Zusammenfassung Differentialgeometrie

Tobias Klas

10. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Analysis mit Kurven

1.1 Parametrisierte Kurven

Definition 1.1 (Parametrisierte Kurven)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X ein topologischer Raum. Eine stetige Funktion $c : [a, b] \to X$ heißt *parametrisierte Kurve*. Der Punkt $c(a) \in X$ heißt *Anfangspunkt* und der Punkt $c(b) \in X$ *Endpunkt* der parametrisierten Kurve c. Ist $X = \mathbb{R}^n$ und ist c eine C^k-Funktion, so nennen wir c ein *parametrisierte Kurve der Klasse* C^k oder einfach parametrisierte C^k-Kurve. Eine parametrisierte C^k-Kurve c heißt *geschlossen*, falls

$$c(a) = c(b) \quad \text{und falls } k \geq 1 \text{ gilt für alle } 1 \leq r \leq k: \; D^r c(a) = D^r c(b).$$

Definition 1.2 (Jordan-Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve c heißt *Jordan-Kurve*, falls c geschlossen ist und c auf $[a, b)$ injektiv ist.

Beispiel 1.3.

- *(Doppel-)Helix:* Sei $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$. Das Bild der parametrisierten C^∞-Kurve

  $$c_{\rho,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto (\rho \cos t, \rho \sin t, \sigma t)$$

  ist ein *Kreis* um $\mathbf{0}$ mit Radius $|\rho|$, falls $\sigma = 0$. Ist $\sigma\rho \neq 0$, so ist das Bild eine *Helix*. Die Bilder von $c_{-\sigma,\rho}$ und $c_{\sigma,\rho}$ ergeben eine *Doppelhelix*.

- *Doppelhelix:*

- *Neilsche Parabel:*

Definition 1.4 (Äquivalente Kurven)**.** Es seien $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte C^k-Kurven. Wir nennen c_1 und c_2 *linear äquivalent*, falls es eine affin lineare bijektive Abbildung

$$\varphi : I_1 \to I_2, \quad t \mapsto at + b$$

gibt, so dass

$$c_1 = c_2 \circ \varphi.$$

Die Abbildung φ heißt *Parametertransformation.* Ist

$$\varphi \in C^k, \quad c_1 = c_2 \circ \varphi \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I_1,$$

so heißen c_1 und c_2 *äquivalent.* Gilt sogar für alle $t \in I_1$, dass

$$\dot{\varphi}(t) > 0,$$

so heißen c_1 und c_2 *orientierbar äquivalent* und φ *zulässige Parametertransformation.*

Lemma 1.5. *Durch die lineare Äquivalenz, die Äquivalenz und die orientierbare Äquivalenz zweier parametrisierter Kurven sind Äquivalenzrelationen definiert.*

Beweis. □

Definition 1.6 (Länge)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die **Länge** einer parametrisierten Kurve $c : [a, b] \to X$ definiert durch

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(c(t_i), c(t_{i-1})) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq b \right\}.$$

Eine parametrisierte Kurve mit endlicher Länge heißt *rektifizierbar.*

Lemma 1.7. *Jede parametrisierte C^k-Kurve ist rektifizierbar und ihre Länge ist durch*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

gegeben.

Beweis. Sei $Z : a = t_0 < ... < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so nennen wir

$$\delta(Z) := \sup_{1 \leq i \leq m} |t_i - t_{i-1}|$$

die *Feinheit* von Z. Es gibt dann eine Folge (Z_l) von Zerlegungen, so dass

$$\lim_{l \to \infty} L(c_{Z_l}) = L(c)$$

und $\lim_{t \to \infty} \delta(Z_t) = 0$. Wir parametrisieren $c_{\mathbf{x}_{i-1}^l \mathbf{x}_i^l}$ durch

$$[t_{i-1}^l, t_i^l] \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \mathbf{x}_{i-1}^l + \frac{t - t_{i-1}^l}{t_i^l - t_{i-1}^l}(\mathbf{x}_i^l - \mathbf{x}_{i-1}^l)$$

mit $\mathbf{x}_i^l = c(t_i^l)$. Die Länge von $c_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}$ bleibt unverändert, außerdem gilt

$$L(c_{Z_t}) = \sum_{i=1}^{m_l} \int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} \left\| \dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) \right\| \mathrm{d}t$$

mit

$$\dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) = \frac{c(t_i^l) - c(t_{i-1}^l)}{t_i^l - t_{i-1}^l}.$$

Damit ist

$$\dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t) - \dot{c}(t) = \frac{1}{t_i^l - t_{i-1}^l} \int_{t_{i-1}^l}^{t_i^l} (\dot{c}(\xi) - \dot{c}(t))\, \mathrm{d}\xi$$

Setzen wir

$$f_l(t) := \dot{c}_{\mathbf{x}_{i-1}^l,\mathbf{x}_i^l}(t),$$

so ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\dot{c}(t)$ in $[a,b]$

$$\|\|f_l(t)\| - \|\dot{c}(t)\|\| \leq \|f_l(t) - \dot{c}(t)\| \leq \varepsilon,$$

wenn $\delta(Z_l) \leq \delta(\varepsilon)$. Also ist $f_l(t)$ gleichmäßig konvergent und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue ist

$$L(c) = \lim_{l\to\infty} L(c_{Z_l}) = \lim_{l\to\infty} \int_a^b \|f_l(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, \mathrm{d}t.$$

□

Definition 1.8 (Gleichförmig parametrisierte Kurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve und $t_0 \in I$, so die Kurve c *gleichförmig parametrisiert für* $t \geq t_0$, falls ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\int_{t_0}^t \|\dot{c}(\theta)\|_2\, \mathrm{d}\theta = C(t - t_0).$$

D.h. die Länge von c eingeschränkt auf $[t_0, t]$ ist *proportional* zu $t - t_0$.

Lemma 1.9. *Wenn $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve, die für $t \geq t_0$ gleichförmig parametrisiert ist, dann gibt es ein $C > 0$, so dass*

$$\|\dot{c}(\theta)\|_2 = C$$

für alle $\theta \in [t_0, t]$.

Beispiel 1.10 (Gleichförmige Bewegung eines Massepunktes)**.**

Definition 1.11 (Bogenlänge)**.** Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. Die Funktion

$$s_c(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \,\mathrm{d}\theta, \qquad t \in [a,b]$$

heißt die *Bogenlänge von c*. Wir sagen eine parametrisierte C^k-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \,\mathrm{d}\theta = C(t-a)$$

gilt. Eine parametrisierte C^k-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist *mit Bogenlänge parametrisiert*, falls $C = 1$ ist.

Lemma 1.12. *Wenn die parametrisierte C^k-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist*

$$\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$$

für alle $t \in [a,b]$.

Theorem 1.13. *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. So ist c genau dann proportional zur Bogenlänge parametrisierbar, falls $\dot{c}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$). Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve und nach Bogenlänge parametrisierbar. Differentiation nach t ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^t \|\dot{c}(\theta)\|_2 \,\mathrm{d}\theta = C \neq 0.$$

($\Leftarrow$). Sei $\dot{c} \neq \mathbf{0}$ auf ganz $[a,b]$. Dann definiert

$$s_c(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\theta)\| \,\mathrm{d}\theta, \qquad t \in [a,b]$$

eine zulässige Parametertransformation. Somit ist für $\tilde{c} = c \circ s_c^{-1}$

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \tilde{c}(\theta) \right\| = \left\| \dot{c}(s_c^{-1}(\theta)) \right\| \frac{1}{\left\| \dot{c}(s_c^{-1}(\theta)) \right\|} = 1$$

□

Definition 1.14 (Reguläre Kurve)**.** Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^k-Kurve. Wir nennen die Kurve c *regulär*, falls für alle $t \in I$

$$\dot{c}(t) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Beispiel 1.15.

Definition 1.16 (Tangenete)**.** Für eine reguläre parametrisierte C^k-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt die durch

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ \lambda &\mapsto c(t) + \lambda \dot{c}(t) \end{aligned}$$

definierte Gerade im $\mathbb{R}^n$ *Tangente an* c *im Punkt* $c(t)$. Der Vektor $\dot{c}(t)$ heißt *Tangentialvektor an* c *im Punkt* $c(t)$.

1.2 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 1.17 (Gebiet)**.** Sei X ein topologischer Raum. Ein *Gebiet* $G \subseteq X$ ist eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge von X. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es ein $x_0 \in G$ gibt, so dass für alle $x \in G$ die Strecke

$$[x_0 x] = \{x_0 + t(x - x_0) \mid t \in [0, 1]\}$$

eine Teilmenge von G ist. Das Gebiet G nennen wir *konvex*, falls für alle $x, y \in G$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt, dass

$$tx + (1 - t)y \in G$$

ist.

Definition 1.18 (Gewöhnliche Differentialgleichung)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^0((a, b) \times G, \mathbb{R}^n)$. Eine Funktion $u \in C^1((\alpha, \beta), G)$ mit $a \leq \alpha < \beta \leq b$ heißt *Lösung der durch* F *definierten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswert* $u_0 \in G$ *in* $t_0 \in (\alpha, \beta)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)), \quad t \in (\alpha, \beta), \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Theorem 1.19 (Satz von Picard-Lindelöf)**.** *Sei $-\infty \le a < b \le \infty$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^0((a,b) \times G, \mathbb{R}^n)$. Es gilt:*

(i) Zu jedem $t_0 \in (a,b)$ und jedem $f_0 \in G$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$ und eine Umgebung U von $f_0 \in G$, so dass für $u_1 \in U$ eine Lösung $u \in C^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), G)$ des Problems

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= F(t, u(t)), \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \\ u(t_0) &= u_1 \end{aligned}$$

existiert.

(ii) Erfüllt F in jedem Punkt (t_0, u_0) die Bedingung, dass zu jedem (t_0, u_0) eine Umgebung $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset (a,b) \times G$ derart existiert, dass für $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ und $x_1, x_2 \in U$

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \le M \, \|x_1 - x_2\|$$

gilt mit einer nur von ε und U abhängigen Konstanten M, so sind die nach (i) existierenden Lösungen für jeden Anfangswert eindeutig bestimmt.

(iii) Gilt sogar $F \in C^k$ mit $k \ge 1$, so gilt für die Lösung u des Anfangswertproblems $u \in C^{k+1}$.

Definition 1.20 (Dynamisches System)**.** Da durch diese Differentialgleichungen oft die zeitliche Entwicklung bzw. die Dynamik vieler natürlicher Phänomene beschrieben werden nennen wir sie auch *dynamische Systeme*. Hängt F nicht explizit von der Zeit ab, d.h.

$$F(t, x) = \tilde{F}(x),$$

so ist

$$\dot{u}(t) = \tilde{F}(u(t)),$$

so nennen wir das System *autonom*. Alle Systeme für die das nicht gilt heißen *nicht autonom*.

Definition 1.21 (C^k-Vektorfeld)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $F \in C^k(G, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, heißt ein k-fach differenzierbares Vektorfeld (oder kürzer C^k-Vektorfeld) in G.

Definition 1.22 (Integralkurve)**.** Sei F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \ge 1$, und $x_0 \in G$. Jede C^1-Lösung $c : [a,b] \to G$ der durch F definierten Differentialgleichung mit $-\infty \le a < 0 < b \le \infty$ und $c(0) = x_0$ heißt eine Integralkurve von F durch x_0.

Beispiel 1.23. Wir betrachen folgende Differentialgleichung:

$$\dot{u}(t) = \frac{2u(t)}{t}.$$

Also ist $f(t, u(t)) = frac2u(t)t$ für $x = u(t)$, somit ergibt sich $f(t, x) = \frac{2x}{t}$. Diese Differentialgleichung ist also nicht autonom. Wir sehen, dass, wenn der Graph einer Lösung durch den Punkt (t, x) läuft, dieser dort die Steigung $\frac{2x}{t}$ hat. Somit lässt sich jedem Punkt (t, x) in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit Steigung $\frac{2x}{t}$ zuordnen. Somit haben wir durch

$$F : G \to \mathbb{R}^2, \qquad (t, x) \mapsto (1, \frac{2x}{t})$$

ein Vektorfeld definiert. Damit sind alle möglichen Lösungen u der Differentialgleichung durch F definiert. Die allgemeine Lösung der Differential ist $u(t) = kt^2$. Für einen konkreten Anfangswert $u(1) = 5$ ist somit $u(t) = 5t^2$ die Lösung der Differentialgleichung. Damit ist

$$c : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, 5t^2)$$

die gesuchte Integralkurve zu F durch $(1, 5)$, denn

$$\dot{c}(t) = (1, 10t) = (1, \frac{2 \cdot 5t^2}{t}) = (1, \frac{2u(t)}{t}) = (1, f(t, u(t))) = F(t, u(t))$$

Definition 1.24 (Stationärer Punkt)**.** Sei F ein C^k-Vektorfeld in G. Die Punkte $x \in G$ mit $F(x) = 0$ heißen *stationären Punkte von F.*

Theorem 1.25 (Fundamentalsatz über die Integralkurve)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $x \in G$ eine ausgezeichnete Integralkurve $c_x : (a_x, b_x) \to G$ durch x mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $-\infty \leq a_k < 0 < b_k \leq \infty$,

(ii) $c_x \in C^{k+1}((a_x, b_x), G)$,

(iii) Ist $c : (a, b) \to G$ eine Integralkurve durch x, so ist $a_x \leq a < b \leq b_x$ und $c = c_x \mid_{(a,b)}$,

(iv) zu jedem $x \in G$ und $t \in (a_x, b_x)$ gibt es eine Umgebung U von x in G und ein $\varepsilon > 0$, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) &\longrightarrow G \\ (y, s) &\mapsto c_y(s) \end{aligned}$$

von der Klasse C^k.

Beweis. Sei C_x die Menge aller Integralkurven von F durch x. Für zwei Kurven c_1, c_2 ist durch $c_1 \prec c_2 :\Leftrightarrow (a_1, b_1) \subset (a_2, b_2)$ eine Halbordnung auf C_x definiert. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist $c_1 = c_2$ auf (a_1, b_1). Es bleibt nur zu zeigen, dass C_x bezüglich der

Halbordnung ein maximales Element hat. Sei $D \subset C_x$ und $c \in D$ mit Definitionsintervall (a_c, b_c). Somit ist

$$(a_x, b_x) := \bigcup_{c \in D} (a_c, b_c).$$

Setzen wir

$$c_x(t) := c(t), \qquad t \in (a_c, b_c).$$

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass c_x wohldefiniert und eine Integralkurve durch x ist, womit nach dem Lemma von Zorn C_x ein maximales Element besitzt. □

Definition 1.26 (Vollständiges C^k-Vektorfeld)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. F heißt *vollständig*, wenn $(a_x, b_x) = \mathbb{R}$ für jedes $x \in G$.

Definition 1.27 (Fluss)**.** Sei F ein C^1-Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es für jedes $x_0 \in G$ eine eindeutige maximale Lösung $c_{x_0} : (a_{x_0}, b_{x_0}) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = F(x), \quad x(0) = x_0.$$

Die Abbildung $\Phi(t, x) := c_(t)$ heißt *Fluss des Vektorfeldes F*.

Lemma 1.28 (Eigenschaften des Flusses)**.**

Definition 1.29 (Modul über dem Ring $C^k(G)$)**.**

Definition 1.30 (Lineares stetiges Vektorfeld)**.** Ein C^0-Vektorfeld F im $\mathbb{R}^n$ heißt *linear*, falls es eine lineare Funktion in $x \in \mathbb{R}^n$ ist, d.h.

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y).$$

Theorem 1.31 (Normalformensatz)**.**

Definition 1.32 (Gradientenfeld)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G. F ist ein *Gradientenfeld*, falls es eine C^{k+1}-Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(x) = \nabla \varphi(x).$$

Lemma 1.33 (Integrabilitätsbedingungen)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^k-Vektorfeld in G, $k \geq 1$. F ist ein Gradientenfeld, falls die Integritätsbedingungen*

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x), \qquad x \in G, 1 \leq i, j \leq n$$

gelten.

Beweis. □

1.3 Kurvenintegrale

Wir erinnern zunächst daran, dass eine endliche Kurve im $\mathbb{R}^n$ Hausdorff-Dimension 1 hat. D.h. die Länge einer endlichen Kurve entspricht dem Hausdorff-Maß von $\mathcal{H}^1$ der Dimension 1.

Definition 1.34 (Kurvenintegral)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein C^0-Skalarfeld und $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^1-Kurve (oder auch stückweise C^1). Dann ist das *Kurvenintegral erster Art* entlang der Kurve c definiert als

$$\int_c f \,\mathrm{d}s := \int_a^b f(c(t)) \,\|\dot{c}(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

Hierbei ist s die Länge eines Kurvenelements. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^0-Vektorfeld und $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte C^1-Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral zweiter Art* entlang der Kurve c definiert als

$$\int_c F \,\mathrm{d}s := \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Lemma 1.35. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, F ein C^0-Vektorfeld in G und $c_1 : [a, b] \to G$ eine reguläre Kurve. Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine Parametertransformation von c_1, dh. $c_2 = c_1 \circ \varphi$, so gilt*

$$\int_{c_2} F \,\mathrm{d}s = \pm \int_{c_1} F \,\mathrm{d}s.$$

Beispiel 1.36.

Definition 1.37 (Energie einer regulären Kurve)**.** Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, so nennen wir

$$E(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|^2 \,\mathrm{d}t$$

die *Energie der Kurve.*

Lemma 1.38. *Das Kurvenintegral ist linear, d.h. für zwei C^0-Vektorfelder V, W ist*

$$\int_c (\alpha V + W) \,\mathrm{d}s = \alpha \int_c V \,\mathrm{d}s + \int_c W \,\mathrm{d}s.$$

Es ist bis auf das Vorzeichen invariant bzgl. der Durchlaufrichtung der Kurve, d.h. ob die Kurve positiv oder negativ durchlaufen wird. Insbesondere ist für eine C^0-Vektorfeld F die aus den regulären Kurven c_1 und c_2 zusammen gesetzte Kurve $c = c_1 \star c_2$ das Kurvenintegral durch

$$\int_{c_1 \star c_2} F \,\mathrm{d}s = \int_{c_1} F \,\mathrm{d}s + \int_{c_2} F \,\mathrm{d}s$$

gegeben.

Beweis. Die erste zwei Aussagen folgen direkt aus den Eigenschaften des abstrakten Integrals. Sei $c_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ zwei parametrisierte reguläre Kurven. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{c_1 \star c_2} F \,\mathrm{d}s &= \int_a^{b+(d-c)} \Big\langle F(c_1 \star c_2(t)), (c_1 \dot{\star} c_2)(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \langle F(c_1(t)), \dot{c}_1(t) \rangle \,\mathrm{d}t + \int_a^{b+(d-c)} \langle F(t-b+c), \dot{c}_2(t-b+c) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{c_1} F \,\mathrm{d}s + \int_{c_2} F \,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

Definition 1.39 (Wegunabhängig integrierbar)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^0-Vektorfeld auf G. Dann heißt F *wegunabhängig integrierbar*, falls für jede parametrisierte geschlossene stückweise C^1-Kurve c in G gilt, dass

$$\int_c F \,\mathrm{d}s = 0.$$

Theorem 1.40. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und F ein C^0-Vektorfeld auf G. F ist genau dann in G wegunabhängig integrierbar, wenn F ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn es $\varphi \in C^1(G)$ gibt mit*

$$F = \nabla \varphi.$$

Insbesondere ist ein C^1-Vektorfeld F auf einen sternförmigen Gebiet genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_j F_i = \partial_i F_j \qquad \text{für } i, j \in \{1, ..., n\}$$

erfüllt sind.

Beweis. content... □

1.4 Satz von Gauß und die Formeln von Green

Definition 1.41 (Gebiete erster und zweiter Art)**.**

Definition 1.42 (Randintegral im $\mathbb{R}^2$)**.**

Theorem 1.43 (Satz von Gauß-Green)**.**

Definition 1.44 (Innere und äußere Normale)**.**

Definition 1.45 (Integral über einer Kurve).

Theorem 1.46 (Satz von Gauß).

Theorem 1.47 (Formeln von Green).