UNIVERSIDADE DE AVEIRO

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2015/2016) Exame TP

14 Out 2015 — Duração: 60m N. Mec.: Nome:

IMPORTANTE : Não apresente apenas os resultados finais. É necessário apresentar os cálculos intermédios. Deve, também, simplificar o mais possível os resultados.

1. (3 valores) Um teste tem m perguntas com duas possibilidades de resposta para cada uma.

Nota: C^m_0 dá 1

   (a) Quantas maneiras diferentes existem para responder ao teste ? $A^2_m = 2^m$

   (b) Qual a probabilidade de não acertar em nenhuma resposta, escolhendo à sorte com igual probabilidade ? $C^m_0 p^0 (1-p)^{m-0} = 0{,}5^m$

2. (4 valores) A probabilidade de, num lançamento aleatório, sair coroa é de p_1 para uma determinada moeda e de p_2 para outra moeda. Considere a variável aleatória Y corespondente ao número de caras que saem se forem lançadas as 2 moedas.

$P(Y=0) = p_1 \times p_2$

$P(Y=1) = p_1 \times (1-p_2) + p_2 \times (1-p_1)$

$P(Y=2) = (1-p_1) \times (1-p_2)$

$E[X] = 0 \times p_1 p_2 + 1 \times (p_1 \times (1-p_2) + p_2 \times (1-p_1)) + 2 \times (1-p_1)(1-p_2)$

$= \cancel{p_1} - \cancel{p_1 p_2} + \cancel{p_2} - \cancel{p_1 p_2} + 2 - \cancel{2} p_2 - \cancel{2} p_1 + \cancel{2 p_1 p_2}$

$= 2 - p_1 - p_2$

   (a) Determine a função de distribuição de probabilidade de Y.

$E[X^2] = 0^2 \times p_1 p_2 + 1^2 \times (p_1 \times (1-p_2) + p_2 \times (1-p_1)) + 2^2 \times (1-p_1)(1-p_2)$

$= \cancel{p_1} - \cancel{p_2 p_1} + \cancel{p_2} - \cancel{p_1 p_2} + 4 - \overset{3}{\cancel{4}} p_2 - \overset{3}{\cancel{4}} p_1 + \overset{2}{\cancel{4}} p_1 p_2$

$= 4 - 3p_2 - 3p_1$

   (b) Qual a variância de Y ?

$Var(Y) = E[X^2] - E[X]^2 = 4 - 3p_2 - 3p_1 - (2 - p_1 - p_2)^2$

3. (5 valores) Diogo, Eugénio e Filipe são os três programadores. Usando as iniciais dos seus nomes para designar 3 variáveis aleatórias e como valores possíveis para essas variáveis x_i, as distribuições de probabilidade são as seguintes:

x_i	$p_D(x_i)$	$p_E(x_i)$	$p_F(x_i)$
0	0,6	0,4	?
1	0,2	0,5	0,2
2	0,1	0,05 ?	0,2
3	0,1 ?	0,02	0,1
4 ou mais	0	0,03	0,5
	1	1	1

$P(D|x) = \frac{P(x|D) \times P_D}{P(x)}$

$= \frac{\cancel{0}{,}2 \times \frac{1}{4}}{0{,}2 \times \frac{1}{4} + 0{,}1 \times \frac{1}{4} + 0{,}8 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{40}}{\frac{2}{40} + \frac{1}{40} + \frac{16}{40}}$

$= \frac{2}{19} \simeq 0{,}10$

x = erro ≥ 2

$P(D) = \frac{1}{4}$ $P(x|D) = 0{,}2$

$P(E) = \frac{1}{4}$ $P(x|E) = 0{,}1$

$P(F) = \frac{1}{2}$ $P(x|F) = 0{,}8$

   (a) Escolhe-se aleatoriamente um programa de entre um conjunto de programas em que os do Filipe são tantos como o conjunto correspondente ao outros dois, que contribuiram com o mesmo número. O programa escolhido tem 2 ou mais erros. Qual a probabilidade de ter sido o Diogo o autor do programa escolhido ? $P(D|x) = \frac{P(x|D) \times P(D)}{P(x)}$

   (b) Qual dos programadores é mais provável ter sido o autor do programa escolhido?

Filipe

4. (5 valores) Assumindo que a probabilidade de um aluno terminar a sua Dissertação de Mestrado num ano depende da sua média de curso até à altura da seguinte forma: Probabilidade igual a 0,2 para médias no intervalo 10 a 12, aberto no 12; 0,5 no intervalo [12,14[; 0,8 no intervalor [14,16[; 0,9 no intervalo [16,18[e 0,95 para [18,20[.

   (a) Considere os seguintes casos: (A) Dois alunos com média entre 14 e 16; (B) Dois alunos com médias de 11 e um com média de 10; (C) Um aluno com média superior a 18. Qual deles maximiza a probabilidade de um orientador ter 1, e só um aluno, a terminar? Qual a probabilidade em cada uma 3 situações ?

   (b) E se mantendo os casos se pretender 1 ou mais alunos ?

   (c) Em média quantos terminam em cada uma das 3 situações ?

$p \to \lambda$

5. (3 valores) Considere que um programador W comete, em média, em cada 1000 linhas de código que escreve 20 erros. Considere também que o número de erros segue uma distribuição de Poisson $(p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!})$.

   Esse programador resolve 3 pequenos problemas e daí resultam 200, 400 e 500 linhas de código, respectivamente. Qual a probabilidade de pelo menos um dos programas ter um erro ?

5.

$\lambda_1 = 20/1000$ linhas

$\lambda_2 = \frac{200}{1000} \times 20 = 4/200 =$

4.

a)

$P_A = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$

$$\lambda_3 = \frac{4\cancel{00}}{1\cancel{000}} \times 2\cancel{0} = 8/400$$

$$\lambda_4 = \frac{5\cancel{00}}{1\cancel{000}} \times 2\cancel{0} = 10/500$$

$$P_2(X=1) = \frac{4^1 \times e^{-4}}{1!} = 4e^{-4}$$

$$P_3(X=1) = \frac{8^1 \times e^{-8}}{1!} = 8e^{-8}$$

$$P_4(X=1) = \frac{10^1 \times e^{-10}}{1!} = 10e^{-10}$$

$$P = P_2 + P_3 + P_4$$

$$P_B = 0{,}2 \times 0{,}8^2 = 0{,}128$$

$$P_C = 0{,}95$$

Na situação C

b)

$$P_A = 0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}8^2 = 0{,}96$$

$$P_B = 0{,}2 \times 0{,}8^2 + 0{,}2^2 \times 0{,}8 + 0{,}2^3 = 0{,}168$$

$$P_C = 0{,}95$$

c)

Na situação A

$$E[X_A] = 0 \times \cancel{0{,}64} + 1 \times 0{,}16 + 2 \times 0{,}64 = 1{,}44$$

$$E[X_B] = 0 \times \cancel{0{,}512} + 1 \times 0{,}128 + 2 \times 0{,}03$$
$$= 0{,}128 + 0{,}064 + 0{,}024$$
$$= 0{,}216$$

$$E[X_C] = 0 \times 0{,}05 + 1 \times 0{,}95 = 0{,}95$$