

# MA320 抽象代数 作业十

刘逸灏 515370910207

2018 年 5 月 23 日

## Ex. 3.3/1

设  $f(x), g(x) \in Z[x]$ , 则  $f(x)g(x) \in \langle x \rangle$ ,  $\exists h(x) \in Z[x]$  使得  $f(x)g(x) = x \cdot h(x)$ 。由于  $x$  不可约, 上式可得  $x \mid f(x)$  或  $x \mid g(x)$ , 故  $\langle x \rangle$  是  $Z[x]$  的素理想。

## Ex. 3.3/2

必要性: 设  $P$  是素理想, 则对  $R$  的任何两个理想  $I, J$  使得  $IJ \subset P$  必定可以推出  $I \subset P$  或  $J \subset P$ , 则对  $ab \in P$ , 有  $\langle ab \rangle \subset P$ , 而  $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset \langle ab \rangle$ , 故  $\langle a \rangle \subset P$  或  $\langle b \rangle \subset P$ , 即  $a \in P$  或  $b \in P$ 。

充分性: 设对  $ab \in P$ , 有  $a \in P$  或  $b \in P$ 。则对  $R$  的任何两个理想  $I, J$  使得  $IJ \subset P$ , 假设  $I \not\subset P$  且  $J \not\subset P$ , 有  $a \in I, a \notin P, b \in J, b \notin P$ 。又因为  $ab \in IJ \subset P, ab \in P$ , 根据条件中的  $a \in P$  或  $b \in P$  得到矛盾, 故假设错误, 证得  $I \subset P$  或  $J \subset P$ 。

## Ex. 3.3/3

假设素理想为  $P$ , 根据命题 3.1(ii), 由于  $R$  是有单位元的交换环, 可得商环  $R/P$  为整环。由于  $R$  是有限的,  $R/P$  是一个有限整环, 即是一个域。根据命题 3.1(i) 可得  $P$  是极大理想, 故得证。

## Ex. 3.3/5

(i) 由于  $P$  是  $R$  的素理想, 对于  $a, b \in R$ , 当  $ab \in P$ , 有  $a \in P$  或  $b \in P$ 。则对于  $f(a), f(b) \in S$ , 当  $f(a)f(b) \in S$ , 若  $f(a) \notin S$  且  $f(b) \notin S$ , 则  $P \not\subset K$ , 与条件矛盾, 故  $f(P)$  也是  $S$  的素理想。

(ii) 由于  $Q$  是  $S$  的素理想, 对于  $a, b \in S$ , 当  $ab \in Q$ , 有  $a \in Q$  或  $b \in Q$ 。则对于  $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in R$ , 当  $f^{-1}(a)f^{-1}(b) \in P$ , 显然有  $f^{-1}(a) \in P$  或  $f^{-1}(b) \in P$ , 故  $f^{-1}(Q)$  也是  $R$  的素理想。

(iii) 根据 (i)(ii) 可得  $S$  中素理想与  $R$  中包含  $K$  的素理想有单射和满射关系, 故是一一对应的。

### Ex. 3.3/7

$Z/mZ$  的全部素理想和极大理想为  $nZ/mZ$ , 其中  $n$  为  $m$  的全部素因数。首先, 易得  $nZ/mZ$  为  $Z/mZ$  的理想, 故  $(Z/mZ)/(nZ/mZ) \cong Z/nZ$ ,  $nZ/mZ$  为极大理想当且仅当  $n/nZ$  是域, 又当且仅当  $n$  为素数。故  $nZ/mZ$  为极大理想当且仅当  $n$  为  $m$  的素因数。同理可知,  $nZ/mZ$  为素理想当且仅当  $n/nZ$  是整环, 又当且仅当  $n$  为素数。故  $nZ/mZ$  为素理想当且仅当  $n$  为  $m$  的素因数。