MA319 — 偏微分方程

Assignment 5

Instructor: 许德良

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 1.5/2

试说明: 对一维波动方程, 即使初始资料具有紧支集, 当 $t \to +\infty$ 时其柯西问题的解没有衰减性.

若初始资料 φ, ψ 具有紧支集, 则存在一个常数 $\rho > 0$, 使 φ 和 ψ 在以原点为中心, ρ 为半径的区间 $[-\rho, \rho]$ 外恒为零, 而在区间内成立

$$|\varphi|, |\psi| \leqslant C.$$

代入达朗贝尔公式得

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

由于在 $[-\rho, \rho]$ 外, $\psi(x) = 0$, $x - at$ 到 $x + at$ 的积分可以写为 $-\rho$ 到 ρ 的积分

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-\rho}^{\rho} \psi(\xi)d\xi = \frac{C_1+C_2}{2} + C_3,$$

$$|C_1|, |C_2| \leqslant C, \quad C_3 \leqslant \frac{\rho C}{a}.$$

故当 $t \to +\infty$ 时其柯西问题的解趋于一个常数, 没有衰减性.

习题 1.5/3

设 u 为初始资料 φ 及 ψ 具有紧支集的二维波动方程的解. 试证明: 对任意固定的 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, 成立

$$\lim_{t\to+\infty} u(x_0, y_0, t) = 0.$$

若初始资料 φ, ψ 具有紧支集, 则存在一个常数 $\rho > 0$, 使 φ 和 ψ 在以原点为中心, ρ 为半径的圆 C_ρ^O 外恒为零, 而在 C_ρ^O 内成立

$$|\varphi|, |\psi| \leqslant C.$$

代入泊松公式得

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{C_{at}^M} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} r d\theta dr + \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} r d\theta dr. \end{aligned}$$

由于在 C_ρ^O 外, $\psi(x)=0$, 0 到 at 的积分可以写为 0 到 ρ 的积分. 当 $at>\rho$ 时

$$
\begin{aligned}
|u(x,y,t)| &= \left|\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rd\theta dr+\frac{1}{2\pi a}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rd\theta dr\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi a}\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rd\theta dr\right|+\frac{1}{2\pi a}\left|\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}rd\theta dr\right| \\
&= \frac{1}{2\pi a}\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\rho\frac{2\pi Cr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}dr\right|+\frac{1}{2\pi a}\left|\int_0^\rho\frac{2\pi Cr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}dr\right| \\
&= \frac{1}{2\pi a}\left|\frac{\partial}{\partial t}2\pi C\left(at-\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)\right|+\frac{1}{2\pi a}\left|2\pi C\left(at-\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)\right| \\
&= \frac{C}{a}\left|a-\frac{a^2t}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}+\left(at-\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

当 $t\to+\infty$ 时

$$
\lim_{t\to+\infty}\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}=1,\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{a^2t}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}=a,
$$

$$
\lim_{t\to+\infty}|u(x,y,t)|\leqslant\frac{C}{a}|a-a+0|=0.
$$

故取任意固定的 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, 成立

$$
\lim_{t\to+\infty}u(x_0,y_0,t)=0.
$$

习题 1.6/1

> 对受摩擦力作用且具固定端点的有界弦振动, 满足方程
>
> $$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t,$$
>
> 其中常数 $c>0$, 证明其能量是减少的, 并由此证明方程
>
> $$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f$$
>
> 的初边值问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性.

弦的总能量可写成

$$
E(t)=\int_0^l(u_t^2+a^2u_x^2)dx.
$$

能量变化率为

$$
\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= 2\int_0^l\left(u_tu_{tt}+a^2u_xu_{xt}\right)dx \\
&= 2\int_0^l\left[u_t\left(a^2u_{xx}-cu_t\right)+a^2u_xu_{x_t}\right]dx \\
&= 2\int_0^l\left(-cu_t^2+a^2\frac{\partial}{\partial x}u_tu_x\right)dx \\
&= -2\int_0^l cu_t^2dx+2a^2u_tu_x\Big|_0^l.
\end{aligned}
$$

由于端点是固定的

$$2a^2 u_t u_x \Big|_0^l = 0.$$

故

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\int_0^l c u_t^2 dx \leqslant 0.$$

要证明方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f$$

的初边值问题解的唯一性, 只需证明零初始条件方程只有零解

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

根据能量不等式得

$$E(t) \leqslant E(0) = \int_0^l \left(u_t(x,0)^2 + a^2 u_x(x,0)^2 \right) dx = 0,$$

$$u_t = u_x = 0 \Longrightarrow u = C.$$

根据初始条件易知 $u \equiv 0$, 故初边值问题解的唯一性得证.
对于方程的稳定性, 设

$$E_0(t) = \int_0^l u^2 dx, \quad E_1(t) = \int_0^l u_t^2 + a^2 u_x^2 dx,$$

$$\frac{dE_0(t)}{dt} = 2\int_0^l u u_t dx \leqslant \int_0^l u^2 dx + \int_0^l u_t^2 dx = E_0(t) + E_1(t),$$

$$\frac{d}{dt} e^{-t} E_0(t) = -e^{-t} E_0(t) + e^{-t} \frac{dE_0(t)}{dt} \leqslant e^{-t} E_1(t),$$

$$E_0(t) \leqslant e^t \int_0^t e^{-\tau} E_1(\tau) d\tau + e^t E_0(0) \leqslant e^t E_1(0)(1 - e^{-t}) + e^t E_0(0) = e^t E_0(0) + (e^t - 1) E_1(0).$$

习题　1.6/2

习题　1.6/5