MA320 抽象代数 作业一

刘逸灏 515370910207

2018 年 3 月 14 日

Ex. 1/1

假设有限集有 n 个元素，且由 f 为 A 的变换可知 $f(A) \subseteq A$。

充分性：已知 f 为单射，则 $f(A)$ 也有 n 个元素。由于 $f(A)$ 和 A 都有 n 个元素，易知 $f(A) = A$。假设 f 不为满射，即 $\exists y \in f(A), f^{-1}(y) \notin A$，显然这与 $f(A) = A$ 矛盾，故 f 为满射。

必要性：已知 f 为满射，则 $\forall y \in f(A)$，$\exists x \in A$ 使得 $f(x) = y$，易知 $f(A)$ 中至少有 n 个元素。假设 f 不为单射，则 $f(A)$ 小于 n 个元素，矛盾，故 f 为单射。

Ex. 1/2

已知 f 为 n 维线性空间 V 的线性变换，根据线性空间的性质可知

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = n$$

若 f 为单射，则 $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$，$\dim Im(f) = n$，$Im(f) = V$，可推出 f 为满射。以上推理均可逆，故必要性也得证。

Ex. 1/3

A 到 B 有 n^m 个映射，有 C_m^n 个单射，A 有 $m^{(m^2)}$ 个二元运算。

Ex. 1/5

根据高等代数关于实对称矩阵合同的定理，S 中每个矩阵均合同于一个实对角矩阵，通过矩阵的初等变换，其等价于

$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p + q \leqslant n$$

令

$$M_i = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p+q=i$$

则 $\{M_i\}$ 为 M 的一个划分，相应 S 的商集为 $\{r(S)=i\}$。

Ex. 1/6

根据高等代数关于实对称矩阵相似的定理，S 中每个矩阵均合同于一个实对角矩阵，其等价于

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

令

$$M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i < \lambda_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

则 $\{M_i\}$ 为 M 的一个划分，相应 S 的商集为 $\{r(S)=i\}$。

Ex. 1/7

根据 Bézout's identity，$a,b \in N^*$ 互质的充要条件是存在整数 x,y 使得 $ax+by=1$。这里，令 $a=\bar{i}, b=n, x=\bar{j}$，则可推得

$$\overline{ij}+ny=1$$

由于 $n|ny$，可得 $\overline{ij}=\bar{1}$，根据该充要关系可推得 $\bar{i}$ 与 n 互质时满足性质。

Ex. 2.1/1

易知两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵，两个主对角矩阵的乘积仍为主对角矩阵，故矩阵乘法是 N,D 的运算。由矩阵乘法运算性质可知其满足结合律，设单位元为 I，显然 $NI=N, IN=N, DI=D, ID=D$。由于 N 为非奇异矩阵，N 对矩阵乘法可逆，只需证明 N^{-1} 仍为

下三角矩阵。设

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{N^*}{|N|} = \frac{1}{|N|} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1n} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{n1} & N_{n2} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix}$$

由于 N 为下三角矩阵，可得 $N_{ij} = 0, i > j$，所以 N^{-1} 也为下三角矩阵，所以 N 对矩阵乘法作成群。

同时，根据对角矩阵的性质，若对角线上都非零，则其可逆，且逆矩阵对角线上每个值都为原来的倒数，故 D 也对矩阵乘法作成群。

Ex. 2.1/2

令 $(a, b), (c, d), (e, f) \in G, e = (1, 0), (a, b)^{-1} = (1/a, -b/a)$

$$[(a, b)(c, d)](e, f) = (ac, ad + b)(e, f) = (ace, acf + ad + b) = (a, b)(ce, cf + d) = (a, b)[(c, d)(e, f)]$$

$$e(a, b) = (a, b)e = (a, b)$$

$$(a, b)(a, b)^{-1} = e$$

故 G 对此二元运算作成群。

Ex. 2.1/3

令 $f, g, h \in G^\Omega$，e 为等于 G_e 的恒等映射，$f^{-1}(a) = [f(a)]^{-1}$

$$[(fg)h](a) = [f(a)g(a)]h(a) = f(a)g(a)h(a) = f(a)[g(a)h(a)] = [f(gh)](a)$$

$$(ef)(a) = (fe)(a) = f(a)$$

$$f(a)f^{-1}(a) = G_e = e$$

故 G^Ω 是群。

Ex. 2.1/4

对 G 的任一元 g，用 g_r 表示 g 的右逆元，g_r 的右逆元记为 $(g_r)_r$，于是

$$g_r(g_r)_r = e_r = gg_r$$

$$g_rg = g_r(ge_r) = g_rg(g_r(g_r)_r) = g_r(gg_r)(g_r)_r = g_re_r(g_r)_r = g_r(g_r)_r = e_r$$

$$e_rg = (gg_r)g = g(g_rg) = ge_r = g$$

这表明 e_r 是 G 的单位元，即 G 是群。

Ex. 2.1/6

若 $x^2 \neq e$，则 $(x^{-1})^2 \neq e$，且 $a \neq a^{-1}$。设 $S = \varnothing$，只需每次从有限群 G 中取出一个元 x，若 $x^2 \neq e, x \notin S$，则将 x 和 x^{-1} 都加入 S 中，所以 S 中必定有偶数个元素。当 G 中所有元都被取出时，其中满足 $x^2 \neq e$ 的元必定都在 S 中，故有偶数个这样的元。