

Generell prat om hvordan termodynamikk gjør at vi kan håndtere mange-partikkelsystemer uten å trenge informasjon om den mikroskopiske tilstanden.

1 Kinetisk gassteori

1.1 Temperatur

Fundamentalt sett er temperaturen til et system et mål på hvor mye energi som er lagret i det. I et fast stoff er energien lagret i form av at atomene vibrerer omkring sin likevektsposisjon, samt i form av bevegelsen til ledningselektronene hvis det faste stoffet er et metall. Vi skal se mer på faste stoffer i avsnittet om varmekapasitet. I fluider er energien lagret i form av kinetisk energi knyttet til translasjon, rotasjon og vibrasjon.

Vi begynner med å se på en-atomiske gasser, som for eksempel helium. Siden det ikke er noen binding mellom atomer her er det ikke noen fjærssom kan lagre energi i form av vibrasjon. Vi skal ikke komme videre inn på dette her, men kvantemekanikken forteller oss at en-atomige gasser heller ikke kan lagre energi i form av rotasjon. Dermed er all energi lagret i form av translasjon, slik at den totale energien til gassen kan skrives som

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

der vi summerer over alle molekylene i gassen.

For at det skal være meningsfullt å snakke om temperatur må systemet være i termodynamisk likevekt¹. Naivt sett skulle man da forvente at hvert atom i gjennomsnitt har den samme energien, men dette viser seg å være feil. I appendiks ?? viser vi at når en mono-atomisk gass er i likevekt har atomene en hastighet som beskrives av Maxwell-fordelingen,

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT},$$

der m er massen hvert atom, T er temperaturen til gassen og $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K er boltzmann-konstanten. Funksjonen $f(v)$ er sannsynlighetstettheten for farten v , det vil si at sannsynligheten for at et tilfeldig atom har fart i intervallet $v_1 < v < v_2$ er

$$P(v_1 < v < v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv.$$

¹Strengt tatt er det tilstrekkelig med en lokal likevekt, slik at vi kan tillate en temperaturgradient gjennom gassen. For enkelhets skyld skal vi anta at hele systemet vi ser på er i likevekt.

Figur (??) viser $f(v)$ for heliumgass ved $T = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$. Her ser vi at det store flertallet av atomer har fart omkring ???, mens en liten andel atomer har langt høyere fart.

1.2 Trykk

Trykket i et fluid kan forstås som et resultat av bevegelsesmengden til molekylene² i fluidet. For å gjøre dette litt mer konkret studerer vi det trykket fluidet forårsaker på veggene til en beholder. Vi har sett i avsnitt ?? at molekylene i fluidet beveger seg tilfeldig rundt med en gitt hastighetsfordeling. Denne tilfeldige bevegelsen vil gi stadige kollisjoner med veggene av beholderen. Hver kollisjon kan sees på som et elastisk støt³ der hastighetskomponenten til atomet normalt på veggen beholder størrelsen, mens retningen snues. Komponentene parallelt med veggen endres ikke. Gitt hastighet før kollisjonen

$$\vec{v}_{\text{før}} = v_{\perp} \hat{e}_{\perp} + v_{\parallel} \hat{e}_{\parallel},$$

der \hat{e}_{\perp} og \hat{e}_{\parallel} er enhetsvektorer henholdsvis normalt på veggen og parallelt med veggen, vil altså farten etter kollisjonen være

$$\vec{v}_{\text{etter}} = -v_{\perp} \hat{e}_{\perp} + v_{\parallel} \hat{e}_{\parallel}.$$

Siden hastighetskomponenten normalt på veggen endrer fortegn får vi en endring i bevegelsesmengde

$$\Delta \vec{p} = -2mv_{\perp} \hat{e}_{\perp}.$$

Dette betyr at veggen har virket på atomet med en kraft normalt på veggen. Motkraften til denne kraften er den kraften fra molekylet som forsøker å dytte veggen utover. Siden trykk er kraft normalt på en flate delt på arealet av en flate kan vi altså finne trykket ved å summere effekten av alle molekylene som kolliderer med veggen.

Før vi ser mer på det kvantitative i denne prosessen gjør vi noen viktige observasjoner:

- Siden økt temperatur gir økt gjennomsnittshastighet til molekylene vil kollisjonene i gjennomsnitt gi en større kraft mot veggen når temperaturen øker. Dermed øker trykket når temperaturen øker hvis alt annet holdes likt.

²Fluidet består enten av enkeltatomer eller av atomer satt sammen til molekyler. For enkelhets skyld omtaler vi de bare som molekyler her, men diskusjonen er identisk uansett om gassen består av enkeltatomer eller sammensatte molekyler

³Dette er en liten forenkling, men resultatene vi utleder blir likevel riktig så lenge gassen og beholderen er i termisk likevekt.

- Siden økt tetthet gir flere kollisjoner per tidshenhet vil trykket øke når tettheten øker hvis alt annet holdes likt.

Når vi nå skal se kvantitativt på sammenhengen mellom molekylbevegelse og trykk skal vi først anta at alle atomene har samme hastighetskomponent v_{\perp} . Dette er ikke riktig, og etterpå skal vi generalisere resultatet til en realistisk hastighetsfordeling. Vi ser nå på et sylindrisk volum med endeflate A plassert på beholderveggen og lengde $d\ell = v_{\perp}dt$. I løpet av tidsintervallet dt vil alle molekylene i fluidet som har normalkomponenten av hastigheten sin rettet mot veggen kollidere med veggen og sprette tilbake. Dette gir impulsen

$$I = F_{\perp}dt = \frac{1}{2}N|\Delta\vec{p}|,$$

der N er antall molekyler i volumet $V = Ad\ell = Av_{\perp}dt$. Faktoren $\frac{1}{2}$ kommer av at med tilfeldig bevegelse vil halvparten av molekylene til enhver tid ha en hastighetskomponent mot veggen, mens andre halvparten har en hastighetskomponent bort fra veggen. Om vi lar n være tettheten av molekyler kan vi da regne ut trykket som

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{1}{2} \frac{nV}{A} \frac{|\Delta\vec{p}|}{dt} = \frac{1}{2} \frac{nAv_{\perp}dt}{Adt} 2mv_{\perp} = nmv_{\perp}^2.$$

Nå er det på tide å kvitte oss med forenklingen at v_{\perp} er den samme for alle molekylene. Dette kan vi enkelt gjøre ved å erstatte v_{\perp}^2 med gjennomsnittsverdien av denne kvadrerte farten, $\langle v_{\perp}^2 \rangle$. Hvis vi ser på hele hastighetsvektoren til et molekyl, $\vec{v} = v_x\hat{e}_x + v_y\hat{e}_y + v_z\hat{e}_z$, så er kvadratet av denne

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Hvis vi i stedet regner ut gjennomsnittsverdien finner vi

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Siden bevegelsen er tilfeldig har molekylene lik sannsynlighet for å bevege seg i alle retninger og $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$. Om vi nå velger koordinatsystemet vårt slik at $\hat{e}_{\perp} = \hat{e}_x$, altså slik at $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_x$ har vi altså

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle.$$

Innsatt i uttrykket for trykk har vi da

$$p = nm\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{3}nm\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3}n \left(\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle \right)$$

2 Faste legemer

Varmekapasitet
Varmedledning
Termisk utvidelse