

**Зад. 1** Нека  $f(n)$ ,  $g(n)$  и  $h(n)$  са произволни асимптотично положителни функции, такива че  $f(n) = \Theta(g(n))$  и  $h(n) = \Theta(g(n))$ . Докажете или опровергайте всяко от следните твърдения:

1.  $\sqrt{f(n)h(n)} = \Theta(g(n))$
2.  $\sqrt[3]{(f(n))^2 + (h(n))^2} = \Theta(g(n))$

**Решение** Първото твърдение е вярно. Прилагайки дефиницията на  $\Theta()$  към условието, имаме

$$\begin{aligned} \exists c_1 > 0 \exists c_2 > 0 \exists n_1 > 0 \forall n \geq n_1 (c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)) \\ \exists c_3 > 0 \exists c_4 > 0 \exists n_2 > 0 \forall n \geq n_2 (c_3 g(n) \leq h(n) \leq c_4 g(n)) \end{aligned}$$

Нека  $n' = \max\{n_1, n_2\}$ . За всяко  $n$ , такова че  $n \geq n'$ ,

$$\begin{aligned} c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \\ c_3 g(n) \leq h(n) \leq c_4 g(n) \end{aligned}$$

Умножавайки неравенствата, получаваме

$$c_1 c_3 (g(n))^2 \leq f(n) h(n) \leq c_2 c_4 (g(n))^2$$

Тъй като в разглеждания домейн функциите са положителни, можем да коренуваме и получаваме

$$\sqrt{c_1 c_3 (g(n))^2} \leq \sqrt{f(n) h(n)} \leq \sqrt{c_2 c_4 (g(n))^2} \Leftrightarrow \sqrt{c_1 c_3} g(n) \leq \sqrt{f(n) h(n)} \leq \sqrt{c_2 c_4} g(n)$$

Следователно, съществуват константи  $c'$  и  $c''$ , а именно  $c' = \sqrt{c_1 c_3}$  и  $c'' = \sqrt{c_2 c_4}$  и стойност на аргумента  $n' = \max\{n_1, n_2\}$ , такива че за всяко  $n \geq n'$ :

$$c' g(n) \leq \sqrt{f(n) h(n)} \leq c'' g(n)$$

Прилагаме дефиницията на  $\Theta()$  и виждаме, че първото твърдение е вярно.

Второто твърдение е лъжа. Достатъчно е да посочим един контрапример. За контрапример може да използваме  $f(n) = n$ ,  $g(n) = n$  и  $h(n) = n$ . Очевидно  $f(n) = \Theta(g(n))$  и  $h(n) = \Theta(g(n))$ , но

$$\sqrt[3]{(f(n))^2 + (h(n))^2} = \sqrt[3]{2n^2} = \sqrt[3]{2} n^{\frac{2}{3}} \notin \Theta(n)$$

□

**Зад. 2** Подредете по асимптотично нарастване следните функции. Обосновете отговорите си кратко. Напишете в явен вид самата подредба.

$$\begin{array}{cccc} n!, & 100n!, & n^2 2^n + n!, & (n!)^2, \\ \sum_{k=1}^n k!, & n^2 2^n, & n^{12}, & \sqrt[n]{n!} \end{array}$$

**Решение** Тъй като функциите са осем на брой, ще извършим седем сравнения, с които ще установим окончателната наредба.

i  $(n!)^2 \succ n!$ , тъй като за всяка неограничено растяща функция  $f(n)$ , в сила е  $(f(n))^2 \succ f(n)$ . Последното се доказва тривиално, примерно с използване на анализ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f(n))^2}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{1} = \infty$$

ii  $n! \approx 100n!$ . Следва тривиално от дефиницията на  $\Theta()$  с двете константи равни на сто, и примерно  $n_0 = 1$ .

iii  $n^2 2^n + n! \approx n!$ . Ще покажем, че  $n^2 2^n \prec n!$ . Вземаме логаритъм от двете страни. Логаритъмът на лявата страна е

$$\lg n^2 2^n = 2 \lg n + n \lg 2 \approx n$$

Логаритъмът на дясната страна е

$$\lg n! \approx n \lg n$$

Последният факт е извеждан на лекции. Тъй като  $n \lg n \succ n$ , тоест логаритъмът на дясната страна расте асимптотично по-бързо, следва, че дясната страна  $n!$  расте по-бързо от лявата страна  $n^2 2^n$ .

След като изведем този факт, използваме наблюдението, че сума от положителни функции има асимптотиката на асимптотично най-бързо растящото събираемо, а именно  $n!$ .

iv  $\sum_{k=1}^n k! \approx n!$ , тоест сумата от факториелите има асимптотиката на най-старшото събираемо. Има различни начини да покажем това. Примерно:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k! &= \\ 1! + 2! + 3! + \dots (n-2)! + (n-1)! + n! &= \\ \frac{n!}{n(n-1)(n-2) \dots 2} + \frac{n!}{n(n-1)(n-2) \dots 3} + \frac{n!}{n(n-1)(n-2) \dots 4} + \dots + \frac{n!}{n} + \frac{n!}{1} &= \\ n! \left( \underbrace{\frac{1}{n(n-1)(n-2) \dots 2} + \frac{1}{n(n-1)(n-2) \dots 3} + \frac{1}{n(n-1)(n-2) \dots 4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1}}_A \right) &= \end{aligned} \quad (1)$$

Твърдим, че  $A$  е сума, ограничена от константа. Действително, нека запишем  $A$  в обратен ред

$$A = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)(n-2) \dots 3} + \frac{1}{n(n-1)(n-2) \dots 2}$$

и да я сравним със сумата

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

И двете суми имат  $n$  събираеми, като всяко събираемо на  $B$  е по-голямо или равно от съответното събираемо на  $A$  в реда, в който са написани. Известно е, че  $B \leq 2$ . Следователно,  $A \leq 2$ . Следователно,  $1 \leq A \leq 2$ . Замествайки в (1), получаваме  $\sum_{k=1}^n k! \approx n!$ .

Друг начин за извеждането на същия резултат е следният:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k! &= \\ 1! + 2! + 3! + \dots (n-2)! + (n-1)! + n! &< \\ \underbrace{1! + 2! + 3! + \dots (n-2)! + (n-1)!}_{n-1 \text{ събираеми}} + n! &< \\ \underbrace{(n-1)! + (n-1)! + \dots + (n-1)!}_{n-1 \text{ събираеми}} + n! &= \\ (n-1) \cdot (n-1)! + n! &< \\ n \cdot (n-1)! + n! &= \\ 2(n!) & \end{aligned}$$

v  $n! \succ n^2 2^n$ . Вече изведохме този факт.

vi  $n^2 2^n \succ n^{12}$ . За да докажем това, достатъчно е да логаритмуваме двете страни. След логаритмуването, лявата страна има асимптотика  $\Theta(n)$ , а дясната,  $\Theta(\lg n)$ .

vii  $n^{12} \succ \sqrt[n]{n!}$ . За да докажем това, достатъчно е да съобразим, че  $n^n > n!$  и че  $\sqrt[n]{n^n} = n$  и че  $n^{12} \succ n$ .

Окончателната подредба е:

$$(n!)^2 \succ n! \approx 100n! \approx n^2 2^n + n! \approx \sum_{k=1}^n k! \succ n^2 2^n \succ n^{12} \succ \sqrt[n]{n!}$$

**Зад. 3** Разгледайте следните два програмни фрагмента, написани на C. Докажете чрез инварианти, че всяка от функциите `sum1( )` и `sum2( )` връща сумата на елементите на масива  $A[0, 1, \dots, n-1]$ :

<pre>int A[n]; int sum1(int n) {     int i, s = 0;     for(i = 0; i &lt; n; i++) {         s += A[i]; }     return s; }</pre>	<pre>int A[n]; int sum2(int n) {     int i, s = 0;     for(i = 0; i &lt; n; i++) {         if (i%2 == 0) {             s += A[ i/2 ]; }         else {             s += A[ n - 1 - i/2 ]; } }     return s; }</pre>
---	---

Имайте предвид, че целочисленото деление  $i/2$  връща  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ .

**Решение за `sum1( )`:** Инварианта за `sum1( )`:

При всяко достигане на ред 4,  $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$ .

**База** При първото достигане на ред 4,  $s = 0$  заради присвояването на ред 3. От друга страна,  $\sum_{j=0}^{i-1} A[j] = 0$ , защото  $i = 0$ , което на свой ред означава, че множеството  $\{0, \dots, i-1\}$  е празно, а сума, в която индексната променлива взема стойности от празното множество, е нула. ✓

**Запазване** Нека твърдението е вярно при някое достигане, което не е последното. Преди присвояването на ред 5, имаме  $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$  от предположението. След присвояването на ред 5, имаме  $s = \left( s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j] \right) + A[i]$ . При следващото достигане на ред 4,  $i$  се инкрементира с единица, което означава, че по отношение на новото  $i$  имаме  $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$ .

**Терминация** При последното достигане на ред 4, в сила е

$$i = n$$

$$s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$$

Следователно,  $s = \sum_{j=0}^{n-1} A[j]$ .

**Решение за `sum2( )`:** Инварианта за `sum2( )`:

$$\text{При всяко достигане на ред 4, } s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j].$$

**База** При първото достигане на ред 4,  $s = 0$  заради присвояването на ред 3. От друга страна,

$$s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1}^{n-1} A[j] = 0 + 0 = 0, \text{ защото } \lfloor \frac{0+1}{2} \rfloor = 0 \text{ и } \lfloor \frac{0}{2} \rfloor = 0, \text{ което на свой ред означава, че}$$

множествата  $\{0, \dots, \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1\} = \{0, \dots, -1\}$  и  $\{n - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor, \dots, n-1\} = \{n-0, \dots, n-1\}$  са празни. ✓

**Запазване** Нека твърдението е вярно при някое достигане, което не е последното.

**Случай 1**  $i$  е четно. Условието на ред 5 е истина и изпълнението достига до ред 6. Преди присвояването на ред 6, имаме  $s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$  от предположението. След присвояването, имаме

$$\begin{aligned} s &= \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A \left[ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + A \left[ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \end{aligned} \quad (2)$$

Тъй като  $i$  е четно,  $i+1$  е нечетно. Лесно се вижда, че  $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ , следователно израз (2) е еквивалентен на:

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} A[j] + A \left[ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] = \\ &\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(i+1)+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \end{aligned} \quad (3)$$

При следващото достигане на ред 4,  $i$  се инкрементира с единица. Очевидно, спрямо новата стойност на  $i$ , израз (3) е:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Виждаме, че инвариантата се запазва.

**Случай 2**  $i$  е нечетно. Условието на ред 5 е лъжа и изпълнението достига до ред 8. Преди присвояването на ред 8, имаме  $s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$  от предположението. След присвояването, имаме

$$\begin{aligned} s &= \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A \left[ n-1 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \left( \left( \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A \left[ n-1 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-1-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \end{aligned} \quad (4)$$

При нечетно  $i$ , в сила е равенството  $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor$ . Освен това, за всяко  $i$  е вярно, че  $n-1 - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor = n-1 + \lceil -\frac{i}{2} \rceil = n + \lceil -1 - \frac{i}{2} \rceil = n - \lfloor 1 + \frac{i}{2} \rfloor = n - \lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor$ . При нечетно  $i$ , последният израз е равен на  $n - \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$ . Следователно израз (4) е еквивалентен на:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(i+1)+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \quad (5)$$

При следващото достигане на ред 4,  $i$  се инкрементира с единица. Очевидно, спрямо новата стойност на  $i$ , израз (5) е:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Виждаме, че инвариантата се запазва.

**Терминация** При последното достигане на ред 4, в сила е

$$i = n$$

$$s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Следователно,

$$s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \quad (6)$$

Ще покажем, че  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$  и  $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  са съседни стойности, нарастващи в този ред, за всяко естествено  $n$ . Първо да допуснем, че  $n$  е четно, тоест  $n = 2k$  за някое естествено  $k$ . Тогава

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor - 1 = k - 1$$

а

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k - k = k$$

Сега да допуснем, че  $n$  е нечетно, тоест  $n = 2k + 1$  за някое естествено  $k$ . Тогава

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor - 1 = k + 1 - 1 = k$$

а

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - k = k + 1$$

Щом  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$  и  $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  са съседни стойности, нарастващи в този ред, то интервалите

$$\left[0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1\right] \text{ и } \left[n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n - 1\right]$$

са разбиване на интервала  $[0, 1, \dots, n - 1]$ . Следователно, израз (6) е еквивалентен на

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} A[j]$$

□

**Зад. 4** Решете чрез развиване (итерация) следното рекурентно отношение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

## Решение

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \\
 &= T\left(\frac{n}{16}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \\
 &= T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \\
 &= T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{n^2}{16^2} + \frac{n^2}{16^1} + \frac{n^2}{16^0} = \\
 &= T\left(\frac{n}{4^4}\right) + \frac{n^2}{16^3} + \frac{n^2}{16^2} + \frac{n^2}{16^1} + \frac{n^2}{16^0} = \\
 &\dots \\
 &= T\left(\frac{n}{4^k}\right) + \frac{n^2}{16^{k-1}} + \frac{n^2}{16^{k-2}} + \frac{n^2}{16^{k-3}} + \dots + \frac{n^2}{16^0}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно  $k_{\max} = \log_4 n$ . Тогава израз (7) е еквивалентен на

$$\underbrace{T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right)}_{T(1)} + \underbrace{\frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-3}} + \dots + \frac{n^2}{16^0}}_{\log_4 n \text{ събираеми}} \tag{8}$$

Тъй като  $T(1)$  е константа, асимптотиката на (8) се определя от сумата

$$\begin{aligned}
 &\frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-3}} + \dots + \frac{n^2}{16^0} = \\
 &n^2 \underbrace{\left( \frac{1}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{1}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{1}{16^{(\log_4 n)-3}} + \dots + \frac{1}{16^0} \right)}_A
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тривиално се показва, че редът  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}$  е сходящ, следователно сумата  $A$  е ограничена от константа, следователно асимптотиката на (9) е  $\Theta(n^2)$ . Следователно,  $T(n) = \Theta(n^2)$ .  $\square$

**Зад. 5** Докажете по индукция, че следното рекурентното отношение има решение  $T(n) = \Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ :

$$T(n) = \frac{3}{2}T(n-1) + 2$$

**Решение, част i** Опитваме да покажем, че  $T(n) = O\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ , тоест

$$\exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : T(n) \leq c \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Индукционното предположение е, че

$$T(n-1) \leq c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

От дефиницията на  $T(n)$  и индукционното предположение следва, че

$$T(n) \leq \frac{3}{2} \left( c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \right) + 2 = c \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

Тъй като полученият израз не е по-малък или равен от  $c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ , налага се да засилим индукционното предположение. Ще покажем, че

$$\exists c > 0 \exists b, 1 < b < \frac{3}{2}, \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : T(n) \leq c \left(\frac{3}{2}\right)^n - b^n$$

Индукционното предположение е, че

$$T(n-1) \leq c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - b^{n-1}$$

От дефиницията на  $T(n)$  и индукционното предположение следва, че

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \frac{3}{2} \left( c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - b^{n-1} \right) + 2 = \\ &= c \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2} b^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned} c \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2} b^{n-1} + 2 &\leq c \left(\frac{3}{2}\right)^n - b^n \Leftrightarrow 2 \leq \frac{3}{2} b^{n-1} - b^{n-1} b \Leftrightarrow \\ 2 &\leq b^{n-1} \left(\frac{3}{2} - b\right) \end{aligned}$$

Но това е вярно за всяко  $b > 1$ , такова че  $b < \frac{3}{2}$ , за всички достатъчно големи  $n$ .

**Решение, част ii** Ще покажем, че  $T(n) = \Omega\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ , тоест

$$\exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geq n_0 : T(n) \geq c \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Индукционното предположение е, че

$$T(n-1) \geq c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

От дефиницията на  $T(n)$  и индукционното предположение следва, че

$$T(n) \geq \frac{3}{2} \left( c \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \right) + 2 = c \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2 \geq c \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

□

**Зад. 6** Даден е пет елементен масив  $A[]$ , такъв че  $\forall i, 1 \leq i \leq 5 : A[i] \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Известно е, че елементите на  $A[]$  са два по два различни. Кой са възможните стойности на  $A[]$ , за които изучаваната функция  $BUILD\_HEAP(A[])$  превръща масива в  $[5, 3, 4, 1, 2]$ ?

**Решение** Ето псевдокода на  $BUILD\_HEAP(A[])$ :

$BUILD\_HEAP(A[1, 2, \dots, n]: \text{array of integers})$

```
1  for i ← ⌊ $\frac{n}{2}$ ⌋ downto 1
2      HEAPIFY(A[], i)
```

В случая  $n$  е 5, следователно  $BUILD\_HEAP(A[])$  извиква  $HEAPIFY()$  точно  $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$  пъти. Последното извикване е  $HEAPIFY(A[], 1)$ . Кой елементи от  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  могат да бъдат на първа позиция в масива, така че след привършването на  $HEAPIFY(A[], 1)$  да имаме масив  $[5, 3, 4, 1, 2]$ ? Отговор: всеки елемент би могъл да бъде на първа позиция тогава. Ето защо.

**Случай i**  $A[1] = 5$  преди извикването на  $HEAPIFY(A[], 1)$ . Тогава  $A[]$  трябва да бъде  $[5, 3, 4, 1, 2]$  преди извикването на  $HEAPIFY(A[], 1)$ , тъй като  $HEAPIFY(A[], 1)$  няма да промени нищо когато  $A[1] > A[2]$  и  $A[1] > A[3]$ .

Какви са възможностите за масива  $A[]$  при предпоследното, тоест първото, извикване на  $HEAPIFY()$ , а именно  $HEAPIFY(A[], 2)$ ? Очевидно елементът със стойност 5 е на първа позиция, така че  $HEAPIFY(A[], 2)$

изобщо “не вижда” петицата. Ако някой от  $A[2]$ ,  $A[4]$  или  $A[5]$  е равен на 4, то няма как четворката да се озове на позиция 3 след края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Значи, 4 е на позиция 3 и 5 е на позиция 1 преди викането на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Останалите елементи, а именно 1, 2 и 3, могат да стоят на позиции 2, 4 и 5 по  $3! = 6$  начина. От тези шест пермутации, три, а именно

53412, 51432, 52431

водят до желаната крайна пермутация [5, 3, 4, 1, 2]. Останалите три, а именно

53421, 51423, 52413

водят до крайна пермутация [5, 3, 4, 2, 1]. Да резюмираме: има три възможни начални стойности на  $A[]$ , а именно [5, 3, 4, 1, 2], [5, 1, 4, 3, 2] и [5, 2, 4, 3, 1], за които  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$  прави масива [5, 3, 4, 1, 2]. Това са трите отговора в **Случай i**.

**Случай ii**  $A[1] = 4$  преди извикването на  $\text{HEAPIFY}(A[], 1)$ . Единствената възможност за  $A[]$  в този момент е [4, 3, 5, 1, 2] – очевидно петицата трябва да е на позиция 2 или позиция 3, но ако е на позиция 2, четворката ще отиде на позиция 2 в изпълнението на  $\text{HEAPIFY}(A[], 1)$ ; тройката е на позиция 2 понеже  $A[2, 4, 5]$  е пирамида, а единицата и двойката са така разположени, защото в обратния случай бихме имали [5, 3, 4, 2, 1] накрая.

Изведохме, че масивът е [4, 3, 5, 1, 2] след края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Тогава преди началото на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ , има точно три възможни пермутации на единицата, двойката и тройката (на позиции 2, 4 и 5), а именно

43512 41532 42513

Другите три пермутации, а именно

43521 41523 42531

биха довели до [4, 5, 3, 2, 1] в края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Да резюмираме: в **Случай ii**, възможните начални стойности на масива са [4, 3, 5, 1, 2], [4, 1, 5, 3, 2] и [4, 2, 5, 1, 3].

**Случай iii**  $A[1] = 3$  преди извикването на  $\text{HEAPIFY}(A[], 1)$ . Единствената възможност за масива в този момент е [3, 5, 4, 1, 2] – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като  $A[2, 4, 5]$  е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако единицата и двойката са разположени обратно, никога няма да получим  $A[4] = 1$  накрая.

Изведохме, че масивът е [3, 5, 4, 1, 2] след края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Тогава преди началото на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ , има точно три възможни пермутации на единицата, двойката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

35412 31452 32415

Другите три пермутации, а именно

35421 31452 32415

биха довели до [3, 5, 4, 2, 1] в края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Да резюмираме: в **Случай iii**, възможните начални стойности на масива са [3, 5, 4, 1, 2], [3, 1, 4, 5, 2] и [3, 2, 4, 1, 2].

**Случай iv**  $A[1] = 2$  преди извикването на  $\text{HEAPIFY}(A[], 1)$ . Единствената възможност за масива в този момент е [2, 5, 4, 1, 3] – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като  $A[2, 4, 5]$  е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако единицата и тройката са разположени обратно, никога няма да получим  $A[4] = 1$  накрая.

Изведохме, че масивът е [2, 5, 4, 1, 3] след края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Тогава преди началото на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ , има точно три възможни пермутации на единицата, тройката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

25413 21453 23451

Другите три пермутации, а именно

25431 21435 23451



биха довели до  $[2, 5, 4, 3, 1]$  в края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Да резюмираме: в **Случай iv**, възможните начални стойности на масива са  $[2, 5, 4, 1, 3]$ ,  $[2, 1, 4, 5, 3]$  и  $[2, 3, 4, 5, 1]$ .

**Случай v**  $A[1] = 1$  преди извикването на  $\text{HEAPIFY}(A[], 1)$ . Единствената възможност за масива в този момент е  $[1, 5, 4, 3, 2]$  – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като  $A[2, 4, 5]$  е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако двойката и тройката са разположени обратно, никога няма да получим  $A[5] = 2$  накрая.

Изведохме, че масивът е  $[1, 5, 4, 3, 2]$  след края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Тогава преди началото на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ , има точно три възможни пермутации на двойката, тройката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

15432   12435   13452

Другите три пермутации, а именно

15423   12453   13425

биха довели до  $[1, 5, 4, 2, 3]$  в края на  $\text{HEAPIFY}(A[], 2)$ . Да резюмираме: в **Случай v**, възможните начални стойности на масива са  $[1, 5, 4, 3, 2]$ ,  $[1, 2, 4, 3, 5]$  и  $[1, 3, 4, 5, 2]$ .  $\square$