# MA320 抽象代数 作业三

刘逸灏 515370910207

2018 年 3 月 28 日

## Ex. 2.3/1

$$1 \to 3 \to 5 \to 2$$
$$2 \to 1 \to 1 \to 1$$
$$3 \to 2 \to 3 \to 3$$
$$4 \to 4 \to 4 \to 5$$
$$5 \to 5 \to 2 \to 4$$
$$(4\ 5\ 2)(5\ 2\ 3)(3\ 2\ 1) = (1\ 2)(4\ 5)$$

## Ex. 2.3/2

$$(i_1\ i_2 \cdots i_t) = (i_1\ i_t) \cdots (i_1\ i_4)(i_1\ i_3)(i_1\ i_2)$$

即 $t$-轮换可表示为 $t$ 个对换的积。由于偶数个对换的乘积是偶置换，奇数个对换的乘积是奇置换，故得证。

## Ex. 2.3/3

设 $\sigma = (i_1\ i_2 \cdots i_t) = (i_1\ i_t) \cdots (i_1\ i_4)(i_1\ i_3)(i_1\ i_2)$，$\sigma^n$ 即为对于每一个元素进行轮换，

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_1$$
$$i_2 \to i_3 \to i_4 \to \cdots \to i_2$$
$$\cdots$$
$$i_t \to i_1 \to i_4 \to \cdots \to i_t$$

易知对于每个元素，进行 $t$ 次轮换可得到自身，即 $\sigma^t = e$，故 $t$-轮换的阶是 $t$。

## Ex.  2.3/5

考虑置换

$$\sigma = (1\ 2)(2\ 3)\cdots(i\ i+1)\cdots(n-1\ n)$$

$$1 \to 1 \to 1 \to \cdots \to 1 \to 1 \to 2$$

$$2 \to 2 \to 2 \to \cdots \to 2 \to 3 \to 3$$

$$\cdots$$

$$n-1 \to n \to n \cdots \to n \to n \to n$$

$$n \to n-1 \to n-2 \cdots \to 3 \to 2 \to 1$$

即 $\sigma = (1\ 2\ 3 \cdots n)$，故题设为 $S_n$ 的一个生成元集

## Ex.  2.3/6

当 $n$ 为偶数，

$$\sigma = (1\ n)(2\ n-1)\cdots(\frac{n-2}{2}\ \frac{n+2}{2})$$

当 $n$ 为奇数，

$$\sigma = (1\ n)(2\ n-1)\cdots(\frac{n-1}{2}\ \frac{n+1}{2})$$

故当 $n = 4k$ 或 $n = 4k+3$ 时, $\sigma$ 为奇数个对换的乘积, 为奇置换。当 $n = 4k+1$ 或 $n = 4k+2$ 时，$\sigma$ 为偶数个对换的乘积，为偶置换。($k \in N$)