MA320 抽象代数 作业五

刘逸灏 515370910207

2018 年 4 月 11 日

Ex. 2.5/1

设 f 的阶为 m，$f(g)$ 的阶为 n，即

$$g^m = e_G$$

$$f(g)^n = e_H$$

$$f(g^m) = f(g)^m = f(e_G) = e_H$$

若 $n \nmid m$，则 $f(g)^m = f(g)^{m \mod n} \neq e_H$，矛盾，故 $f(g)$ 的阶整除 g 的阶。

Ex. 2.5/2

$$f(KM) = f(K)f(M) = e_H f(M) = f(M)$$

$$f^{-1}(f(M)) = KM$$

Ex. 2.5/3

根据定理 5.8，已知 N 是 G 的正规子群，M 是 G 的子群，故 $N \cap M$ 为 M 的正规子群，且 $N \leqslant M \to N \cap M = N$，即 $N \lhd M$。

Ex. 2.5/4

考虑行列式映射 $GL_n(R) \to R^* : \phi(x) \to \det(x)$，由行列式运算性质可知这是一个群满同态，且 $\ker\phi = SL_n(R)$。根据定理 5.6(i) 可知，$GL_n(R)/SL_n(R) \cong R^*$。

Ex. 2.5/5

设 $H = C(G)$，G/H 为一个循环群，其生成元为 aH，令 $x, y \in G$，则 $\exists m, n$ 使得 $xH = (aH)^m = a^m H, yH = (aH)^n = a^n H$，$\exists h_1, h_2 \in H$ 使得 $x = a^m h_1, y = a^n h_2$，易知

$$xy = (a^m h_1)(a^n h_2) = a^{m+n} h_1 h_2 = (a^n h_2)(a^m h_1) = yx$$

故 G 是 Abel 群。