1 Følger og rekker

I fysikk-kurs har du antakelig mange ganger sett eksempler på at vi setter opp bevegelsesligninger for et stystem—typisk ved hjelp av Newtons lover—og regner ut hvordan det vil bevege seg. Dette fungerer vanligvis fint på de eksemplene man ser på der, men det er takket være at man typisk ser på veldig enkle eksempler. Straks man ønsker å studere mer virkelighetsnære eksempler ender man opp med mer kompliserte ligninger—ofte uten en analytisk løsning. Det betyr ikke at man bare må gi opp, vi trenger bare å skaffe noen flere strategier i verktøykassen. Én slik strategi er å ikke løse den eksakte ligningen, men å gjøre en tilnærming som gir en enklere ligning som fremdeles har en løsning som er nær den riktig løsningen. Et eksempel på dette, som du kanskje allerede har truffet på, er en idealisert pendel.[1] Bevegelsen til pendelen beskrives av en ligning for tidsvariasjonen til vinkelen (θ) den danner med loddlinjen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

Selv om ligningen kan se enkel ut er den ikke enkel å løse. Derfor er det vanlig å si at siden $\sin\theta \simeq \theta$ for små vinkler θ kan vi i stedet løse ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

som faktisk har en enkel løsning $\left(\theta(t) = A\sin(\frac{\sqrt{g}}{\ell}t) + B\cos(\frac{\sqrt{g}}{\ell}t)\right)$. Men hvordan kan vi vite at $\sin\theta \simeq \theta$, hvor liten må θ være for at tilnærmingen skal fungere, og hvor godt fungerer i det hele tatt denne tilnærmingen?

Her skal vi se på følger og rekker med et mål om å kunne svare på disse spørsmålene. På veien dit trengs litt grunnleggende teori som kanskje ikke ser ut til å gå direkte mot målet i første omgang, men hold ut så kommer vi dit vi skal.

1.1 Følger

Vi starter med å definere følger som en ordnet liste av tall sammen med en regel som gir sammenhengen mellom tallene i følgen. Listen av tall kan være enten endelig eller uendelig, og her er det de uendelige følgene vi kommer til å fokusere.

[1] Idealisert betyr i denne sammenhengen at vi antar at all massen er samlet i et punkt i enden av en masseløs tråd uten elastikk. Dette er i seg selv forenklinger sammenlignet med virkeligheten, men det er ikke de forenklingene vi er interessert i å se på akkurat nå.

Definisjon

En uendelig følge er en liste av tall

$$\{a_1, a_2, \dots a_n \dots\}$$

som er gitt av en regneregel som forteller hvordan tallene i listen genereres.

Denne definisjonen gir stor frihet til hvordan listen av tall genereres—i noen følger finnes det en eksplisitt form for å regne ut tall nummer n, mens i andre er definert rekursivt slik at man trenger et eller flere av de foregående tallene for å regne ut det neste.

Eksempel 1

- Tall nummer n i følgen

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

  regnes ut som $a_n = 2^{n-1}$.

- Tall nummer n i følgen

$$\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots\right\}$$

  regnes ut som $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

- Tall nummer n i følgen

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

  regnes ut som $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ (unntak: for å starte rekursjonsregelen defineres $a_1 = a_2 = 1$).

Noen ganger kan det være nyttig å tenke på følger som funksjoner, men vi må da huske på at definisjonsmengden vil være diskret. Vi kan alltid velge[2] denne definisjonsmengden til å være de naturlige tallene $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$.

[2]Dette valget er ikke unikt, vi kan for eksempel velge å telle fra 0 eller et annet tall for den saks skyld.

1.1.1 Konvergens

Newtons metode for å finne nullpunkter til en funksjon $f(x)$ danner en rekursiv følge: Gitt et startpunkt x_0 er de videre leddene i rekken gitt som

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Dersom startpunktet x_0 er tilstrekkelig nær et nullpunkt til funksjonen og funksjonen oppfører seg "tilstrekkelig pent" vil x_n nærme seg nullpunktet etter som n blir større. Dersom grenseverdien når $n \to \infty$ er det eksakte nullpunktet sier vi at følgen konvergerer mot dette punktet. Men det er også kjent at Newtons metode ikke alltid konvergerer mot nullpunktet vi ønsker å finne. Noen ganger får vi konvergens mot et annet nullpunkt, og andre ganger vil ikke metoden konvergere i det hele tatt. Dette gir en motivasjon til å undersøke konvergensegenskapene til følger mer generelt.

Definisjon

En uendelig følge $\{a_n\}$ konvergerer mot verdien A, dersom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Dersom følgen ikke konvergerer mot noe tall divergerer den.

Merk at divergens kan opptre på ulike måter, f.eks. kan leddene blir større og større slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, men det er også mulig at følgen hopper frem og tilbake mellom to (eller flere) endelige verdier slik som følgen $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, eller at leddene får større og større absoluttverdi uten å divergere mot verken ∞ eller $-\infty$ slik som vi kan se med f.eks. $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Et noe svakere krav en konvergens er hvorvidt en følge er begrenset.

Definisjon

Dersom det eksisterer et tall M slik at $a_n \leq M$ for alle n er følgen $\{a_n\}$ **begrenset ovenfra**. Dersom det eksisterer et tall m slik at $a_n \geq m$ for alle n er følgen $\{a_n\}$ **begrenset nedenfra**. Dersom følgen er begrenset både ovenfra og nedenfra er den **begrenset**.

1.2 Uendelige rekker