

## MA319 — 偏微分方程

### Assignment 2

Instructor: 许德良

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

## 习题 1.2/3

方程的通解为

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at),$$

代入初值条件得

$$\varphi(x) = u|_{x-at=0} = F(0) + G(2x),$$

$$\psi(x) = u|_{x+at=0} = F(2x) + G(0).$$

故

$$F(x) = \psi(x/2) - G(0),$$

$$G(x) = \varphi(x/2) - F(0),$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = F(0) + G(0).$$

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at) = \psi\left(\frac{x - at}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x + at}{2}\right) - \varphi(0).$$

## 习题 1.2/4

非齐次初值问题的解为

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

其中与  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  有关的定义域范围都是  $[x - at, x + at]$ .

(1)

区间  $[x_1, x_2]$  的影响区域为

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at,$$

不受影响的区域为

$$x \leq x_1 - at \quad \text{和} \quad x \geq x_2 + at,$$

对应的  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  定义域范围是

$$x \leq x_1 \quad \text{和} \quad x \geq x_2.$$

故当  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上变化时, 以上定义域内函数取值不变, 对应解也不变.

(2)

区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域为

$$x_1 + at \leq x \leq x_2 - at,$$

对应的  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  定义域范围是

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

故  $[x_1, x_2]$  上所给的初始条件唯一地确定该区间解的数值.

## 习题 1.2/5

方程的通解为

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at),$$

代入初值条件得

$$\varphi(x) = u|_{t=0} = F(x) + G(x),$$

$$0 = u_t|_{t=0} = a[-F'(x) + G'(x)].$$

$$0 = u_x - ku_t|_{x=0} = F'(x - at) + G'(x + at) - ka[-F'(-at) + G'(at)].$$

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}$$

$$u_x(x, t) = \frac{\varphi'(x - at) + \varphi'(x + at)}{2}$$

$$ku_t|_{x=0} = \frac{-ka\varphi'(-at) + ka\varphi'(at)}{2}$$