ x_3, x_4 เป็น non basic set ค่าให้ x_3, x_4 เป็น 0 จะได้ basic feasible solution จาก T2

$x_1 = 50/5 = 10$, $x_2 = 36/7.2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $z = 840$
ซึ่งก็คือจุด B ในรูป 442

- เนื่องจาก T2 จะไม่มีค่าลบเหลือใน row 1 อีก
- สรุปได้ว่า $z = f(10, 5) = (40)(10) + (88)(5) = 840$ เป็นยอดขายสูงสุดที่เป็นไปได้

20.3 Simplex Method

- ถ้าเราต้องการที่จะ minimize $z = f(x)$ (แทนที่จะทำ maximize) เราจะมีการเลือก column ของ pivot โดยดูจากค่าที่เป็นบวกใน row 1
- แต่การเลือกค่า pivot ยังคงเลือกทุกค่าที่ให้ผลหารน้อยสุดเหมือนเดิม

Simplex Difficulties

- Problem #1: Degeneracy
  - degenerate feasible solution
    - คือ feasible solution ซึ่งมีตัวแปรที่เป็น 0 มากกว่ากรณีปกติ
    - ทำให้ solve for optimum ไม่ได้
- Problem #2: Difficulties in Starting
  - Ex. the constraint condition, it leads to the violation of the constraint condition

20.4 Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

1) Degeneracy (**ความเสื่อม**)

degenerate feasible solution คือ feasible solution ซึ่งมีตัวแปรที่เป็น 0 มากกว่ากรณีปกติ (คือ มากกว่า n-m ตัวแปร) เมื่อ n คือตัวแปรทั้งหมด และ m คือ จำนวนเงื่อนไขขอบเขต (โดยไม่นับรวมกับเงื่อนไข $x \geq 0$)

ส่วนปัญหาที่ผ่านมา มี $n = 4$, $m = 2$ และมี ตัวแปรที่เป็น 0 เท่ากับ $n - m = 2$ พอดี ในแต่ละ solution

20.4 Simplex Method : Degeneracy

EX 1 Simplex Method, degenerate solution

บ. AB steel ผลิตเหล็ก 2 ชนิด คือ I1 I2 โดยใช้วัตถุดิบ 3 ชนิด คือ R1 R2 R3 (คือเหล็กแปรรูป และ สินแร่อีก 2 ชนิด) ดังแสดงในตาราง จงหาวิธีที่ทำให้เกิดกำไรสูงสุดต่อวัน

Raw Material	Raw Material Needed per Ton: Iron I_1	Iron I_2	Raw Material Available per Day (tons)
R_1	2	1	16
R_2	1	1	8
R_3	0	1	3.5
Net profit per ton	\$150	\$300	

20.4 Simplex Method : Degeneracy

Solution กำหนด x_1และ x_2 คือจำนวนตันที่ผลิต I_1, I_2 ได้ในแต่วัน ตามลำดับ จุดประสงค์คือ maximize สมการ

(1) $z = f(\mathbf{X}) = 150\, x_1 + 300\, x_2$

โดยอยู่ภายใต้ข้อจำกัด $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ และ

$2x_1 + x_2 \leq 16$ (วัตถุดิบ R_1)

$x_1 + x_2 \leq 8$ (วัตถุดิบ R_2)

$x_2 \leq 3.5$ (วัตถุดิบ R_3)

20.4 Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

เราจะได้ normal form ของข้อจำกัด คือ

(2)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 16 \\
x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 8 \\
x_2 \quad + x_5 &= 3.5 \\
x_i \geq 0 \; (i = 1,2,3,4,5)
\end{aligned}
$$

20.4 Simplex Method : Degeneracy

และได้กราฟ

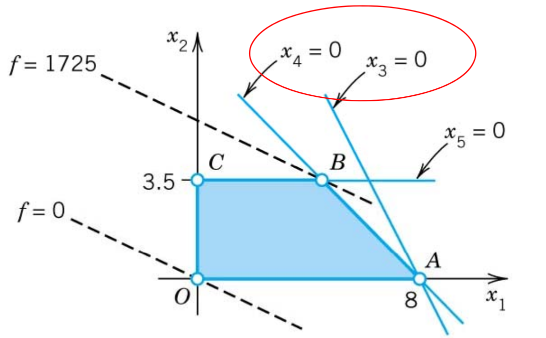

Fig. 443. Example 1, where *A* is degenerate

20.4 Simplex Method : Degeneracy

$$
\begin{array}{c}
\quad\; z \quad\; x_1 \quad\;\; x_2 \quad\;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\;\; b \\
T_0 = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c}
1 & -150 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3.5
\end{array}\right]
\end{array}
$$

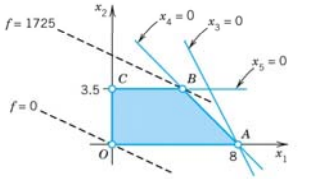

Fig. 443. Example 1, where A is degenerate

- พบว่า x_1, x_2 เป็น nonbasic ส่วน x_3, x_4, x_5 เป็น basic
- ดังนั้นเซ็ตค่า non basic variable ให้เป็น 0 จะได้ basic feasible solution ดังนี้
- $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 =$ 16/1 = 16 , x_4 = 8/1 = 8 , x_5 = 3.5/1 = 3.5 ,
- z = 0 ซึ่งก็คือจุด O (0,0) ในรูป 443
- ขณะนี้ เราจะมีตัวแปร x อยู่ n = 5 ตัว และข้อจำกัด m = 3 ตัว และมีตัวแปร x ที่เป็น 0 อยู่ 2 ตัว = 5-3 (n – m) พอดี จึงยังคงเป็น non degenerate feasible solution อยู่

20.4 Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

ในตอนนี้ เราจะมีตัวแปร x อยู่ n = 5 ตัว และข้อจำกัด m = 3 ตัว และมีตัวแปร x ที่เป็น 0 อยู่ 2 ตัว = n – m พอดี

จึงยังคงเป็น non degenerate feasible solution อยู่

<u>Step ที่ 1</u> **ของการทำ** pivoting

O1: เลือก column ของ pivot จะได้ column 2 (-150 < 0)

O2: เลือก row ของ pivot จาก 16/2 = 8, 8/1 = 8, 3.5/0 หาค่าไม่ได้

ดังนั้นเราควรเลือก row 2 หรือ row 3 ซึ่งให้ค่าเท่ากัน

ลองเลือก row 2 (ซึ่งมี pivot = 2) ก่อน

O3: ทำการกำจัดด้วย row operation จะได้ simplex table T_1

20.4 Simplex Method : Degeneracy

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{c}
\quad\; z \;\; x_1 \quad x_2 \quad\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; b \\
T_1 = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c}
1 & 0 & -225 & 75 & 0 & 0 & 1200 \\ \hline
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3.5
\end{array}\right]
\end{array}
&
\begin{array}{l}
Row1 + 75Row2 \\
\\
Row3 - \dfrac{1}{2}Row2 \\
Row4
\end{array}
\end{array}
$$

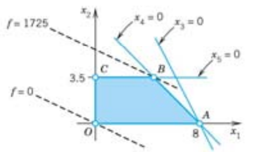

Fig. 443. Example 1, where A is degenerate

- จะเห็นว่า x_1, x_4, x_5 เป็น basic และ x_2, x_3 เป็น non basic ดังนั้นเซ็ตค่า non basic ให้เป็น 0 จะได้ basic feasible solution ดังนี้

$x_1 =$ 16/2 = 8 , $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_4 = 0/1 = 0 , x_5 = 3.5/1 = 3.5 , z = 1200

- ซึ่งก็คือ จุด A: (8,0) ในรูป 443
- แต่ solution นี้เป็น degenerate เพราะมีตัวแปรที่เป็น 0 คือ 3 ตัว ซึ่งมากกว่า n – m โดยทางเรขาคณิต เส้นตรง x_4 = 0 ก็ผ่านจุด A ด้วย ทำให้รอบต่อไป เราจึงคาดหวังให้ x_4 กลายเป็น non basic เพื่อจะได้ไม่กลับมาพิจารณาซ้ำ เงื่อนไขเดิม

20.4 Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

<u>Step ที่ 2</u> ของการทำ pivoting

O1: เลือก column ของ pivot เป็น column 3 (-22.5 < 0)

O2: เลือก row ของ pivot โดยพิจารณาจาก 16/1 = 16, 0/ ½ = 0 เลือก ½ เป็น pivot คือ row 3

O3: ทำการกำจัดด้วย row operation จะได้ simplex table T_2

20.4 Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

$$
T_2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & -150 & 450 & 0 & 1200 \\ \hline
0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 16 \\
0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3.5
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ Row1 + 450Row3 \\ Row2 - 2Row3 \\ \\ Row4 - 2Row3 \end{array}
$$

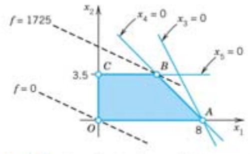

Fig. 443. Example 1, where A is degenerate

จะพบว่า basic variable ในตอนนี้คือ x_1 , x_2 , x_5 และ non basic variable คือ x_3 , x_4 $\therefore$ x_4 กลายเป็น non basic ตามที่คาดไว้

set ค่า non basic เป็น 0 จะได้

$x_1 = 16/2 = 8$, $x_2 = 0/½ = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3.5/1 = 3.5$, $z = 1200$

ซึ่งยังคงเป็นจุด A จุดเดิมอยู่ คือ (8,0) ในรูป 443 และ z ไม่เพิ่มขึ้น แต่เป็นการเปิดทางไปสู่ค่า maximum ใน step ถัดไป

20.4 Simplex Method : Degeneracy

Step ที่ 3 ของการทำ pivoting

O_1 : เลือก column ของ pivot เป็น column 4 ($\because$ -150 < 0)

O_2 : เลือก row ของ pivot โดยพิจารณาจาก

16/2 = 8 , 0/(- ½) = 0, 3.5/1=3.5 แต่ครั้งนี้ต้องเลือก 1 เป็น pivot

(ถ้าเรายังเลือก (- ½) เราจะไม่สามารถพ้นไปจากจุด A ได้)

O_3 : ทำการกำจัดด้วย row operation จะได้ simplex table **(6)**

(6)

$$
T_3 = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 150 & 150 & 1725 \\ \hline
0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 9 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1.75 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3.5
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ Row1 + 150Row4 \\ Row2 - 2Row4 \\ Row3 + \frac{1}{2}Row4 \\ \\ \end{array}
$$

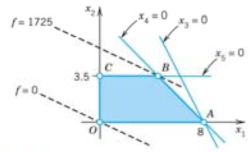

Fig. 443. Example 1, where A is degenerate

20.4 Simplex Method : Degeneracy

ในตอนนี้ basic จะเป็น x_1 , x_2 , x_3 และ non basic จะเป็น x_4 , x_5

set ค่า x_4 , x_5 ให้เป็น 0 จะได้ basic feasible solution ดังนี้

$x_1 = 9/2 = 4.5$, $x_2 = 1.75/½$, $x_3 = 3.5/1 = 3.5$, x_4 0 , $x_5 = 0$, $z = 1725$

ซึ่งจะได้จุด B : (4.5, 3.5) ในรูป 443 และเนื่องจาก row 1 ใน T_3 ไม่มีค่าลบเหลืออยู่

$\therefore$ เราจะได้กำไรสูงสุดต่อวัน

$z_{max} = f(4.5, 3.5) = 150 \bullet 4.5 + 300 \bullet 3.5 = 1725$

ซึ่งจะได้กำไรสูงสุด โดยผลิต I_1 4.5 ตัน และ I_2 3.5 ตัน ต่อวัน

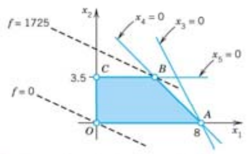

Fig. 443. Example 1, where A is degenerate

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

Difficulties in Starting ความยากในการเริ่มต้น

ในบางครั้งเป็นการยากที่จะหา basic feasible solution เพื่อที่จะ start ดังเช่นกรณี แนวคิดของ artificial variable

EX 2 Simplex Method : difficult start, artificial variable

จง maximize

(7) $z = f(\mathbf{X}) = 2x_1 + x_2$

ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ และ

$$
\begin{aligned}
x_1 - ½\, x_2 &\ge 1 \\
x_1 - x_2 &< 2 \\
x_1 + x_2 &\le 4
\end{aligned}
$$

Solution ด้วยวิธี slack variable เราจะได้ normal form ของข้อจำกัดคือ

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

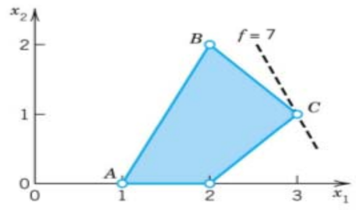

Fig. 444. Feasibility region in Example 2

(8)

$$x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 4$$
$$x_i \geq 0 \; (i = 1,2,3,4,5)$$

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

- จาก **(7)** และ **(8)** จะได้ simplex table

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
T_0 = & \left[\begin{array}{c|cc|ccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}\right]
\end{array}
$$

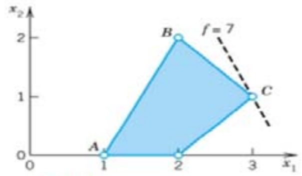

Fig. 444. Feasibility region in Example 2

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

x_1 , x_2 เป็น non basic และ x_3 ,x_4 ,x_5 เป็น basic

∴ set ค่า non basic ให้เป็น 0 จะได้ค่าต่างๆ ดังนี้

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/(-1) = -1$, $x_4 = 2/1 = 2$, $x_5 = 4/1 = 4$,
$z = 0$

$x_3 < 0$ แสดงว่า จุด (0,0) อยู่นอก feasibility region

∵ $x_3 < 0$ เราจะไม่สามารถทำต่อไปได้ แทนที่จะหา basic variable ตัวอื่นๆ ต่อไป

เราจะใช้ idea ต่อไปนี้ ในการแก้สมการแรกใน **(8)** โดยการจัดรูปสมการเพื่อหา x_3 จะได้

$$x_3 = -1 + x_1 - \tfrac{1}{2}x_2$$

และเพิ่มตัวแปร x_6 เข้าไปทางขวาของสมการ

(9) $x_3 = -1 + x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_6$

x_6 เรียกว่า artificial variable และอยู่ภายใต้เงื่อนไข $x_6 \geq 0$

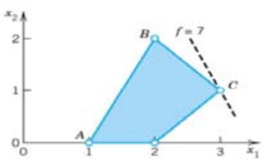

Fig. 444. Feasibility region in Example 2

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

เราจะต้องคำนึงด้วยว่า x_6 จะต้องหายไปในตอนท้าย ∵ x_6 ไม่ใช่ส่วนหนึ่งของโจทย์ที่ให้มา ซึ่งจะทำได้โดยเพิ่มพจน์ - Mx_6 (M มีค่ามากๆ) เข้าไปใน objective function ซึ่งจะทำให้เกิด modified objective function สำหรับ extended problem นี้ จะได้

$$\hat{z} = z - Mx_6 = 2x_1 + x_2 - Mx_6 = (2+M)x_1 + (1 - \frac{1}{2}M)x_2 - Mx_3 - M \qquad (10)$$

แปลง Mx_6 อยู่ในรูปของตัวแปร slack variable

- จากสมการที่ (9) $x_3 = -1 + x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_6$
- จากสมการที่ (10) $\hat{z} = z - Mx_6 = 2x_1 + x_2 - Mx_6$
- M x (9); จะได้

$$Mx_3 = M(-1 + x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_6)$$

$$Mx_6 = Mx_3 + M - Mx_1 + \frac{1}{2}Mx_2$$

- แทน Mx_6 ลงในสมการที่ (10) จะได้

$$\hat{z} = z - Mx_6 = 2x_1 + x_2 - (Mx_3 + M - Mx_1 + \frac{1}{2}Mx_2)$$

$$\hat{z} = (2+M)x_1 + (1 - \frac{1}{2}M)x_2 - Mx_3 - M$$

$$\hat{z} - (2+M)x_1 - (1 - \frac{1}{2}M)x_2 + Mx_3 = -M$$

Simplex Table

$$\hat{z} - (2+M)x_1 - (1 - \frac{1}{2}M)x_2 + Mx_3 = -M \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 \qquad &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2 \qquad (8) \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_3 = -1 + x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_6$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_6 = 1 \qquad (9)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \hat{z} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \end{array} \\ T_0 = & \left[\begin{array}{c|cc|cccc|c} 1 & -2-M & -1+\frac{1}{2}M & M & 0 & 0 & 0 & -M \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

- จาก simplex table คือ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \hat{z} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \end{array} \\ T_0 = & \left[\begin{array}{c|cc|cccc|c} 1 & -2-M & -1+\frac{1}{2}M & M & 0 & 0 & 0 & -M \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \to 1/1 = 1 \\ \to 2/1 = 2 \\ \to 4/1 = 4 \\ \to 1/1 = 1 \end{array}$$

พบว่า x_4, x_5, x_6 เป็น basic และ x_1,x_2, x_3 เป็น non basic
Column 2 (row 1) < 0 เลือกเป็น column pivot และ
1/1 < 2/1, < 4/1 เลือก row 2 เป็น row pivot
แล้วทำ row operation

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} \hat{z} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \end{array} \\ T_1 = & \left[\begin{array}{c|cc|cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} R_1 = R_1 - (-2-M)R_2 \\ \\ R_3 = R_3 - R_2 \\ R_4 = R_4 - R_2 \\ R_5 = R_5 - R_2 \end{array}$$

พบว่า x_1,x_4, x_5, x_6 เป็น basic และx_2, x_3 เป็น non basic
ดังนั้น x_2=0, x_3 =0 จะได้ x_1 =1 ,row 2
x_4 = 1, row 3
x_5 = 3, row 4
x_6 = 0, row 5
z = 2, row1
ซึ่ง x_1 =1, x_2=0 คือ จุด A ในรูปที่ 444

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

ตัดแถวที่ 5 และคอลัมน์ 7 ทิ้งคงเหลือ Simplex Table ดังนี้

$$
\begin{array}{c} \\ T_2 = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{c:c:c:ccc:c}
1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ \hdashline
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\
\longrightarrow \frac{1}{1/2} = 2 \\
\longrightarrow \frac{1}{1/2} = 2 \\
\longrightarrow \frac{3}{3/2} = 2
\end{array}
$$

ใน column 3 เลือก 3/2 เป็น pivot นั่นคือแถว 4 เป็น row pivot ทำ Row Operation จะได้ตารางในหน้าถัดไป

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

$$
\begin{array}{c} \\ T_3 = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{c:cc:ccc:c}
1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 6 \\ \hdashline
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\
R_1 = R_1 + \frac{4}{3}R_4 \\
R_2 = R_2 + \frac{1}{3}R_4 \longrightarrow \cancel{\frac{2}{\frac{2}{3}}} = 3 \\
R_3 = R_3 + \frac{1}{3}R_4 \longrightarrow \frac{2}{\frac{4}{3}} = 1.5 \\
\longrightarrow 3/1 = 3
\end{array}
$$

พบว่า x_1, x_2, x_4 เป็น basic และ x_3, x_5 เป็น non basic

ดังนั้น $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ จะได้ $x_1 = 2$,row 2

$x_4 = 2$, row 3

$x_2 = (3x2)/3 = 2$, row 4

$z = 6$, row1

ซึ่ง $x_1 = 2, x_2 = 2$ คือ จุด B ในรูปที่ 444, $x_3, x_4, x_5 = 0$

ใน column 4 เลือก 4/3 เป็น pivot และ row 3 เป็น row pivot

ทำ row operation ได้ตารางหน้าถัดไป

20.4 Simplex Method : Difficulties in Starting

$$
\begin{array}{c} \\ T_4 = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{c:cc:ccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 7 \\ \hdashline
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

แถวแรกไม่มีค่าลบแล้วหยุดการหา

จะให้ผลคือ $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ (คือจุด C ในรูป 444),

$x_3 = 3/2, x_4 = 0, x_5 = 0$

$f_{max} = f(3,1) = 7$

References

- Advanced Engineering Mathematics, 9th edition by Erwin Kreyszig, John Wiley & Sons, Inc., 1999
- Special Thanks to ผศ.ดร.อรัญญา วลัยรัชต์
  - for ppt of Simplex Method
- MIT Math Lecture: Engineering Methods I - 31 - Methods in Linear Programming
  - Prof. Gilbert Strang
  - http://video.google.com/videoplay?docid=754226565202103395#