MA320 抽象代数 作业四

刘逸灏 515370910207

2018 年 4 月 4 日

Ex. 2.4/1

没有，根据拉格朗日定理，子群的阶数必定为群阶数的因子，而这里 6 不是 20 的因子。

Ex. 2.4/2

充分性：当等价关系 $\overset{H}{\sim}$ 和 $(\overset{H}{\sim})'$ 相等时，对于 $a \in G$，可找出所有由这两个相等等价关系的元素 X 组成的集合，且 $x \in aH, x \in Ha$，可推出左陪集 aH 和右陪集 Ha 也相等，故满足 H 是 G 的正规子群。

必要性：当 H 是 G 的正规子群时，对于 $a \in G$，可知 $aH = Ha$，现取 $x \in aH$，则 x 为与 a 有等价关系 $\overset{H}{\sim}$ 的元。取 $x \in Ha$，则 x 为与 a 有等价关系 $(\overset{H}{\sim})'$，故这连个等价关系相等。

Ex. 2.4/3

$\forall h \in H, \exists ab, ahb \in aH \cdot bH$，$(ahb)H = (ab)H$，即 $(ab)^{-1}(ahb) = b^{-1}hb \in H$。由于 b 和 h 的任意性可知 $bH = Hb$，即 H 为 G 的正规子群。

Ex. 2.4/5

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$$K_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$(1)K_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$(1\ 2)K_4 = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\}$$

$$(1\ 3)K_4 = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

$$(2\ 3)K_4 = \{(2\ 3), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4)\}$$

$$(1\ 2\ 3)K_4 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2)\}$$

$$(1\ 3\ 2)K_4 = \{(1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3)\}$$

$$K_4(1) = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

$$K_4(1\ 2) = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4)\}$$

$$K_4(1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 4\ 3\ 2), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\}$$

$$K_4(2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4)\}$$

$$K_4(1\ 2\ 3) = \{(1\ 2\ 3), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4)\}$$

$$K_4(1\ 3\ 2) = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\}$$

由以上计算可得 K_4 是 S_4 的正规子群，且 S_3 为一个左陪集。

Ex. 2.4/6

由 $H \cdot K$ 的定义知 $H \cdots K$ 是所有形如 hK 的左陪集的并，因不同的左陪集的交为空集，故其等于群 H 的子群 $H \cap K$ 在 H 中的左陪集个数。$\forall t \in H \cap K$，$hk = (ht)(t^{-1}k)$，$ht \in H, t^{-1}k \in H \cap K$，故群 H 的子群 $H \cap K$ 在 H 中的左陪集个数和形如 hK 的左陪集个数相等，为 $|H||K|/|H \cap K|$。