Fra Maxwells ligninger til bølger

Maxwells ligninger på differensiell form er gitt som

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E} \\
\vec{B} &= \mu \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}.
\end{aligned}$$

Her er $\vec{E} = \vec{E}(t,\vec{x})$ og $\vec{B} = \vec{B}(t,\vec{x})$ henholdsvis det elektriske og magnetiske feltet. $\vec{D}$ er den såkalte *forksyvningsvektoren* som i vakuum oppfører seg likt det elektriske feltet, men som i motsetning til det elektriske feltet ikke får et bidrag fra induserte ladninger når vi studerer felter i et medium. $\vec{H}$ er *magnetisk intensitet* og er i analogi med $\vec{D}$ kun avhengig av det påtrykte magnetiske feltet, og ikke en eventuell magnetisering av mediet. $\vec{J} = \vec{J}(t,\vec{x})$ er strømtetthet, altså ladningstransport per tid og per areal, og $\rho = \rho(t,\vec{x})$ er ladningstetthet.

I den følgende utledningen begrenser vis oss til å se på vakuum. Da forenkler ligningene ovenfor seg til

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4}$$

Der vi har utnyttet at ε_0 og μ_0 er konstanter og derfor kan tas utenfor derivasjonen.[1]

[1]Dette er i motsetning til elektriske og magnetiske felter i et medium. Da vil $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ og $\mu = \mu_r \mu_0$ kunne variere i både rom og tid og må altså tas med når vi deriverer.

Bølgeligning for det elektriske feltet

For å finne bølgeligningen for det elektriske feltet starter vi med å anvende curl-operatoren ($\nabla\times$) på ligning (1). Vi begrenser oss til å se på $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felter som er tilstrekkelig differensierbare til at vi fritt kan bytte rekkefølge mellom romlig og tids-derivasjon:[2]

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}).$$

For å komme videre nå må vi jobbe litt med venstresiden av denne ligningen. En vektoridentitet som man finner i matematiske tabeller, eller beviser selv ved direkte utrengning, er

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}.$$

For å anvende denne identiteten på vårt tilfelle må vi sette $\vec{a} = \nabla$, $\vec{b} = \nabla$ og $\vec{c} = \vec{E}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + (\nabla \cdot \vec{E})\nabla.$$

Det andre leddet her ser litt rart ut siden vi har en ∇-operator som ikke virker på noe. I det generelle tilfellet (altså ikke vakuum) måtte vi sett nærmere på dette leddet, noe vi kunne gjort ved hjelp av en delvis integrasjon. Men siden $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ i vakuum vil dette leddet uansett være lik null. Dermed er ligningen vår nå forenklet til

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

For å komme videre herfra setter vi inn ligning (3):

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

som er en bølgeligning for vektorfeltet $\vec{E}$. Siden faktoren foran den andrederiverte med hensyn på tiden i bølgeligningen er $\frac{1}{v^2}$ må farten til denne bølgen være

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \cdot 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}}} = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

som er identisk med den målte lyshastigheten i vakuum.

[2] Alle funksjoner som er av fysisk interesse tilfredsstiller dette, så dette er ikke en vesentlig begrensning.

Bølgeligning for det magnetiske feltet

Utledningen for det magnetiske feltet er nesten helt lik til den for det elektriske feltet. Vi begynner med å anvende $\nabla\times$ på ligning (3):

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right)$$

Ved å bruke samme vectoridentitet som ovenfor, og å utnytte at $\nabla\vec{B} = 0$ (alltid, ikke bare i vakuum) finner vi at

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla^2 \vec{B}$$

Ved å sette inn ligning (1) får vi bølgeligningen

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

som vi ser at har identitsk form—inkludert bølgefarten—som ligningen for det elektriske feltet.

Kobling mellom elektriske og magnetiske bølger

Vi har nå kommet frem til én bølgeligning for det elektriske feltet og én bølgeligning for det magnetiske feltet:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

De to ligningene beskriver begge bølger med farten $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ men ser forøvrig ikke ut til å ha noe mer med hverandre å gjøre. Men vi vet fra ligning (1) og (3) at det elektriske og magnetisk feltet ikke er uavhengig av hverandre. Tvert imot, hvis det ene feltet endres får vi straks en endring i det andre feltet. For å få frem denne koblingen må vi se på konkrete løsninger av bølgeligningene. Dersom vi ønsker å beskrive en sinusbølge som beveger seg i positiv z-retning må den skrives på formen

$$(\text{amplitude}) \cdot \sin(kz - \omega t)$$

der bølgetallet k og vinkelfrekvensen ω kan kombineres efor å gi bølgefarten $c = \frac{\omega}{k}$. Siden vi nå beskriver en bølge i vektorfeltet $\vec{E}$ må amplituden selv være en vektor. A priori kan vi anta at den har både x, y og z-komponent slik at bølgen kan skrives som

$$\vec{E}(t,x,y,z) = (E_{0x}\,\hat{e}_x + E_{0y}\,\hat{e}_y + E_{0z}\,\hat{e}_z)\cdot\sin(kz-\omega t)$$

der E_{0x}, E_{0y} og E_{0z} er tre konstanter, og $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, og $\hat{e}_z$er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning. I vakuum er $\nabla\vec{E}=0$, derfor har vi

$$0 = \nabla\vec{E} = \frac{\partial E_x(t,x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(t,x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(t,x,y,z)}{\partial z}$$

Siden den eneste avhengigheten $\vec{E}$ har av koordinatene er gjennom sinusfunksjonen, og siden denne bare avhenger av z, gir derivasjon med hensyn på x og y null. Derfor er det bare det siste leddet som gir noe bidrag:

$$0 = \nabla\vec{E} = \frac{\partial E_z(t,x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_{0z}\sin(kz-\omega t)\right) = kE_{0z}\cos(kz-\omega t)$$

Siden $\cos(kz-\omega t)$ for de fleste verdier av x og t må $E_{0z}=0$ for at denne ligningen alltid skal være oppfylt. Det betyr at det elektriske feltet i en elektromagnetisk bølge kun kan ha utslag normalt på utbredelsesretningen—vi har altså en rent transversal bølge. Denne ligningen gir oss ikke noe informasjon om x- og y-komponentene av amplituden til $\vec{E}$. Det betyr at vi både E_{0x} og E_{0y} gjerne kan være ulik 0. Vi kan imidlertid—uten å tape generalitet—rotere koordinatsystemet vårt om z-aksen slik vi oppnår $E_{0y}=0$ og x-retningen er den eneste med et elektrisk felt. Den elektriske bølgen beskrives da av

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_{0x}\sin(kz-\omega t).$$

Ved å bruke ligning (1) finner vi den assosierte magnetiske bølgen:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x(t,z) & 0 & 0\end{vmatrix} &= \hat{e}_y\frac{\partial E_x(t,z)}{\partial z}\\ &= \hat{e}_y kE_{0x}\cos(kz-\omega t).\end{aligned}$$

Dette uttrykket kan vi integrere for å finne B-feltet[3]

$$\begin{aligned}\vec{B} = \int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}t = -\,\hat{e}_y kE_{0x}\int\cos(kz-\omega t)\mathrm{d}t &= \hat{e}_y\frac{kE_{0x}}{\omega}\sin(kz-\omega t)\\ &= \hat{e}_y\frac{E_{0x}}{c}\sin(kz-\omega t)\end{aligned}$$

[3]Formelt sett skal det også være med en integrasjonskonstant som svarer til et statisk magnetfelt. Her er vi kun interessert i den magnetiske bølgen. Derfor setter vi integrasjonskonstanten til 0.