计算机内部的线性存储结构来表示现实中复杂的多分支结构

**Preface：**

人们无法理解他没有经历过的事情。 ——尼采

A picture is worth a thousand works.

任何有难度的知识，都不是那么容易掌握的。

最淡的墨水，胜于最强的记忆。

同一个主题的东西 好几本书参和着读

**绪论 数学逻辑+工程直觉**

DataStructure：相互之间存在关系的数据元素的集合

∴需考虑 **空集, 真子集, 全集**

研究数据结构，就是为了提高数据的处理效率

程序设计中的循环结构，其实是对任意一个元素的操作

**原则：验证来源，反馈结果. 容错性：空？越界？输入合法？**

**逻辑结构：**

1、集合 2、线性结构

3、树：一对多 4、图：多对多

**物理结构（存储结构）：**

1.顺序存储结构（数组ArrayList）

2.链式存储结构（链表LinkedList）三维数组：页/行/列

**抽象数据类型ADT(Abstract Data Type) :** primitive + struct/class

目的：作为解释内存中信息含义的一种手段

存储结构的设计是灵活的，是否合理取决于其结构的运算操作是否合适、方便，时间复杂度.

抽象程度越高，通用性越高，当然越难理解。

——————————————————————————————————

**线性表** 节点与边组织形式（树/图）的基础

Definition: 相同类型的数据元素的有限序列。

**通常，存在一个工作指针（地址或下标）来标记位置**

*诠释：*

1. 序列，即元素有顺序的

首元素head无前驱，尾元素tail无后继，

其他元素有且仅有一个前驱next和后继prev

1. 一般地，有限个相同类型的元素

/\* List Fundamental Function :

\* 创建 初始化 清零 访问 查找 插入 删除 获得长度

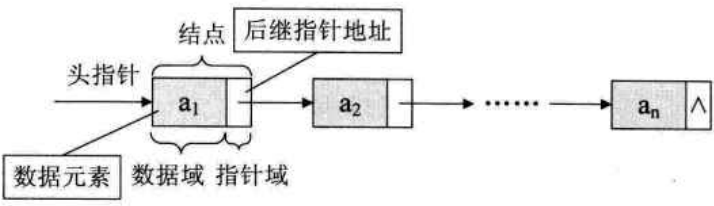
\*/

**头结点head：**

·头结点是为了操作的统一和方便而设定的，第一元素结点前的数据域无效

·有了头结点，对在第一元素结点的插入和删除，就与其他结点的操作统一

·不必要，但头指针是必要的



[拓展思维]

静态链表：用数组（内存空间）模拟链表，

Data -> Data , Index -> Address

分为 有效区 & 备用区，模拟malloc和free（手动模拟分配）

**循环链表Circular Linked List：**尾结点 指向 头结点，的单链表

差异：判断尾结点时，确定是否指向头结点

尾指针（指向尾结点的地址），可将两链表合成

**双向链表Double Linked List：**含前指针和后指针的结点

Template <typename T> Struct Node {

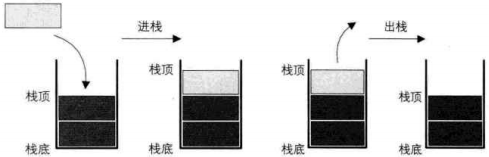
T data;

Node\* prior;

Node\* next;

};

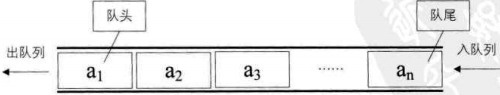
**栈与队列**



栈：仅在表尾插入与删除的线性表,FILO

**应用：**

相邻元素的关系压缩(2048, 祖玛游戏)、记录刚才发生过的事(Undo)、等待后续(中缀表达式求值)



队列：在表尾插入, 表头删除的线性表,FIFO

**队列的顺序存储结构：**

循环队列, 删除不用O(n), 避免“假溢出”,

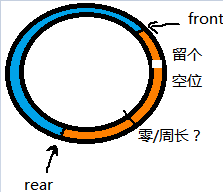
实现：

front指针标记首元素，rear指针标记待插入位置。

定义一个变量count，记录结点数，以判断空 | 满

有周期性，可把此结构看作给定半径的圆环，利用余数。

length = (rear – front + capacity) % capacity



（余数：指从零到该点 抛开周期性后 的长度 相对于 周长 还剩多长）

**队列的链式存储结构：**

Front -> 头结点、rear -> 尾元素

入队： 尾插入。Rear->next = new T;

出列： 头删除。Front->next = front -> next > next;

**应用：**

排队论

**集合Set**

元素间不存在关系，重点是存在性问题。

但在实际过程中，往往添加偏序关系来方便操作（线性表 或 并查集……）

如：装有课程的集合中，会加以编号，来排序。

多重集合Multiset：元素可重复出现的集合。（元素自带计数器，便可实现）

**实践：**

连续的内存空间(数组) 来实现简易集合：

Structure: boolean flag[n] # 标记是否忽略

T element[n] # 元素的容器

1. 删除元素(子集)： 把flag标记逻辑取反
2. 添加元素： 先判断是否重复、再插入到尾部

**应用于** 排列组合、Dijistra最短路 等问题的子步骤

**并查集DisjointSet**

不相交集（等价类）的数据组织方式（树，牵一发而动全身）

（parent-link）

+array 记录当前下标的元素对应的父节点位置，规定根节点 记录的是-1

-find() 查找所在等价类的根节点

-union() 合并不相交集

**合并优化：**

为了降低树的深度，by size/ by height（顺便记录树的 节点个数 或 高度 作为判断的依据）

**路径压缩：**

使每个节点的父节点 变为 根节点

(兼容性)by-size √ ， by-height？

∵路径的压缩，不改变大小，可能改变高度

**散列表HashTable**

数组是通过整数下标进行索引，而字典是通过关键码（key）进行索引

描述的是key-value映射的数据结构，best case：单射且满射

**hash函数** postion = hash(key)

信息指纹：唯一的标识(ID), 如：MD5、SHA-1

根据特征，把一大段信息有损压缩成一个点，且尽量互不重复。

**要求:** 运算简单、均匀、少冲突、利用率高

**考虑：**关键字长度、计算散列地址的时间、散列表长、关键字的分布、查找频率

1 线性同余： h(key) = key mod capacity + delta

关键在于容量capacity的选取

（不含20以内的质因子的合数 && 不太接近2t的质数）

2 直接定址：（线性函数）



3 乘法取整：h(key) = floor(m\*(\*key mod 1))

4 预定义映射表

·数字分析：抽取部分来计算位置

·平方取中：平方后选取中间部分的数字

·折叠法：将数字分隔成若干个位数相等的部分，然后运算（相加）

字符串-> "word" // 假定编码为12 8 6 15

① hash("word") = 0xC86F

② hash("word") = 12+8+6+15 = 41 = 0x0029

**散列冲突：Collision**

不同的数据记录映射到同一个位置 or 不是同义词却需要争夺一个位置

**解决方案： (关键区分)** 把冲突元素存储在数组之外还是之内

1 开放地址法(探测法) h = （hashCode(k) + d(i)）mod capacity

生成增量序列，沿着此序列，逐个位置探测，直到发现一个闲置的位置

增量序列:

线性探测：di=i

二次探测：di=12、-12、…、q2、-q2，相当于双向寻找空位

2 链接法

对冲突位置建立同义词的链表

3 公共冲突区

将所有冲突元素存储于另外一个表中

4 换个哈希函数

**性能分析Performance**

装载因子load factor = 0.72为比较好

哈希函数hash function

冲突的处理collision resolution

**Dictionary字典 / Map 映射**

The fundamental operation for a dictionary is finding a record that matches a given key. 存储key-value pair，可实现查找、删插等功能

**应用：**

简单高效的查询容器

**字符串**

Definition:零到多个字符组成的有限序列。

元素全是字符的线性表，因其常用，特殊处理

**子串**：主串中任意个数的连续字符组成的子序列

**串的比较**：（实例：查英文字典）

遍历寻找第一个不同的字符，比较其编码对应的数值。(字典序)

**基本操作**：

复制、拼接、子串、替换、查找

获得长度、插入、删除、清空、赋值

**树Tree**(层次结构)

**定义:**

非空树中，1）有且仅有一个**根结点** 2）其余结点可分为互不相交的有限集，其中每个集合本身又是一棵树，被称为根的**子树**（递归定义决定了递归解法）

**树中还是树，只不过，我们把空树作为最小单位的树（基线条件），只有根节点的树看成节点（简单解决的问题）**

结点拥有的子树数目，叫**度degree**。度为0的点，叫**叶节点leaf**。

internal内点：非叶节点

外部路径长度([external path length](http://soj.sysu.edu.cn/show_problem.php?pid=1011&cid=1624))： 所有叶节点的高度之和

树中结点的最大层次，叫**深度depth**

森林：多个不相交的树的集合

n个节点的树，含有n-1条边

full tree：正则树（每个节点分支数一致）

**缩进表示: (XML/JSON**)

A\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

B\_\_\_\_\_\_\_

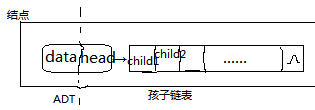
C\_\_\_\_\_\_\_

D\_\_\_

**双亲表示法：Parent**

规定根结点无父节点，其余结点数据类型中包含其父节点的地址

**孩子表示法：Child** (邻接表)



节点除了数据外，还附带着其孩子的地址。

**二叉树(Binary Tree)**

引导问题：大家猜一个商品的价格，100元以内，只能猜7次，每次选择后，只被告知“太高”|“太低”.（实际上，就是二分查找法）

递归定义注定了递归算法：

一个**根节点**下有两棵不相交的左右**二叉子树**.

1. 每个节点最多有2棵子树
2. 左右顺序不可颠倒
3. 即使节点只有一棵子树，也要分左右

**特例**:

1. 斜树（即线性表）

每个节点只有一棵（左/右）子树

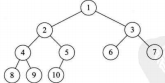
1. 满二叉树

每个分支节点都有左右子树，叶节点都在同一层.

1. 完全二叉树（逐层从左往右填满节点, n2+1=n0）

节点编号与同深度的满二叉树节点编号一致，斜树之上，满树未满。

（同节点数的二叉树中，深度最小，递归执行次数最小）



相同节点数的二叉树，完全二叉树深度最小。

**性质：**

1 在第i层，至多有2i-1个结点（根节点在第1层）

2 深度为k的二叉树，至多有2k – 1个结点（等比数列的求和）

3 叶节点的个数 = 度为2的节点的个数 + 1

4 具有n个节点的完全二叉树深度 [log2n] + 1 （满树的个数公式逆推）

5 完全二叉树，假定从上到下，从左到右依次顺序编号1~n，

对任一节点i，当i = 1, 则为根节点，i > 1, 其双亲为节点(i / 2), 若存在孩子，则2i为长子，2i+1为兄弟

**完全二叉树的顺序存储结构**

从根节点开始，从左到右依次编号1~n，通过二倍关系来表示父子关系。

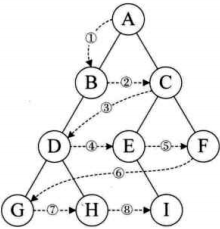
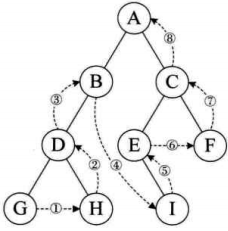
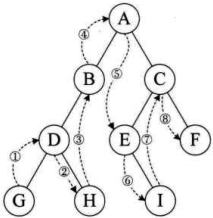
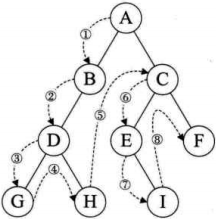
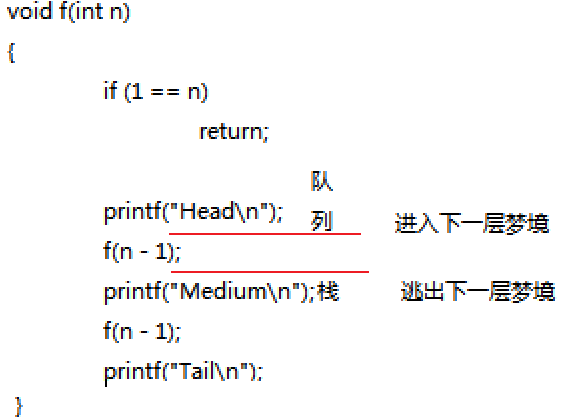
**二叉树的链式存储结构**

节点数据类型，数据域+指针域（指向孩子/双亲）

**二叉树的遍历：**

[不断缩小树的规模, 叶节点就是只有根节点的树,无子空间,递归界限无效]

递归的过程就是树，无分支为止。



**前序遍历()**

若树非空，则访问根节点，再前序遍历左子树，最后前序遍历右子树

**中序遍历（横向的相对顺序）**

若树非空，则中序遍历左子树，再访问根节点，最后中序遍历右子树

**后序遍历**

若树非空，则后序遍历左子树，再后序遍历右子树，最后访问根节点

**逆波兰表达式：**

根节点为操作符，子树为操作数，后序遍历的序列。

∵计算机中function：add(a, b)总是需要先确定操作，再处理数据

**层序遍历**

若树非空，则从上到下逐层遍历，同一层中，从左到右。

**非递归遍历：**

模拟递归返回，保存上一级的地址于栈中，push、pop来模拟递归

**二叉树的建立**

准备工作：对无分支的结点，人为设定虚结点. 方便制定递归界限。

递归前序遍历的思路，进行建树。

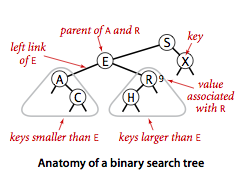
**线索二叉树：**某种次序遍历得到的序列

为了解决普通二叉树节点中空指针域的闲置浪费问题，且提高遍历效率，ThreadedBinaryTree应运而生，以某种次序遍历使其线索化，成为双向循环链表.

**二叉查找树(Binary Sort Tree)**

【变小向左, 变大向右】

左二叉排序子树任意节点的值均小于根节点的值，右二叉排序子树任意节点的值均大于根节点的值。



**查找：** 二分法

**插入：** 查找到山穷水尽时，补一个

**删除：** 1、叶节点：直接删除

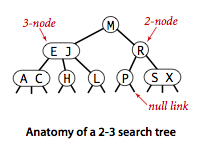
2、有1个子树的节点： 子树根节点顶上

3、有2个子树的节点： 右子树的最小值顶上 或 左子树的最大值顶上

**红黑树(Red Black Tree)**

src：<https://algs4.cs.princeton.edu/33balanced/>

(incredible!)



definition A 2-3 search tree is a tree that either is empty or:

①A 2-node, with one key (and associated value) and two links, a left link to a 2-3 search tree with smaller keys, and a right link to a 2-3 search tree with larger keys

②A 3-node, with two keys (and associated values) and three links, a left link to a 2-3 search tree with smaller keys, a middle link to a 2-3 search tree with keys between the node's keys and a right link to a 2-3 search tree with larger keys.

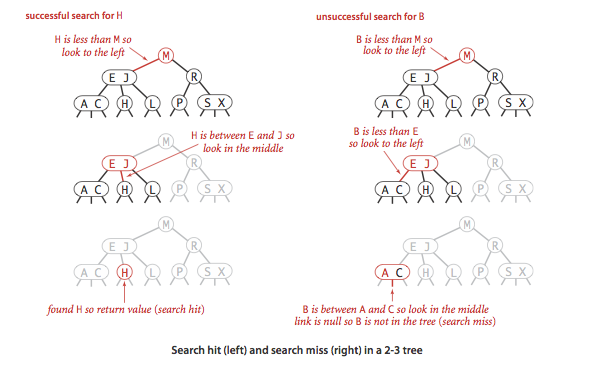
平衡定义：A perfectly balanced 2-3 search tree is one whose null links are all the same distance from the root.

个人推论：

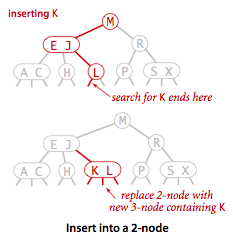
1.任一节点的link要么全null，要么全指向。所有叶节点在同一层。因为如果存在部分非空的link，则存在不同层的null link到根节点的距离不同，违反平衡定义。

2.新增的key都插入于叶节点。因为如果插入的是中间节点，则null link到root的距离违反平衡定义。

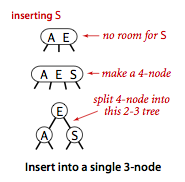
search搜索：



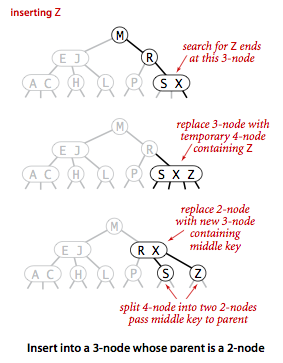
* 1. Insert into a 2-node



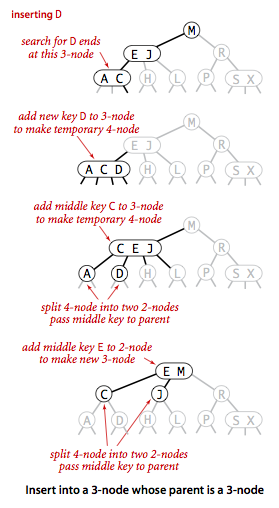
(demo) Insert into a tree consisting of a single 3-node



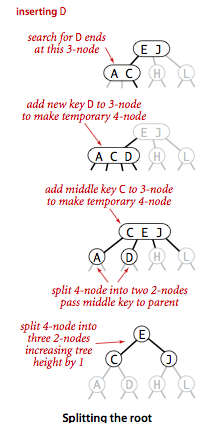
* 1. Insert into a 3-node whose parent is a 2-node



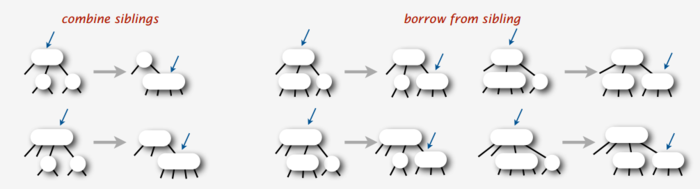
* 1. Insert into a 3-node whose parent is a 3-node



* 1. Splitting the root



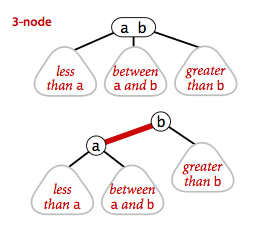
1. 维护平衡结构的思路：提拔middle，连接left和right
2. Search and insert operations in a 2-3 tree with N keys are guaranteed to visit at most lgN nodes
3. 删除：插入的逆过程思路，借一个节点来构成3-node



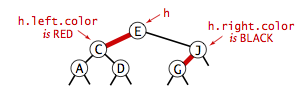
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

Red-Black BST：2-3树的一种实现方式，下文是左倾的。

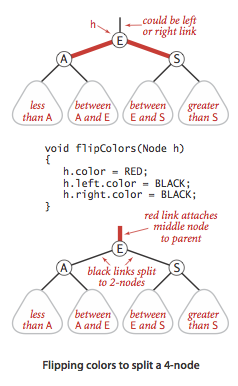
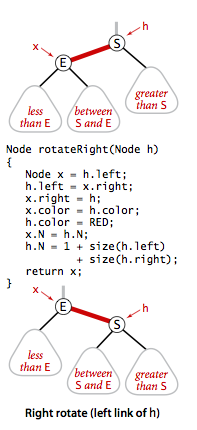
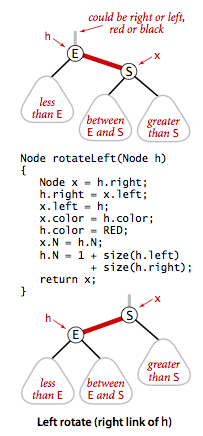
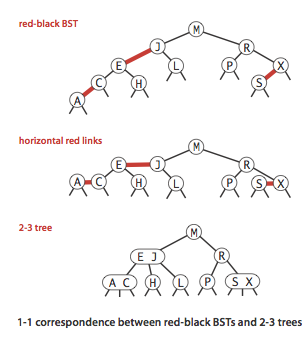
1. Encoding 3-nodes. The basic idea behind red-black BSTs is to encode 2-3 trees by starting with standard BSTs (which are made up of 2-nodes) and adding extra information to encode 3-nodes. We think of the links as being of two different types: red links, which bind together two 2-nodes to represent 3-nodes, and black links, which bind together the 2-3 tree. Specifically, we represent 3-nodes as two 2-nodes connected by a single red link that leans left. We refer to BSTs that represent 2-3 trees in this way as red-black BSTs.红边表示3-node。



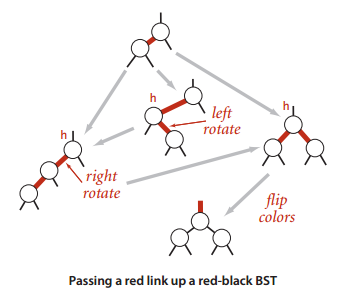
1. Color representation. Since each node is pointed to by precisely one link (from its parent), we encode the color of links in nodes, by adding a boolean instance variable color to our Node data type, which is true if the link from the parent is red and false if it is black. By convention, null links are black.红边的标记，由节点的父边决定着色，这样就能一一对应。



1. The height of a red-blackBST with N nodes is no more than 2 lg N.高度
2. In a red-black BST, the following operations take logarithmic time in the worst case: search, insertion, finding the minimum, finding the maximum, floor, ceiling, rank, select, delete the minimum, delete the maximum, delete, and range count. 所有操作都是O(logN)时间复杂度。



5. 红链的向上传递：4-node转化为3-node (incredible!)



* + 1. 插入的是red link
    2. 插入2-node，考虑left、right。（若right插入就left rotate）
    3. 插入3-node，考虑left、middle、right。（上图）

private Node balance(Node h) {

// assert (h != null);

if (isRed(h.right)) h = rotateLeft(h);

if (isRed(h.left) && isRed(h.left.left)) h = rotateRight(h);

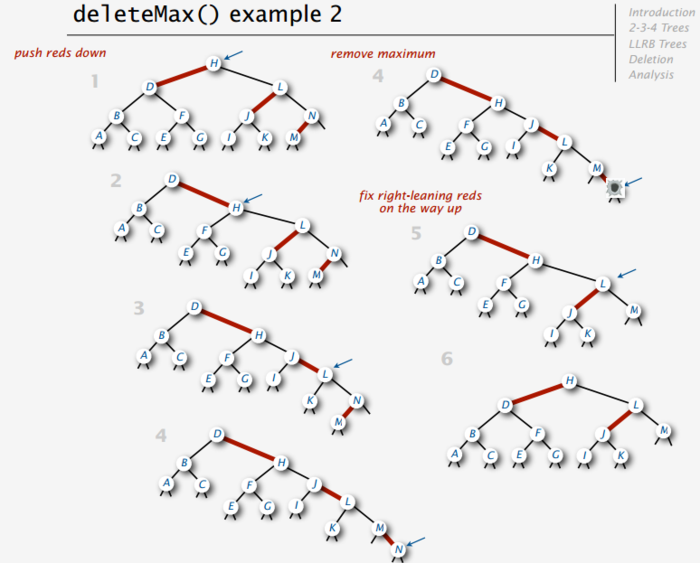
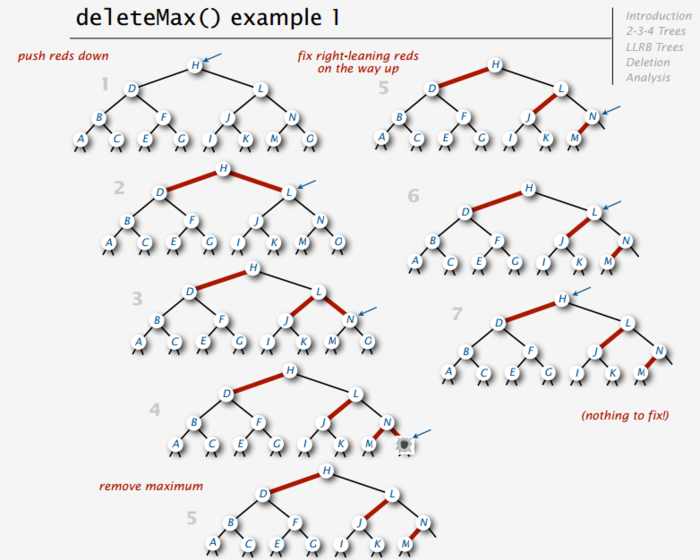
if (isRed(h.left) && isRed(h.right)) flipColors(h);

h.size = size(h.left) + size(h.right) + 1;

return h;

} // source: <https://algs4.cs.princeton.edu/33balanced/RedBlackBST.java.html>

6. 删除：待删处用右子树的最小值替代，然后从被删的最小值处向上维护结构



**堆Heap(优先队列)**

complete tree，节点逐层堆积

根节点是最值点（max-heap、min-heap），带有左右子堆

本质：堆的根节点是最值，其子堆的根节点是等待成为根节点的

(C++STL中的优先队列priority\_queue)

**堆的过滤(percolate)**

下滤： 与最大的子节点交换，保证交换后的根节点大于子节点，直到不能再下降

上滤： 不断与上面比较，直到不能再上升（上位）

**构造**： 循环或递归，都是由规模最小的堆（节点）开始建立

O(n)的make-heap是 for i=size[array]/2 to 1 do ： maxHeapify(array, i); 【自下而上】

而O(nlogn)的make-heap是 for i = 1 to n do ： insert(array, array[i]); 【自上而下】

删除堆顶：与堆尾值交换，然后更换后的堆顶不断下滤

插入堆尾：不断上滤

（小优化：先设定需调整的节点为空，通过覆盖来调整位置，最后填上数据）

d叉堆：完全d叉树，可降低树的深度