MA320 抽象代数 作业二

刘逸灏 515370910207

2018 年 3 月 28 日

Ex. 2.1/6

若 $x^2 \neq e$，则 $(x^{-1})^2 \neq e$，且 $a \neq a^{-1}$。设 $S = \varnothing$，只需每次从有限群 G 中取出一个元 x，若 $x^2 \neq e, x \notin S$，则将 x 和 x^{-1} 都加入 S 中，所以 S 中必定有偶数个元素。当 G 中所有元都被取出时，其中满足 $x^2 \neq e$ 的元必定都在 S 中，故有偶数个这样的元。

Ex. 2.1/7

由上题得，$x^2 \neq e$ 的元有偶数个，故在偶数阶群中总共有偶数个元，故满足 $x^2 = e$ 的元也有偶数个。

Ex. 2.1/8

$\forall a, b \in G$，$a^2 = e, b^2 = e$，则

$$(ab)^2 = abab = e = a^2b^2$$

$$ba = ab$$

故 G 为 Abel 群。

Ex. 2.2/4

$\forall g, h \in C_G(A)$，$\forall a \in A$，则

$$(gh)a = g(ha) = g(ah) = (ga)h = (ag)h = a(gh)$$

故乘法封闭，$C_G(A)$ 为 G 的一个子群，但 A 中元素不一定都满足交换律，故 $C_G(A)$ 不一定包含 A。

Ex. 2.2/5

$\forall x \in L, x = hk, x \in H, k \in K$，由于 $h^{-1} \in H \subset L, x \in L$，$k = h^{-1}x \in L$，故 $k \in K \cap L$，即 $L = H(K \cap L)$。

Ex. 2.2/7

$\forall A, B \in SL_n(\mathbb{R})$，$|AB| = |A||B| = 1, |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$，故 $SL_n(\mathbb{R})$ 为一个子群。又由于 $|AB| = |A||B| = 1 = |B||A| = |BA|$，故为正规子群。