Писмен изпит по ДАА, 18.06.2012 г.

Име:.. ФН:............. Група: ....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Макс.
получени точки									
от максимално	12	8	12	10	16	20	20	30	90

Сумата от точките е 128. За шестица са достатъчни 90 точки. Ако имате повече от 90 точки, това е бонус, който се добавя към оценката; иначе казано, възможно е да имате повече от 100%.

Зад. 1 Решете следните четири рекурентни отношения чрез мастър теоремата (Master Theorem).

а) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

б) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2}{(\lg n)^{11}}$

в) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2(\lg n)^{11}$

г) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n(\lg n) + \frac{n(\lg n)^9}{\lg\lg n} + n(\lg n)\left(\sqrt[4]{n^2 + n + (\lg n)^9}\right)$

Зад. 2 За всяко от следните четири рекурентни отношения, решете отношението чрез метода с характеристичното уравнение или обяснете защо не може да се реши чрез този метод.

а) $T(n) = T(n-1) + n^2$

б) $T(n) = T(n-1) + n^3 + (7n^2 + 5n - 33)\left(\frac{3}{2}\right)^n$

в) $T(n) = \left(n^2 + 2 - n^{\lg_2 4}\right) T(n-1) + 1$

г) $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \frac{n^3 + 3n^2}{n}$

Зад. 3 Намерете асимптотичната сложност на всеки от следните три фрагмента от програми.

```
int f(int n) {
 int i, s=2, m=n*n;
 for(i=0; i<m*n; i++)
  s += s;
 return s; }
```

```
int g(int n) {
 if(n < 10) return 1;
 int j=6, s=0;
 while(j > 8) }
  s += g(n-2);
  j --;}
 while(n-j > 1) {
  j = n;
  s += g(n-1) + g(n-2); }
 while(j >= n) {
  j = 2;
  s += g(n-j); } }
```

```
int h(int n) {
 int i, t=0;
 if(n < 2) return 2;
 t += h(n/3);
 for(i = 2; i < n; i <<=1)
  t ++;
 t *= h(n/3);
 return t; }
```

Зад. 4 Даден е масив $A[1, 2, \ldots, n]$ от цели числа. Предложете алгоритъм, който има разместваелементите на $A[]$ така, че всички отрицателни числа да са вляво от всички неотрицателни числа. Не се иска полученият масив да бъде сортиран. Опишете решението си в псевдокод. Нека алгоритъмът да е колкото е възможно по-бърз и ползва колкото е възможно по-малко памет, в асимптотичния смисъл.

Зад. 5 В тази задача графите са ориентирани, не са тегловни, не са мултиграфи и може би съдържат примки. За всеки граф $G = (V, E)$, *квадратът на* G наричаме графа $G^2 = (V, E^2)$, където

$$E^2 = \{(u, v) \in V \times V \mid \exists w \in W : (u, w) \in E \text{ и } (w, v) \in E\}$$

Предложете колкото може по-ефикасен алгоритми, които изчисляват G^2, ако

1. G е представен чрез списъци на съседства,

2. G е представен чрез матрица на съседства.

Накратко обосновете алгоритмите си и намерете асимптотичната им сложност по време. Не е необходимо да давате детайлен псевдокод, но отговорът Ви трябва да е абсолютно ясен и недвусмислен.

Зад. 6 Предложете колкото е възможно по-бързи алгоритми, изчисляващи кликовото число и мощността на максимално независимо множество на дърво. Кликовото число на граф G е броят на върховете в коя да е максимална клика в G. Независимо множество върхове е всяко $U \subseteq V(G)$, такова че $\forall x, y \in U : (x, y) \notin E$. Под "максимално независимо множество" разбираме максимално по мощност (а не по включване).

Зад. 7 Даден е двумерен масив $C[1, 2, \ldots, n][1, 2, \ldots, n]$ от естествени числа. *Специален път* в C наричаме всяка последователност $S_1, S_2, \ldots, S_n$ от клетки на масива, такава че

- S_1 е клетка от първия ред,
- S_j за $2 \leq j \leq n$ е елемент от ред номер j със следното ограничаващо условие. Нека k е номерът на колоната, в която се намира S_{j-1}. Тогава колоната, в която се намира S_j, е или k, или $k - 1$ (но само ако $k > 1$), или $k + 1$ (но само ако $k < n$).

Предложете колкото е възможно по-бърз алгоритъм, който намира специален път в C, такъв че сумата от стойностите на клетките му да е минимална. За пълен отговор е достатъчно да се намери само сумата, а не самият специален път.

Зад. 8 Обяснете колкото е възможно по-изчерпателно, какво е клас на сложност и какво е класът на сложност $\mathcal{NP}$-complete.

Нека е известно, че изчислителните задачи SAT, 3SAT и Хамилтонов Път са в $\mathcal{NP}$-complete. Докажете, че задачата Най-Дълъг Път в Граф е в $\mathcal{NP}$-complete.

Упътване: Изберете подходяща задача измежду трите дадени за полиномиална редукция. Дайте формална дефиниция на тази задача и на Най-Дълъг Път в Граф. *Припомнете си, че доказателство от този вид се състои от две части: принадлежност към класа и самата редукция.*