

# Innhold

<b>1</b>	<b>Enheter</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Skalarer og vektorer</b>	<b>7</b>
2.1	Vektoroperasjoner . . . . .	7
2.2	Enhetsvektorer . . . . .	8
2.2.1	Enhetsvektorer i et kartesisk koordinatsystem . . . . .	8
2.2.2	Enhetsvektorer i sylinderkoordinater . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Derivasjon og integrasjon</b>	<b>11</b>
3.1	Derivasjon . . . . .	11
3.2	Integrasjon . . . . .	11
3.3	Differensialligninger . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Figurer</b>	<b>13</b>
4.1	Frilegemediagram . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Bevaringslover</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Usikkerhet og signifikante sifre</b>	<b>17</b>
6.1	Mer om usikkerhet . . . . .	18



# Kapittel 1

## Enheter

I fysikk har de fleste størrelsene enheter. Enheten er en essensiell del av størrelsen, så hvis om vi oppgir bare tallverdien er ikke størrelsen tilstrekkelig spesifisert. For eksempel er det ikke tilstrekkelig å si at en stav er 1 lang. Da blir det bare gjetting om det er 1 meter, 1 fot eller noe helt annet.<sup>1</sup> Når vi regner med størrelser som har enheter er enhetene en del av utregningen, og vi tar de med også i alle mellomregninger.

Ved å ta med enheter hele veien gjennom beregningen får vi automatisk en kontroll på om beregningen vi har utført er fornuftig. Hvis vi skal regne ut en energi og ender opp med enhet  $\text{m}^2/\text{s}^2$  vet vi at det er noe feil i utregningen. Enhetene kan også hjelpe oss å huske hvordan vi formler ser ut. Hvis vi for eksempel husker at vi ut fra en hastighet ( $\text{m/s}$ ) og en tid ( $\text{s}$ ) kan finne avstanden, men ikke hvordan de skal kombineres kan vi straks se dette ut fra enhetene. Den eneste måten å kombinere  $\text{m/s}$  og  $\text{s}$  til å gi riktig enhet for lengde ( $\text{m}$ ) er å multiplisere de sammen. Altså må vi ha  $x = vt$ .

Det finnes mange forskjellige enhets-systemer. Det mest brukte, og det eneste som blir diskutert her, er SI-systemet (Système international d'unités). SI-systemet er bygget opp fra syv grunnenheter [Denne beskrivelsen er i ferd med å bli utdatert]:

- Lengde - meter ( $\text{m}$ )
- Masse - kilogram<sup>2</sup> ( $\text{kg}$ )
- Tid - sekund ( $\text{s}$ )
- Elektrisk strøm - ampere ( $\text{A}$ )

---

<sup>1</sup>Mars-sonden Mars Climate Orbiter kræsjet landet fordi programvaren ga resultater i pund-sekunder (lbf s), mens resultatene ble tolket som Newtonsekunder (Ns) som var det kontraktet mellom NASA og Lockheed hadde spesifisert at skulle brukes.

<sup>2</sup>Merk at det er kilogram som er grunnenheten, ikke gram.

Størrelse	Symbol	Enhet	Navn på enhet
Posisjon	$\vec{x}, \vec{r}$	1 m	Meter
Hastighet	$\vec{v}$	1 m/s	
Akselerasjon	$\vec{a}$	1 m/s <sup>2</sup>	
Masse	$m$	1 kg	Kilogram
Massetetthet, masse per volum	$\rho$	1 kg/m <sup>3</sup>	
Energi	$E, K, U$	1 J = 1 Nm = 1 kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Joule
Arbeid	$W$	1 J	Watt
Effekt	$P$	1 W = 1 J/s	
Kraft	$\vec{F}$	1 N = 1 kgm/s <sup>2</sup>	Newton
Bevegelsesmengde	$\vec{p}, \vec{P}$	1 kgm/s	
Impuls, støt	$\vec{J}$	1 Ns = 1 kgm/s	

Tabell 1.1: Størrelser og enheter først og fremst knyttet til mekanikk, men energi, arbeid og effekt er også viktig i andre deler av fysikken.

- Temperatur - kelvin (K)
- Stoffmengde - mol (mol)
- Lysstyrke - candela (cd)

Enhetene til alle andre størrelser får man ved å kombinere grunn-enhetene. En del kombinasjoner som ofte opptrer har fått egne navn og symbol. En rekke størrelser og enheter man ofte treffer på i fysikk-oppgaver er listet i tabell 1.1-1.3.

Størrelse	Symbol	Enhet	Navn på enhet
Ladning	$Q, q$	1 C	Coulomb
Ladningstetthet, ladning per lengde	$\lambda$	1 C/m	
Ladningstetthet, ladning per areal	$\sigma$	1 C/m <sup>2</sup>	
Ladningstetthet, ladning per volum	$\rho$	1 C/m <sup>3</sup>	
Elektrisk strøm	$I, i$	1 A = 1 C/s	Ampere
Elektrisk strømtetthet	$\vec{J}$	1 A/m <sup>2</sup>	
Elektrisk felt	$\vec{E}$	1 N/C = 1 V/m	
Elektrisk fluks	$\Phi_E$	1 Nm <sup>2</sup> /C = 1 Vm	
Elektrisk potensial	$V$	1 V = 1 J/C	Volt
Elektromotorisk spenning	$\mathcal{E}$	1 V	
Motstand, resistans	$R, r$	1 $\Omega$ = 1 V/A	Ohm
Resisitivitet	$\rho$	1 $\Omega$ m	
Konduktivitet	$\sigma$	1 ( $\Omega$ m) <sup>-1</sup>	
Kapasitans	$C$	1 F = C/V	Farad

Tabell 1.2: Størrelser og enheter knyttet til elektriske fenomen.

Størrelse	Symbol	Enhet	Navn på enhet
Magnetisk felt	$\vec{B}$	1 T = 1 N/Am	Tesla Weber
Magnetisk fluks	$\Phi_B$	1 Wb = 1 Tm <sup>2</sup>	
Magnetisering	$\vec{M}$	1 A/m	Henry
Induktans	$L$	1 H = 1 Wb/A = 1 Vs/A	
Gjensidig induktans	$M$	1 H	

Tabell 1.3: Størrelser og enheter knyttet til magnetiske fenomen.



# Kapittel 2

## Skalarer og vektorer

En del fysiske størrelser kan spesifiseres fullstendig ved hjelp av et tall + enhet. Dette er en skalar. Merk at den skalare størrelsen kan ha samme verdi på alle punkter i rommet (eksempel: lysets hastighet i vakuum) eller variere fra sted til sted (eksempel: temperatur). Skalare størrelser kan også endre seg med tiden. Når vi regner med skalarer kan vi bruke alle de vanlige regneartene.

Andre fysiske størrelser er ikke fullstendig spesifisert ved hjelp av bare et tall + enhet. For eksempel holder det ikke å si at det blåser 10 m/s – vi vil som regel vite retningen også. En størrelse som må spesifiseres både ved hjelp av verdi og retning kalles en vektor.

### 2.1 Vektoroperasjoner

Akkurat som skalarer kan vektorer ha samme verdi og retning i alle punkter i rommet, eller verdi og/eller retning kan variere fra punkt til punkt. Verdi og retning kan også endre seg med tiden. For vektorer har vi i tillegg til addisjon og subtraksjon tre typer multiplikasjon:

- Multiplikasjon med en skalar  $\rightarrow$  gir en vektor som svar
- Indreprodukt/prikkprodukt mellom to vektorer  $\rightarrow$  gir en skalar som svar
- Vektorprodukt/kryssprodukt mellom to vektorer  $\rightarrow$  gir en vektor som svar

## 2.2 Enhetsvektorer

Når vi jobber med vektorstørrelser er det ofte nyttig å introdusere en eller flere *enhetsvektorer*. En enhetsvektor er ganske enkelt en vektor med lengde 1, og nytten av den er at den peker i en bestemt retning. Mer at selv når vi jobber med vektorfelt som har dimensjon (f.eks. m/s eller N/C) er enhetsvektoren dimensjonsløs. Vanligvis bruker vi enhetsvektorer som peker i retningene til aksene i koordinatsystemet vårt, f.eks. i  $x$ -,  $y$ -, og  $z$ -retning. Dette blir diskutert i mer detalj nedenfor. Noen ganger ønsker vi imidlertid å bruke en enhetsvektor som peker i samme retning som en vilkårlig vektor. Hvis vi for eksempel har en posisjonsvektor  $\vec{r}$  kan det noen ganger være nyttig å skrive den som

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad (2.1)$$

der  $r$  er lengden av vektoren, altså  $r = |\vec{r}|$  og  $\hat{r}$  er en enhetsvektor som peker i samme retning som  $\vec{r}$ . Ved å se på ligning (2.1) finner vi ut at enhetsvektoren kan finnes fra vektoren  $\vec{r}$  som

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

### 2.2.1 Enhetsvektorer i et kartesisk koordinatsystem

Vi ser nå på et vanlig kartesisk koordinatsystem, altså et koordinatsystem som består av en  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -akse som står normalt på hverandre. Vi vet da at enhver vektor kan dekomponeres i  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -komponenter. For eksempel kan vektoren  $\vec{r}$  skrives som  $(r_x, r_y, r_z)$  der vi har listet opp hver enkelt komponent. Ofte er det nyttigere å bruke en notasjon der vi multipliserer hver komponent med enhetsvektoren som går i den aktuelle retningen:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \\ &= r_x\hat{e}_x + r_y\hat{e}_y + r_z\hat{e}_z. \end{aligned}$$

Den eneste forskjellen på de to linjene her er at det er brukt uliknotasjon for enhetsvektorene. Begge notasjonene er i vanlig bruk, så det er nødvendig å kjennet til begge. I denne teksten velger jeg å bruke  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  fordi notasjonen viser eksplisitt hvilken retning hver enhetsvektor peker, og fordi den er helt tilsvarende den mest brukte notasjonen for sylinder- og sfæriske koordinater.

Det er nyttig å kjenne resultatet av prikk- og kryssprodukt mellom de ulike enhetsvektorene, fordi det er da enkelt å regne ut prikk- eller kryssprodukt mellom to vilkårlige vektorer som er uttrykt ved hjelp av enhetsvektorene. Siden alle enhetsvektorene har lengde 1 og står normalt på hverandre er



prikk-produktet svært enkelt:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

der  $i$  og  $j$  kan være enten  $x, y$  eller  $z$ . Kryssproduktet mellom enhetsvektorene er litt mer komplisert, men kan relativt enkelt finnes ved hjelp av høyrehåndsregelen. Siden alle enhetsvektorene har lengde 1 og står normalt på hverandre blir også kryssproduktet en vektor med lengde 1, bortsett fra hvis vi tar kryssprodukt av en enhetsvektor med seg selv—da får vi 0.

$$\begin{aligned}\hat{e}_x \times \hat{e}_x &= \hat{e}_y \times \hat{e}_y = \hat{e}_z \times \hat{e}_z = 0 \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_x \times \hat{e}_z &= -\hat{e}_y \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= \hat{e}_x\end{aligned}$$

Hvis enhetsvektorene kommer i annen rekkefølge bruker vi den generelle regelen for kryssprodukt som gjelder for alle vektorer, inkludert enhetsvektorer,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

### Regneeksempel

Vi har hastighetsvektoren

$$\vec{v} = (1 \text{ m/s})\hat{e}_x - (3 \text{ m/s})\hat{e}_y + (2 \text{ m/s})\hat{e}_z$$

og magnetfeltvektoren

$$\vec{B} = (1.2 \text{ T})\hat{e}_x + (0.5 \text{ T})\hat{e}_y - (0.7 \text{ T})\hat{e}_z.$$

Vi kan nå bruke relasjonene (2.2.1) og (2.2.1) til å regne ut prikk- og kryssproduktet av  $\vec{v}$  og  $\vec{B}$ <sup>1</sup>. Merk at beregningene her gjøres litt ekstra omstendelig—vanligvis vil man ikke skrive opp de leddene som gir 0 i det hele tatt, men for å vise mest mulig detaljer er alle ledd med her.

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{B} &= [(1 \text{ m/s})\hat{e}_x - (3 \text{ m/s})\hat{e}_y + (2 \text{ m/s})\hat{e}_z] \cdot [(1.2 \text{ T})\hat{e}_x + (0.5 \text{ T})\hat{e}_y - (0.7 \text{ T})\hat{e}_z] \\ &= (1.2 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x + (0.5 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \cdot \hat{e}_y - (0.7 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \cdot \hat{e}_z \\ &\quad - (3.6 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \cdot \hat{e}_x - (1.5 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \cdot \hat{e}_y + (2.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \cdot \hat{e}_z \\ &\quad + (2.4 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \cdot \hat{e}_x + (1.0 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \cdot \hat{e}_y - (1.4 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \\ &= 1.2 \text{ Tm/s} - 1.5 \text{ Tm/s} - 1.4 \text{ Tm/s} \\ &= -1.7 \text{ Tm/s}.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $\vec{v} \times \vec{B}$  er et produkt som det ofte er behov for å beregne når man jobber med magnetiske krefter.  $\vec{v} \cdot \vec{B}$  er ikke et produkt som vanligvis opptrer i fysiske beregninger, men det er ingenting som hindrer oss i å beregne dette produktet.

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{B} &= [(1 \text{ m/s})\hat{e}_x - (3 \text{ m/s})\hat{e}_y + (2 \text{ m/s})\hat{e}_z] \times [(1.2 \text{ T})\hat{e}_x + (0.5 \text{ T})\hat{e}_y - (0.7 \text{ T})\hat{e}_z] \\
&= (1.2 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \times \hat{e}_x + (0.5 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \times \hat{e}_y - (0.7 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \times \hat{e}_z \\
&\quad - (3.6 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \times \hat{e}_x - (1.5 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \times \hat{e}_y + (2.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \times \hat{e}_z \\
&\quad + (2.4 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \times \hat{e}_x + (1.0 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \times \hat{e}_y - (1.4 \text{ Tm/s})\hat{e}_z \times \hat{e}_z \\
&= (0.5 \text{ Tm/s} + 3.6 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \times \hat{e}_y + (-0.7 \text{ Tm/s} - 2.4 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \times \hat{e}_z \\
&\quad + (2.1 \text{ Tm/s} - 1.0 \text{ Tm/s})\hat{e}_y \times \hat{e}_z \\
&= (4.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_z - (3.1 \text{ Tm/s})(-\hat{e}_y) + (1.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_x \\
&= (1.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_x + (3.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_y + (4.1 \text{ Tm/s})\hat{e}_z
\end{aligned}$$

### 2.2.2 Enhetsvektorer i sylinderkoordinater

Enhver bevegelse *kan* beskrives ved hjelp av kartesiske koordinater, men noen bevegelse vil da se unødvendig komplisert ut. Dette gjelder blant annet sirkelbevegelser og skurebevegelser. Disse bevegelsene beskrives bedre i sylinderkoordinater. Vi har da

- en koordinat som beskriver avstanden fra sentrum av bevegelsen. Denne koordinaten kalles ofte  $r$ .
- en koordinat som beskriver vinkelen relativt til en (tilfeldig valgt) retning i planet der sirkelbevegelsen skjer. Denne koordinaten kalles ofte  $\theta$ .
- en koordinat som beskriver høyden over det planet vi tok utgangspunkt i. Denne koordinaten kalles ofte  $z$ .

Vi definerer nå tre enhetsvektorer  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  og  $\hat{e}_z$ . Enhetsvektoren  $\hat{e}_z$  er akkurat slik som enhetsvektorene diskutert i forbindelse med de kartesiske koordinatene, men de to andre er litt annerledes:  $\hat{e}_r$  og  $\hat{e}_\theta$  peker nemlig i ulik retning avhengig av hvilket punkt vi ser på. Enhetsvektoren  $\hat{e}_r$  peker i samme retning som forbindelseslinjen mellom origo og punktet vi ser på, mens  $\hat{e}_\theta$  står 90° på  $\hat{e}_r$  og  $\hat{e}_\theta$  med retningen bestemt slik at  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  og  $\hat{e}_z$  utgjør et høyrehendt system når de er tatt i den rekkefølgen. Dette betyr at når  $z$ -aksen peker oppover øker vinkelen *mot* klokken. Vi kan nå uttrykke en vilkårlig vektor ved hjelp av enhetsvektorene vi har definert,

$$\vec{a} = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta + a_z \hat{e}_z.$$

Siden retningen til  $\hat{e}_r$  og  $\hat{e}_\theta$  varierer fra punkt til punkt vil de påvirkes av derivasjon.

# Kapittel 3

## Derivasjon og integrasjon

3.1 Derivasjon

3.2 Integrasjon

3.3 Differensialligninger



# Kapittel 4

## Figurer

### 4.1 Frilegemediagram

En god figur er nyttig for å organisere opplysningene i en problemstilling før vi begynner å regne. I mekanikk-oppgaver er frilegemediagrammer vanligvis den nyttigste figurtypen.



## Kapittel 5

### Bevaringslover





# Kapittel 6

## Usikkerhet og signifikante sifre

I motsetning til i matematikk der vi som regel kan anta at vi har eksakt kjennskap til størrelsene vi jobber med har vi i fysikk generelt bare kjennskap til størrelsen med en viss presisjon. Dette skyldes at fysiske størrelser har opphav i målinger og der kan vi aldri ha uendelig presisjon. Skal vi gjøre ting helt korrekt skal størrelsen oppgis sammen med dens estimerte usikkerhet.<sup>1</sup> For eksempel kan en lengde oppgis som  $x = (1.03 \pm 0.02)$  m. Dette betyr det beste estimatet vi har på lengden er  $x = 1.03$  m. Usikkerheten  $\pm 0.02$  m betyr at vi mener å vite at hvis denne lengden blir målt mange ganger vil flesteparten<sup>2</sup> av målingene skal vise mellom  $x = 1.01$  m og  $x = 1.05$  m.

I regneoppgaver forholder vi oss vanligvis litt mer avslappet til usikkerheten i størrelsene, men vi glemmer den ikke helt. Hvis f.eks. en energi oppgis som 2.52 J tolkes det som at usikkerheten er i det siste sifferet. Det kan altså tenkes at den riktige verdien er 2.51 J eller 2.55 J, men sannsynligvis ikke at avviket er så stort at den riktige verdien er 2.60 J. En tommelfingerregel for å få en fornuftig presisjon i svaret av en beregning er å ikke ta med flere sifre i sluttsvaret enn det var i den inn-verdien med færrest sifre.

Noen få ord om hvordan man teller sifre: Hvis vi teller fra venstre er det første sifferet som er ulik 0 det første vi teller. Deretter teller alle sifre med i regnskapet. Eksempler:

- 1.54 – tre sifre
- 0.03 – ett siffer
- $1.3 \times 10^6$  – to sifre

---

<sup>1</sup>Heller ikke usikkerheten er eksakt bestemt, men det er som regel mulig å estimere denne på en systematisk måte.

<sup>2</sup>Det vanligste er å bruke en definisjon av usikkerheten som gjør at 67% av målingene skal havne innenfor intervallet definert av usikkerheten.

Merk at hvis du får svaret 238 m og kun skal ha med to sifre må svaret skrives som  $2.4^2$  m for å følge denne regelen siden å skrive det avrundete tallet 240 m fremdeles er å skrive tre sifre.

## 6.1 Mer om usikkerhet

Noen ganger er ikke tommelfingerregelen om antall signifikante sifre tilstrekkelig. For eksempel må usikkerhet behandles skikkelig hvis man skriver en vitenskapelig artikkel eller en teknisk rapport. Også i labøvinger er det vanlig å kreve at usikkerheten behandles på en ordentlig måte.

Vi skal her se kort på hvordan man propagerer usikkerhet fra inntallene til svaret. Å gjøre dette helt generelt er komplisert, så vi vil her gjøre to antakelser som forenkler problemet:

- Usikkerheten til alle variablene er ukorrelerte. Det vil si at selv om usikkerheten på en variabel, så vil ikke de andre usikkerhetene påvirkes.
- Alle usikkerhetene kommer fra en gaussisk fordeling.

Anta at vi har måldata  $a \pm \sigma_a, b \pm \sigma_b, c \pm \sigma_c, d \pm \sigma_d$  som kombineres til et resultat  $f(a, b, c, d)$ . Vi ønsker nå å finne usikkerheten,  $\sigma_f$ , til dette resultatet. Det finner vi via formelen:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2$$

For å gjøre det mer konkret skal vi se på noen spesialtilfeller, og for enkelhets skyld nøyer vi oss med to inn-variabler, men resultatene kan enkelt utvides til flere variabler.

### Addisjon

$$f(a, b) = a + b, \quad \sigma_f^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$$

### Subtraksjon

$$f(a, b) = a - b, \quad \sigma_f^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$$

Merk at siden usikkerhetene adderes i kvadratur her, mens  $f$  kommer som resultat av en subtraksjon kan den relative usikkerheten på resultatet,  $\sigma_f/f$ , bli veldig mye større enn de relative usikkerhetene på inndataene. Det er derfor en fordel, om mulig, å organisere målingene og beregningene sine slik at subtraksjon unngås.

**Multiplikasjon**

$$f(a, b) = a \cdot b, \quad \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2$$

**Multiplikasjon med en tall uten usikkerhet**

$$f(a) = 2a, \quad \sigma_f = 2\sigma_a$$

**Divisjon**

$$f(a, b) = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2$$

På samme måte som subtraksjon vil også divisjon kunne blåse opp den relative usikkerheten.