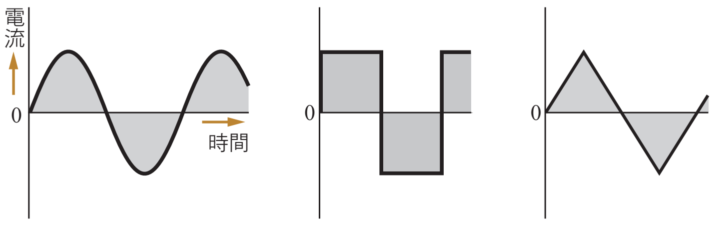
1節 交流の基本的取り扱い

1 交流とは

第１章で学んだように，直流は時間とともに大きさと向きが変わらない電圧・電流である。これに対して，図１に示す波形のように，時間とともに大きさと向きが変わる電圧・電流を**交流**という。



(a) 正弦波　(b) 方形波　(c) 三角波

図１　いろいろな交流の波形

図１(a)は，家庭や工場などで使われる交流で**正弦波交流**❶という。交流は，**変圧器**❷によって電圧の大きさを変えることができ，電気を送るのに適している。また，複数の交流を組み合わせて回転磁界を生じさせることによって電動機を回転させることができる。

❶ sinusoidal wave AC
sine wave AC ともいう。
❷ 変圧器については第６章で学ぶ。

2 正弦波交流の取り扱い

起電力の発生については第２章で学んだが，図２のように磁界中をコイルが回転すると，フレミングの右手の法則により，コイル自身に正弦波形の交流起電力が生じる。

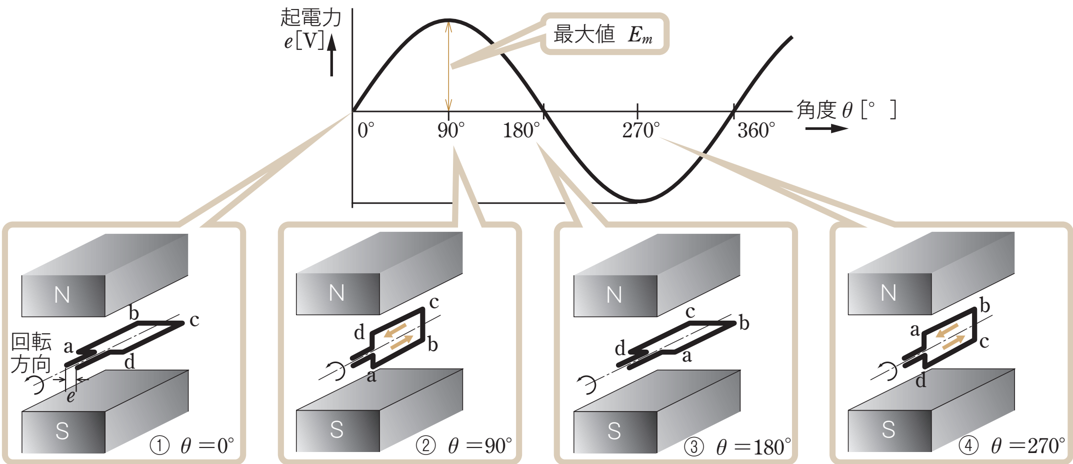


図２　磁界中のコイルの回転

図2に示す正弦波交流起電力は，コイルの回転角度を θ，起電力の最大値を E_m とすると，次式で示される。

> **●正弦波交流起電力**　　e[1] $= E_m \sin\theta$ [V]　　(1)

図２の①，②，③，④のように，逆時計回りの向きにコイルが回転すると，起電力は図２のように変化する。

1　周期と周波数

交流起電力は，図３に示すように周期的に変化する。図の正の半波と負の半波の１組からなる交流の波形を，**1周波**または**1サイクル**という。

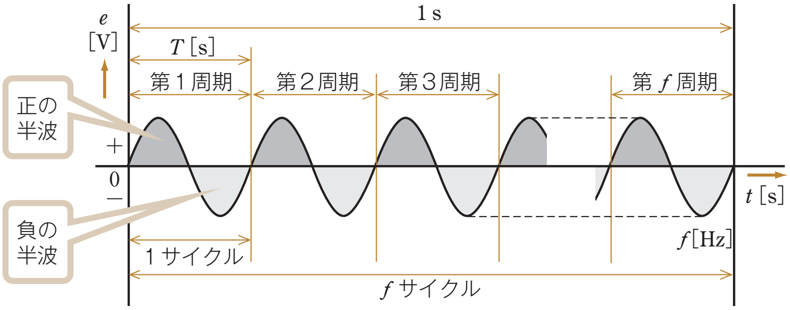


図3　周期と周波数

１サイクルの時間を**周期**[2]といい，単位には秒 [s] が用いられる。また，１秒間に繰り返されるサイクル数を**周波数**[3]といい，単位には**ヘルツ**（単位記号 **Hz**）が用いられる。

周波数を f [Hz]，周期を T [s] とすると，これらの間には，次のような関係がある。

> **●周波数**　　$f = \dfrac{1}{T}$ [Hz]　　(2)
>
> **●周期**　　$T = \dfrac{1}{f}$ [s]　　(3)

例題 1　周波数50 Hzの周期はいくらか。また，周期20 μsの周波数はいくらか。

解答…　式(2)，(3)より，

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20 \times 10^{-3}\,\text{s} = 20\,\text{ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} = 50\,000\,\text{Hz} = 50 \times 10^{3}\,\text{Hz} = 50\,\text{kHz}$$

問 1　周波数60 Hzの交流起電力がある。周期を求めよ。

問 2　周期0.01 sの交流の周波数を求めよ。

❶　交流起電力の e は p.81で学ぶように瞬時値を表す。一般に，交流電圧 V，電流 I，起電力 E の瞬時値を表す場合は，小文字の v，i，e を用いる。

❷　period

❸　frequency
　高い周波数には，キロヘルツ [kHz]，メガヘルツ [MHz]，ギガヘルツ [GHz] などが用いられる。
　1 kHz = 10^3 Hz
　1 MHz = 10^6 Hz
　1 GHz = 10^9 Hz

❶radian

2　弧度法と角周波数

角度の単位は，**度**（単位記号°）のほかに，電気回路の計算には**ラジアン**❶（単位記号**rad**）がよく用いられる。ラジアンで角度を表す方法を**弧度法**という。弧度法は，弧の長さが半径の何倍かによって角度を表す方法である。

1 radは，図4に示すように，半径と同じ長さの弧に対する中心角である。180°は弧の長さがπrとなるので，$\pi\dfrac{r}{r}=\pi$［rad］である。

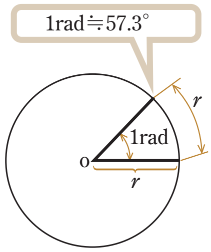


図4　弧度法

図2においてコイルが1秒間に回転した角度を**角周波数**（または**角速度**）といい，記号ωで表す。角周波数の単位には，**ラジアン毎秒**（単位記号**rad/s**）が用いられる。コイルが1秒間に1回転したときの角周波数は2π［rad/s］なので，周波数がf［Hz］であると，コイルは1秒間にf回転するから，角周波数は次の式で表される❷。

❷角度θをradで表すと，
$\theta=\omega t=2\pi ft$［rad］
となる。

●角周波数　　$\boldsymbol{\omega=2\pi f}$［**rad/s**］　　(4)

表1　度とラジアン

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	240°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π

また，角周波数ω［rad/s］でt秒間コイルが回転した角度をθ［rad］としたとき，コイルの回転角θ［rad］は次の式で表される。

●回転角　　$\boldsymbol{\theta=\omega t}$［**rad**］　　(5)

例題2　交流発電機のコイルが1秒間に50回転している。このときの角周波数ωを求めよ。

解答…　式(4)より，

$$\omega=2\pi f=2\times3.14\times50=314\,\text{rad/s}$$

問 3　0.1秒で90°回転する発電機がある。この発電機の角速度ω［rad/s］を求めよ。

3　最大値と瞬時値

正弦波交流の値は，図5のように時間とともに変化している。この値を**瞬時値**[1]という。式(1)に式(5)を代入し，電圧と電流の最大値を V_m，I_m とすると，瞬時値は次の式で表される。また，電流についても同様に表すことができる。瞬時値のうち，最大の値を**最大値**という。

●**正弦波交流の瞬時値**

$$v = V_m \sin\omega t\,[\mathrm{V}] \tag{6}$$

$$i = I_m \sin\omega t\,[\mathrm{A}] \tag{7}$$

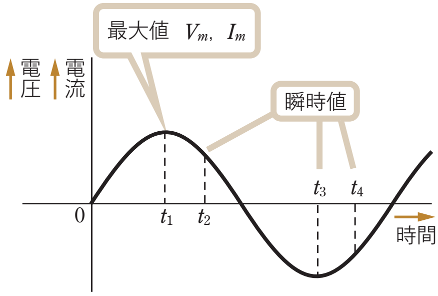


図5　瞬時値と最大値

式(6)および式(7)に，式(4)を代入すると，次の関係式も得られる。

$$v = V_m \sin 2\pi f t\,[\mathrm{V}] \tag{8}$$

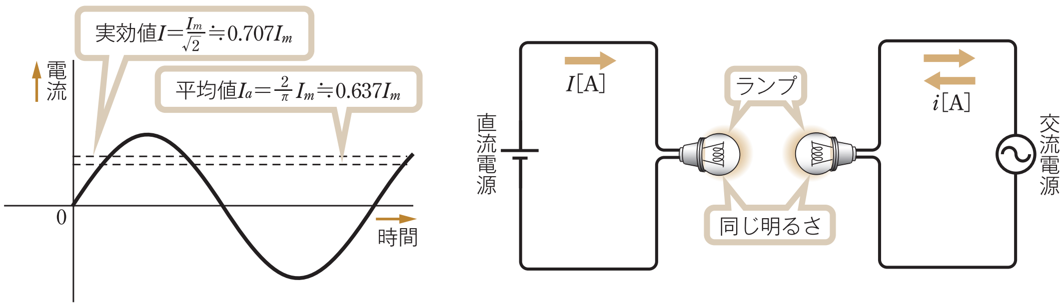
$$i = I_m \sin 2\pi f t\,[\mathrm{A}] \tag{9}$$

図6(b)のように，直流電源と交流電源に同じ定格のランプを接続し，両方のランプに電流を同じ時間だけ流して明るさを比較する。ランプの明るさが同じであれば，直流 I[A] と交流 i[A] は，同じ仕事量（同じ電力量）であるということができる。このときの直流 I[A] の値を交流 i[A] の**実効値**[2]という。

すなわち，交流電源の大きさを表す場合，同じ仕事をする直流電源の値で表すのである。

[1] 瞬時値は，t_1，t_2，t_3 にかぎらず，そのときどきの値である。

[2] effective value または root mean square value



(a) 各値の比較　　(b) 実効値

図6　実効値と平均値

正弦波交流の場合，実効値I［A］は次の式で表される。また，電圧の場合も同様に表すことができる。

●**正弦波交流の実効値**

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.707 V_m \,[\mathrm{V}] \qquad (10)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.707 I_m \,[\mathrm{A}] \qquad (11)$$

また，正の半サイクルの電圧や電流の波形を平らに直した値を，**交流の平均値**という。正弦波交流の平均値I_a［A］は，次の式で表される。また，電圧の場合も同様に表すことができる。

●**正弦波交流の平均値**

$$V_a = \frac{2}{\pi} V_m \fallingdotseq 0.637 V_m \,[\mathrm{V}] \qquad (12)$$

$$I_a = \frac{2}{\pi} I_m \fallingdotseq 0.637 I_m \,[\mathrm{A}] \qquad (13)$$

なお，とくにことわりのないかぎり，一般に交流の電流や電圧の表記には実効値が用いられる。電流計や電圧計の目盛も，実効値で示されている。

例題3　最大値100Vの正弦波交流電圧の実効値を求めよ。

解答…　式(10)より，

$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7\,\mathrm{V}$$

問 4　実効値200Vの電圧の最大値を求めよ。

問 5　最大値70.7Aの電流の実効値を求めよ。

4　位相[1]

図7に正弦波交流i_a，i_b，i_cの波形を示す。正弦波交流は時間によって変化するので，波形のどこかに基準を設ける。i_aの波形の立ち上がりを

❶　波形による時間差を位相といい，単位を角度（°またはrad）で示す。数式による表現はp.83参照。

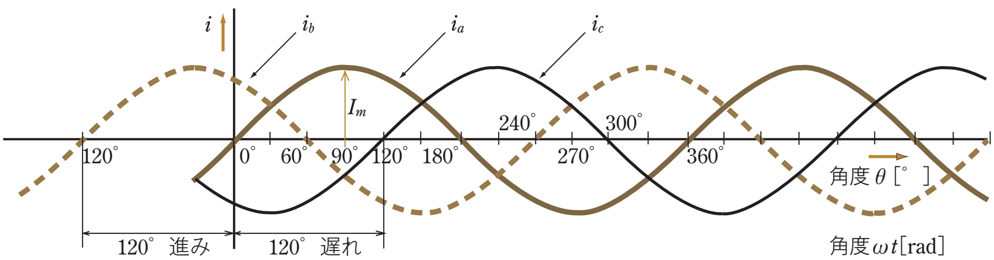


図7　正弦波交流と位相

基準とすると，i_bの波形は120°進んで立ち上がっており，i_cの波形は逆に120°遅れて立ち上がっているという。

これを式で表すと，次のようになる。

$$i_a = I_m \sin\theta \ [\mathrm{A}] \tag{14}$$

$$i_b = I_m \sin(\theta + 120°) \ [\mathrm{A}] \tag{15}$$

$$i_c = I_m \sin(\theta - 120°) \ [\mathrm{A}] \tag{16}$$

このとき，i_aに示されるθ，i_bに示される$(\theta + 120°)$，i_cに示される$(\theta - 120°)$をi_a，i_b，i_cの位相という。したがって，図7の場合「i_bはi_aより，位相が120°進んでいる」または，「i_cはi_aより，位相が120°遅れている」という。

コラム column

日本の商用周波数

日本の電力会社が，家庭や工場に供給する交流の周波数は，商用周波数とよばれる。図8のように，富士川以東では50Hz，以西では60Hzに分けられる。また，一部に混在地区がある。

この周波数の違いは，明治時代に電力会社が発電機などの設備を国内でつくれなかったため，ドイツから50Hz用，アメリカ合衆国から60Hz用の発電機や電動機などを輸入したために生じたものである。

図8　商用周波数の分布

3　抵抗・コイル・コンデンサに流れる電流

1　ベクトルによる表記

力や速度のように，大きさと方向をもつ量をベクトル[1]という。正弦波交流の電圧や電流を取り扱う場合，位相差についても考えなければならない。ベクトルの性質を利用すると，電圧や電流の大きさと位相角を簡単に表記し，取り扱うことができる。

[1] vector

ベクトルは，図9のように，基準点Oから大きさX，基準線からの角度（**偏角**）θを用いて，式(17)のように表すことができる。

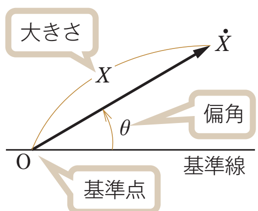


図9　ベクトルの表し方

このとき，大きさと方向をもつ量Xを$\dot{X}$[1]と表し，この表記をベクトルの**極座標表示**[2]という。

> ●**ベクトルの極座標表示** $\qquad \dot{X} = X \angle \theta$ (17)

図10の瞬時値i_1，i_2の場合，大きさに実効値I_1，I_2，偏角に**位相角**[3]を用いると，ベクトル$\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$は，次のように表すことができる。

$$\dot{I}_1 = I_1 \angle 0\,[\mathrm{A}],$$

$$\dot{I}_2 = I_2 \angle 90^\circ\,[\mathrm{A}]$$

また，電圧についても同様に表すことができる。

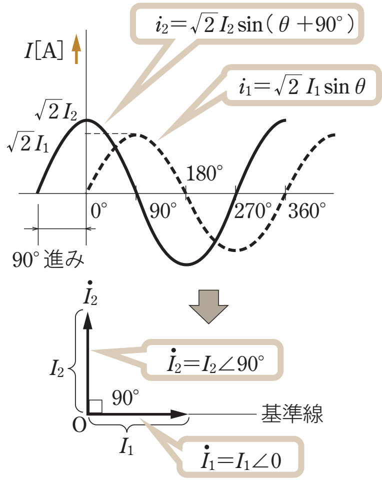
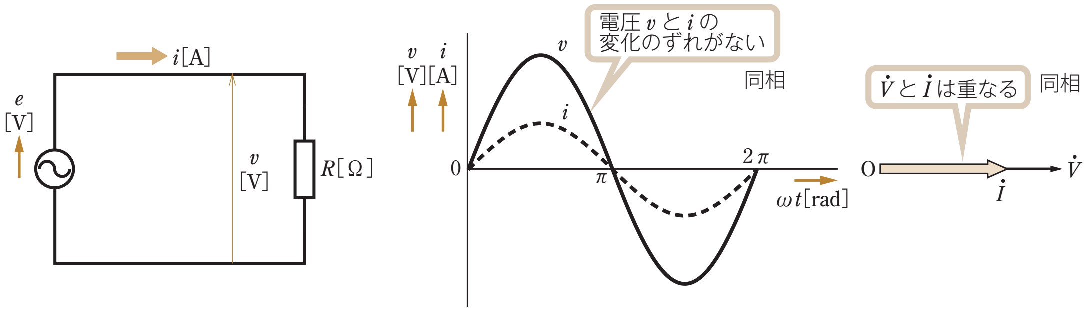


図10　交流とベクトル

❶ エックスドットと読む。
❷ ベクトルの表記には，直交座標の原点を始点と定め，終点の座標でベクトルを表わす直交座標表示もある。
❸ 逆時計回りの向きを正の向きとする。
図10で，i_2の位相はi_1の位相より90°進んでいるという。

2　抵抗と交流

図11(a)のように，抵抗だけの負荷（白熱電球や電熱器など）に正弦波交流起電力e[V]を加えたとき，現れる電圧と電流の波形を図(b)に示す。



(a) 回路図　(b) 電圧と電流の波形　(c) ベクトル図[4]

図11　抵抗だけの回路

この正弦波交流起電力$e = \sqrt{2}\,E \sin\omega t$ [V] を抵抗に加えると，抵抗の両端にはv [V] の電圧が生じる。したがって，この抵抗に現れる電圧v[V]は次式のように表すことができる。

$$v = \sqrt{2}\,V \sin\omega t\,[\mathrm{V}] \qquad (18)$$

抵抗には，オームの法則により次式で表す電流が流れる。

❹ vector diagram

$$i = \frac{v}{R}\,[\mathrm{A}] \tag{19}$$

ここで起電力のvを実効値Vとすると次式で表される。

$$i = \sqrt{2}\,\frac{V}{R}\sin\omega t\,[\mathrm{A}] \tag{20}$$

ゆえに式(20)から，電流iを実効値Iで表すと次式となる。

$$i = \sqrt{2}\,I\sin\omega t\,[\mathrm{A}] \tag{21}$$

正弦波交流に抵抗だけを接続したとき，式(18)と式(19)から，電圧と電流に位相差が生じないことがわかる。

このv，iをベクトル$\dot{V}$，$\dot{I}$の極座標表示で表すと，

$$\dot{V} = V\angle 0\,[\mathrm{V}],\quad \dot{I} = I\angle 0\,[\mathrm{A}]$$

となり，$\dot{V}$，$\dot{I}$のベクトル図は，図(c)のようになる。

よって式(20)と式(21)の関係から，交流における電圧，電流の実効値と抵抗の関係は，次式で表すことができる。

●電流，電圧の実効値　$I = \dfrac{V}{R}\,[\mathrm{A}]$ または，$V = RI\,[\mathrm{V}]$　(22)

抵抗だけの回路に交流電圧を加えると，実効値の間では，直流の場合と同じくオームの法則がなりたち，電圧と電流の位相は等しい。位相が等しいことを**同相**[1]という。

例題4　図12のように，20Ωの抵抗に実効値100Vの交流電圧を加えた。流れる電流Iを求めよ。

解答…　式(22)より，

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{20} = 5\,\mathrm{A}$$

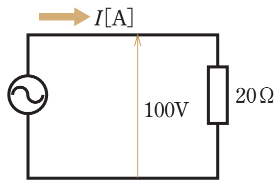


図12

問 6　電気ストーブに50Hz，100Vの交流電圧を加えたとき，12Aの電流が流れた。電気ストーブに用いられている抵抗の値を求めよ。

問 7　100Ωの抵抗に最大値100Vの交流電圧を加えた。流れる電流の実効値を求めよ。

3　コイルと交流

コイルに流れる電流が変化すると電流の変化にともなってコイル中に生じる磁束に変化が生じるため，起電力が発生する。これを**誘導起電力**[2]

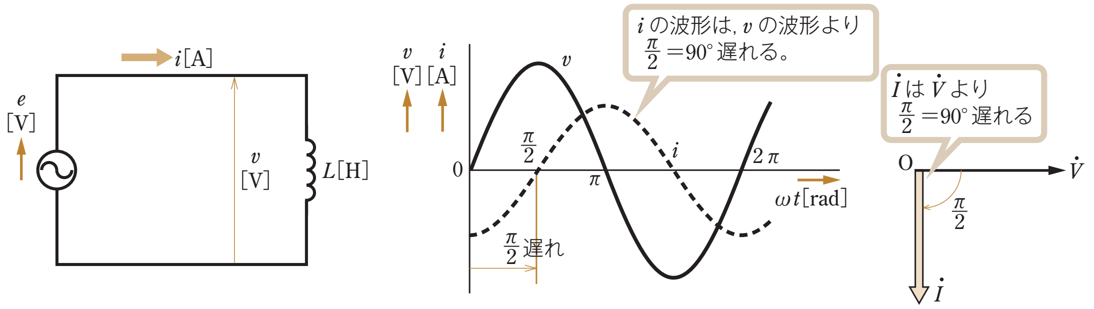
[1] in-phase

[2] 第2章p.62参照。

という。このときの電流の変化に対し，発生する誘導起電力の割合を表す量をインダクタンス[1]といい，Lで表す。インダクタンスLの単位にはヘンリー[H]を用いる。

コイルに交流電圧を加えると，コイル自身の抵抗は小さいが自己誘導作用により電流の流れをさまたげ，一種の抵抗と同じ働き[2]をする。この性質を**誘導性リアクタンス**[3]といい，ωLと表記する。誘導性リアクタンスの単位にはオーム［Ω］が用いられる。

❶ とくにコイル固有のインダクタンスを自己インダクタンスという。第2章p.64参照。
❷ 電流の流れをさまたげるだけでなく，電圧に対し，電流の位相が遅れる働きをもつ。
❸ inductive reactance



(a) 回路図　(b) 電圧と電流の波形　(c) ベクトル図

図13　コイルだけの回路

図13(a)に示す回路図のように，自己インダクタンスL［H］のコイルだけの回路に，次式に示す角周波数ω［rad/s］の正弦波交流電圧vを加える。

$$e = v = \sqrt{2}\,V \sin \omega t\,[\mathrm{V}] \tag{23}$$

このとき，コイルはωL［Ω］で電流の流れをさまたげ，電流の位相を電圧よりも$\dfrac{\pi}{2}$［rad］(＝90°) 遅らせる。よって，電流iは次式で表される。

$$i = \sqrt{2}\,\frac{V}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\ [\mathrm{A}] \tag{24}$$

式(23)から，電流iを実効値Iで表すと，次式となる。

$$i = \sqrt{2}\,I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\ [\mathrm{A}] \tag{25}$$

式(23)と式(24)の関係からv，iの波形は図(b)のようになる。このv，iをベクトル$\dot{V}$，$\dot{I}$で表すと，

$$\dot{V} = V \angle 0\,[\mathrm{V}],\quad \dot{I} = I \angle -\frac{\pi}{2}\,[\mathrm{A}]$$

となり，$\dot{V}$，$\dot{I}$のベクトル図は図(c)となる。すなわち，電流の位相は電圧より$\dfrac{\pi}{2}$［rad］(＝90°) 遅れる。

また，電圧と電流の実効値の関係は，式(24)と式(25)から次のように表される。

$$I = \frac{V}{\omega L}\,[\mathrm{A}] \tag{26}$$

このとき，誘導性リアクタンスωL［Ω］を抵抗R［Ω］と同じように，大きさだけで取り扱う場合はX_L［Ω］として表す。また周波数fを用いて表すと式(4)から$2\pi f L$［Ω］となる。この関係を次式に示す。

●**誘導性リアクタンス**　$\boldsymbol{X_L = \omega L = 2\pi f L}\,[\Omega]$　(27)

よって式(26)，式(27)から，誘導性リアクタンスと電圧，電流の実効値との関係は次式で表される。

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{2\pi f L}\,[\mathrm{A}] \tag{28}$$

$$V = X_L I = 2\pi f L I\,[\mathrm{V}] \tag{29}$$

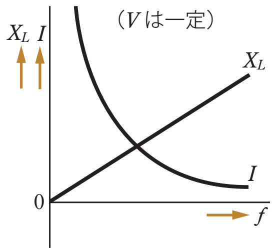


図14　周波数と誘導性リアクタンス，電流の関係

式(27)，(28)から，誘導性リアクタンスX_Lは周波数に比例して増加し，電流Iは周波数に反比例して減少する性質をもつ。

例題5　図15のように，0.2Hの自己インダクタンスをもつコイルに，50Hz，0.637Aの電流が流れた。コイルの誘導性リアクタンスX_L［Ω］と，加えられた電圧V［V］を求めよ。

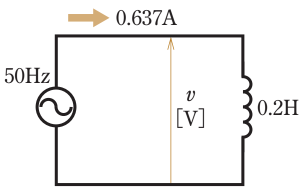


図15

解答…　式(27)より，

$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.2 = 62.8\ \Omega$

式(29)より，

$V = X_L I = 62.8 \times 0.637 = 40.0\,\mathrm{V}$

問 8　自己インダクタンス0.5Hのコイルに60Hz，120Vの交流電圧を加えた。誘導性リアクタンスX_L［Ω］と流れる電流I［A］を求めよ。

問 9　あるコイルに周波数50Hz，電圧100Vを加えると電流120mAが流れた。このコイルの誘導性リアクタンスX_L［Ω］と自己インダクタンスL［H］を求めよ。

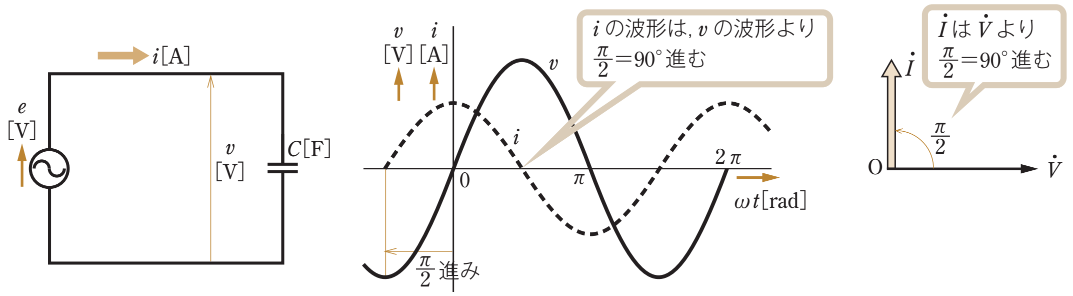
4 コンデンサと交流

コンデンサに直流電圧を加えると，はじめは電流が流れ，コンデンサが充電される。充電が完了すると，電流は流れなくなる[1]。

コンデンサに交流電圧を加えると，電圧の方向と大きさがつねに変化するためにコンデンサは充電と放電を繰り返しながら，電流が流れ続ける。このためコンデンサは，電流の流れをさまたげる働きをする。この性質を**容量性リアクタンス**[2]といい，$\dfrac{1}{\omega C}$［Ω］と表記する。容量性リアクタンスの単位はオーム［Ω］で表す。

❶ 第2章p.68参照。

❷ capacitive reactance



(a) 回路図　(b) 電圧と電流の波形　(c) ベクトル図

図16　コンデンサだけの回路

図16(a)に示す回路図のように，コンデンサC［F］だけの回路に，次式に示す角周波数ω［rad/s］の正弦波交流電圧vを加える。

$$e = v = \sqrt{2}\,V\sin\omega t\ [\mathrm{V}] \tag{30}$$

このとき，コンデンサは$\dfrac{1}{\omega C}$［Ω］として電流の流れをさまたげ，電流の位相を電圧よりも$\dfrac{\pi}{2}$［rad］（= 90°）進ませる。よって，電流は次式で表される。

$$i = \sqrt{2}\,\omega CV\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ [\mathrm{A}] \tag{31}$$

式(30)から，電流iを実効値Iで表すと，次式となる。

$$i = \sqrt{2}\,I\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ [\mathrm{A}] \tag{32}$$

式(30)と式(31)の関係からv，iの波形は図(b)のようになる。このv，iをベクトル$\dot{V}$，$\dot{I}$で表すと，

$$\dot{V} = V\angle 0\ [\mathrm{V}],\quad \dot{I} = I\angle +\frac{\pi}{2}\ [\mathrm{A}]$$

となり，$\dot{V}$，$\dot{I}$のベクトル図は図(c)となる。すなわち，電流の位相は電圧より$\dfrac{\pi}{2}$［rad］（= 90°）進む。

また，電圧と電流の実効値の関係は，式(31)と式(32)から次のように表される。

$$I = \omega CV\ [\mathrm{A}] \tag{33}$$

このとき，容量性リアクタンス$\dfrac{1}{\omega C}$[Ω]を抵抗R[Ω]と同じように，大きさだけで表す場合はX_C[Ω]として表す。また，周波数fを用いて表すと，式(4)から$\dfrac{1}{2\pi fC}$[Ω]となる。この関係を次式に示す。

●容量性リアクタンス　$X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi fC}\ [\Omega]$　(34)

よって式(33)，式(34)から，容量性リアクタンスと電圧，電流の実効値との関係は次式で表される。

$$I = \frac{V}{X_C} = \omega CV = 2\pi fCV\ [\mathrm{A}] \tag{35}$$

$$V = X_C I = \frac{I}{\omega C} = \frac{I}{2\pi fC}\ [\mathrm{V}] \tag{36}$$

式(34)，(35)から，容量性リアクタンスX_Cは周波数に反比例して減少し，電流Iは周波数に比例して増加する性質をもつ。

コンデンサの位相を進める性質を利用して，電気機器の力率改善❶やコンデンサモータに利用されている。

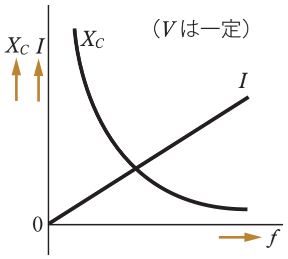


図17　周波数と容量性リアクタンス，電流の関係

❶ p.98参照。

例題6　図16(a)に示す回路で，88.4μFの静電容量をもつコンデンサに，周波数60Hz，60Vの交流電圧を加えた。このときの容量性リアクタンスX_C[Ω]，流れる電流I[A]を求めよ。

解答…　式(34)より，

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 60 \times 88.4 \times 10^{-6}} = 30\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{X_C} = \frac{60}{30} = 2\mathrm{A}$$

問10　25μFのコンデンサに，50Hz，100Vの電圧を加えたとき，容量性リアクタンスX_C[Ω]と流れる電流I[A]を求めよ。

問11　あるコイルに周波数50Hz，電圧100Vを加えると電流60mAが流れた。このコンデンサの容量性リアクタンスX_C[Ω]と静電容量C[F]を求めよ。