MA320 抽象代数 作业六

刘逸灏 515370910207

2018 年 4 月 18 日

Ex. 2.6/1

$$\phi(12) = 2 \cdot (2^2 - 2^1) = 4$$

$$Aut(G) = \{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_{11}\}$$

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

$$K_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

作一一映射 $\phi : Aut(G) \leftrightarrow K_4$ 使得 $\alpha_1 \leftrightarrow 1, \alpha_5 \leftrightarrow 2, \alpha_7 \leftrightarrow 3, \alpha_{11} \leftrightarrow 4$ 即为一同构映射。

Ex. 2.6/2

由于 K_4 同构于上题中的 $Aut(G)$，故不是一个循环群，而 Z_4 是一个循环群，易知 K_4 不同构于 Z_4。

Ex. 2.6/3

$$Aut(Z) \cong Z_2$$

$$Aut(Z_3) = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cong Z_2$$

故得证。

Ex. 2.6/4

(i)

$$o(g^s) = \frac{o(g)}{(s, o(g))} = \frac{t}{(s,t)} = t$$

由于 g 与 g^s 有相同的阶，且 $g^s \in \langle g \rangle$，故显然 $\langle g \rangle = \langle g^s \rangle$。

(ii)

$$o(g^s) = \frac{o(g)}{(s, o(g))} = \frac{t}{(s,t)} = \frac{t}{k}$$

Ex. 2.6/5

(i)

$$g_1^{t_1} = g_2^{t_2} = e$$

$$(g_1 g_2)^{[t_1, t_2]} = e$$

现证明 $t = [t_1, t_2]$，假设 $t' < t$，则根据最小公倍数定义可知不存在 $t_1 \mid t'$ 且 $t_2 \mid t'$，故得证。

(ii) 设 $o(g_1) = t_1', o(g_2) = t_2'$，且 $(t_1', t_2) = (t_1, t_2') = 1$

$$o(g_1 g_2) = t_1 t_2$$

$$(g_1 g_2)^{t_1 t_2} = (g_1^{t_2})^{t_1} (g_2^{t_1})^{t_2} = e$$

$$o(g_1^{t_2}) = \frac{t_1'}{(t_1', t_2)} = t_1' \Longrightarrow t_1' \mid t_1$$

$$o(g_2^{t_1}) = \frac{t_2'}{(t_2', t_1)} = t_2' \Longrightarrow t_2' \mid t_2$$

由于 $(t_1', t_2) = (t_1, t_2') = (t_1, t_2) = 1$，易得 $t_1 = t_1', t_2 = t_2'$，得证。

Ex. 2.6/6

$\forall s$ 使得 $a^s \in \langle a^m \rangle \cap \langle a^n \rangle$，则 $m \mid s$ 且 $n \mid s$，故 $[m, n] \mid s$，由 s 的任意性得证。