

MA319 — 偏微分方程

Assignment 5

Instructor: 许德良

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 1.5/2

试说明: 对一维波动方程, 即使初始资料具有紧支集, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时其柯西问题的解没有衰减性.

若初始资料 φ, ψ 具有紧支集, 则存在一个常数 $\rho > 0$, 使 φ 和 ψ 在以原点为中心, ρ 为半径的区间 $[-\rho, \rho]$ 外恒为零, 而在区间内成立

$$|\varphi|, |\psi| \leq C.$$

代入达朗贝尔公式得

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

由于在 $[-\rho, \rho]$ 外, $\psi(x) = 0$, $x - at$ 到 $x + at$ 的积分可以写为 $-\rho$ 到 ρ 的积分

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-\rho}^{\rho} \psi(\xi) d\xi = \frac{C_1 + C_2}{2} + C_3,$$

$$|C_1|, |C_2| \leq C, \quad C_3 \leq \frac{\rho C}{a}.$$

故当 $t \rightarrow +\infty$ 时其柯西问题的解趋于一个常数, 没有衰减性.

习题 1.5/3

习题 1.6/1

习题 1.6/2

习题 1.6/5