1 Lineær algebra

1.1 Lineære ligningssett

Lineære ligninger er ligninger der de ukjente kun forekommer i første potens, og aldri multiplisert med hverandre. For eksempel er ligningene

$$2x + 3 = 5 \quad \text{og} \quad 3x - y = 4y - 3$$

lineære, mens

$$x^2 + 3 = 5, \quad xy + 3y = 1 \quad \text{og} \quad x + \frac{3}{y} = 2$$

ikke er lineære. Matematiske beskrivelser av fysiske systemer ender noen ganger opp med lineære ligninger og andre ganger med ikke-lineære. Det lineære tilfellet er hyppig nok til at det er vel verdt å bruke tid på å finne effektive måter å løse slike ligninger på. Dersom det bare er én eller to ukjente er løsningen rask å finne nesten uansett hvordan man griper an problemet, men hvis man har et sett av mange ligninger med mange ukjente er det nødvendig å gå mer systematisk til verks. Selv om det er for systemer med mange ukjente teknikkene vi ser på er her mest relevante kommer eksemplene som blir brukt til å kun ha to eller tre ukjente fordi det er nok til å forstå løsningsstrategien, og få ukjente gjør beregningen mer oversiktelig.

Eksempel 1

Kirchoffs lover → lineært ligningssett

1.2 Geometrisk tolkning av lineære ligninger

Før vi ser på hvordan vi faktisk skal løse ligningene skal vi se litt på en geometrisk tolkning av ligningene som kan være nyttig for å forstå hva slags løsninger som er mulig å få. Vi begynner med å se på ligningen

$$3x - y = 4y - 3$$

som inneholder de to ukjente x og y. En liten omorganisering av ligningen gir oss

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}.$$

Hvis vi tolker det som et funksjonsuttrykk så ser vi at dette beskriver en rett linje i xy-planet. Så lenge vi har en *lineær* ligning må linjen nødvendigvis blir rett.

Alle punkter på denne linjen oppfyller ligningen—vi har med andre ord uendelig mange løsninger i stedet for én unik løsning. Dette er en konsekvens av at vi har to ukjente, men bare en ligning. Dersom vi har en ligning til, for eksempel

$$2y - x = 3,$$

så har vi nok en rett linje i xy-planet. En løsning (x,y) som oppfyller begge ligningen må ligge på begge de to rette linjene. Når vi har to rette linjer i et plan finnes det tre muligheter:

1. Linjene skjærer hverandre i ett punkt. Da har vi *en unik løsning* som oppfyller begge ligningene samtidig.

2. Linjene er parallelle og skjærer hverandre aldri. Da har vi *ingen løsning* som oppfyller begge ligningene samtidig.

3. Linjene er identisk slik at de ligger oppå hverandre. Da har vi *uendelig mange løsninger* som oppfyller begge ligningene samtidig.

Flere muligheter enn dette finnes ikke—vi kan aldri få to eller syv løsninger, bare ingen, én eller uendelig mange.

Hvis vi går til tre dimensjoner, altså med tre ukjente—x, y og z—er historien nesten helt lik. En ligning som inneholder alle de tre ukjente, for eksempel

$$2x - 3y + z = 2$$

beskriver en rett linje gjennom rommet. Dersom ligningen kun inneholder en eller to av de ukjente, for eksempel

$$y = 0 \quad \text{eller} \quad 3x - z = 4$$

beskriver den et plan.