

MPEI 2021-2022

Variáveis Aleatórias

Motivação

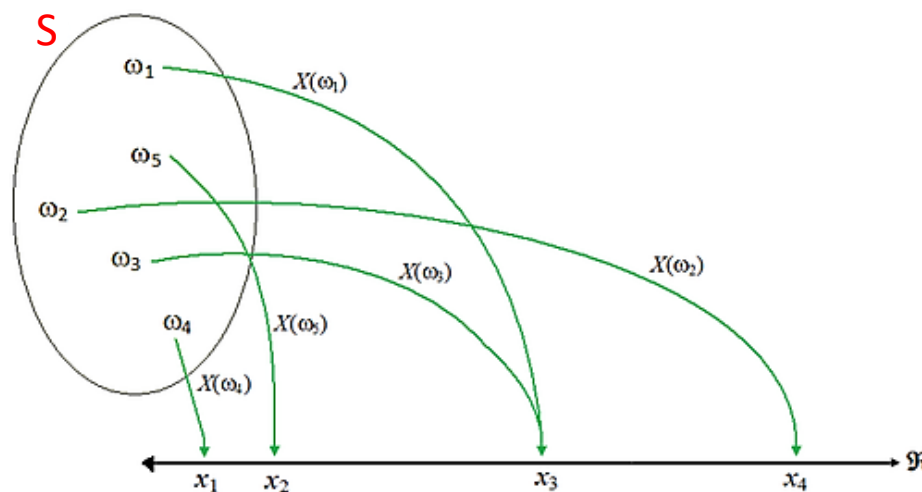
- A probabilidade é uma função sobre eventos (conjuntos)
- Utilização das ferramentas da análise matemática (ex: derivação) não é imediata
 - Especialmente se os resultados da experiência não forem números
- Se conseguirmos mapear o espaço de amostragem (S) para a reta real facilita o uso das ferramentas de análise e aritmética
- Na maioria dos casos o mapeamento não é artificial
 - Muitas vezes não nos interessa os eventos mas uma grandeza numérica relacionada
 - Exemplo: número de caras em N lançamentos de uma moeda

Conceito de variável aleatória

- Uma função que mapeia o espaço de amostragem na recta real é designada de **VARIÁVEL ALEATÓRIA**
 - *Random Variable* em Inglês
- Numa definição “informal”:
- uma **Variável Aleatória é o resultado numérico das nossas experiências (aleatórias)**

Variável Aleatória - Definição

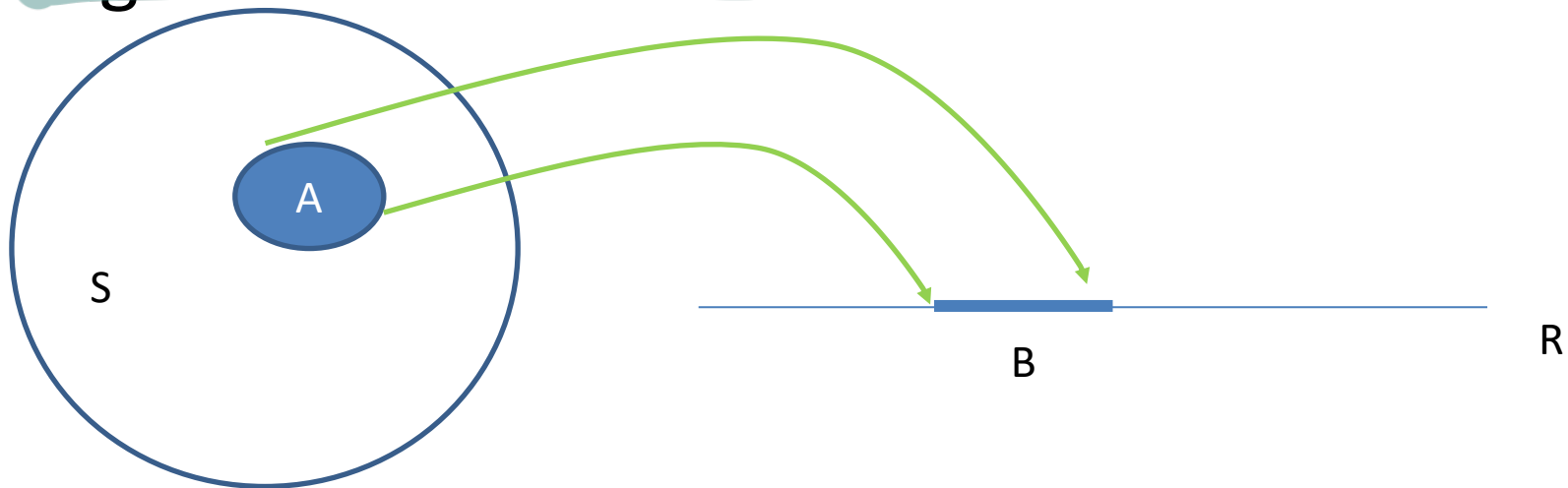
- Uma variável aleatória escalar X é formalmente definida como sendo um mapeamento de um espaço amostral S para a recta real



- A qualquer elemento ω de S associa-se uma imagem $X(\omega)$ na recta real

Caso contínuo

- Se os conjuntos que representam os eventos forem contínuos, o mapeamento é para um segmento da recta real



- A e B são acontecimentos equivalentes

Tipos de Variáveis aleatórias

- **Discreta** : se os valores que a variável aleatória pode assumir forem finitos
 - ou infinitos mas contáveis
 - Exemplo: número de acessos por minuto a uma página web
- **Contínua** : se os valores que pode assumir formarem um ou vários intervalos disjuntos
 - Exemplo: Duração de uma aula no Zoom
- **Mista**: onde se verificam os atributos que definem os 2 tipos anteriores

Tipos

- Discreta/contínua ou mista ?

VA	Tipo ? (D,/C,/M)
Número de palavras com erro numa página	D
Atraso com que chega às aulas TP	C
Número de caixas abertas no supermercado	D
Tempo de espera numa caixa de supermercado	C
Número de páginas relevantes para uma procura num motor de pesquisa (ex: Google)	M
Número de “bugs” num módulo de código	D
...	

Ver se está correto

Caracterização das variáveis aleatórias

Parte 1

Distribuição de probabilidades

- As variáveis aleatórias são caracterizáveis pelo conjunto de valores que podem assumir e as probabilidades associadas
 - Ou seja pela “distribuição de probabilidades”

Função (massa) de probabilidade

- Uma variável aleatória **discreta** escalar X é especificada por:

1. Conjunto de valores que pode assumir: $x_i, i = 1, 2, \dots$
2. Probabilidade associada a cada um desses valores: $p_X(x_i)$
 - Denominada de **função massa de probabilidade**
 - Probability Mass Function em Inglês
 - ou mais simplesmente **função de probabilidade**

$$p_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Onde $P(X = x_i) = P(\mathbf{w}: X(\mathbf{w}) = x_i)$

i.e. A probabilidade do evento cujos resultados \mathbf{w} satisfazem $X(\mathbf{w}) = x_i$

Função de probabilidade

- Os axiomas da probabilidade implicam:

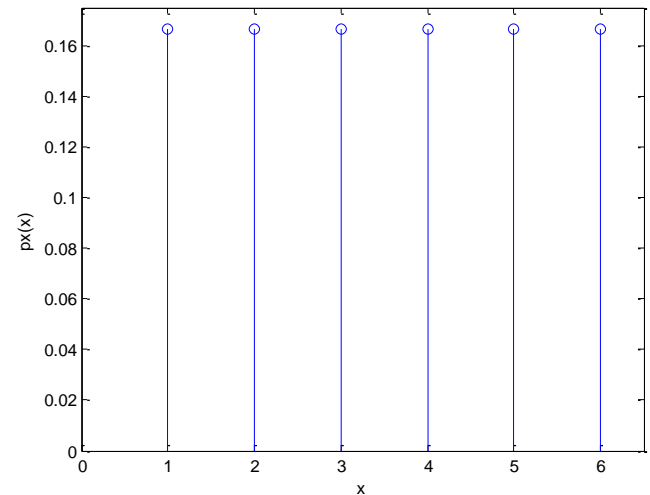


- $p_X(x_i) \geq 0$

- $\sum_i p_X(x_i) = 1$

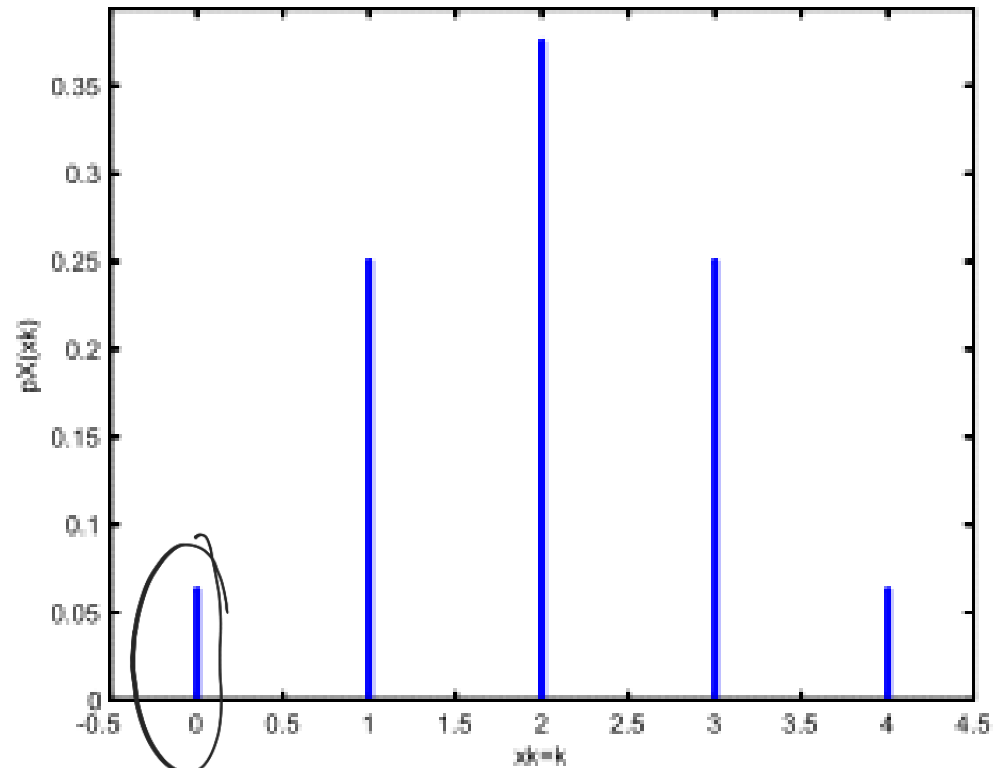
Exemplo de função de probabilidade

- Lançamento de dado equilibrado e X igual ao número que sai
- X : Variável aleatória discreta
- *Função de probabilidade*
 $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $p_X(x_i) = 1/6$
- %% Matlab
 $xi = 1:6; p = \text{ones}(1,6)/6;$
 $\text{stem}(xi, p), \text{xlabel}('x'), \text{ylabel}('p_X(x)');$



Outro exemplo

Função massa de probabilidade para a variável aleatória representando o número de “caras” em 4 lançamentos de uma moeda



2.º lançamento tem 0,05

Função distribuição de x

(tome valores p/ve $x \in \mathbb{R}$)

Função distribuição acumulada (discreta)

- Uma variável aleatória (discreta) pode ser também especificada pela sua função distribuição acumulada (fda), definida como

- $F_X(x) = p_X(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_X(x_i)$

- variável independente*
variável aleatória
- Dos axiomas e corolários:

É uma função não decrescente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

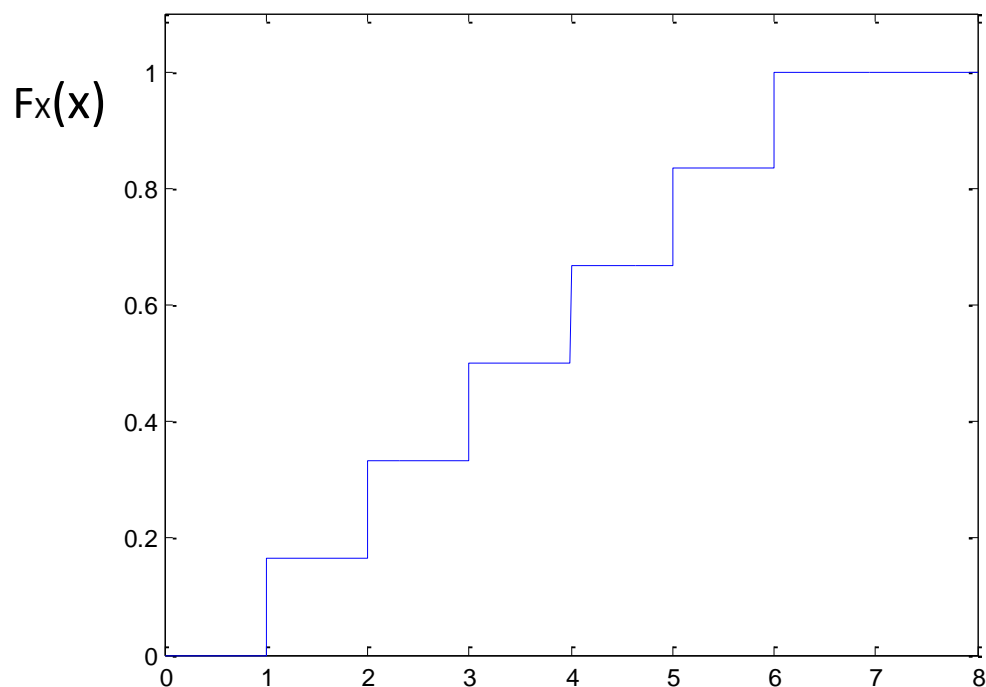
$$\text{máximo } (F_X(x)) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$\text{mínimo } (F_X(x)) = 0$$

Exemplo de função de distribuição

- Para uma variável aleatória discreta a função distribuição acumulada é uma **função em escada**

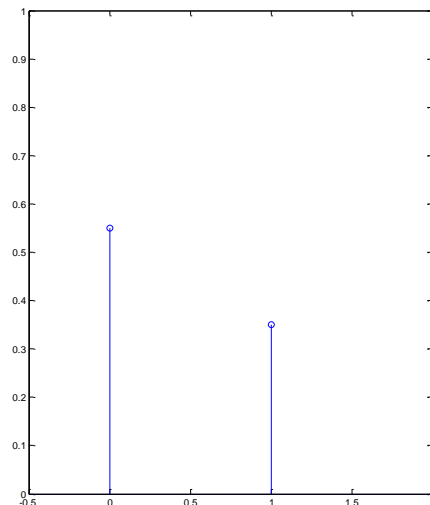


Outro exemplo

- Cada símbolo transmitido num sistema de transmissão pode ser interpretado como uma variável aleatória que toma os valores $x_1 = 0$ com probabilidade $1 - p$ e $x_2 = 1$ com probabilidade p

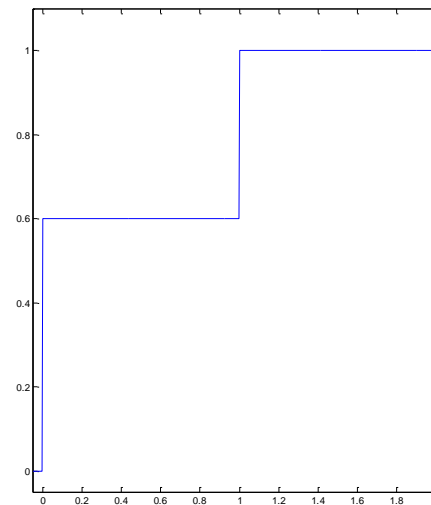
$$p_X(x)$$

função
probabilidade



$$F_X(x)$$

Função
Distribuição
(acumulada)



Variáveis aleatórias contínuas

- Também pode ser especificada pela sua **função distribuição acumulada**
- A definição é idêntica para o caso contínuo e discreto

$$F_X(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

- $F_X(x)$ é agora contínua
- Propriedades:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$$

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

Variáveis aleatórias contínuas

- Podem ser especificada pela sua **função de densidade de probabilidade** $f_X(x)$

Probability density function (pdf) em Inglês

- Obtém-se derivando a função de distribuição

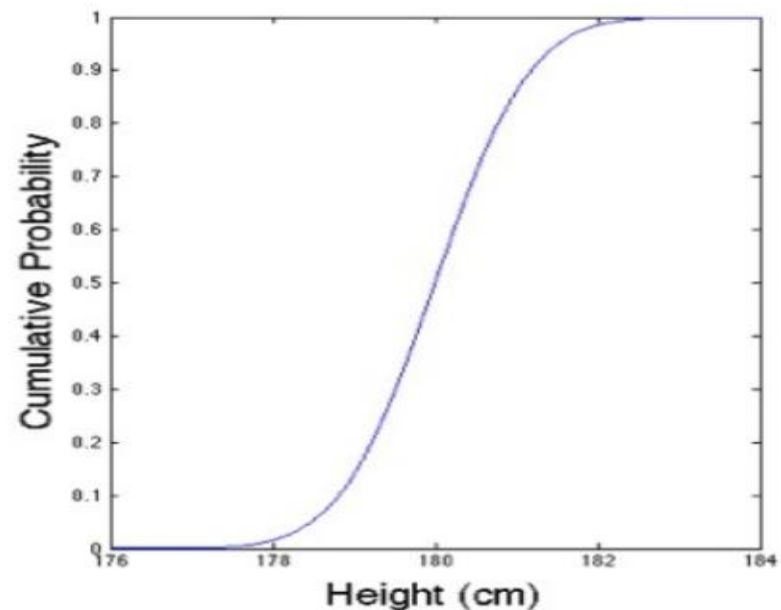
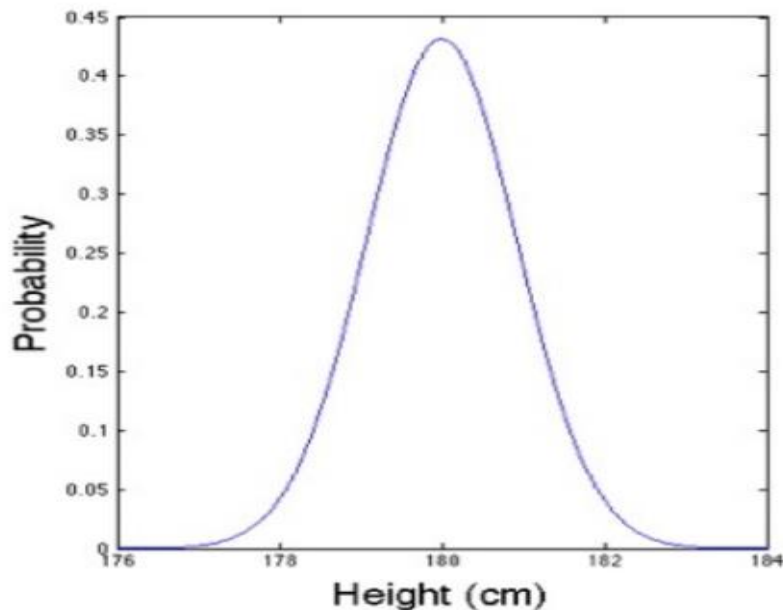
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Função de DENSIDADE de probabilidade

- $f_X(x)$ não é uma probabilidade ...
 - Apenas define os valores de probabilidade quando integrada num intervalo
 - $p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$
- $f_X(x)dx$ é a probabilidade da variável X pertencer ao intervalo $(x, x + dx)$, sendo dx um acréscimo infinitesimal
- $f_X(x) \equiv \frac{prob}{dx} \rightarrow$ daí o nome “densidade”

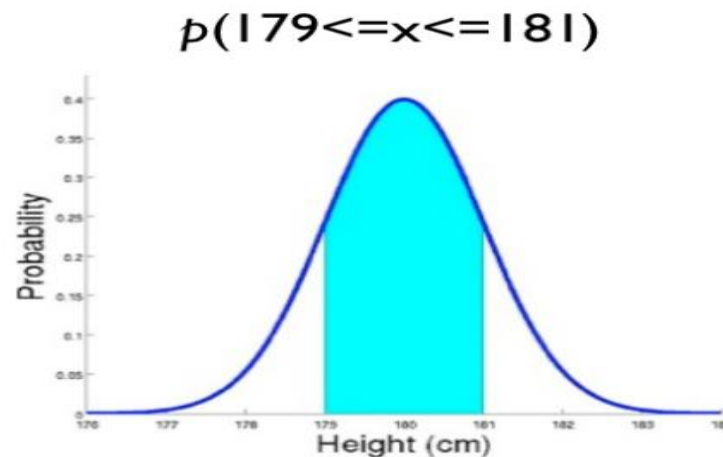
Relações entre funções de densidade e de distribuição (caso contínuo)

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx$
- Exemplo de par de funções de densidade e de distribuição



Probabilidades e função de densidade

- $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$



- A probabilidade é a área debaixo da curva
- Área total da curva =1

Caracterização das variáveis aleatórias

Parte 2

Motivação

- As funções apresentadas anteriormente fornecem uma descrição completa de uma variável aleatória
- Mas em muitos casos não necessitamos de toda a informação
 - Exemplo:
 - no caso dos “bugs” em módulos de código saber o valor médio pode ser suficiente

Média ou Valor esperado

- Consideremos N lançamentos de um dado

Ex: 4 1 6 6 5 5 5 3 4 2 ...

$$\begin{aligned}\text{Média} &= (1+1+..1 + 2+2+...+2 + \dots) / N \\ &= (\text{numDe1s} \times 1 + \text{numDe2s} \times 2 \dots) / N \\ &= \text{numDe1s}/N \times 1 + \text{NumDe2s}/N \times 2 + \dots\end{aligned}$$

Assumindo que N tende para infinito

$$\begin{aligned}&= p(1) \times 1 + p(2) \times 2 + p(3) \times 3 \dots + p(6) \times 6 \\ &= \sum_i p(x_i) x_i \quad \text{com } x_i = 1, 2, \dots, 6\end{aligned}$$

Valor esperado

- Consideremos as experiências na origem da variável aleatória X :
- Dizemos que o valor esperado de X é o **valor médio de X ao repetirmos as experiências indefinidamente**
- Representando por X_i o valor de X na experiência i , este valor é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Valor esperado (continuação)

- Só existe valor esperado se existir o limite
 - O limite existe se X_i tiver limite inferior e superior finitos, o que é verdade no mundo real
 - Ex: o peso de uma pessoa nunca é negativo
- Representando por x_i os m diferentes valores que X_i pode assumir e por $K_{i,n}$ o número de vezes que ocorre cada x_i , o nosso limite passa a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 K_{1,n} + x_2 K_{2,n} + \cdots + x_m K_{m,n}}{n}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{i,n}}{n} = \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i)$$

Valor esperado

- O termo “valor esperado” é algo enganador...
- Não é na realidade algo que devemos esperar que ocorra
 - Pelo contrário, muitas vezes é muito pouco provável ou mesmo impossível de ocorrer
 - Exemplo: valor médio do lançamento do dado ($=3,5$)
- Apesar desta dificuldade com o seu nome, o valor esperado desempenha um papel central em Probabilidades e Estatística

Valor esperado : $E[X]$

- O valor esperado de uma variável designa-se por $E[X]$
- No caso discreto: $E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$
- No caso contínuo: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$

Propriedades do valor esperado

- $E[X]$ é um operador linear

Sendo a e c constantes ($\in R$) e X e Y variáveis aleatórias:

$$E[aX] = a E[X]$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[X+c] = E[X] + c$$

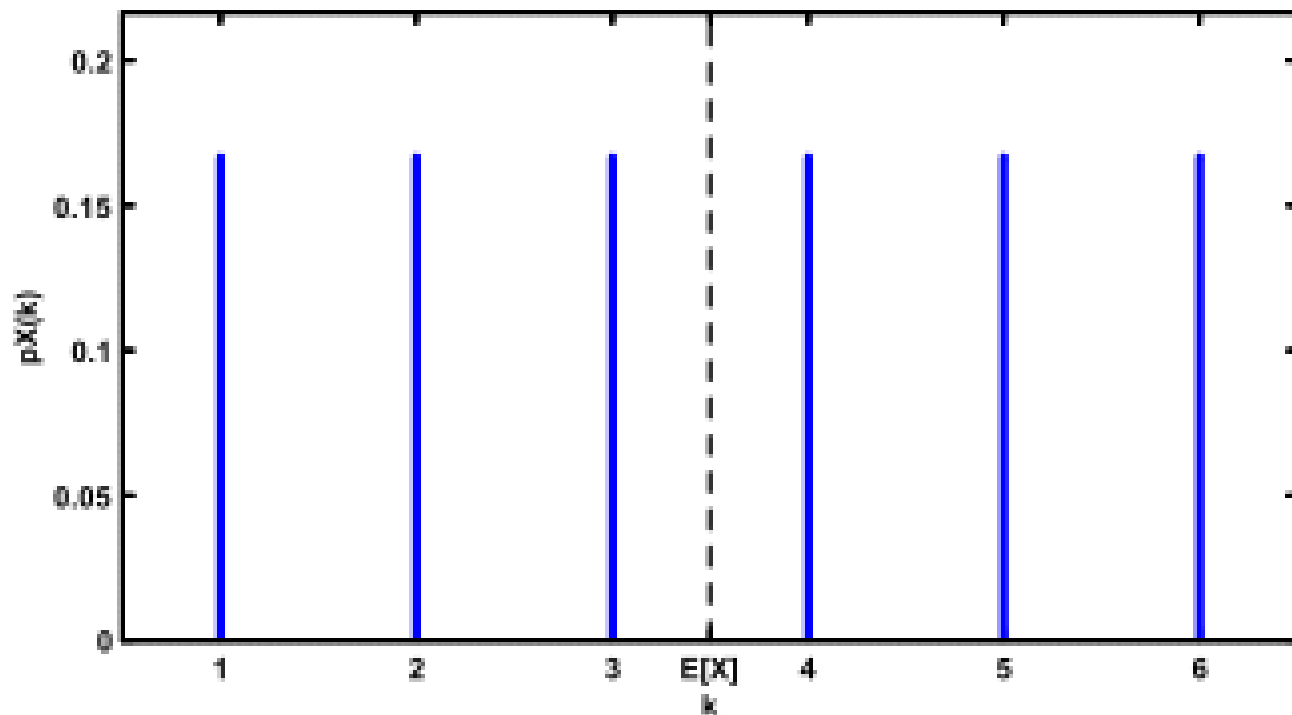
Exemplo de cálculo de $E[X]$

x_i	$p_X(x_i)$	$x_i p_X(x_i)$
-1	.1	-.1
0	.2	.0
1	.4	.4
2	.2	.4
3	.1	<u>.3</u>
		1.0

$$E[X] = 1.0$$

Exemplo: lançamento de 1 dado

- Função de probabilidade para o resultado do lançamento de uma dado e respetivo valor esperado



A Média pode não ser suficiente

- Se pretendermos comparar as classificações de duas turmas práticas de MPEI é suficiente sabermos a média ?
- Posso ter a mesma média e turmas muito diferentes:
 - Uma turma com a generalidade dos alunos próximos dessa média
 - Outra turma com classificações muito mais dispersas entre 0 e 20
- Uma medida dessa “dispersão” é dada pela variância

Variância

- Ideia base:

Usar a diferença dos valores da variável para a média (valor esperado) e fazer a sua média

- Para evitar o cancelamento de diferenças negativas e positivas, em vez de usar diretamente o valor da diferença utilizar o seu valor quadrático
- $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

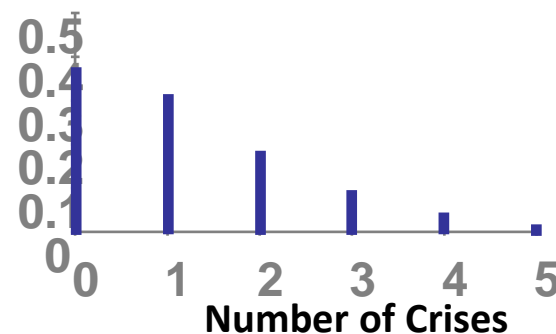
Variância

- Aplicando a definição de valor esperado temos:
- $\text{var}(X)=\sigma^2 = \sum_i [\mathbf{x}_i - \mathbf{E}(X)]^2 p(x_i)$
- Propriedade importante:
 $\text{var}(X)= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}^2[X]$
 - Demonstra-se facilmente de $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2]$ usando as propriedades de $\mathbf{E}[X]$
 - Facilita muitos cálculos, evitando uso direto da definição

Desvio padrão

- A raiz quadrada da variância é o desvio padrão
- Muitas vezes representado por σ

Exemplo (discreto)



x_i	$p(x_i)$	$(x_i - \mu)$	$(x_i - E(X))^2$	$(x_i - E(X))^2 p(x_i)$
0	.37	-1.15	1.32	.49
1	.31	-0.15	0.02	.01
2	.18	0.85	0.72	.13
3	.09	1.85	3.42	.31
4	.04	2.85	8.12	.32
5	.01	3.85	14.82	.15
				<hr/>
				1.41

Variância - propriedades

- Sendo X uma variável aleatória e c uma constante :
- Soma de uma constante:
$$\text{var}(X+c)=\text{var}(X)$$
- Multiplicação por um factor de escala
$$\text{var}(c X) = c^2 \text{var}(X)$$

Média e variância - interpretação

- $E[X]$ pode ser interpretado como:
 - Valor médio de X
 - Centro de gravidade da função massa de probabilidade (caso discreto) ou função de densidade de probabilidade
- Desvio padrão / Variância dá uma medida da dispersão da variável aleatória
 - Pequenos valores indicam var. aleatória muito concentrada em torno da média
 - Se for zero não temos var. aleatória (todos valores iguais à média)

Momentos de ordem n

- Os conceitos de média e variância podem ser generalizados ...
- **Momento de ordem n** (caso discreto):

$$m_n = E[X^n] = \sum_i x_i^n p_X(x_i)$$

- Exemplo (dados)

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{1+2+4+9+16+25+36}{6} = 15,1667 \end{aligned}$$

Momentos centrados de ordem n

- A generalização da variância resulta nos **momentos centrados de ordem n**
- $E[(X - E[X])^n] = \sum_i (x_i - E[X])^n p_X(x_i)$
- A variância é o momento centrado de 2ª ordem

Exemplo de aplicação

- Qual o valor da variância dos valores obtidos no lançamento de um dado honesto ?
- $\text{var}(X)$?
- $\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X]$
- $E[X^2] = ?$
- $E^2[X] = ?$

Tópicos da aula (resumo)

- Variável aleatória (conceito e definição)
- Função massa de probabilidade e função densidade de probabilidade
- Função de distribuição acumulada
- Valor esperado
- Média e Variância
- Momentos

Para saber mais...

- Capítulo 4 do livro “[Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática](#)”, F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.
- Link(s)
<http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/randomVariables.htm>