Übungsserie 1 – Lösungen

Aufgabe 1

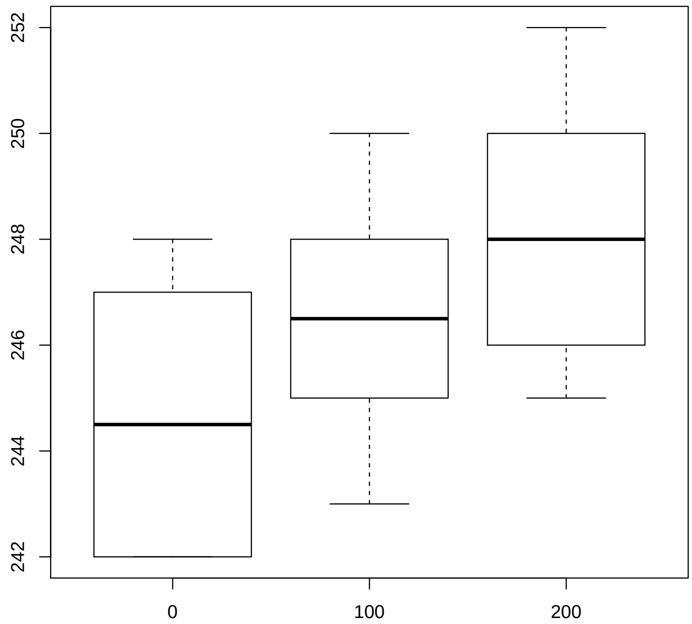
Wir lesen die Daten aus `Caffeine.txt` ein und speichern `dose` als kategorielle Variable:

```
daten <- read.table('./Caffeine.txt', header = TRUE)
daten$dose <- factor(daten$dose)
```

(a) `lapply(split(daten$fingertaps, daten$dose), mean)`

Wir erhalten für die Gruppen 0mg, 100mg und 200mg die Teilstichprobenmittelwerte 244.8, 246.4 und 248.3. Je höher die Dosis, desto höher die Tippgeschwindigkeit. Die Unterschiede sind jedoch nur klein.

(b) `boxplot(fingertaps ~ dose, data = daten)`



Die Boxplots weisen ebenfalls auf einen positiven Einfluss von Koffein auf die Tippgeschwindigkeit hin. (Achtung: Die vertikale Skala beginnt nicht bei 0!)

(c)
```
fit <- lm(fingertaps ~ dose, data = daten)
summary(fit)
```

Das Bestimmtheitsmass in der Stichprobe beträgt 0.3141. Die Koffeindosis erklärt 31.41% der Varianz von `fingertaps`.

(d) Die Varianz der Residuen erhalten wir durch `var(resid(fit))` $= 4.624$. Die Varianz der Anzahl Anschläge pro Minute ergibt `var(daten$fingertaps)` $= 6.741$. Damit lässt sich das R^2 von Hand berechnen:

$$R^2 = 1 - \frac{4.624}{6.741} = 0.314$$

Aufgabe 2

(a) Mit dem Befehl `by(daten$fingertaps, daten$dose, t.test)` erhalten wir drei Einstichproben-Student-Konfidenzintervalle für die tatsächlichen Gruppenmittelwerte μ_i. Mit einer Sicherheit von je 95% liegt μ_1 in $[243.1, 246.5]$, μ_2 in $[244.9, 247.9]$ und μ_3 in $[246.7, 249.9]$.

(b) H_0: Alle tatsächlichen Mittelwerte μ_i sind gleich.

H_1: Nicht alle μ_i sind gleich.

(c) H_0: Das R^2 in der Population ist null ($\theta = 0$).

H_1: Das R^2 in der Population ist grösser als null ($\theta > 0$).

(d) `summary(lm(fingertaps ~ dose, data = daten))`

Der p-Wert des F-Tests ist 0.006163, also kleiner als 0.05. Wir verwerfen die Nullhypothese auf dem 5% Niveau zugunsten der Arbeitshypothese und behaupten mit einer Sicherheit von rund 95%, dass wirklich ein Zusammenhang zwischen Koffeindosis und Tippgeschwindigkeit besteht.

(e) Um TSS zu bestimmen, könnten wir entweder die Varianzen aus Aufgabe 1 (d) mit 29 multiplizieren oder berechnen sie mit R neu. Teststatistik und p-Wert finden wir anhand der entsprechenden Formeln.

```
TSS <- with(daten, sum((fingertaps - mean(fingertaps))^2)) # 195.5
RSS <- sum(residuals(fit)^2)                               # 134.1
Teststat <- (TSS - RSS)/2 / (RSS/27)                       # 6.1812
pval <- 1 - pf(Teststat, 2, 27)                            # 0.0062
```

(f) `lapply(split(daten$fingertaps, daten$dose), sd)`

Die Standardabweichungen zwischen den Teilstichproben sind ähnlich: 2.4, 2.1 und 2.2. Jedoch ist der Umfang der Teilstichproben mit 10 eher klein. Das Testergebnis ist deshalb mit Vorsicht zu geniessen, zumindest solange wir nicht davon ausgehen können, dass die Beobachtungen tatsächlich normalverteilt sind.

(g) Aus einem negativen Testentscheid (p-Wert nicht kleiner als Niveau) folgt nicht, dass die Nullhypothese (alle Varianzen gleich) stimmt. (Das gleiche Problem gibt es auch bei Tests auf Normalverteilung usw.)

(h) Die untere 95%-Konfidenzschranke muss grösser als null sein. Grund: Konfidenzschranke und p-Wert müssen zum gleichen Testentscheid ($\theta > 0$) führen.

(i) Ganz ohne Korrektur finden Sie nur zwischen der Gruppe ohne Koffein und jener mit 200mg einen systematischen Unterschied (p-Wert 0.0016).

```
pairwise.t.test(daten$fingertaps, daten$dose, p.adj = "none")
```

Zum gleichen Schluss kommt man mit der Bonferroni-Holm-Korrektur:

```
pairwise.t.test(daten$fingertaps, daten$dose, p.adj = "holm")
```

Der kleinste p-Wert ohne Korrektur (0.0016) wird dabei mit der Anzahl Tests (drei) multipliziert und mit 5% verglichen ($0.0016 \cdot 3 < 0.05$). (Der zweitkleinste p-Werte würde mal zwei gerechnet, der grösste p-Wert mal eins.)

Aufgabe 3

(a) Wegen $\mathrm{RSS} = \mathrm{Var}(e)(n-1)$ und $\mathrm{TSS} = \mathrm{Var}(Y)(n-1)$ folgt direkt

$$R^2 = 1 - \frac{\mathrm{Var}(e)}{\mathrm{Var}(Y)} = 1 - \frac{\mathrm{Var}(e)(n-1)}{\mathrm{Var}(Y)(n-1)} = 1 - \frac{\mathrm{RSS}}{\mathrm{TSS}}$$

und damit die zu zeigenden Formeln.

(b) Indem wir die Formeln aus (a) in die Definition der F-Teststatistik

$$T = \frac{(\mathrm{TSS} - \mathrm{RSS})/(p-1)}{\mathrm{RSS}/(n-p)}$$

einsetzen, erhalten wir

$$T = \frac{(\mathrm{TSS} - \mathrm{RSS})}{\mathrm{RSS}} \frac{n-p}{p-1} = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-p}{p-1}.$$

(c) Ein grosser Stichprobenumfang n, wenig Gruppen p und ein hohes R^2 erhöhen T und damit die Evidenz gegen die Nullhypothese.

(d) Das R^2 beträgt 0.314, $p = 3$ und $n = 30$, also ist die Teststatistik

$$T = 0.314/(1 - 0.314) \cdot 27/2 = 6.1793.$$

Dies entspricht bis auf Rundungsfehler tatsächlich der F-Teststatistik (z. B. in Aufgabe 2 (e).).