

Proyecto Final Econometría II:

Estudio del mercado inmobiliario: ¿Puede predecirse el precio del ETF VNQ?



Bordaberry & Odizzio

Prof. Fernando Borraz P.h.D & Rodrigo Gonzalez

Econometría II - Primer semestre 2023
Universidad de Montevideo

Abstract

Utilizamos modelos ARMA, GARCH y TGARCH para predecir el precio ajustado de Vanguard Real Estate ETF (VNQ). En primer lugar, diferenciamos la serie y estimamos modelos ARMA diferenciados. Incorporamos variables dummy para controlar por el shock de COVID 19 en los modelos ARMA. Comparamos dichos modelos contra un ARMA simple.. Concluimos que el mejor ARMA es aquel con una dummy más pequeña centrada en el shock, y que el mejor modelo es ARIMA(1,1,4). Realizamos un train test split, intentando predecir el último 5% de los datos y comparando con los valores reales. A su vez, predecimos 30 semanas en el futuro utilizando la metodología bootstrap para simular 100 caminos distintos con distintas variantes de intervalos de confianza.

En segundo lugar, mediante la metodología Ljung -Box, detectamos que existe autocorrelación entre los residuos cuadrados, por lo que optamos por utilizar los modelos GARCH y TARCH. Estimamos modelos GARCH de forma manual, imponiendo nuestros modelos ARMA encontrados anteriormente. Luego estimamos modelos GARCH dejando que el modelo decida los valores de los coeficientes. A su vez, incorporamos modelos TGARCH que responden de manera asimétrica a shocks negativos. Por último, descomponemos la serie y estimamos modelos TGARCH sobre el componente aleatorio únicamente.

Abstract	1
Motivación	4
Literature Review	4
Literatura Teorica.	4
Literatura Especifica	4
Hipótesis y Modelos	5
Detalles del ETF VNQ	5
Datos	6
Exploración de Datos	7
Gráfica I: Serie de Tiempo del Precio Ajustado de VNQ	8
Descomposición de la Serie	8
Gráfica II: Descomposición de la Serie	8
Diferenciación de la Serie	9
Gráfica III: Serie de Tiempo del Precio de VNQ Diferenciado.	9
Tabla 1: Pruebas Empíricas de Raíces Unitarias	9
ACF y PACF	10
Gráfica IV: Función de Autocorrelación para la serie diferencia	10
Gráfica V: Función de Autocorrelación Parcial para la serie diferenciada.	11
Modelo ARMA Simple	12
Modelo con Dummy COVID 19	12
Dummy 1	12
Gráfica VI: Dummy vs VNQ	13
Gráfica VII: Corte Dummy I	13
Dummy 2	14
Gráfica VIII: Dummy 2 vs VNQ	15
Gráfica IX: Corte Dummy 2	15
Dummy 3	16
Gráfico X: Dummy 3 vs VNQ	17
Gráfica XI: Corte Dummy 3	17

Comparación de Modelos ARMA	19
ARIMA Forecast	20
Gráfica XII: Predicción sobre 5% con ARMA	20
Predicciones ARMA con Bootstrap	21
Gráfica XII: Predicción ARMA Bootstrap 30 Semanas I	21
Gráfica XIII: ARMA Bootstrap 30 Semanas II	22
Autocorrelación: modelos GARCH y TARCH	23
Gráfica XIV: Residuos Modelo Dummy 3	23
Modelo GARCH Manual	25
Gráfica XV: ACF Residuos Cuadrados	25
Gráfica XVI: PACF Residuos Cuadrados	25
Tabla 8: Resultados GARCH Manual	26
Modelo GARCH Automático	27
Tabla 9: Resultados GARCH Automático	27
Modelos TARCH	28
Gráfica XVIII: Rolling Forecast TGARCH.	28
Predicción del Componente Random	29
Tabla 10: TGARCH Componente Random	29
Gráfica XIV: Predicciones TGARCH Sobre Componente Random	30
Conclusión	31
Apéndice	32
Apéndice 1:	32
Apendice 2	32
Bibliografía	33

Motivación

El sector inmobiliario es una parte crucial de la economía y los instrumentos financieros asociados a este ofrecen a los inversionistas la oportunidad de obtener exposición a los posibles retornos de los activos inmobiliarios. Uno de estos instrumentos es el fondo VNQ, un Exchange-Traded Fund (ETF), que permite a los inversionistas invertir en una cartera diversificada de propiedades inmobiliarias. En este proyecto de econometría, nuestro objetivo es estudiar el desempeño del Vanguard Real Estate ETF (VNQ) utilizando varios modelos econométricos, incluyendo modelos de Autorregresión Condicional Heterocedástica (ARCH), Autoregresión Generalizada Condicional Heterocedástica (GARCH) y modelos Autorregresivos de Media Móvil (ARMA).

El mercado inmobiliario está determinado por muchos factores macroeconómicos que crean un entorno complejo y dinámico a estudiar. Los modelos econométricos nos proporcionan herramientas para poder comprender y predecir el comportamiento de los ETFs, ya que desempeñan un papel vital a la hora de explorar patrones, volatilidad y relaciones entre variables.

Literature Review

Existen varios trabajos académicos que sirven de motivación para nuestro trabajo, y proporcionan un sustento teórico para nuestro proyecto. Consideramos, de manera no exhaustiva, la siguiente literatura.

Literatura Teórica.

En primer lugar, R. Engle (1982) nos da la metodología y teoría detrás del modelo ARCH, mientras que Bollerslev, T. (1986), extiende el trabajo de Engle y proporciona la base para el modelo GARCH. A su vez, Box y Jenkins (1970) proporcionan base teórica detrás del modelo ARMA o Box-Jenkins.

Literatura Especifica

En segundo lugar, los siguientes trabajos proporcionan ejemplos de aplicación de dichos modelos a casos específicos y fueron consultados para nuestro trabajo a modo de motivación.

- Bollerslev, T., Chou, R. Y., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of econometrics*.
- Mustapa, F. H., & Ismail, M. T. (2019, November). Modelling and forecasting S&P 500 stock prices using hybrid Arima-Garch Model. In *Journal of Physics: Conference Series*

Hipótesis y Modelos

Utilizamos modelos ARCH y GARCH debido a su capacidad para capturar la volatilidad que varía en el tiempo dada la presencia de heterocedasticidad en los datos financieros. Al utilizar estos modelos, podemos identificar tendencias en la volatilidad y medir el impacto de los choques pasados en la volatilidad futura, proporcionando así información sobre el riesgo y la estabilidad del ETF VNQ.

Además, también incorporaremos modelos ARMA, que combinan componentes autorregresivos y de media móvil, para capturar posibles tendencias, estacionalidad y la estructura de dependencia en los rendimientos del VNQ. Estos modelos nos permiten pronosticar el comportamiento futuro del ETF en función de su rendimiento histórico, lo que permitiría tomar decisiones informadas en cuanto a la asignación de carteras y la gestión de riesgos.

Al analizar el ETF VNQ utilizando modelos ARCH, GARCH y ARMA, nuestro objetivo es contribuir a la comprensión de la dinámica del mercado inmobiliario y proporcionar información valiosa para inversionistas. Los hallazgos de este proyecto pretenden mejorar nuestra comprensión de los factores subyacentes que impulsan el desempeño del ETF VNQ.

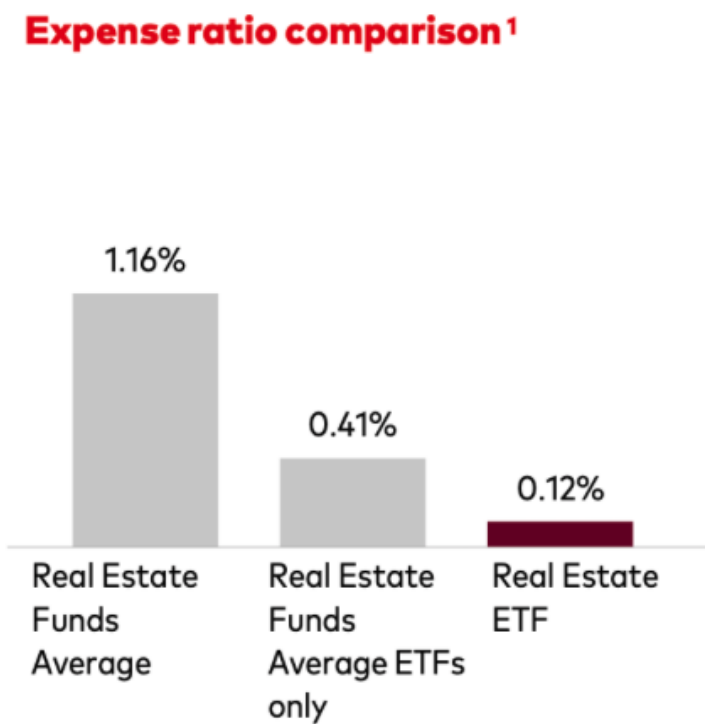
Detalles del ETF VNQ

El Vanguard Real Estate ETF tiene la ventaja de ser un instrumento para invertir en el mercado inmobiliario a un menor costo. En la siguiente gráfica, extraída del fact sheet del fondo, podemos observar el costo comparado a otros instrumentos similares.

El costo administrativo que el inversor debe incurrir es menor que el de instrumentos similares. Lo que hace que VNQ sea atractivo para inversores.

Por otro lado, del mismo informe se desprende la siguiente tabla. En la misma se ve que el fondo paga dividendos de forma trimestral. Por otro lado, el ETF tiene un total de 32 mil millones de dólares bajo su control, además comenzó en 2004.

Expense ratio ¹	0.12%
Dividend schedule	Quarterly
ETF total net assets	\$32,690 million
Fund total net assets	\$62,887 million
Inception date	September 23, 2004



Ten largest holdings and % of total net assets ²

Vanguard Real Estate II Index Fund	12.4%
Prologis Inc.	8.1
American Tower Corp.	6.7
Equinix Inc.	4.7
Crown Castle Inc.	4.1
Public Storage	3.3
Realty Income Corp.	2.8
Simon Property Group Inc.	2.5
Welltower Inc.	2.3
SBA Communications Corp.	2.0
Top ten as % of total net assets	48.9%

En cuanto a su composición, sus activos más importantes son los siguientes. En primer lugar, el fondo de Real Estate II Index Fund de Vanguard con 12.4%. Para participar de dicho fondo se necesita tener mayor capital. Es por esto que el ETF sirve como forma de que inversores más pequeños puedan invertir de manera rápida, líquida, y poco costosa en dicho fondo. Por otro lado, Prologis Inc con 8.1%, es un fondo de San Francisco que

invierte en real estate de fábricas y centros logísticos en Estados Unidos. American Tower Corp. con 6.7%, es una empresa que invierte en antenas de telecomunicaciones y los terrenos donde dichas antenas son fijadas. Equinix Inc, con 4.7% es una empresa que desarrolla el real estate de data centers y servidores en estados unidos. Crown Castle Inc. con 4.1% es similar a American Tower Corp, ya que invierte en antenas de telecomunicaciones y sus terrenos. Public Storage es un fideicomiso americano que invierte en real estate y almacenes.

Datos

Los datos del fondo VNQ están disponibles en varios lugares ya que el fondo opera en la bolsa de Estados Unidos de manera pública. Elegimos el precio ajustado porque nos da una intuición más acertada de qué pasará con el precio del VNQ. Como el precio ajustado toma en cuenta eventos históricos para calcular el precio de un activo, utilizamos esta variable para nuestro análisis, ya que nos proporciona información adicional que no obtenemos solamente a través del análisis del precio de cierre de un activo.

Para nuestro trabajo, decidimos utilizar la librería quantmod. El paquete quantmod para R está diseñado para ayudar al trader cuantitativo en el desarrollo, prueba y despliegue de modelos de trading basados en estadísticas. Quantmod a su vez, es capaz de tomar los datos de distintas bases de datos, lo cual nos permite mayor flexibilidad.

Sin embargo, nosotros lo vamos a utilizar solamente para obtener los datos. Mediante esta librería podemos acceder directamente a los precios históricos diarios de VNQ. En nuestro caso, vamos a utilizar la base de datos de Yahoo Finance a través de quantmod.

Al descargar la base en R obtenemos la siguiente serie de tiempo. La misma tiene datos desde el 3 de enero de 2007 hasta la actualidad. Día a día el precio de apertura, cierre, menor

precio del día, mayor precio del día y precio ajustado. Para nuestro trabajo utilizaremos el precio ajustado.

	▲ VNQ.Open ↕	VNQ.High ↕	VNQ.Low ↕	VNQ.Close ↕	VNQ.Volume ↕	VNQ.Adjusted ↕
2023-04-28	82.42	83.71	82.21	83.30	5352800	83.30000
2023-05-01	83.31	83.62	82.55	82.68	4817200	82.68000
2023-05-02	82.47	82.64	80.67	81.28	5442500	81.28000
2023-05-03	81.68	82.58	80.89	80.96	7538900	80.96000
2023-05-04	80.92	82.11	80.43	81.63	7231800	81.63000
2023-05-05	82.11	83.17	82.09	82.99	4560600	82.99000
2023-05-08	82.81	83.07	82.17	82.51	4896000	82.51000
2023-05-09	82.11	82.51	81.25	82.16	4522000	82.16000
2023-05-10	82.96	83.27	82.10	82.95	6331600	82.95000
2023-05-11	82.36	82.40	81.53	82.04	5175400	82.04000
2023-05-12	82.20	82.29	81.36	82.03	3293800	82.03000
2023-05-15	82.17	82.38	81.68	81.89	3477400	81.89000
2023-05-16	81.69	81.80	79.83	79.84	5401000	79.84000
2023-05-17	80.35	81.06	79.62	80.92	4849000	80.92000
2023-05-18	80.58	80.95	79.91	80.53	4009000	80.53000

Exploración de Datos

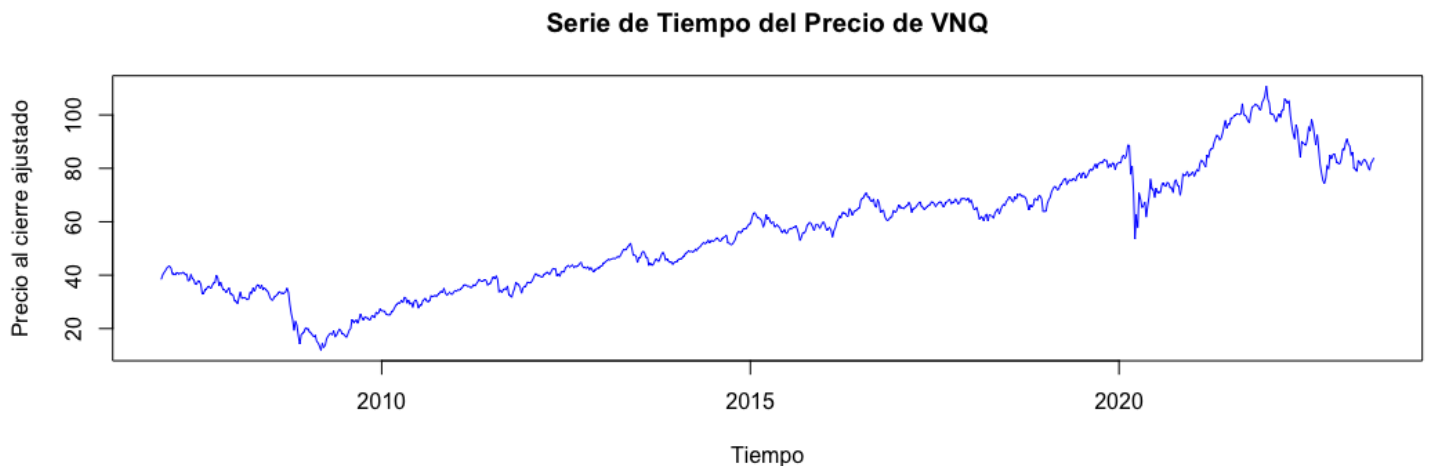
Al importar los datos, tomamos los precios semanales en lugar de los precios diarios. Tomamos esta decisión porque tiene más sentido intentar predecir el precio de forma semanal, en la cual no se incorpora el ruido diario. Sería poco realista de nuestra parte asumir que podemos predecir con exactitud el precio diario solamente basándonos en los precios históricos.

Exploramos las distintas variables de la base de datos, en especial Index y VNQ.Adjusted que serán los que vamos a utilizar en nuestro trabajo.

Index	VNQ.Open	VNQ.High	VNQ.Low	VNQ.Close	VNQ.Volume	VNQ.Adjusted
Min. :2007-01-05	Min. : 20.51	Min. : 23.56	Min. : 19.95	Min. : 21.15	Min. : 448800	Min. : 11.91
1st Qu.:2011-02-14	1st Qu.: 63.15	1st Qu.: 64.27	1st Qu.: 61.40	1st Qu.: 63.18	1st Qu.:11432000	1st Qu.: 37.01
Median :2015-03-27	Median : 76.93	Median : 78.41	Median : 75.48	Median : 77.01	Median :17352700	Median : 57.18
Mean :2015-03-26	Mean : 73.47	Mean : 74.90	Mean : 71.82	Mean : 73.46	Mean :18128091	Mean : 56.20
3rd Qu.:2019-05-06	3rd Qu.: 84.19	3rd Qu.: 85.25	3rd Qu.: 82.81	3rd Qu.: 84.08	3rd Qu.:23275750	3rd Qu.: 70.84
Max. :2023-06-16	Max. :116.21	Max. :116.71	Max. :112.02	Max. :116.01	Max. :71177300	Max. :110.73

Notamos que los datos van desde la primera semana del 2007 hasta la fecha de hoy. El precio mínimo ajustado fue de \$11,91 y el máximo \$110,71. La media 56.20. Graficamos la serie de tiempo (Gráfica I).

Gráfica I: Serie de Tiempo del Precio Ajustado de VNQ

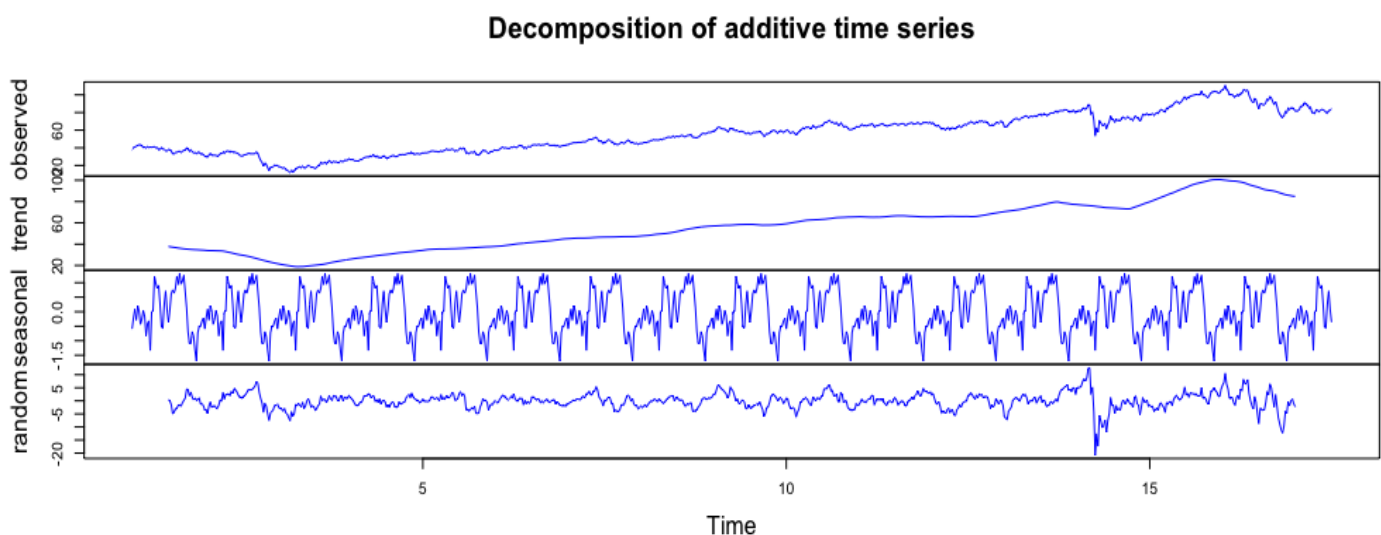


Se puede visualizar una tendencia de crecimiento positivo de la serie a lo largo de los años. También, notamos una caída abrupta durante 2020 a causa de COVID 19. Además, otra caída en 2008 producto de la crisis de 2008. Notamos que la caída pronunciada del 2020 podría afectar nuestros modelos y deberíamos tenerla en consideración.

Descomposición de la Serie

Descompusimos la serie para observar mejor los distintos componentes, como tendencia, seasonality y componente aleatorio (Gráfica II). Vemos que existe una clara tendencia de crecimiento a lo largo de los años. El tercer gráfico podría señalar que existe estacionalidad. Es interesante observar el componente aleatorio. Se ve claramente que el shock del COVID 19 altera la serie de manera aleatoria. Debido a esto, incorporaremos variables dummy para controlar por dichos shocks aleatorios.

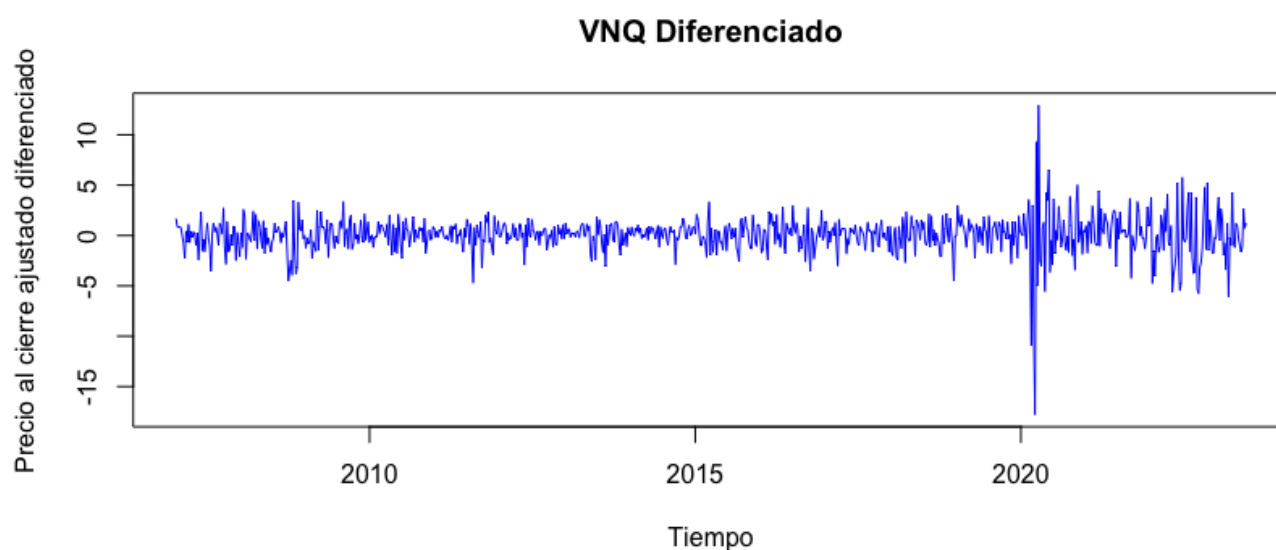
Gráfica II: Descomposición de la Serie



Diferenciación de la Serie

Notamos que la serie no presenta estacionaridad, y tras testear por esta variable, decidimos diferenciarla. La diferenciamos tomando entonces la variación en el precio ajustado de VNQ como nuestra nueva variable de interés. A su vez, además del sustento teórico para realizar esta diferenciación, observamos que la función `ndiffs` de R nos devuelve como óptimo de diferenciación $x = 1$, lo cual es congruente con nuestro análisis. En el siguiente gráfico (Gráfica III) se visualiza la serie diferenciada.

Gráfica III: Serie de Tiempo del Precio de VNQ Diferenciado.



En primer lugar, notamos claramente que el shock del COVID 19 en 2020 va a tener efectos grandes en nuestros modelos. Por otro lado, notamos que el shock de 2008 no parece tener tanta importancia en la serie diferenciada, por lo que se omite.

Por otro lado, realizamos tests de estacionaridad sobre la serie diferenciada para corroborar si la diferenciación nos generó una nueva variable estacionaria (Tabla 1).

Tabla 1: Pruebas Empíricas de Raíces Unitarias

	Test	Statistic	P_value
Dickey-Fuller	ADF	-10.8630050	0.01
Dickey-Fuller Z(alpha)	PP	-888.3304104	0.01
KPSS Level	KPSS	0.0617711	0.10

Los resultados de las pruebas estadísticas revelan información importante sobre las características de los datos analizados. La prueba de Dickey-Fuller arrojó un valor p de 0.01. Estos resultados respaldan la evidencia en contra de la presencia de una raíz unitaria en la serie de tiempo, lo que implica que los datos son estacionarios. Esta conclusión se refuerza aún más con la prueba Dickey-Fuller $Z(\alpha)$. Ambas pruebas tienen valores p de 0.01, lo cual indica una fuerte significancia estadística.

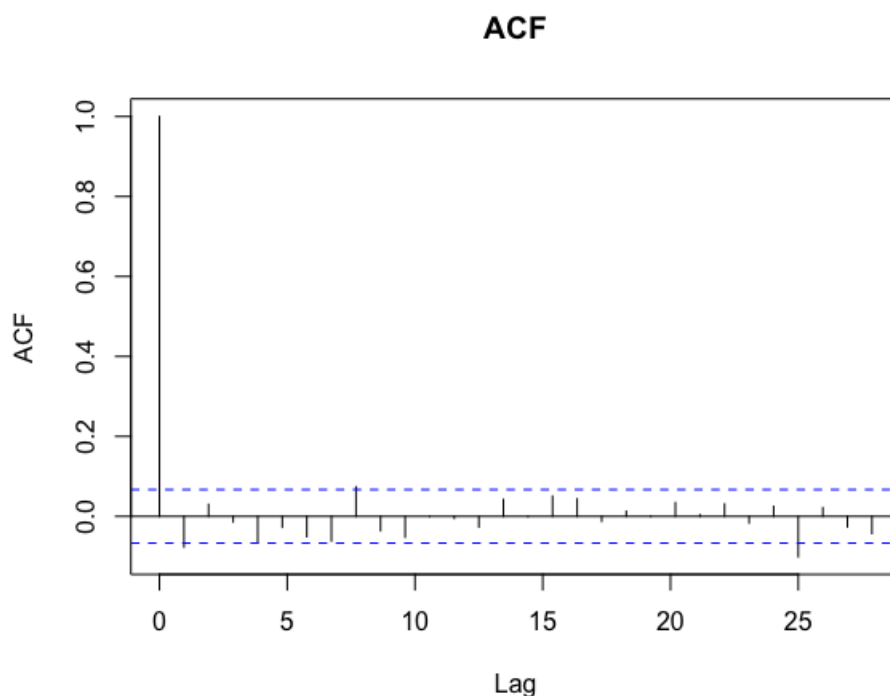
Por otro lado, la prueba KPSS de Nivel tiene la hipótesis nula opuesta que las otras pruebas. Por lo cual obtenemos los mismos resultados. Con un valor p de 0.10, esta prueba no proporciona una evidencia sólida para rechazar la hipótesis nula de estacionariedad. Nuestra serie diferenciada es estacionaria.

ACF y PACF

La Función de Autocorrelación (ACF) mide la correlación entre una serie de tiempo y sus valores rezagados, lo que nos ayuda a identificar la dependencia de la observación actual en las observaciones pasadas. Por otro lado, la Función de Autocorrelación Parcial (PACF) mide la correlación entre una serie temporal y sus valores rezagados, excluyendo las contribuciones de los rezagos intermedios. Esto permite identificar la relación directa entre la observación actual y sus valores pasados. Viendo las gráficas de ACF y PACF, podemos determinar los órdenes apropiados de componentes AR (autorregresivos) y MA (media móvil) en nuestros modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average).

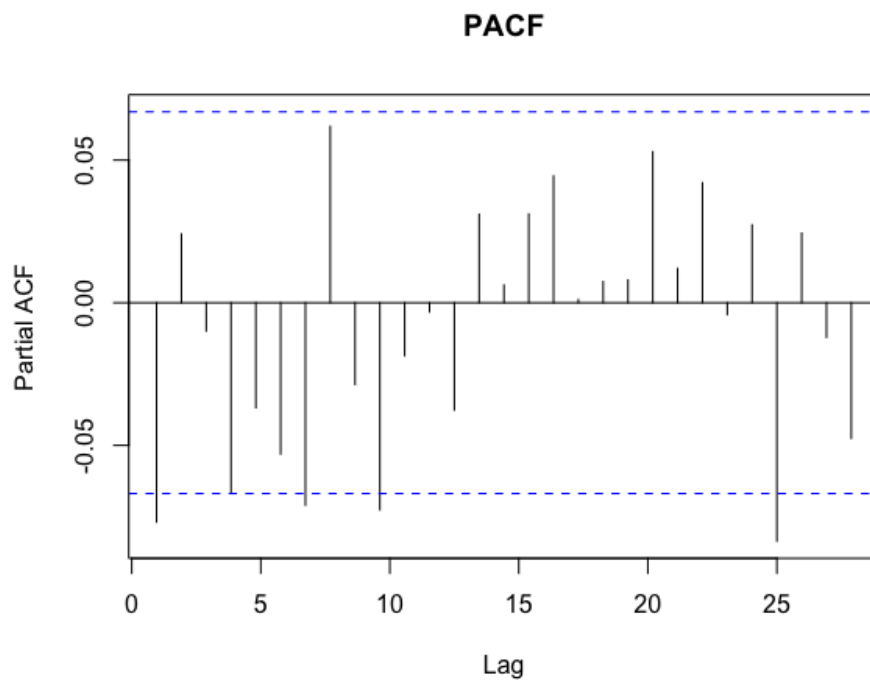
En la gráfica (Gráfica IV), podemos observar la función de Autocorrelación (ACF) para la serie diferenciada. Vemos que los errores rezagados no están correlacionados. Es decir, el precio en t está no está correlacionado con los valores en $t-s$. Esta gráfica indica que quizás no deberíamos utilizar $MA(q)$. (Notar que hay una correlación de 1 con el valor en 0, ya que es con si mismo)

Gráfica IV: Función de Autocorrelación para la serie diferencia



Por otro lado, visualizando el gráfico de la PACF (Gráfica V), observamos que hay pocas correlaciones de rezagos que sean significativamente distintos de cero. El rezago con 10 y 25 apenas son significativos y no muestran una correlación fuertemente distinta de cero. Es decir, no vemos que el precio de la serie en t se vea afectado significativamente por el precio en $t-s$ para todo s . Por el momento, y solo basándonos en este gráfico, podríamos considerar como candidatos un $AR(1)$, o ni siquiera utilizar un AR .

Gráfica V: Función de Autocorrelación Parcial para la serie diferenciada.



Modelo ARMA Simple

Estimamos un modelo ARMA utilizando la serie diferenciada. Mediante el método de `auto.arima()` obtenemos un modelo ARIMA(1,0,0) (Ecuación 1). Lo cual es congruente con nuestro análisis de gráficos previo. En la siguiente tabla (Table 1) vemos los resultados de estimar dicho modelo.

Table 1: ARMA SIMPLE

	<i>Dependent variable:</i>
	Simple Diferenciado
AR1	-0.077** (0.034)
Constante	1.751 (1.833)
BIC	3494.32
Observations	858
Log Likelihood	-1,737.030
sigma ²	3.357
Akaike Inf. Crit.	3,480.060

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

$$y_t = 1.751 - 0.077 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Obtenemos un coeficiente AR 1 de -0.077, significativo al 0.05. La constante no es significativa, lo cual es lógico, dado que la serie fue diferenciada y es estacionaria, con media igual a 0. Obtenemos Akaike de 3480,06 y Bayesian de 3494,32. Log-verosimilitud arroja -1737,03. Buscamos obtener modelos con Akaike y Bayesian más bajos, y log-verosimilitud mayores.

Modelo con Dummy COVID 19

Como mencionamos anteriormente, tanto viendo la gráfica III y la gráfica IV, notamos que existe una variación atípica en los datos generada por la crisis de la pandemia COVID 19. Debido a esto, nuestros modelos probablemente están siendo afectados. Para controlar esto, decidimos incorporar dummies.

En la siguiente ecuación (ecuación 2) definimos la dummy covid que toma valores 1 cuando se encuentra en la fecha donde vemos la variación anormal, y 0 en otro caso.

$$D_i = \begin{cases} 1, & \text{si COVID.} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

Probamos fijar varias dummies haciendo variar las fechas en las que D_i toma valores 1.

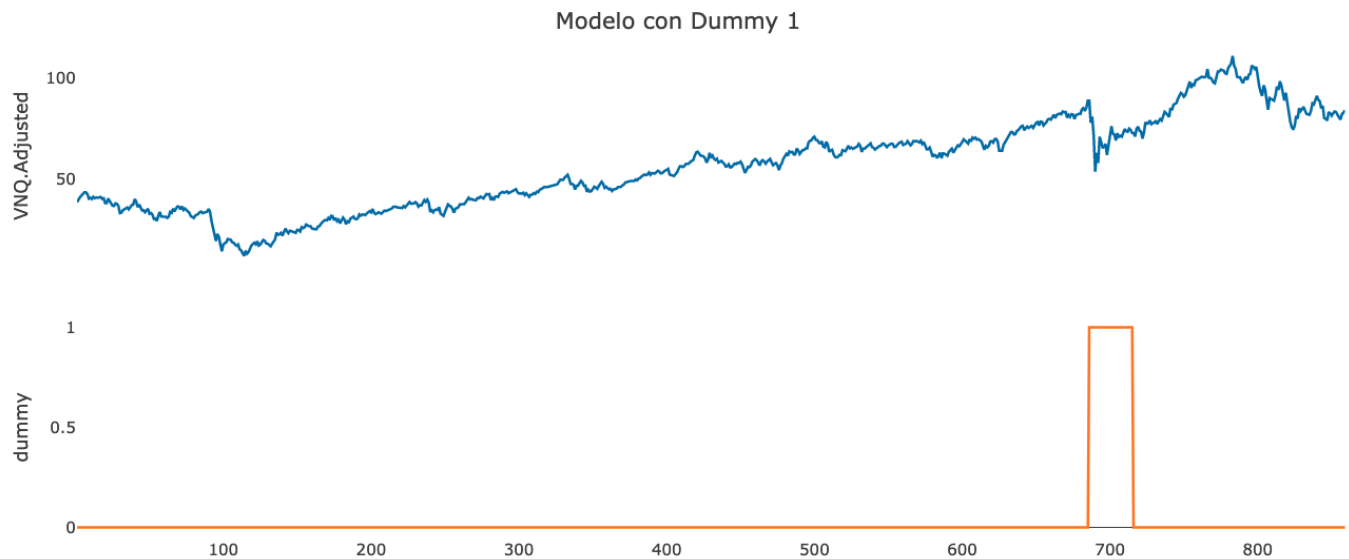
Dummy 1

En primer lugar, fijamos la dummy entre las fechas 21 de febrero de 2020, hasta el 16 de septiembre de 2020 (ecuación 3). La dummy toma el valor 1 entre esas fechas y 0 en otro caso

$$D_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{si } 21/02/2020 < i < 16/09/2020. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3)$$

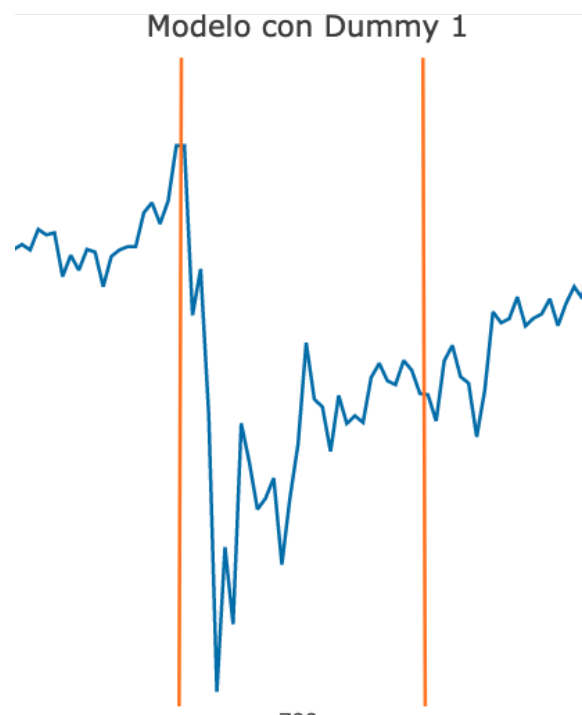
En el siguiente gráfico (Gráfica VI) se puede visualizar la serie de tiempo junto con la dummy 1.

Gráfica VI: Dummy vs VNQ



En el gráfico VII, se puede visualizar el corte de la dummy con la serie de tiempo.

Gráfica VII: Corte Dummy I



Utilizando dicha dummy y buscando el mejor modelo ARMA, llegamos a un modelo ARIMA(0,1,0) que se puede visualizar en la siguiente tabla (Table 2) y ecuación (ecuación 4).

Table 2: ARMA DUMMY COVID 1

	Dependent variable:
	Simple Diferenciado
MA1	-0.073** (0.033)
D1	-0.107 (1.294)
Constante	1.750 (1.833)
BIC	3501.32
Observations	858
Log Likelihood	-1,737.152
sigma ²	3.358
Akaike Inf. Crit.	3,482.304

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

$$y_t = 1.750 - 0.073\varepsilon_{t-1} - 0.107D_t + \varepsilon_i \quad (4)$$

Podemos observar como el componente MA 1 es significativo al 0.05. Tanto la dummy como la constante no son significativas. Es trivial, que la constante no es significativamente distinta a 0, ya que la serie está diferenciada y tiene media 0.

Los criterios de Akaike y Bayesian arrojan 3482,304 y 3501,32 respectivamente. El log-verosimilitud devuelve -1737,152.

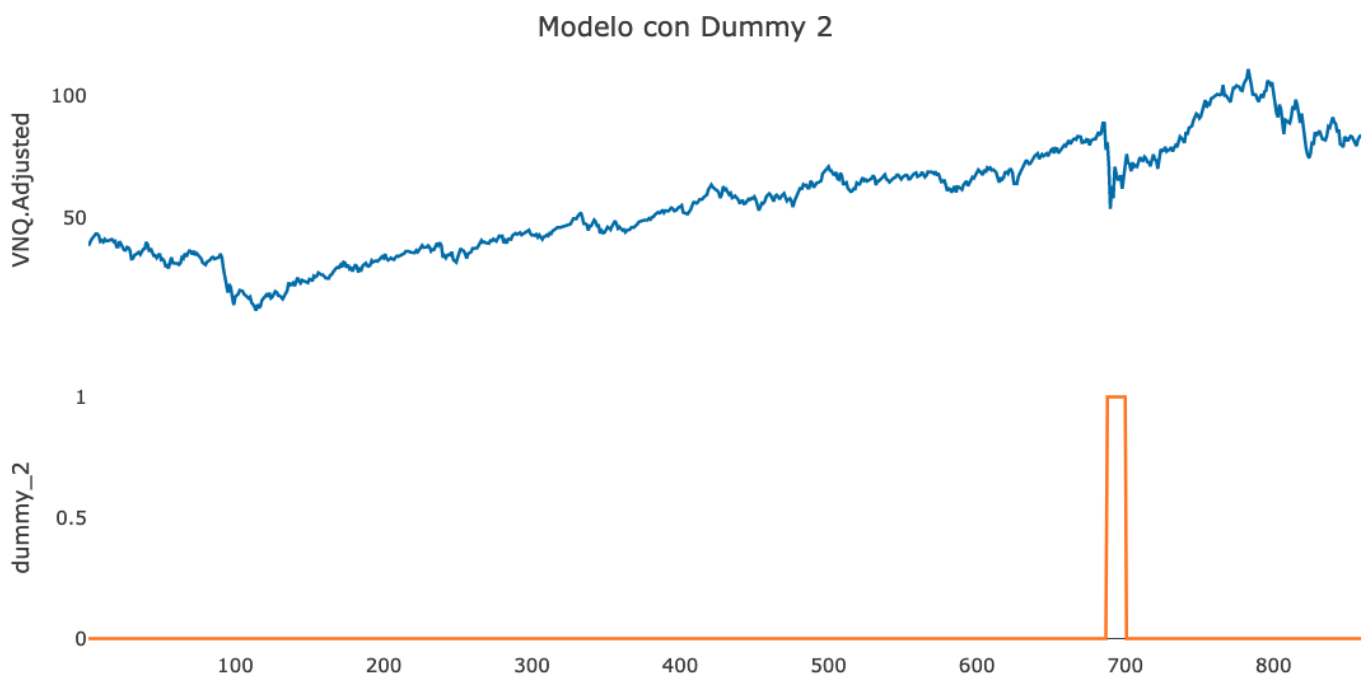
Dummy 2

Nuestra dummy anterior no era significativa. Decidimos entonces reducir el rango de la dummy, centrandola más en el shock de COVID. Para eso tomamos las fechas desde el 6 de marzo de 2020, hasta el 29 de mayo de 2020. En la ecuación siguiente ecuación (ecuación 5) definimos la segunda dummy

$$D_{2i} = \begin{cases} 1, & \text{si } 06/03/2020 < i < 29/05/2020. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5)$$

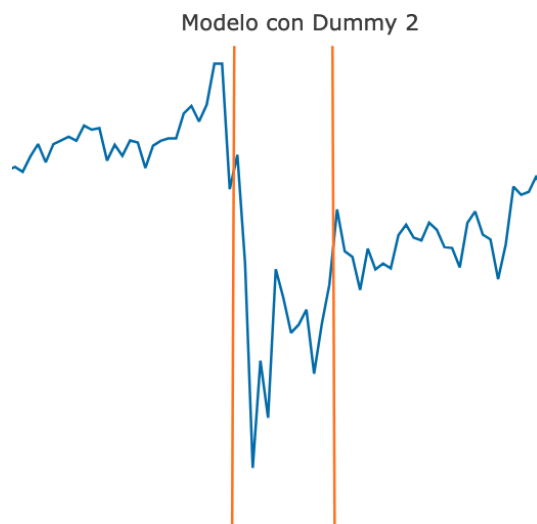
En el siguiente gráfico (Gráfica VI) se puede visualizar la serie de tiempo junto con la dummy 2. La dummy toma valores 0 para toda la serie, salvo para las fechas previamente mencionadas, en las cuales toma el valor 1.

Gráfico VIII: Dummy 2 vs VNQ



A su vez, en el siguiente gráfico (Gráfica IX), visualizamos más de cerca el corte de la dummy 2 con la serie de tiempo

Gráfico IX: Corte Dummy 2



Utilizando dicha dummy, estimamos un modelo ARMA, buscamos los parámetros óptimos. Nos devuelve también un ARIMA(0,1,1) como se puede visualizar en la siguiente ecuación (ecuación 6) y tabla de resultados (Table 3).

Table 3: ARMA DUMMY COVID 2

<i>Dependent variable:</i>	
Simple Diferenciado	
MA1	-0.096*** (0.036)
D2	-2.822** (1.354)
Constante	1.771 (1.828)
BIC	3497
Observations	858
Log Likelihood	-1,734.991
sigma ²	3.341
Akaike Inf. Crit.	3,477.982
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

$$y_t = 1.771 - 0.096\varepsilon_{t-1} - 2.822D_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

El nuevo modelo nuevamente es un MA 1, con dicho componente significativo al 0.01. La dummy en este caso es significativa al 0.05. Nuevamente como era esperable, la constante no es significativamente distinta de 0.

El criterio de Bayes y Akaike arrojan 3497 y 3477,982. Esto representa una mejora en ambos criterios respecto a Dummy 1. A su vez, Log-Likelihood mejor en este modelo también.

Dummy 3

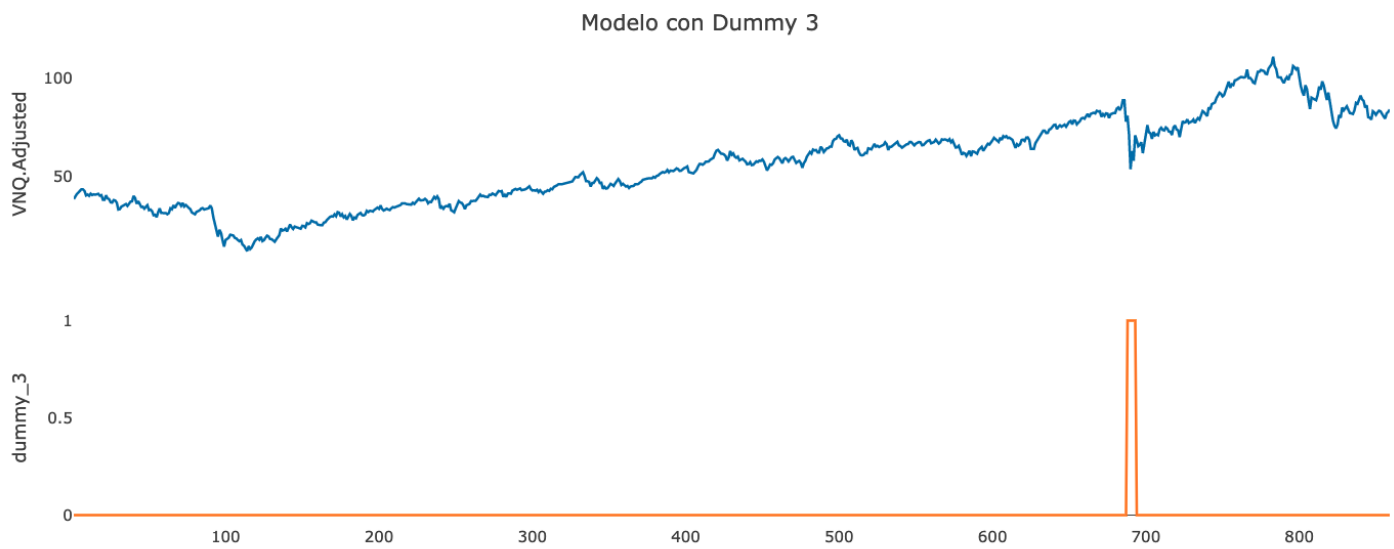
Por último, decidimos realizar una tercer dummy aún más pequeña y centrada en el shock, ya que la última reducción de tamaño mejoró significativamente nuestros resultados y modelos.

Definimos entonces la Dummy 3 como aquella que siguiendo la ecuación 6, toma el valor 1 entre el 6 de marzo de 2020 y el 9 de abril de 2020, momento en el cual los mercados financieros sufren sus mayores caídas a causa del COVID 19.

$$D_{3i} = \begin{cases} 1, & \text{si } 06/03/2020 < i < 09/04/2020. \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (6)$$

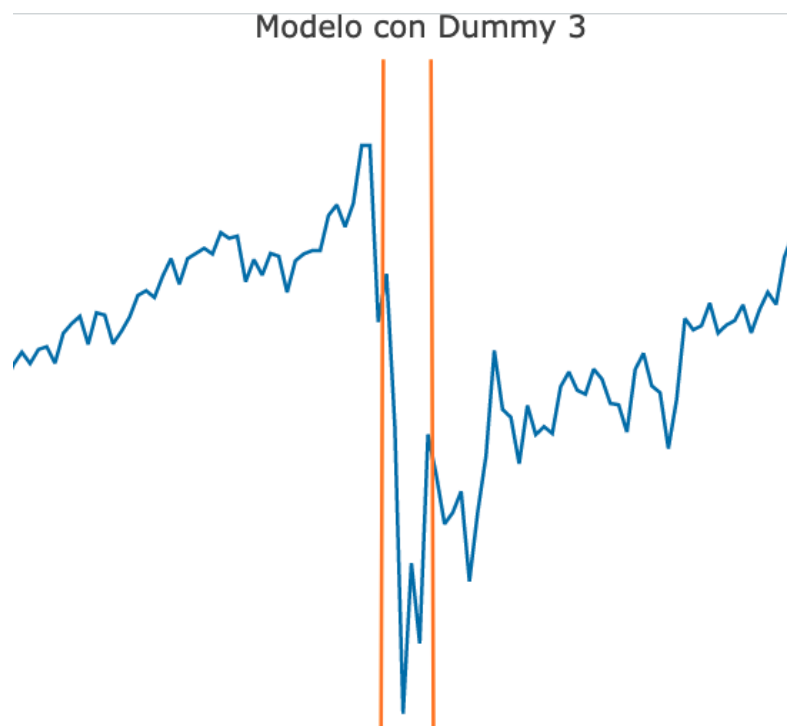
En el siguiente gráfico (Gráfica X) se puede visualizar la serie de tiempo junto con la dummy 2. La dummy toma valores 0 para toda la serie, salvo para las fechas previamente mencionadas, en las cuales toma el valor 1.

Gráfico X: Dummy 3 vs VNQ



A su vez, graficamos el cruce entre la serie y la nueva dummy para poder visualizar bien donde es que se hace el corte (Gráfica XI).

Gráfica XI: Corte Dummy 3



Mediante la aplicación de la Dummy 3, generamos un modelo ARMA. Utilizando al función `auto.arima()`, llegamos a que el ARMA que se ajusta mejor a los datos teniendo dicha dummy es el especificado por la siguiente tabla (Table 4) y ecuación ARMA (1,1,4). (ecuación 7)

$$y_t = 1.697 - 0.616y_{t-1} - 0.664\varepsilon_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-2} - 0.048\varepsilon_{t-3} - 0.074\varepsilon_{t-4} + 3.720D_t + \varepsilon_t \quad (7)$$

Table 4: ARMA DUMMY COVID 3	
Dependent variable:	
	Simple Diferenciado
AR1	0.616*** (0.135)
MA1	-0.664*** (0.138)
MA2	0.070* (0.042)
MA3	-0.048 (0.042)
MA4	-0.074* (0.039)
D3	3.720** (1.493)
Constante	1.697 (1.818)
BIC	3513.47
Observations	858
Log Likelihood	-1,729.717
sigma ²	3.300
Akaike Inf. Crit.	3,475.434
Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

Podemos observar que los componentes AR 1 y MA1 son significativos al 0.01. MA 2 y MA 4 al 0.1. MA 3 no es significativamente distinto de 0, al igual que la constante. La dummy 3 es significativa al 0.05.

Notamos que la dummy 3 tiene un valor positivo, lo cual nos llamó la atención en primer lugar. Debido a que uno esperaría que durante la crisis de COVID, cuando la dummy está activa, el efecto sea negativo. Sin embargo, luego de examinar más cuidadosamente los datos, vemos que la dummy fue fijada para un periodo que contiene tanto subidas como bajadas del precio de VNQ, por lo que no es trivial el valor de la dummy. Esto se puede visualizar en la gráfica XI, donde se ve un pico, una caída y luego dos aumentos abruptos.

Por otro lado, el criterio de información de Akaike y Bayesiano arrojan 3475,43 y 3513,47. El akaike representa una mejora respecto al modelo de dummy 2. Por otro lado, el criterio de bayesiano devuelve peor valor que dummy 2. Por último, el log-likelihood es mejor en este modelo que en el anterior.

Comparación de Modelos ARMA

En la tabla 5, visualizamos los distintos modelos ARMA estimados con sus respectivos coeficientes y métricas. El modelo (1) representa el modelo básico AR(1) sin dummy. Mientras que los modelos Dummy 1, Dummy 2 y Dummy 3 son representados por los modelos (2) , (3) y (4) respectivamente.

Table 5: ARMA con Dummy

	<i>Dependent variable:</i>			
	Precio al Cierre Ajustado VNQ			
	Simple (1)	COVID 1 (2)	COVID 2 (3)	COVID 3 (4)
AR1	-0.077** (0.034)			0.616*** (0.135)
Constante	1.751 (1.833)			
MA1		-0.073** (0.033)	-0.096*** (0.036)	-0.664*** (0.138)
D1		-0.107 (1.294)		
Constante		1.750 (1.833)		
D2			-2.822** (1.354)	
Constante			1.771 (1.828)	
MA2				0.070* (0.042)
MA3				-0.048 (0.042)
MA4				-0.074* (0.039)
D3				3.720** (1.493)
Constante				1.697 (1.818)
BIC	3494.32	3501.32	3497	3513.47
Observations	858	858	858	858
Log Likelihood	-1,737.030	-1,737.152	-1,734.991	-1,729.717
sigma ²	3.357	3.358	3.341	3.300
Akaike Inf. Crit.	3,480.061	3,482.304	3,477.982	3,475.434

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Observamos que según el criterio de Akaike, el orden de mejores modelos es (4),(3),(1) y (2), siendo el modelos Dummy 3 el mejor.

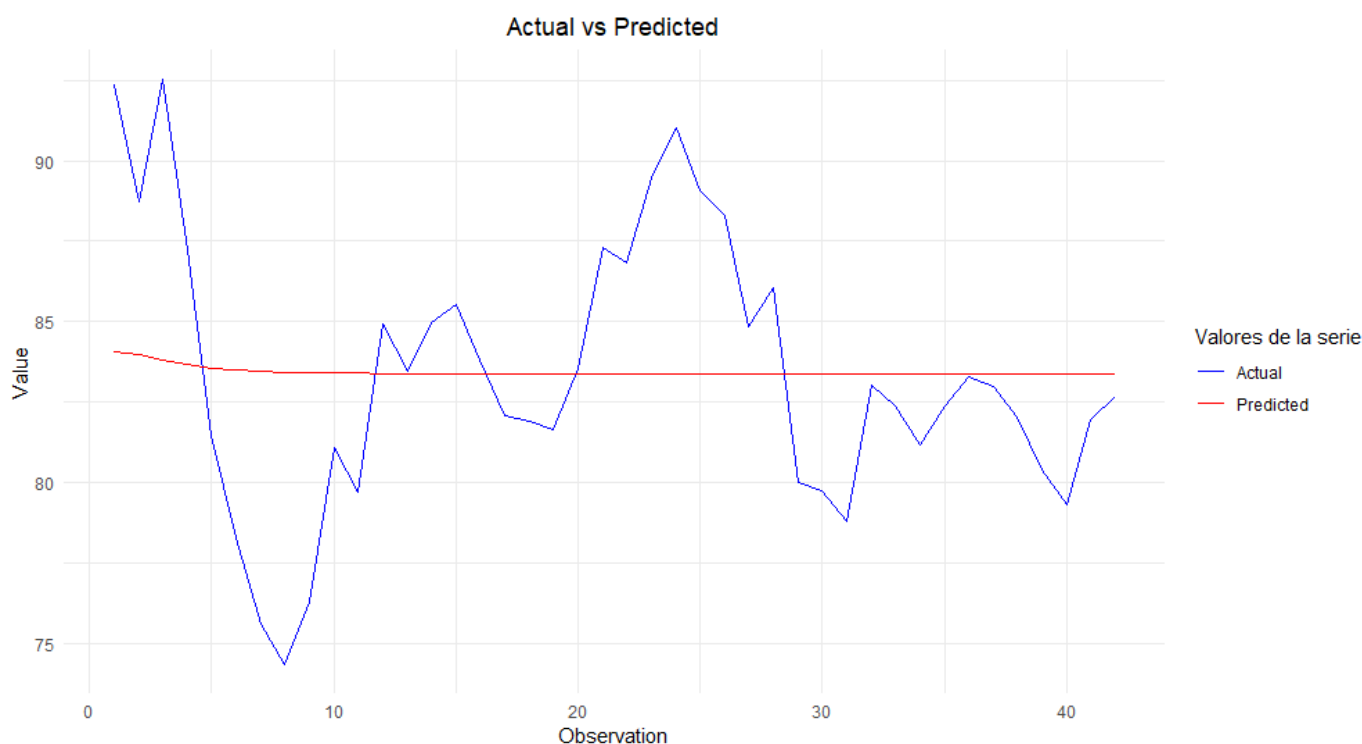
Por otro lado, el criterio Bayesiano arroja que el orden de mejor modelo es (1),(3),(2) y (4). Siendo el modelo simple el mejor. Notamos que el modelo 4 está siendo muy penalizado por su complejidad.

Por último, en cuestión de Log-likelihood, el orden de mejores modelos es (4), (3), (1) y (2). Basándonos en dichos criterios, tomamos el modelo Dummy 3 como el mejor modelo ARMA que estimamos y que utilizaremos luego.

ARIMA Forecast

Luego de determinar nuestro mejor modelo procedemos a hacer predicciones. Para esto dividimos nuestro dataset y nos quedamos con el último 5% con tal de hacer predicciones de corto plazo usando el modelo ARIMA(1,1,4), tomando la dummy COVID y la constante. De esta manera, es posible comparar los valores predichos con lo que realmente sucedió con el precio ajustado del VNQ.

Gráfica XII: Predicción sobre 5% con ARMA



Vemos en la predicción para los últimos 42 períodos que nos devuelve con precisión el valor medio del resto de la serie. Adicionalmente para ver qué tan buenas son nuestras predicciones tomamos en cuenta medidas de precisión.

Table 7: Accuracy Measures

Statistic	Mean
ME	-0.052
RMSE	4.119
MAE	3.240
MPE	-0.309
MAPE	3.886

De la tabla 7 notamos que, en promedio, el error en términos absolutos de nuestra predicción es de 3.24 sobre el precio. Por otro lado, el MAPE nos dice que, en promedio, los errores predichos difieren en un 3.886% de los valores actuales.

Estas medidas de precisión indican que el modelo podría ser utilizado para predecir en el corto plazo, aunque no con demasiada precisión.

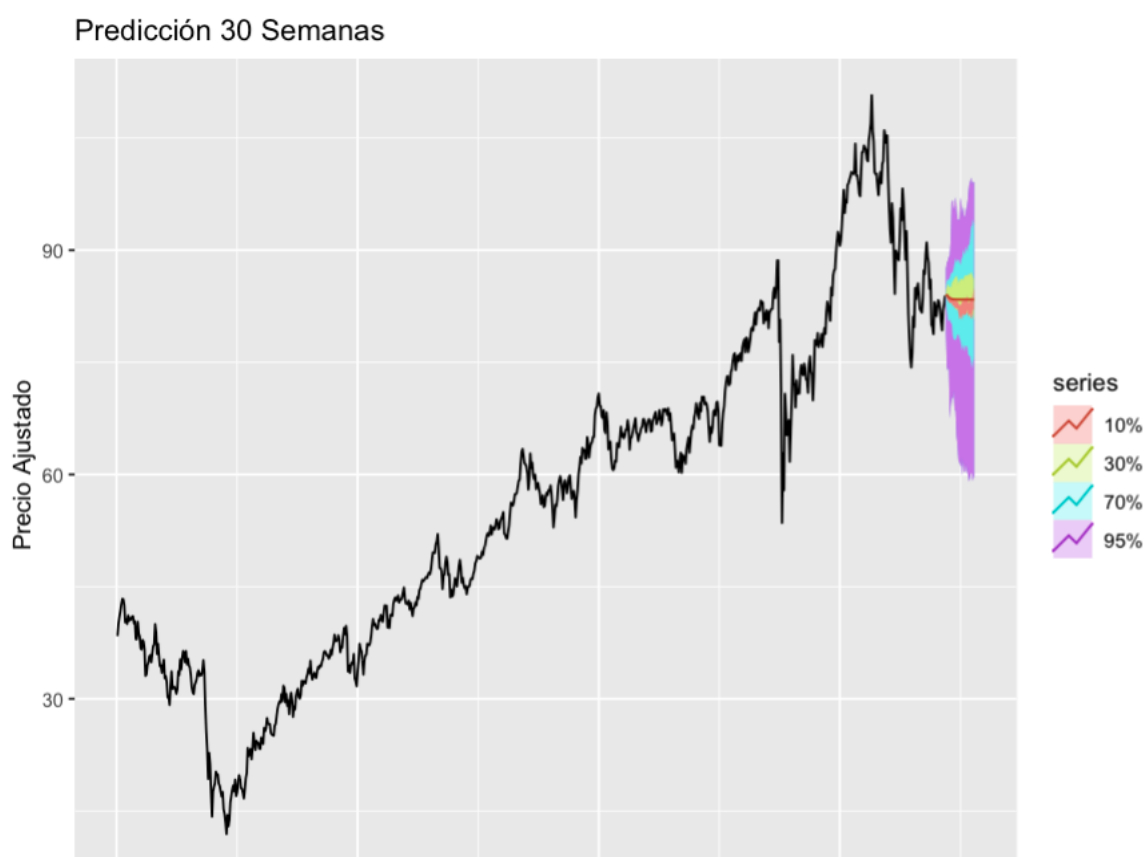
Volviendo a la gráfica XIII notamos que estas medidas de error, sin embargo, no serían suficientes para hacer de este modelo un buen benchmark a la hora de tomar decisiones financieras dadas grandes variaciones sobre nuestras predicciones.

Predicciones ARMA con Bootstrap

A la hora de realizar predicciones hacia el futuro, los modelos ARMA pierden un poco de coherencia si se utilizan por sí solos. Graficando resultados de una estimación 30 días en el futuro devuelve una línea recta con poca o ninguna variación.

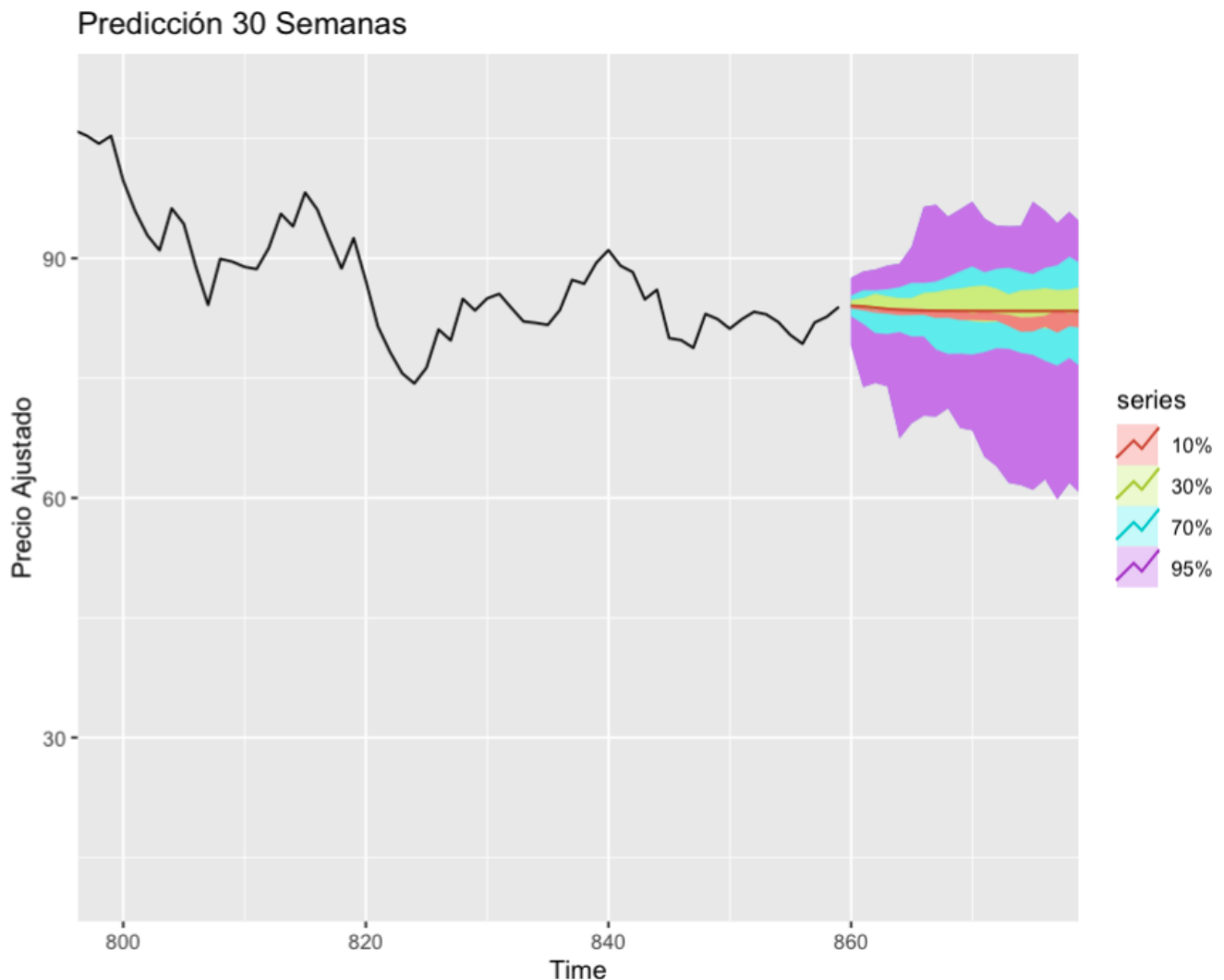
Para obtener un resultado más robusto incorporamos la metodología Bootstrap, en la cual simulamos 100 caminos distintos para 4 niveles de confianza. Realizamos predicciones de 30 periodos hacia el futuro, es decir, 30 semanas. Para los niveles de confianza tomamos 95%, 70%, 30% y 10%. Estos intervalos indican que los valores pronosticados estarán acompañados por límites superiores e inferiores dentro de los cuales se espera que los valores reales caigan con una probabilidad del 70%. Por otro lado, el número de caminos de bootstrap seleccionado, muestra que se hicieron 100 iteraciones para generar los intervalos de pronóstico mediante el método bootstrapping. Estas iteraciones ayudan a capturar el rango posible de valores y mostrar mejor la incertidumbre de nuestro modelo. Utilizamos nuestro mejor modelo hasta el momento ARIMA(1,1,4) con dummy 3.

Gráfico XII: Predicción ARMA Bootstrap 30 Semanas I



En la gráfica XII, vemos la evolución del precio de VNQ hasta la fecha de hoy. Luego, con distintos intervalos de confianza vemos predicciones hechas por el ARMA utilizando metodología Bootstrap. En la gráfica XIII, podemos observar más de cerca la predicción.

Gráfica XIII: ARMA Bootstrap 30 Semanas II

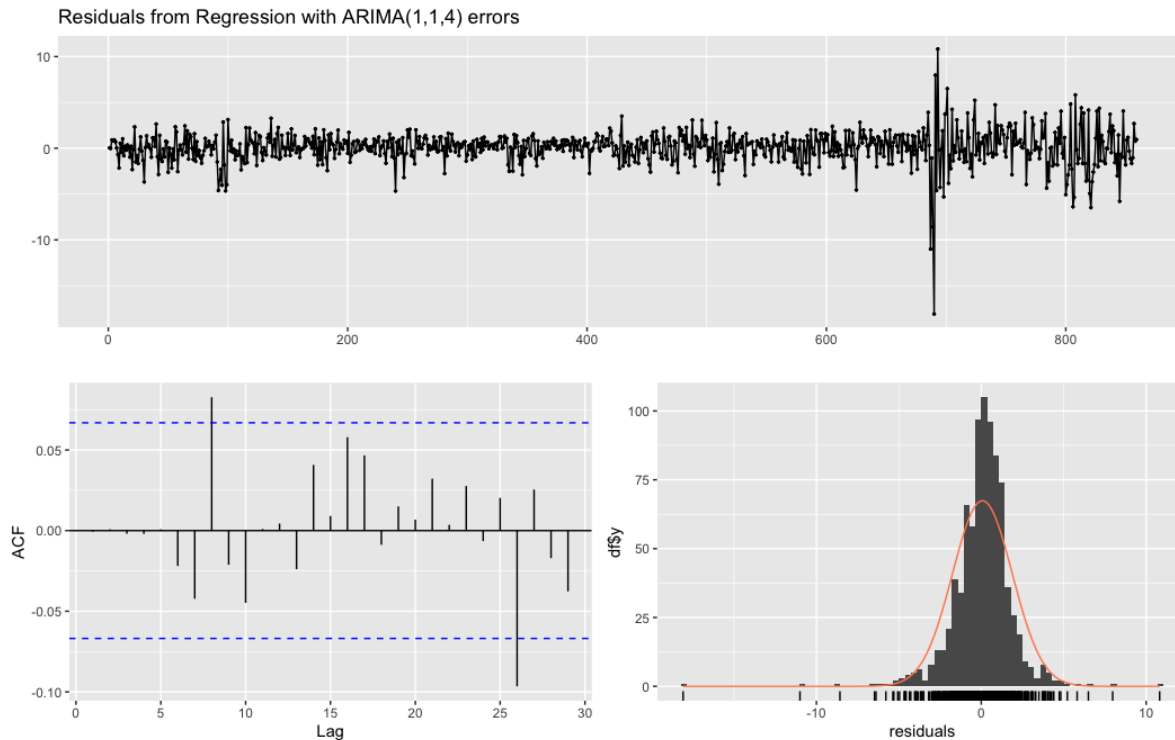


En ambas gráficas, el color violeta representa el 95%, que se puede interpretar como; nuestro modelo con 95% de confianza, predice que el valor del fondo estará dentro del área violeta. Cómo se espera, intervalos más pequeños el área también es más pequeña. El modelo predice números más puntuales, pero con menor confianza.

Autocorrelación: modelos GARCH y TARCH

Continuando con nuestro análisis sobre el ajuste de nuestro modelo pasamos a observar la distribución de los errores.

Gráfica XIV: Residuos Modelo Dummy 3



A simple vista podemos ver que la incorporación de la dummy COVID, por más que devuelve mejores resultados en nuestros criterios de decisión AIC y BIC, no logra capturar del todo los efectos del shock. A su vez, por la variabilidad de los errores que vemos en el gráfico de arriba tenemos razones para sospechar que podemos estar frente a la presencia de heterocedasticidad.

Al estar estimando datos financieros, deberíamos esperar que nuestro modelo presentara heterocedasticidad. En general, hay períodos en los que los precios de los activos en el mercado son más volátiles que otros. Por estas razones, testeamos la presencia de heterocedasticidad en los errores cuadrados de nuestro modelo con el test Box-Ljung.

Box-Ljung test

```
data: residuos_cuadrados  
X-squared = 427.83, df = 20, p-value < 2.2e-16
```

Esta salida de R nos está indicando con un $p\text{-value} < 0.05$ que la hipótesis nula es rechazada, por lo que los errores cuadrados de nuestro modelo presentan autocorrelación.

Para resolver este problema debemos estimar nuevos modelos que se incorporen a los modelos ARIMA que ya habíamos estimado. Los modelos GARCH regresan los errores cuadrados contra sus rezagos y la varianza de la serie. Al tomar esta nueva especificación del modelo podemos resolver el problema de heterocedasticidad haciendo predicciones sobre los errores de la serie.

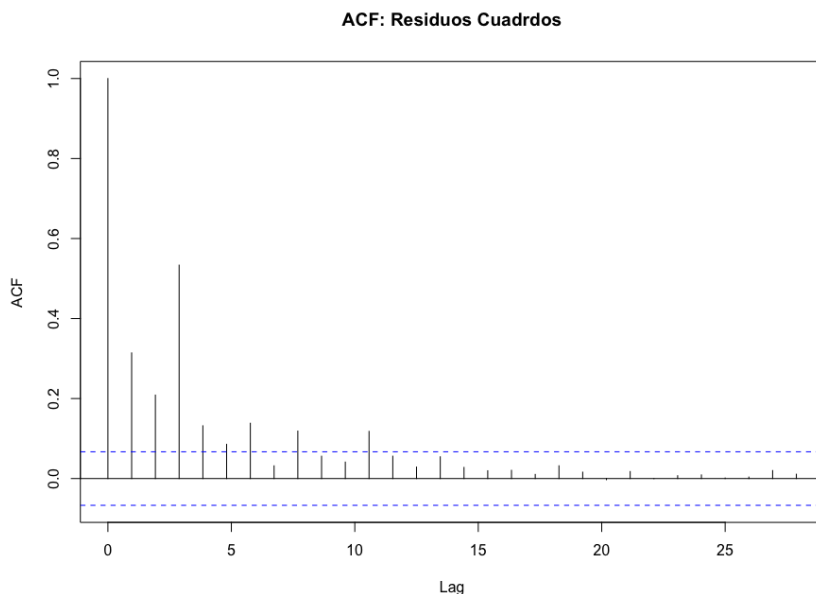
Para el caso de este nuevo modelado de la serie creemos que al incorporar las estimaciones de los errores cuadrados, los efectos del COVID sobre nuestras estimaciones, al ser un shock exógeno, deberían ser menores. Bajo este supuesto logramos simplificar el análisis y estimar de aquí en adelante usando un ARIMA sin dummy de orden (1,1,0), el mejor modelo estimado por R cuando elegimos no incorporar regresores externos a la serie (el cual también presenta heterocedasticidad [Apéndice 1]).

Modelo GARCH Manual

Comenzamos estimando un modelo GARCH de forma manual. Imponemos ARIMA(1,1,0) ya que era nuestro mejor modelo sin dummy.

Realizamos pruebas ACF y PACF sobre los residuos cuadrados para encontrar el mejor orden del GARCH. Las gráficas XV y XVI, muestran la ACF y PACF.

Gráfica XV: ACF Residuos Cuadrados

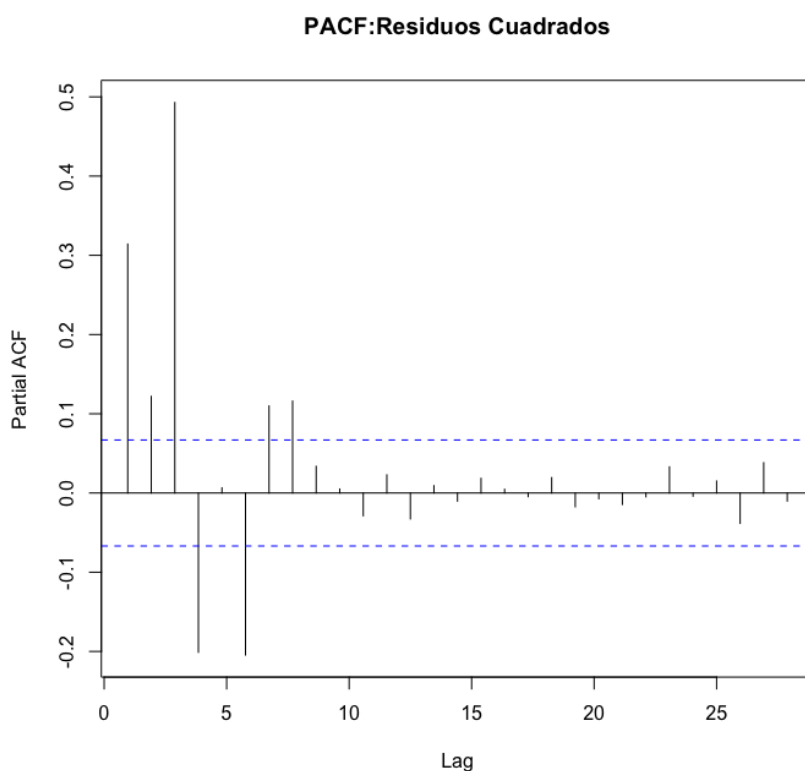


Observando la ACF, vemos que los residuos cuadrados hasta 4 periodos se autocorrelacionan.

Por otro lado, en la PACF, vemos que los residuos cuadrados tienen autocorrelación parcial hasta 4 periodos hacia atrás.

Ambos resultados indicarían que un GARCH (4,4) sería el mejor modelo.

Gráfica XVI: PACF Residuos Cuadrados



En base a esto, en las ecuaciones 8 y 9, mostramos el modelo a utilizar ARIMA(1,1,0) GARCH(4,4)

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 * \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 * \varepsilon_{t-3}^2 + \alpha_4 * \varepsilon_{t-4}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \beta_3 \sigma_{t-3}^2 + \beta_4 + \sigma_{t-4}^2 \quad (9)$$

Estimamos el modelo y estos son los resultados obtenidos (Tabla 8)

Tabla 8: Resultados GARCH Manual

```

*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : sGARCH(4,4)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,0)
Distribution      : norm

Optimal Parameters
-----
mu      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
ar1     -0.039751  0.035434 -1.121831 0.261934
omega    0.199315  0.042633  4.675092 0.000003
alpha1   0.146626  0.045103  3.250950 0.001150
alpha2   0.202496  0.027069  7.480618 0.000000
alpha3   0.000000  0.068809  0.000005 0.999996
alpha4   0.000000  0.092225  0.000000 1.000000
beta1    0.402567  0.510562  0.788477 0.430418
beta2    0.000000  0.317186  0.000000 1.000000
beta3    0.000000  0.454133  0.000000 1.000000
beta4    0.196869  0.289069  0.681047 0.495842

Robust Standard Errors:
mu      Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
ar1     -0.039751  0.035158 -1.130656 0.258200
omega    0.199315  0.151370  1.316739 0.187926
alpha1   0.146626  0.068792  2.131444 0.033053
alpha2   0.202496  0.149028  1.358784 0.174215
alpha3   0.000000  0.118999  0.000003 0.999998
alpha4   0.000000  0.216107  0.000000 1.000000
beta1    0.402567  0.762158  0.528193 0.597365
beta2    0.000000  1.086743  0.000000 1.000000
beta3    0.000000  1.088564  0.000000 1.000000
beta4    0.196869  0.603663  0.326124 0.744330

LogLikelihood : -1533.024

Information Criteria
-----
Akaike      3.5991
Bayes       3.6601
Shibata     3.5988
Hannan-Quinn 3.6225

```

Vemos en la tabla, que el alpha 1 y alpha 2 asociados al ARCH y la constante mu, asociada al ARIMA son significativos. El resto de los parámetros no son significativamente distintos de 0. Criterios de información devuelven, Akaike 3.5991 y Bayes 3.6601. Log-likelihood de -1533.024. Estos muestran una mejor significativa desde los modelos ARMA. Los demás criterios no los dimos en el curso y se omiten.

A grandes rasgos este no es un buen modelo, dado la cantidad de parámetros no significativos que tiene y podríamos llegar a concluir que tiene un error de especificación. Continuamos generando un nuevo modelo GARCH con los parámetros especificados automáticamente por la función.

Modelo GARCH Automático

Procedemos a estimar un GARCH automático, dejando que R nos diga cuál es el mejor orden de estimación. Mediante este orden estimamos un modelo GARCH con un ARIMA(1,1,0) especificado por las ecuaciones 10 y 11.

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (11)$$

Los resultados arrojan que el mejor modelo que se ajusta a la serie es un ARIMA (1,1,0) con efectos GARCH (1,1)

Tabla 9: Resultados GARCH Automático

```

*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : sGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(1,0,0)
Distribution      : norm

Optimal Parameters
-----
mu      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1     -0.033341  0.037333  -0.89306 0.371826
omega   0.114778  0.043077  2.66449 0.007710
alpha1  0.204162  0.036833  5.54286 0.000000
beta1   0.768921  0.040580 18.94838 0.000000

Robust Standard Errors:
mu      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1     -0.033341  0.033819  -0.98584 0.324210
omega   0.114778  0.070255  1.63373 0.102315
alpha1  0.204162  0.074604  2.73660 0.006208
beta1   0.768921  0.070719 10.87289 0.000000

LogLikelihood : -1537.705

Information Criteria
-----
Akaike      3.5960
Bayes       3.6238
Shibata     3.5960
Hannan-Quinn 3.6067

```

En esta salida de R vemos que todos los parámetros son significativos menos el componente AR(1). Con estos resultados no es posible descartar que la serie sea estimable a partir de una constante y la estimación de los errores.

En segundo lugar, notamos que tanto para el criterio Akaike como el BIC , este modelo es mejor para estimar la serie.

Modelos TGARCH

Por último, antes de elegir con qué modelo hacer nuestras predicciones finales, basándonos en Gloster, Jagannathan y Runkle (1993), decidimos aplicar un modelo TGARCH. Dicho modelo puede ser muy útil para series financieras, como la nuestra, ya que las malas noticias en los mercados financieros suelen tener mayor efecto la volatilidad.

* GARCH Model Fit *				

Conditional Variance Dynamics				

GARCH Model	: fGARCH(1,1)			
fGARCH Sub-Model	: TGARCH			
Mean Model	: ARFIMA(1,0,1)			
Distribution	: std			
Optimal Parameters				

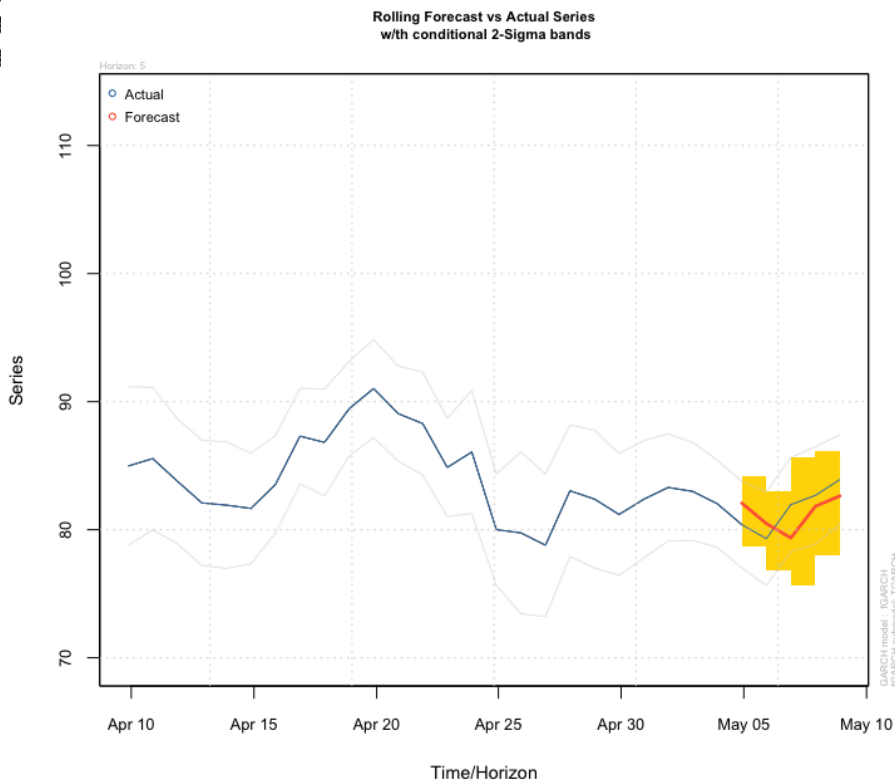
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	38.611342	1.082776	35.6596	0.000000
ar1	1.000000	0.002024	493.9823	0.000000
ma1	-0.048394	0.032267	-1.4998	0.133669
omega	0.092922	0.035386	2.6260	0.008640
alpha1	0.167927	0.034902	4.8114	0.000001
beta1	0.813880	0.042117	19.3245	0.000000
eta11	0.286411	0.133421	2.1467	0.031819
shape	7.076708	1.504174	4.7047	0.000003
Robust Standard Errors:				
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	38.611342	0.299348	128.9849	0.000000
ar1	1.000000	0.002434	410.8056	0.000000
ma1	-0.048394	0.026773	-1.8075	0.070677
omega	0.092922	0.046761	1.9872	0.046903
alpha1	0.167927	0.049465	3.3949	0.000687
beta1	0.813880	0.057922	14.0513	0.000000
eta11	0.286411	0.135029	2.1211	0.033913
shape	7.076708	1.914285	3.6968	0.000218
LogLikelihood : -1525				
Information Criteria				

Akaike	3.5693			
Bayes	3.6136			
Shibata	3.5691			
Hannan-Quinn	3.5862			

Utilizando la metodología TGARCH estimamos el siguiente modelo, que vemos en la tabla . Vemos que los coeficientes son todos significativos salvo el asociado al MA 1. El coeficiente Shape controla la forma de los residuos estandarizados, controla la asimetría. Es decir, que tan probable es que tenga una variación negativa. Por otro lado el eta11 es el parámetro asociado a la dummy del TARCH. El impacto en la volatilidad de la serie, cuando hay una variación en ETF.

Los criterios de información de Akaike y Bayes dan 3.5693 y 3.6136 respectivamente. Esto muestra un mejor valor respecto al GARCH simple. Este es nuestro mejor modelo hasta el momento.

Gráfica XVIII: Rolling Forecast TGARCH.



En la gráfica XVII, vemos como el modelo TGARCH predice utilizando la metodología Rolling Forecast. Es decir, va prediciendo e incorporando nuevos datos a sus predicciones. La línea roja muestra lo predicho por el modelo, mientras que la azul el valor verdadero. El intervalo amarillo es el intervalo de confianza del modelo.

Predicción del Componente Random

Tabla 10: TGARCH Componente Random

```

*-----*
*          GARCH Model Fit          *
*-----*

Conditional Variance Dynamics
-----
GARCH Model      : fGARCH(1,1)
fGARCH Sub-Model : TGARCH
Mean Model       : ARFIMA(4,0,0)
Distribution      : std

Optimal Parameters
-----
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      0.255290   0.220137  1.15969 0.246176
ar1      0.829408   0.041787 19.84845 0.000000
ar2      0.044457   0.041769  1.06436 0.287165
ar3     -0.006984   0.053414 -0.13076 0.895968
ar4     -0.060217   0.040455 -1.48850 0.136620
omega    0.009264   0.008703  1.06455 0.287079
alpha1    0.072973   0.018708  3.90058 0.000096
beta1     0.940645   0.016777 56.06678 0.000000
eta11    -0.697542   0.221873 -3.14388 0.001667
shape     8.043468   2.063597  3.89779 0.000097

Robust Standard Errors:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      0.255290   0.280164  0.91122 0.362181
ar1      0.829408   0.051592 16.07622 0.000000
ar2      0.044457   0.040730  1.09151 0.275049
ar3     -0.006984   0.069542 -0.10043 0.920001
ar4     -0.060217   0.048757 -1.23505 0.216811
omega    0.009264   0.008525  1.08678 0.277135
alpha1    0.072973   0.026335  2.77092 0.005590
beta1     0.940645   0.019295 48.75070 0.000000
eta11    -0.697542   0.264699 -2.63522 0.008408
shape     8.043468   1.922739  4.18334 0.000029

LogLikelihood : -1369.514

Information Criteria
-----
Akaike      3.4618
Bayes       3.5205
Shibata     3.4615
Hannan-Quinn 3.4843

```

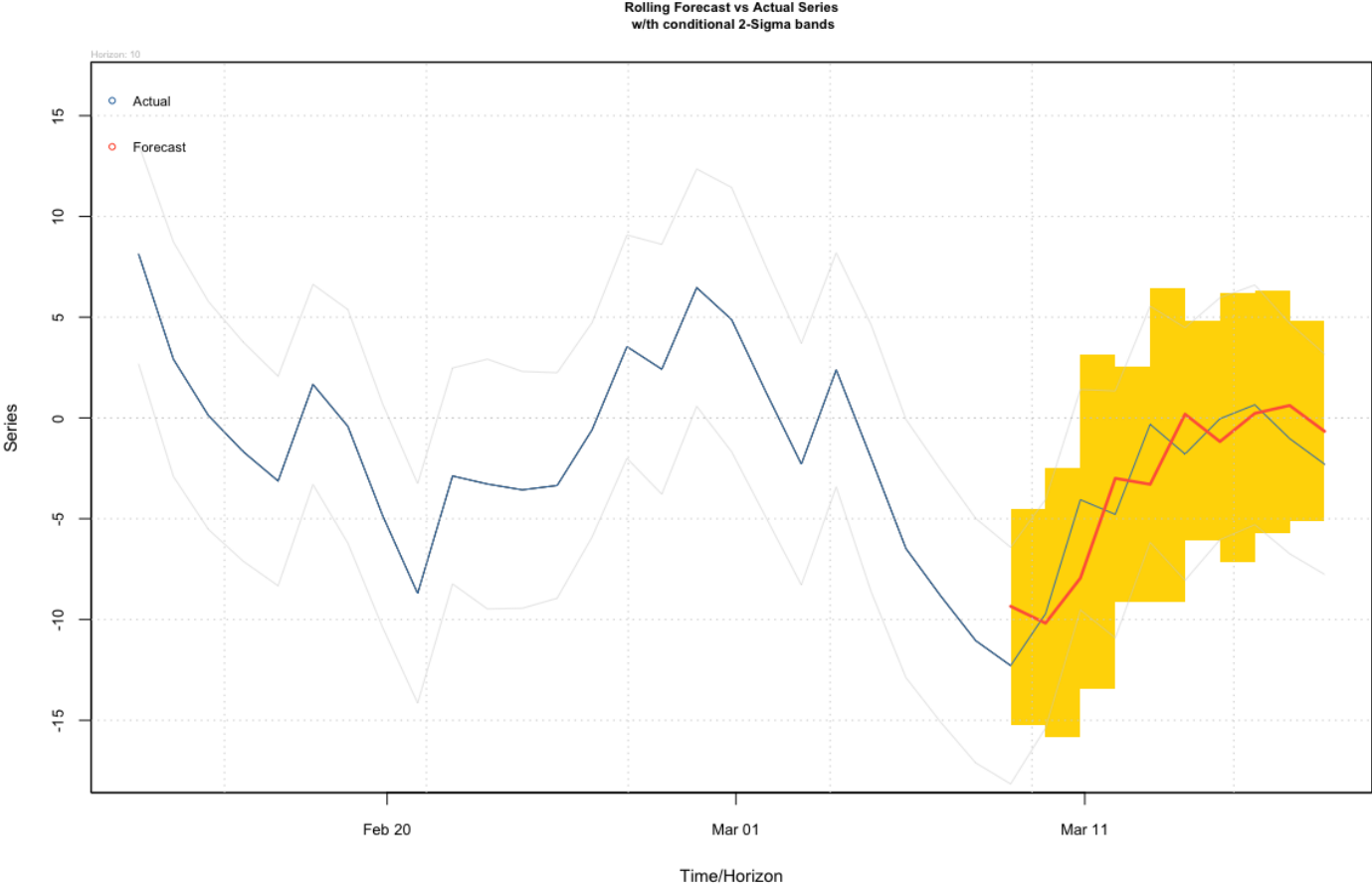
En la primera parte de nuestro trabajo descompusimos nuestra serie en tendencia, ciclo y componente aleatorio (Gráfica II). Podemos separar tendencia, ciclo e irregularidades. Con esto, podemos predecir sólo el componente aleatorio, para luego sumar el ciclo y la estacionariedad a nuestras predicciones.

Estimamos un modelo TGARCH sobre el componente aleatorio. En primer lugar, estimamos un modelo ARMA para saber el orden ARMA dentro del GARCH. Nos devuelve un ARMA(4,0,0). Luego dejamos que la función decida los parámetros del TGARCH.

Vemos que el mu AR1, el Alpha 1, Beta 1, eta11 y shape son significativos. Los criterios de información, Akaike y Bayes devuelven 3.4618 y 3.5205 respectivamente.

En la gráfica XIV vemos las predicciones hechas por nuestro modelo con Rolling Forecast. Vemos que visualmente dichas predicciones parecen ser mejores que modelos anteriores.

Gráfica XIV: Predicciones TGARCH Sobre Componente Random



Conclusión

El ETF VNQ es un activo que permite a los inversores tener exposición al mercado inmobiliario. Como la mayoría de los activos financieros, su precio es volátil pero también presenta correlación con sus valores pasados. Esta combinación nos permite utilizar modelos ARMA, GARCH y TARCH para realizar predicciones sobre su precio.

Intentamos buscar la especificación del modelo que mejor se ajustaba a los datos. Luego de encontrar gran volatilidad en los tiempos de COVID, utilizamos dummies para estimar nuestro modelo ARIMA y evaluar cuándo se ajustaba mejor a los datos. Encontramos que para un intervalo relativamente pequeño centrado en el shock el modelo se ajustaba mejor a los datos, ya que captura gran parte de la caída y subsecuente subida de los precios.

Cuando intentamos estimar los datos con un ARIMA, el orden que se ajustó mejor fue (1,1,4), indicando mayor persistencia de los términos rezagados de los errores en la serie. Con este modelo realizamos estimaciones tanto de los valores promedio futuros como también estimaciones por bootstrap. Ninguna de las dos fue demasiado informativa aunque no se escapaban de estimaciones razonables.

Para mejorar la especificación de nuestro modelo testeamos la homocedasticidad de los errores y vimos que eran heterocedásticos. Solucionamos este problema incorporando efectos GARCH y TARCH. Como era de esperar, el modelo TARCH que da mayor relevancia a los efectos de las malas noticias en los mercados, predice mejor. En este caso, encontramos la mejor especificación en un ARIMA (1,1,0) TARCH(1,1,1). Realizamos predicciones y vimos que se ajustaba correctamente a los datos pasados.

Sin embargo, para desarrollar mejor nuestro análisis creemos que en un futuro podríamos incorporar variables dummy para controlar por la crisis del 2008. A su vez, podríamos evaluar un cambio de régimen. En particular, un cambio de régimen antes y después del COVID, donde observamos un cambio importante en la variabilidad de los errores (Apéndice 2) y creemos que podría no estar siendo capturado por los efectos GARCH y TARCH..

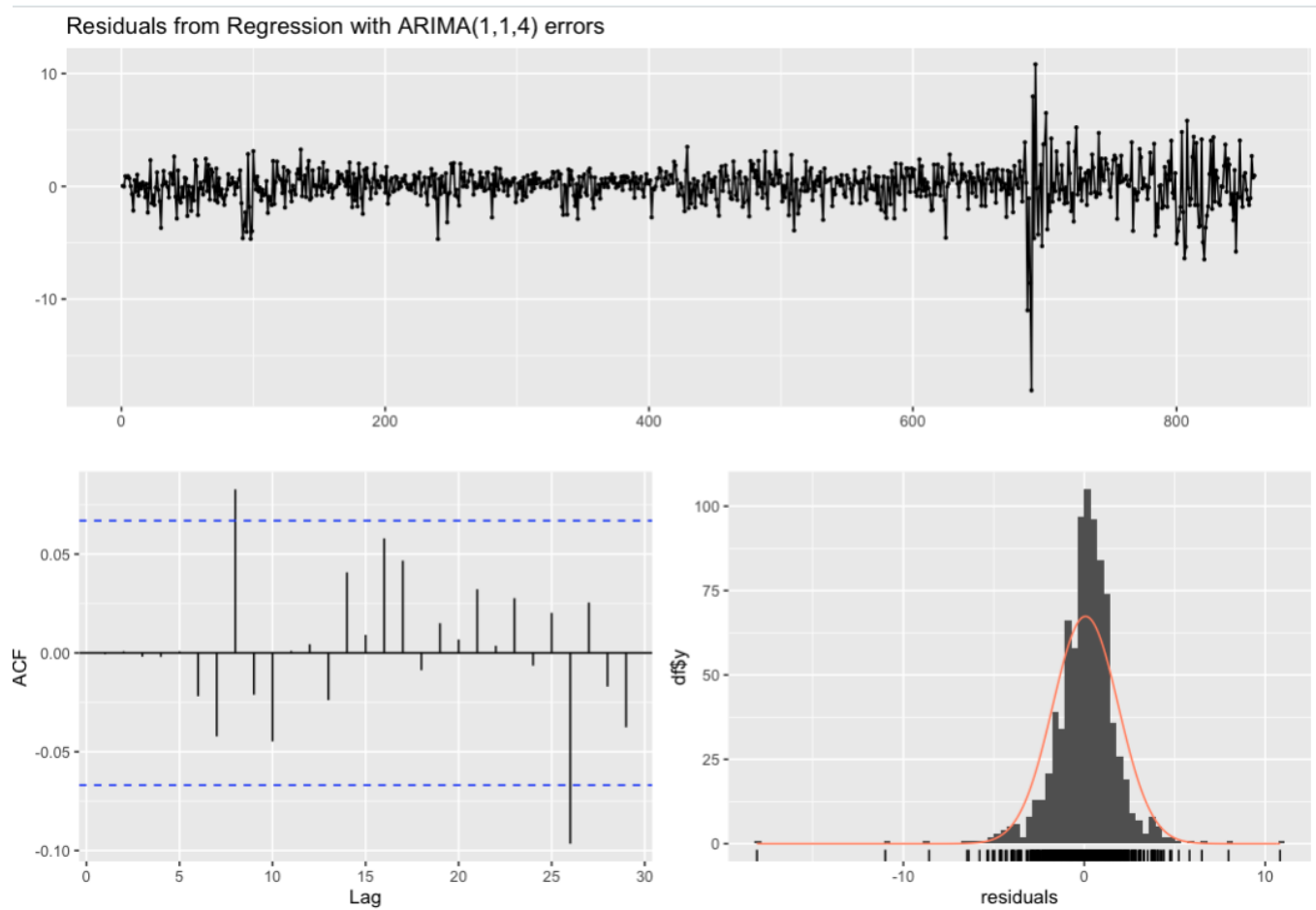
Apéndice

Apéndice 1:

Box-Ljung test

```
data: residuos_cuadrados  
X-squared = 444.19, df = 20, p-value < 2.2e-16
```

Apéndice 2



Bibliografía

Robert F. Engle (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation"

Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". Journal of Econometrics.

Box, G. E. (1970). GM Jenkins Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco, Holden-Day.

Bollerslev, T., Chou, R. Y., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. Journal of econometrics.

Mustapa, F. H., & Ismail, M. T. (2019, November). Modelling and forecasting S&P 500 stock prices using hybrid Arima-Garch Model. In Journal of Physics: Conference Series

Vanguard Real Estate ETF Fact Sheet. Extracted from :
<https://advisors.vanguard.com/investments/products/vnq/vanguard-real-estate-etf>. Last access 19/06/2023

Carátula. <https://www.bankrate.com/real-estate/how-to-find-real-estate-comps/>