MA319 — 偏微分方程

Assignment 12

Instructor: 许德良

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　3.3/1

证明格林函数的性质 3 及性质 5.

性质 3

在区域 Ω 中成立着不等式:

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M_0M}} - g(M, M_0).$$

由于 $g(M, M_0)$ 是 Ω 内的调和函数, 根据极值原理可知 $g(M, M_0)$ 在 Ω 内无法达到边界 Γ 的下界. 又因为

$$g(M, M_0)|_\Gamma = \frac{1}{4\pi r_{M_0M}} > 0,$$

易知在 Ω 内

$$g(M, M_0) > g(M, M_0)|_\Gamma > 0.$$

故

$$G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

再取 $K = B(M_0, r)$ 使得 $K \subset \Omega$, $G(M, M_0)$ 是 $\Omega \setminus K$ 内的调和函数, 根据极值原理可知 $G(M, M_0)$ 在 $\Omega \setminus K$ 内无法达到边界 Γ 的下界. 又因为

$$G(M, M_0)|_\Gamma = 0,$$

易知在 $\Omega \setminus K$ 内

$$G(M, M_0)|_\Gamma > 0.$$

当 $r \to 0$ 时即可得

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

性质 5

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} dS_M = -1.$$

取 $K = B(M_0, r)$ 使得 $K \subset \Omega$, $G(M, M_0)$ 是 $\Omega \setminus K$ 内的调和函数, 设 K 的边界为 Γ_K

$$\iint\limits_{\Gamma+\Gamma_K} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} dS_M = 0,$$

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} dS_M = -\iint\limits_{\Gamma_K} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} dS_M = -\iint\limits_{\Gamma_K} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} - \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} \right] dS_M.$$

当 $r \to 0$ 时, 由 $g(M, M_1)$ 在 Γ_K 上调和可知 $\dfrac{\partial g(M, M_1)}{\partial \mathbf{n}}$ 有界, 故

$$\lim_{r \to 0} \left| \iint \frac{\partial g(M, M_1)}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leqslant \lim_{r \to 0} \left(\sup_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial g(M, M_2)}{\partial \mathbf{n}} \right| \iint\limits_{\Gamma_1} dS \right) = \lim_{r \to 0} (C \cdot 4\pi r^2) = 0,$$

$$\lim_{r \to 0} \iint\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{4\pi r_{M_1 M}} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = 1.$$

故

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \mathbf{n}} dS_M = -1.$$

习题 3.3/3

写出球的外部区域的格林函数, 并由此导出对调和方程求解球的狄利克雷问题的泊松公式.

使用静电源像法, 设球面 $K = B(O, R)$, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 放置一单位电荷, 在射线 OM_0 上截线段 OM_1, 使

$$\rho_0 \rho_1 = R^2,$$

其中 $\rho_0 = r_{OM_0}$, $\rho_1 = r_{OM_1}$, 设 P 是球面 K 上任意一点, 则

$$r_{M_0 P} = \frac{R}{\rho_1} r_{M_1 P}.$$

假想 M_0 处有一点电荷, 为了使它产生的电势在球面 K 上和 M_1 产生的抵消, 必须假设 M_0 处的电量为 $-\dfrac{R}{\rho_1}$, 因此

$$g(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_1} \frac{1}{r_{M_0 M}},$$

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{M_1 M}} - \frac{R}{\rho_1} \frac{1}{r_{M_0 M}} \right).$$

注意到

$$\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}},$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}},$$

其中 $\rho=r_{OM}$, θ 为 OM 的幅角, θ_1 为 OM_1 的幅角, $\cos\gamma=\cos(\varphi-\varphi_1)$, 代入得

$$G(M,M_1)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{R^4+\rho_1^2\rho^2-2R^2\rho_1\rho\cos\gamma}}\right).$$

易知在球面 K 上

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\rho=R}&=-\left.\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\rho=R}\\&=\left.\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\rho-\rho_1\cos\gamma}{(\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R(\rho_1^2\rho-R^2\rho_1\cos\gamma)}{(R^4+\rho_1^2\rho^2-2R^2\rho_1\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\right]\right|_{\rho=R}\\&=\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_1^2}{(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

根据狄利克雷方程的求解式可得

$$u(M_1)=-\iint\limits_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}dS_M=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{K}\frac{\rho_1^2-R^2}{(R^2+\rho_1^2-2R\rho_1\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}f(M)dS_M.$$

习题 3.3/7

证明二维调和函数的奇点可去性定理: 若 A 是调和函数 $u(M)$ 的孤立奇点, 在 A 点邻域中成立着

$$u(M)=o\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}\right),$$

则此时可以重新定义 $u(M)$ 在 $M=A$ 的值, 使它在 A 点亦是调和的.

设 K 是一个以 A 点为圆心, R 为半径的圆, 它整个地包含在点 A 的邻域内. 以 u 在 K 上的值为边界条件, 在 K 内求解拉普拉斯方程的解, 它可由泊松公式给出, 记为 u_1. 现要证明在整个圆 K 内除点 A 外 $u\equiv u_1$, 这样就可以重新定义 u 在 A 处的值为 u_1 在 A 处的值, 且重新定义的 u 在 A 点调和. 记 $\omega=u-u_1$, 函数 ω 在整个圆 K 内除点 A 外是调和函数, 而在点 A 有

$$\lim_{M\to A}\omega(M)=o\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}\right),$$

且在圆周 Γ 上 $\omega=0$. 现在证明在整个圆 K 内除点 A 外 $\omega\equiv 0$. 为此, 作函数

$$\omega_\varepsilon(M)=\varepsilon\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}-\ln\frac{1}{R}\right).$$

则根据极值原理可得

$$\omega_\varepsilon(M)|_\Gamma = 0, \quad \omega_\varepsilon(M)|_{K\setminus\Gamma} > 0,$$

且 ω_ε 在圆 $r=\delta$ 和 $r=R$ 所包围的同心圆壳 D 内是调和函数, 这里 δ 是一个任意小的正数.
对任意给定的点 $M^* \in K \setminus A$ 以及正数 ε, 总可以找到适当小的 $\delta > 0$, 使在圆周 $r=\delta$ 上有

$$|\omega| \leqslant \omega_\varepsilon,$$

而在 Γ 上, 函数 ω 和 ω_ε 都等于零. 于是由极值原理可得区域 D 中任何点都有 $|\omega| \leqslant \omega_\varepsilon$ 成立. 所以对点 M^* 有

$$|\omega(M^*)| \leqslant \omega_\varepsilon(M^*),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\omega(M^*)| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \omega_\varepsilon(M^*) = 0,$$

$$\omega(M^*) = 0.$$

由 M^* 的任意性可知整个圆 K 内除点 A 外 $\omega \equiv 0$, 故得证.

例题

证明

$$\begin{cases} \Delta u = u^3, \\ u|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases}$$

只有零解.

根据格林第一公式可得

$$\iint\limits_{\Omega} u\Delta u d\Omega = \int\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega.$$

其中设 Γ 为 $x^2+y^2=1$, Ω 为 $x^2+y^2 \leqslant 1$, 则

$$\int\limits_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega = -\iint\limits_{\Omega} u\Delta u d\Omega = -\iint\limits_{\Omega} u^4 d\Omega \leqslant 0.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u \equiv 0.$$