MA319 — 偏微分方程

Assignment 13

Instructor: 许德良

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 3.3/8

证明: 如果三维调和函数 $u(M)$ 在奇点 A 附近能表示为 $\dfrac{N}{r_{AM}^{\alpha}}$, 其中常数 $0 < a \leqslant 1$, 而 N 是不为零的光滑函数, 则当 $M \to A$ 时它趋于无穷大的阶数必与 $\dfrac{1}{r_{AM}}$ 同阶, 即 $\alpha = 1$.

$$u(M) = \frac{N(M)}{r_{AM}^{\alpha}}$$

$$\lim_{M\to A} r_{AM} \cdot u(M) = \lim_{M\to A} N(M) \cdot r_{AM}^{1-\alpha} = N(A) \lim_{M\to A} r_{AM}^{1-\alpha}.$$

当 $0 < a < 1$ 时

$$\lim_{M\to A} r_{AM} \cdot u(M) = 0.$$

此时 A 为可去奇点. 由于题设中 A 不为可去奇点, 只能有 $\alpha = 1$.

习题 3.4/1

试用强极值原理证明极值原理.

假设非常值函数 u 在区域 Ω 内调和, 点 M 在 Ω 内且 $u(M)$ 是 u 的最大值. 取 $B(M, r) \subset \Omega$, 可以证明在整个 $B(M, r)$ 内 $u = u(M)$. 假设 $M_0 \in B(M, R)$, $u(M_0) < u(M)$, 且 $r_{MM_0} < r$, 可找到 $B(M_0, r_0)$ 使得 $0 < r_0 < r/2$ 且存在 $M_1 \in \partial B(M_0, r_0)$, $u(M_1) = u(M)$. 在 M_1 处 $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, 与强极值原理矛盾, 故假设不成立, $u = u(M)$. 用类似方法可知 Ω 内的所有点都等于 $u(M)$, 故 u 为常数, 这就证明了极值原理.

习题 3.4/2

利用极值原理及强极值原理证明: 当区域 Ω 的边界 Γ 满足定理 4.2 中的条件时, 调和方程第三边值问题

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)\right|_{\Gamma} = f \quad (\sigma > 0)$$

的解的唯一性.

假设解不是唯一的, 即存在 u_1, u_2 都满足条件, 设 $u = u_1 - u_2$, 可知 u 为不为常数的调和函数且

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = 0.$$

由极值原理得 u 的最大值和最小值都在边界 Γ 上取到, 分别为 $u(m)$ 和 $u(M)$. 由强极值原理可得

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(m) < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M) > 0.$$

由边界条件可得

$$u(m) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(m) > 0, \quad u(M) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(M) < 0.$$

但显然应该有 $u(m) < u(M)$, 故产生矛盾, 假设不成立, 得证解是唯一的.

习题　3.4/3

说明在证明强极值原理过程中, 不可能作出一个满足条件 (1) 和 (3) 的辅助函数 $v(x, y, z)$, 使它在整个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 内满足 $\Delta v > 0$.

由 $\Delta v > 0$ 可知在整个球上成立可得 v 在球内无法取得最大值, 只能在边界上取得最大值. 由条件 (1) 中边界上 $v = 0$ 可知在整个球上 $v \leqslant 0$. 由条件 (3) 中 $\dfrac{dv}{dr} < 0$, 可知边界上可以取到最小值, 故在整个球上 $v \geqslant 0$. 综上可知 $v \equiv 0$, 此时 $\Delta v = 0$ 与条件矛盾, 故得证不可能作出这样的 v.

习题　3.4/4

设 Ω 为 $\mathbf{R}^3$ 的有界区域, 边界为 Γ, u 为定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{其中 } c > 0, f > 0 \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right]_{\partial\Omega} = g, & \text{其中 } \sigma > 0, g > 0 \end{cases}$$

的解. 证明在 $\overline{\Omega}$ 上 $u > 0$.

假设在 $\overline{\Omega}$ 上 $u \leqslant 0$, 则在 Ω 内 $\Delta u = cu - f < 0$, 可知在 Ω 内 u 无法取得最小值, 只能在边界 $\partial\Omega$ 上取得最小值. 由边界条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g - \sigma u > 0.$$

这说明边界上不可能存在最小值点, 故产生矛盾, 假设不成立, 得证在 $\overline{\Omega}$ 上 $u > 0$.