Zusammenfassung Differentialgeometrie

Tobias Klas

12. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Analysis mit Kurven

1.1 Parametrisierte Kurven

Definition 1.1 (Parametrisierte Kurven)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X ein topologischer Raum. Eine stetige Funktion $c : [a, b] \to X$ heißt *parametrisierte Kurve*. Der Punkt $c(a) \in X$ heißt *Anfangspunkt* und der Punkt $c(b) \in X$ *Endpunkt* der parametrisierten Kurve c. Ist $X = \mathbb{R}^n$ und ist c eine C^k-Funktion, so nennen wir c ein *parametrisierte Kurve der Klasse C^k* oder einfach parametrisierte C^k-Kurve. Eine parametrisierte C^k-Kurve c heißt *geschlossen*, falls

$$c(a) = c(b) \quad \text{und falls } k \geq 1 \text{ gilt für alle } 1 \leq r \leq k : \; D^r c(a) = D^r c(b).$$

Definition 1.2 (Jordan-Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve c heißt *Jordan-Kurve*, falls c geschlossen ist und c auf $[a, b)$ injektiv ist.

Beispiel 1.3.

- *(Doppel-)Helix:* Sei $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$. Das Bild der parametrisierten C^∞-Kurve

  $$c_{\rho,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t)$$

  ist ein *Kreis* um $\mathbf{0}$ mit Radius $|\rho|$, falls $\sigma = 0$. Ist $\sigma\rho \neq 0$, so ist das Bild eine *Helix*. Die Bilder von $c_{-\sigma,\rho}$ und $c_{\sigma,\rho}$ ergeben eine *Doppelhelix*.

- *Doppelhelix:*

- *Neilsche Parabel:*

Definition 1.4 (Äquivalente Kurven)**.** Es seien $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte C^k-Kurven. Wir nennen c_1 und c_2 *linear äquivalent*, falls es eine affin lineare bijektive Abbildung

$$\varphi : I_1 \to I_2, \quad t \mapsto at + b$$

gibt, so dass

$$c_1 = c_2 \circ \varphi.$$

Die Abbildung φ heißt *Parametertransformation.* Ist

$$\varphi \in C^k, \quad c_1 = c_2 \circ \varphi \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I_1,$$

so heißen c_1 und c_2 *äquivalent.* Gilt sogar für alle $t \in I_1$, dass

$$\dot{\varphi}(t) > 0,$$

so heißen c_1 und c_2 *orientierbar äquivalent* und φ *zulässige Parametertransformation.*

Lemma 1.5. *Durch die lineare Äquivalenz, die Äquivalenz und die orientierbare Äquivalenz zweier parametrisierter Kurven sind Äquivalenzrelationen definiert.*

Beweis. □

Definition 1.6 (Länge)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die **Länge** einer parametrisierten Kurve $c : [a, b] \to X$ definiert durch

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(c(t_i), c(t_{i-1})) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq b \right\}.$$

Eine parametrisierte Kurve mit endlicher Länge heißt *rektifizierbar.*

Lemma 1.7. *Jede parametrisierte C^k-Kurve ist rektifizierbar und ihre Länge ist durch*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

gegeben.

Beweis. Sei $Z : a = t_0 < ... < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so nennen wir

$$\delta(Z) := \sup_{1 \leq i \leq m} |t_i - t_{i-1}|$$

die *Feinheit* von Z. Es gibt dann eine Folge (Z_l) von Zerlegungen, so dass

$$\lim_{l \to \infty} L(c_{Z_l}) = L(c)$$

und $\lim_{t \to \infty} \delta(Z_t) = 0$. Wir parametrisieren $c_{\mathbf{x}_{i-1}^l \mathbf{x}_i^l}$ durch

$$[t_{i-1}^l, t_i^l] \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \mathbf{x}_{i-1}^l + \frac{t - t_{i-1}^l}{t_i^l - t_{i-1}^l} (\mathbf{x}_i^l - \mathbf{x}_{i-1}^l)$$

mit $\mathbf{x}_i^l = c(t_i^l)$. Die Länge von $c_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}$ bleibt unverändert, außerdem gilt

$$L(c_{Z_t}) = \sum_{i=1}^{m_l} \int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} \left\| \dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) \right\| \mathrm{d}t$$

mit

$$\dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) = \frac{c(t_i^l) - c(t_{i-1}^l)}{t_i^l - t_{i-1}^l}.$$

Damit ist

$$\dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) - \dot{c}(t) = \frac{1}{t_i^l - t_{i-1}^l} \int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} (\dot{c}(\xi) - \dot{c}(t))\, \mathrm{d}\xi$$

Setzen wir

$$f_l(t) := \dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t),$$

so ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\dot{c}(t)$ in $[a, b]$

$$\| \|f_l(t)\| - \|\dot{c}(t)\| \| \leq \|f_l(t) - \dot{c}(t)\| \leq \varepsilon,$$

wenn $\delta(Z_l) \leq \delta(\varepsilon)$. Also ist $f_l(t)$ gleichmäßig konvergent und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist

$$L(c) = \lim_{l\to\infty} L(c_{Z_l}) = \lim_{l\to\infty} \int_a^b \|f_l(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

□

Definition 1.8 (Gleichförmig parametrisierte Kurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve und $t_0 \in I$, so die Kurve c *gleichförmig parametrisiert für* $t \geq t_0$, falls ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(\theta)\|_2 \,\mathrm{d}\theta = C(t - t_0).$$

D.h. die Länge von c eingeschränkt auf $[t_0, t]$ ist *proportional* zu $t - t_0$.

Lemma 1.9. *Wenn $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve, die für $t \geq t_0$ gleichförmig parametrisiert ist, dann gibt es ein $C > 0$, so dass*

$$\|\dot{c}(\theta)\|_2 = C$$

für alle $\theta \in [t_0, t]$.

Beispiel 1.10 (Gleichförmige Bewegung eines Massepunktes)**.**

Definition 1.11 (Bogenlänge)**.** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. Die Funktion

$$s_c(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta, \qquad t \in [a, b]$$

heißt die *Bogenlänge von c*. Wir sagen eine parametrisierte C^k-Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta = C(t - a)$$

gilt. Eine parametrisierte C^k-Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist *mit Bogenlänge parametrisiert*, falls $C = 1$ ist.

Lemma 1.12. *Wenn die parametrisierte C^k-Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist*

$$\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$$

für alle $t \in [a, b]$.

Theorem 1.13. *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. So ist c genau dann proportional zur Bogenlänge parametrisierbar, falls $\dot{c}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$). Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve und nach Bogenlänge parametrisierbar. Differentiation nach t ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^t \|\dot{c}(\theta)\|_2 \, \mathrm{d}\theta = C \neq 0.$$

($\Leftarrow$). Sei $\dot{c} \neq \mathbf{0}$ auf ganz $[a, b]$. Dann definiert

$$s_c(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta, \qquad t \in [a, b]$$

eine zulässige Parametertransformation. Somit ist für $\tilde{c} = c \circ s_c^{-1}$

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \tilde{c}(\theta) \right\| = \left\| \dot{c}(s_c^{-1}(\theta)) \right\| \frac{1}{\left\| \dot{c}(s_c^{-1}(\theta)) \right\|} = 1$$

$\square$

Definition 1.14 (Reguläre Kurve)**.** Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. Wir nennen die Kurve c *regulär*, falls für alle $t \in I$

$$\dot{c}(t) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Beispiel 1.15.

Definition 1.16 (Tangenete)**.** Für eine reguläre parametrisierte C^k-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt die durch

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ \lambda &\mapsto c(t) + \lambda \dot{c}(t) \end{aligned}$$

definierte Gerade im $\mathbb{R}^n$ *Tangente an c im Punkt $c(t)$*. Der Vektor $\dot{c}(t)$ heißt *Tangentialvektor an c im Punkt $c(t)$*.

1.2 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 1.17 (Gebiet)**.** Sei X ein topologischer Raum. Ein *Gebiet* $G \subseteq X$ ist eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge von X. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es ein $\mathbf{x}_0 \in G$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in G$ die Strecke

$$[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mid t \in [0, 1]\}$$

eine Teilmenge von G ist. Das Gebiet G nennen wir *konvex*, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt, dass

$$t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in G$$

ist.

Definition 1.18 (Gewöhnliche Differentialgleichung)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^0((a, b) \times G, \mathbb{R}^n)$. Eine Funktion $u \in C^1((\alpha, \beta), G)$ mit $a \leq \alpha < \beta \leq b$ heißt *Lösung der durch F definierten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswert $u_0 \in G$ in $t_0 \in (\alpha, \beta)$*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)), \quad t \in (\alpha, \beta), \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Theorem 1.19 (Satz von Picard-Lindelöf)**.** *Sei* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*,* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $F \in C^0((a,b) \times G, \mathbb{R}^n)$*. Es gilt:*

(i) Zu jedem $t_0 \in (a,b)$ *und jedem* $\mathbf{f}_0 \in G$ *gibt es ein* $\varepsilon > 0$ *mit* $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$ *und eine Umgebung* U *von* $\mathbf{f}_0 \in G$*, so dass für* $u_1 \in U$ *eine Lösung*

$$u \in C^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), G)$$

des Problems

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)), \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \\ u(t_0) &= \mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

existiert.

(ii) Erfüllt F *in jedem Punkt* (t_0, u_0) *die Bedingung, dass zu jedem* $(t_0, \mathbf{u}_0)$ *eine Umgebung* $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset (a,b) \times G$ *derart existiert, dass für* $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ *und* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$

$$\|F(t, \mathbf{x}_1) - F(t, \mathbf{x}_2)\| \leq M \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

gilt mit einer nur von ε *und* U *abhängigen Konstanten* M*, so sind die nach (i) existierenden Lösungen für jeden Anfangswert eindeutig bestimmt.*

(iii) Gilt sogar $F \in C^k$ *mit* $k \geq 1$*, so gilt für die Lösung* u *des Anfangswertproblems* $u \in C^{k+1}$*.*

Definition 1.20 (Dynamisches System)**.** Da durch diese Differentialgleichungen oft die zeitliche Entwicklung bzw. die Dynamik vieler natürlicher Phänomene beschrieben werden nennen wir sie auch *dynamische Systeme*. Hängt F nicht explizit von der Zeit ab, d.h.

$$F(t, \mathbf{x}) = \tilde{F}(\mathbf{x}),$$

so ist

$$\dot{u}(t) = \tilde{F}(u(t)),$$

so nennen wir das System *autonom*. Alle Systeme für die das nicht gilt heißen *nicht autonom*.

Definition 1.21 (C^k-Vektorfeld)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $F \in C^k(G, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, heißt ein k-fach differenzierbares Vektorfeld (oder kürzer C^k-Vektorfeld) in G.

Definition 1.22 (Integralkurve)**.** Sei F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$, und $x_0 \in G$. Jede C^1-Lösung $c : [a,b] \to G$ der durch F definierten Differentialgleichung mit $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$ und $c(0) = \mathbf{x}_0$ heißt eine Integralkurve von F durch $\mathbf{x}_0$.

Beispiel 1.23. Wir betrachen folgende Differentialgleichung:

$$\dot{u}(t) = \frac{2u(t)}{t}.$$

Also ist $f(t, u(t)) = \frac{2u(t)}{t}$ für $x = u(t)$, somit ergibt sich $f(t, x) = \frac{2x}{t}$. Diese Differentialgleichung ist also nicht autonom. Wir sehen, dass, wenn der Graph einer Lösung durch den Punkt (t, x) läuft, dieser dort die Steigung $\frac{2x}{t}$ hat. Somit lässt sich jedem Punkt (t, x) in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit Steigung $\frac{2x}{t}$ zuordnen. Somit haben wir durch

$$F : G \to \mathbb{R}^2, \qquad (t, x) \mapsto (1, \frac{2x}{t})$$

ein Vektorfeld definiert. Damit sind alle möglichen Lösungen u der Differentialgleichung durch F definiert. Die allgemeine Lösung der Differential ist $u(t) = kt^2$. Für einen konkreten Anfangswert $u(1) = 5$ ist somit $u(t) = 5t^2$ die Lösung der Differentialgleichung. Damit ist

$$c : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, 5t^2)$$

die gesuchte Integralkurve zu F durch $(1, 5)$, denn

$$\dot{c}(t) = (1, 10t) = (1, \frac{2 \cdot 5t^2}{t}) = (1, \frac{2u(t)}{t}) = (1, f(t, u(t))) = F(t, u(t))$$

Definition 1.24 (Stationärer Punkt)**.** Sei F ein C^k-Vektorfeld in G. Die Punkte $x \in G$ mit $F(x) = 0$ heißen *stationären Punkte von F*.

Theorem 1.25 (Fundamentalsatz über die Integralkurve)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{x} \in G$ eine ausgezeichnete Integralkurve $c_{\mathbf{x}} : (a_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}) \to G$ durch $\mathbf{x}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $-\infty \leq a_k < 0 < b_k \leq \infty$,

(ii) $c_{\mathbf{x}} \in C^{k+1}((a_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}), G)$,

(iii) Ist $c : (a, b) \to G$ eine Integralkurve durch $\mathbf{x}$, so ist $a_{\mathbf{x}} \leq a < b \leq b_{\mathbf{x}}$ und $c = c_{\mathbf{x}} |_{(a,b)}$,

(iv) Zu jedem $\mathbf{x} \in G$ und $t \in (a_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}})$ gibt es eine Umgebung U von $\mathbf{x}$ in G und ein $\varepsilon > 0$, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) &\longrightarrow G \\ (\mathbf{y}, s) &\mapsto c_{\mathbf{y}}(s) \end{aligned}$$

von der Klasse C^k.

Beweis. Sei $C_{\mathbf{x}}$ die Menge aller Integralkurven von F durch $\mathbf{x}$. Für zwei Kurven c_1, c_2 ist durch $c_1 \prec c_2 :\Leftrightarrow (a_1, b_1) \subset (a_2, b_2)$ eine Halbordnung auf $C_{\mathbf{x}}$ definiert. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist $c_1 = c_2$ auf (a_1, b_1). Es bleibt nur zu zeigen, dass $C_{\mathbf{x}}$ bezüglich der Halbordnung ein maximales Element hat. Sei $D \subset C_{\mathbf{x}}$ und $c \in D$ mit Definitionsintervall (a_c, b_c). Somit ist

$$(a_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}) := \bigcup_{c \in D} (a_c, b_c).$$

Setzen wir

$$c_{\mathbf{x}}(t) := c(t), \qquad t \in (a_c, b_c).$$

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass $c_{\mathbf{x}}$ wohldefiniert und eine Integralkurve durch $\mathbf{x}$ ist, womit nach dem Lemma von Zorn $C_{\mathbf{x}}$ ein maximales Element besitzt. $\square$

Definition 1.26 (Vollständiges C^k-Vektorfeld)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. F heißt *vollständig*, wenn $(a_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}) = \mathbb{R}$ für jedes $\mathbf{x} \in G$.

Definition 1.27 (Fluss)**.** Sei F ein vollständigges C^1-Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es für jedes $\mathbf{x}_0 \in G$ eine eindeutige maximale Lösung $c_{\mathbf{x}_0} : (a_{\mathbf{x}_0}, b_{\mathbf{x}_0}) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Die Abbildung $\Phi(t, \mathbf{x}) := c_{\mathbf{x}}(t)$ heißt *Fluss des Vektorfeldes F*.

Lemma 1.28 (Eigenschaften des Flusses)**.** *Sei $\Phi : \mathbb{R} \times G \to G$ der Fluss eines vollständigen C^k-Vektorfeldes F in $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt der Fluss Φ_t folgende Eigenschaften:*

(i) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t : G \to G$ eine stetige Funktion.

() Für den Zeitpunkt $t = 0$ ist Φ_0 die Identität id_G auf G.

(iii) Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

Definition 1.29 (Modul über dem Ring $C^k(G)$)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und es seien F, H zwei C^k-Vektorfelder in G und $f \in C^k(G, \mathbb{R})$ ein Skalarfeld. So definieren wir durch skalare Multiplikation

$$f(F(\mathbf{x})) := f(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$$

ein neues C^k-Vektorfeld fF und durch Vektoraddition

$$(F + H)(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})$$

ebenfalls ein neues C^k-Vektorfeld $F + H$ auf G. Der Vektorraum aller C^k-Vektorfelder auf G ist ein *Modul über dem Ring $C^k(G)$*.

Definition 1.30 (Lineares stetiges Vektorfeld)**.** Ein C^0-Vektorfeld F im $\mathbb{R}^n$ heißt *linear*, falls es eine lineare Funktion in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$F(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y}).$$

Jedes lineare Vektorfeld F in $\mathbb{R}^n$ gehört also eine Matrix (F_{ij}), so dass

$$F_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}x_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Für $n = 1$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear, so ist

$$F(x) = ax$$

für $a \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich für die Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = ac(t), c(0) = x_0$$

die Lösung

$$c(t) = x_0 e^{at} = e^{at} x_0.$$

Für den mehrdimensionalen Fall

$$\dot{c}(t) = F(c(t)), \qquad c(0) = \mathbf{x}_0$$

erhalten wir so $c(t) = e^{tF}(\mathbf{x}_0)$. Es stellt sich nun die Frage wie sich e^{tF} praktisch berechnen lässt. Wir betrachten zwei Spezialfälle:
(i) Sei F eine $n \times n$-Matrix. F ist *ähnlich zu einer Diagonalmatrix* $D = (\delta_{ij}\lambda_j)$, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T mit

$$F = TDT^{-1}.$$

Somit sind $\lambda_1, .., \lambda_n$ gerade die Eigenwerte von F und es gibt eine Basis $e_1, ..., e_n$ von $\mathbb{R}^n$ mit e_i ist Eigenvektor von F zum Eigenwert λ_i. Somit ist

$$e^{tF} = Te^{tD}T^{-1},$$

während

$$e^{tD} = (\delta_{ij} e^{t\lambda_j})$$

(ii) F ist *nilpotent*, d.h. . Zu dieser nilpotenten $n \times n$-Matrix existiert ein $k \leq n$ mit $F^k = 0$, also $F^n = 0$. Dann wird e^{tF} eine Matrix, deren sämtliche Koeffizienten Polynome in t sind vom Grad kleiner gleich $n - 1$. Eine nilpotente Matrix ist immer ähnlich zu

einer oberen Dreiecksmatrix, die auf der Diagonalen nur Nullen hat.
(iii) Sei A Element eines komplexer Vektorraums, so gibt es eine Zerlegung

$$A = S + N, \qquad SN = NS$$

mit S einer diagonalisierbaren und N einer nilpotenten Matrix. Da S und N kommutieren, gilt

$$e^A = e^{S+N} = e^S e^N.$$

Für einen reellen Vektorraum gilt folgender Satz:

Theorem 1.31 (Normalformensatz). *Sei $F = (F_{ij})$ ein lineares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist F vollständig und der Fluss (Φ_t) von F ist gegeben durch*

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = e^{tF}(\mathbf{x}), \qquad t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist

$$e^{tF} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} F^j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k(t) e^{\lambda_k t} \right),$$

wobei λ_1, λ_n die Eigenwerte von F sind und $a_{ij}^k(t)$ Polynome in t vom Grad kleiner gleich $n-1$.

Definition 1.32 (Gradientenfeld). Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G. F ist ein *Gradientenfeld*, falls es eine C^{k+1}-Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}).$$

Wir sagen zu φ auch *Skalarpotential*.

Lemma 1.33 (Integrabilitätsbedingungen). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. Ist F ein Gradientenfeld, so sind die Integritätsbedingungen*

$$\partial_j F_i(\mathbf{x}) = \partial_i F_j(x), \qquad \mathbf{x} \in G, 1 \leq i, j \leq n$$

erfüllt. Ist das Gebiet zusammenhängend, so gilt sogar, dass F ein Gradientenfeld ist genau dann, wenn alle Integrabilitätsbedingung erfüllt sind.

Beweis. Sei F ein Gradientenfeld, so gibt es also $\varphi \in C^{k+1}(G)$ mit

$$F_i(\mathbf{x}) = \partial_i\varphi(\mathbf{x}).$$

Da partielle Ableitungen vertauschbar sind gilt

$$\partial_j F_i(\mathbf{x}) = \partial_j\partial_i\varphi(\mathbf{x}) = \partial_i\partial_j\varphi(\mathbf{x}) = \partial_i F_j(\mathbf{x}),$$

$\mathbf{x} \in G$, $1 \leq i, j \leq n$. □

Definition 1.34 (Hamilton-Vektorfeld)**.** Ein C^k-Vektorfeld F im $\mathbb{R}^{2n}$ heißt *Hamilton-Vektorfeld*, falls es eine C^{k+1}-Funktion H im $\mathbb{R}^{2n}$ gibt mit

$$F(\mathbf{x}) = I(\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})), \qquad I := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

H heißt dann die zu F gehörende *Hamilton-Funktion*.

Beispiel 1.35.

1.3 Kurvenintegrale

Wir erinnern zunächst daran, dass eine endliche Kurve im $\mathbb{R}^n$ Hausdorff-Dimension 1 hat. D.h. die Länge einer endlichen Kurve entspricht dem Hausdorff-Maß von $\mathcal{H}^1$ der Dimension 1.

Definition 1.36 (Kurvenintegral)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein C^0-Skalarfeld und $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^1-Kurve (oder auch stückweise C^1). Dann ist das *Kurvenintegral erster Art* entlang der Kurve c definiert als

$$\int_c f \,\mathrm{d}s := \int_a^b f(c(t)) \, \|\dot{c}(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

Hierbei ist s die Länge eines Kurvenelements. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^0-Vektorfeld und $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^1-Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral zweiter Art* entlang der Kurve c definiert als

$$\int_c F \,\mathrm{d}s := \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Lemma 1.37. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, F ein C^0-Vektorfeld in G und $c_1 : [a, b] \to G$ eine reguläre Kurve. Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine Parametertransformation von c_1, dh. $c_2 = c_1 \circ \varphi$, so gilt*

$$\int_{c_2} F \,\mathrm{d}s = \pm \int_{c_1} F \,\mathrm{d}s.$$

Beispiel 1.38.

Definition 1.39 (Energie einer regulären Kurve)**.** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, so nennen wir

$$E(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \,\mathrm{d}t$$

die *Energie der Kurve.*

Lemma 1.40. *Das Kurvenintegral ist linear, d.h. für zwei C^0-Vektorfelder V, W ist*

$$\int_c (\alpha V + W)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_c V\,\mathrm{d}s + \int_c W\,\mathrm{d}s.$$

Es ist bis auf das Vorzeichen invariant bzgl. der Durchlaufrichtung der Kurve, d.h. ob die Kurve positiv oder negativ durchlaufen wird. Insbesondere ist für eine C^0-Vektorfeld F die aus den regulären Kurven c_1 und c_2 zusammen gesetzte Kurve $c = c_1 \star c_2$ das Kurvenintegral durch

$$\int_{c_1 \star c_2} F\,\mathrm{d}s = \int_{c_1} F\,\mathrm{d}s + \int_{c_2} F\,\mathrm{d}s$$

gegeben.

Beweis. Die erste zwei Aussagen folgen direkt aus den Eigenschaften des abstrakten Integrals. Sei $c_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ zwei parametrisierte reguläre Kurven. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{c_1 \star c_2} F\,\mathrm{d}s &= \int_a^{b+(d-c)} \Big\langle F(c_1 \star c_2(t)), (c_1 \dot{\star} c_2)(t) \Big\rangle\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \langle F(c_1(t)), \dot{c}_1(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_a^{b+(d-c)} \langle F(t-b+c), \dot{c}_2(t-b+c)\rangle\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{c_1} F\,\mathrm{d}s + \int_{c_2} F\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

Definition 1.41 (Wegunabhängig integrierbar)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^0-Vektorfeld auf G. Dann heißt F *wegunabhängig integrierbar*, falls für jede parametrisierte geschlossene stückweise C^1-Kurve c in G gilt, dass

$$\int_c F\,\mathrm{d}s = 0.$$

Theorem 1.42. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^0-Vektorfeld auf G. F ist genau dann in G wegunabhängig integrierbar, wenn F ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn es $\varphi \in C^1(G)$ gibt mit*

$$F = \nabla\varphi.$$

Insbesondere ist ein C^1-Vektorfeld F auf einen sternförmigen Gebiet genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_j F_i = \partial_i F_j \qquad \text{für } i, j \in \{1, ..., n\}$$

erfüllt sind.

Beweis. content... □

1.4 Satz von Gauß und die Formeln von Green

Definition 1.43 (Gebiete erster und zweiter Art).

Definition 1.44 (Randintegral im $\mathbb{R}^2$).

Theorem 1.45 (Satz von Gauß-Green).

Definition 1.46 (Innere und äußere Normale).

Definition 1.47 (Integral über einer Kurve).

Theorem 1.48 (Satz von Gauß).

Theorem 1.49 (Formeln von Green).