Решения на контролното по ДАА, Информатика I, 18.04.2011

Зад. 1 Подредете по асимптотично нарастване следните осем функции. Обосновете отговорите си кратко. От отговора Ви трябва да е абсолютно ясно и недвусмислено каква подредба сте намерили. Препоръчително е да напишете в явен вид самата подредба. Приемете, че n е четно.

$$2^n + n! + \sqrt{n!}, \qquad 2^n + \binom{n}{\frac{n}{2}}, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^n, \qquad \lg((2n)!),$$

$$(n + \sqrt{n})(n + \lg n), \qquad n^2(\lg n)^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2^i, \qquad 2^n$$

Решение: Първо ще докажем, че $2^n+n!+\sqrt{n!} \succ \sum_{i=1}^{n} 2^n$. Очевидно $\sum_{i=1}^{n} 2^n = n2^n$. Но $n! \succ n2^n$, тъй като,

1. очевидно $\Theta(n \lg n) \succ n + \lg n$
2. $\lg n! = \Theta(n \lg n)$ и $\lg(n2^n) = n + \lg n$.

Твърдението е доказано.
Второ, ще докажем, че $\sum_{i=1}^{n} 2^n \succ 2^n$. Имайки предвид, че $\sum_{i=1}^{n} 2^n = n2^n$, твърдението е очевидно.
Трето, ще докажем, че $\sum_{i=1}^{n} 2^i \approx 2^n$. Действително,

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 1 = 2.2^n - 2 \approx 2^n$$

Четвърто, ще докажем, че $2^n + \binom{n}{\frac{n}{2}} \approx 2^n$. За целта ще докажем, че $\binom{n}{\frac{n}{2}} \prec 2^n$. Действително, тъй като n е четно,

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\frac{n}{2}! \times \frac{n}{2}!} \overset{\text{Stirling}}{=} \frac{\sqrt{2\pi n}\ \frac{n^n}{e^n}}{\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}\ \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}} \times \sqrt{2\pi\frac{n}{2}}\ \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}}} \approx \frac{\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}\ \frac{n^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}}{\left(2^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}\right)\left(e^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}\right)}} =$$

$$\frac{\sqrt{n}\ \frac{n^n}{e^n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}\ \frac{n^n}{e^n\,2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

следователно $\binom{n}{\frac{n}{2}} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Очевидно е, че $\frac{2^n}{\sqrt{n}} \prec 2^n$, следователно $\binom{n}{\frac{n}{2}} \prec 2^n$, следователно $2^n + \binom{n}{\frac{n}{2}} \approx 2^n$.
Пето, ще покажем, че $2^n \succ n^2(\lg n)^2$. Ако логаритмуваме двете функции, получаваме съответно n и $2\lg n + 2\lg\lg n = \Theta(\lg n)$. Очевидно $n \succ \Theta(\lg n)$, следователно $2^n \succ n^2(\lg n)^2$.
Шесто, ще покажем, че $n^2(\lg n)^2 \succ (n + \sqrt{n})(n + \lg n)$. Имайки предвид, че $(n + \sqrt{n})(n + \lg n) = n^2 + n\lg n + n\sqrt{n} + \sqrt{n}\lg n = \Theta(n^2)$, твърдението е очевидно вярно.

И накрая ще покажем, че $(n+\sqrt{n})(n+\lg n) \succ \lg((2n)!)$. Вече показахме, че $(n+\sqrt{n})(n+\lg n) = \Theta(n^2)$. От друга страна, от лемата, казваща, че $\lg(m!) = \Theta(m \lg m)$, следва, че $\lg((2n)!) = (2n)\lg(2n) = \Theta(n \lg n)$. Оттук твърдението е очевидно вярно. Подредбата е:

$$2^n + n! + \sqrt{n!} \succ \sum_{i=1}^{n} 2^n \succ 2^n \approx \sum_{i=1}^{n} 2^i \approx 2^n + \binom{n}{\frac{n}{2}} \succ$$
$$n^2(\lg n)^2 \succ (n+\sqrt{n})(n+\lg n) \succ \lg((2n)!)$$

□

Зад. 2 Решете следните шест рекурентни отношения чрез мастър теоремата (Master Theorem).

а) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg n$

б) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{15}\right) + 1$

в) $T(n) = 10T\left(\frac{n}{\sqrt{10+\sqrt{10}}}\right) + \sqrt{n}$

г) $T(n) = (5+\sqrt[5]{8})T\left(\frac{n}{5+\sqrt[5]{8}}\right) + \lg n$

д) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

е) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^5$

Решение:
а) По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n^2)$.
б) По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_{15} 5}\right)$.
в) Нека $b = \sqrt{10+\sqrt{10}}$. Забелязваме, че $\log_b 10 > 1$, понеже $10 > \sqrt{10+\sqrt{10}} = b$. Следователно, $\log_b 10 > \frac{1}{2}$, следователно

$$n^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{(\log_b 10)-\epsilon}\right)$$

за някое положително ϵ. По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$.
г) Нека $a = b = 5+\sqrt[5]{8}$. Тъй като $n^{\log_a b} = n^1 = n$ и $\lg n = O\left(n^{1-\epsilon}\right)$ за някое положително ϵ, по първия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n)$.
д) По втория случай на МТ, $T(n) = \Theta(n \lg n)$.
е) Тъй като

$$\log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 5}{\frac{1}{2}} = 2\log_2 5 = \log_2 25 < 5 = \log_2 32$$

по третия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n^5)$. Условието за регулярност е удовлетворено, тъй като съществува константа c, такава че $0 < c < 1$ и

$$5\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^5 \leq cn^5 \Leftrightarrow \frac{5}{4\sqrt{2}} \leq c$$

□

Зад. 3 Решете следните четири рекурентни отношения чрез метода с характеристичното уравнение.

а) $T(n) = 2T(n-1) + 4n + 9n^2$

б) $T(n) = 5T(n-1) - 3T(n-2) + 2^n + n3^n$

в) $T(n) = \sqrt[3]{3}T(n-1) + n\left(\sqrt[3]{3}\right)^{n+4}$

г) $T(n) = 3T(n-1) - 3T(n-2) + T(n-3) + 1$

Решение:

а) Мултимножеството от корените е $\{2, 1, 1, 1\}_M$, следователно $T(n) = \Theta(2^n)$.

б) Характеристичното уравнение има корени $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. Нехомогенната част дава още $\{2, 3, 3\}_M$. Тъй като $\frac{5+\sqrt{13}}{2} > 3$,

$$T(n) = \Theta\left(\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right)$$

в) Рекурентното отношение може да бъде написано така:

$$T(n) = \sqrt[3]{3}T(n-1) + \left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 n\right)\left(\sqrt[3]{3}\right)^n$$

Мултимножеството от корените е $\left\{\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\right\}_M$, откъдето $T(n) = \Theta\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^n\right)$.

г) Характеристичното уравнение е

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0$$

Мултимножеството от корените е $\{1, 1, 1, 1\}_M$, следователно $T(n) = \Theta(n^3)$. □

Зад. 4 Решете чрез развиване (итерация) $T(n) = nT(n-1) + 1$.

Решение:

$$\begin{aligned}
T(n) &= nT(n-1) + 1 \\
&= n((n-1)T(n-2) + 1) + 1 \\
&= n(n-1)T(n-2) + n + 1 \\
&= n(n-1)((n-2)T(n-3) + 1) + n + 1 \\
&= n(n-1)(n-2)T(n-3) + n(n-1) + n + 1 \\
&= n(n-1)(n-2)((n-3)T(n-4) + 1) + n(n-1) + n + 1 \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)T(n-4) + n(n-1)(n-2) + n(n-1) + n + 1 \\
&= \ldots \\
&= \frac{n!}{(n-i)!}T(n-i) + \frac{n!}{(n-i+1)!} + \frac{n!}{(n-i+2)!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}
\end{aligned}$$

Максималната стойност, която i достига, е $i_{max} = n - 1$. За $i = i_{max}$ имаме:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \frac{n!}{1!}T(1) + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!} \\
&= n! \times \underbrace{\left(\frac{T(1)}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)}_{A}
\end{aligned}$$

Но сумата A е ограничена от константа: редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ е сходящ, понеже бива мажориран от геометричния ред $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, за който знаем, че е сходящ. Следователно,

$$T(n) = \Theta(n!)$$

Зад. 5 Дадени са следните четири програмни фрагмента. За всеки от тях, намерете асимптотичната сложност по време като функция на n. Приемете, че n е достатъчно голямо цяло число. В подзадача **г)** имате 2 точки бонус, ако изведете правилно освен асимптотиката и точен израз за стойността, която връща f4, като функция на n.

а)

```
int f1(int n) {
 int i, s = 0;
 if (n < 2) return 2;
 for(i = 2; i < 4; i ++)
  s += f1(n-(4-i));
 return s; }
```

б)

```
int f2(int n) {
 int i, j, a = 1;
 if (n == 11) return a;
 i = 0;
 for(j = 1; j <= n; j ++) {
  a += f2(n-j+i);
  i ++; }
 return a; }
```

в)

```
int A[MAXINT];
int f3(int);

void main() {
 int i, n;
 scanf("%d", & n);
 for(i = 0; i < n; i ++)
  A[i] = i;
 return f3(1, n); }

int f3(int x, int y) {
 int i, j, k, q, s = 0, t = y - x;
 if (t < 2) return 1;
 k = (2*x + y) / 3;
 q = (x + 2*y) / 3;
 for (i = 0; i < t; i ++) {
  for (j = t; j > 1; j = j / 2)
   s += A[j]; }
 s += f3(x, q);
 s += f3(k, y);
 return s; }
```

г)

```
int f4(int n) {
 int i, a = 0;
 for (i = 0; i <= 2*n; i += 2)
  for (j = 0; j <= i; j += 2)
   a ++;
 return a; }
```

Решение:

а) Рекурентното отношение е

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

тъй като цикълът **for** се изпълнява два пъти, за $i = 2$ и $i = 3$, следователно рекурсивните викания са съответно $f1(n-2)$ и $f1(n-1)$. Решението е $T(n) = \Theta(\phi^n)$, където $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

б) Рекурсивните викания са точно n на брой. При всяко достигане на реда

```
a += f2(n-j+i);
```

е вярно, че $i = j - 1$, следователно $f2(n-j+i)$ е $f2(n-j+j-1) = f2(n-1)$. Следователно, рекурентното отношение е

$$T(n) = nT(n-1) + 1$$

Както видяхме в предишната задача, решението е $T(n) = \Theta(n!)$.

в) Ако изразяваме сложността чрез n, можем да твърдим следното. Изпълнението на двата вложени цикъла **for** отнема време $\Theta(n \lg n)$, тъй като външният се изпълнява точно n пъти, а вътрешният, $\Theta(\lg n)$ пъти. Има две рекурсивни викания, всяко върху вход с големина приблизително $\frac{2n}{3}$. За да се убедим, че е така, достатъчно е да съобразим, че интервалите $[x \ldots \frac{2x+y}{3}]$, $[\frac{2x+y}{3} \ldots \frac{x+2y}{3}]$ и $[\frac{x+2y}{3} \ldots y]$ имат приблизително еднаква големина, равна на $\frac{1}{3}$ от големината на $[x \ldots y]$. Рекурентното отношение, описващо сложността по време, е

$$T(n) = 2T\left(\frac{2n}{3}\right) + n \lg n$$

По първия случай на МТ, решението е

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 2}\right)$$

г) Очевидно е, че стойността, която функцията връща, е равна на броя на изпълненията на

```
a ++;
```

Променливата i приема последователно стойностите $0, 2, 4, \ldots, 2n$, следователно имаме точно $n+1$ изпълнения на външния цикъл **for**. Да разгледаме изпълнението на външния цикъл при стойност $2k$ на променливата i, т.е. $i = 2k$. Тогава вътрешният цикъл се изпълнява точно $k+1$ пъти. Следователно инструкцията `a ++;` се изпълнява точно

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

пъти. □