

MA362 — 复分析

Assignment 7

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 四 (一)/14

设 D 是周线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上连续, 其模 $|f(z)|$ 在 C 上为常数, 试证: 若 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

当 $f(z)$ 恒等于一个常数时, 显然成立. 假设 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 且 $f(z)$ 在 D 内没有零点, 则对于 D 内的点 z_0 有 $f(z_0) \neq 0$. 由于 $f(z)$ 在闭域 \bar{D} 上连续, 可知存在 m, M 使得 $m \leq |f(z)| \leq M$ 在 \bar{D} 上成立. 由最小模和最大模原理可知, 对于 D 内的点 z_0 , $m < |f(z_0)| < M$, 故 m 和 M 都在周线 C 上. 又由于 $|f(z)|$ 在 C 上为常数, 易知 $m = M$, 此时与 $m < |f(z_0)| < M$ 产生矛盾, 故若 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

习题 四 (二)/3

试证

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \delta$ 绝对收敛, 则

$$|\delta| \leq |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| + \cdots;$$

(2) 对任一复数 z ,

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|};$$

(3) 当 $0 < |z| < 1$ 时,

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|.$$

(1)

$$|\delta_n| = \left| \sum_{k=1}^n v_k \right| = |v_1 + v_2 + \cdots + v_n|,$$

$$|\xi_n| = \sum_{k=1}^n |v_k| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|.$$

由三角不等式得

$$|\delta_n| < |\xi_n|, \quad |\delta| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| + \cdots.$$

(2)

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ e^{|z|} - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}, \\ |z|e^{|z|} &= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

当 $n \in N$ 时, $\frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{|z|^n}{(n-1)!}$, 故

$$e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

设 $v_n = \frac{z^n}{n!}$, $\delta = e^z - 1$, 根据 (1) 易知

$$|\delta| = |e^z - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

(3)

由 $0 < |z| < 1$, 可知 $0 < |z|^n < 1$, $n \in N$, 故

$$\begin{aligned} |e^z - 1| &\leq e^{|z|} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} < |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |z| \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right], \\ |e^z - 1| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = |z| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right| = |z| \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right| \geq |z| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \right] > |z| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right], \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

综上所述可得

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|.$$

习题 四 (二)/4

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n (a_0 \neq 0)$ 的收敛半径 $R > 0$, 且

$$M = \max_{|z| \leq \rho} |f(z)| \quad (\rho < R).$$

试证: 在圆

$$|z| < \frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho$$

内 $f(z)$ 无零点.

由柯西不等式得

$$|a_n| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \leq \frac{M}{\rho^n},$$

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M |z|^n}{\rho^n} = M \frac{|z|/\rho}{1 - |z|/\rho} = M \frac{|z|}{\rho - |z|},$$

在圆 $|z| < \frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho$ 内

$$|f(z) - a_0| \leq M \frac{|z|}{\rho - |z|} < M \frac{\frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho}{\rho - \frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho} = |a_0|,$$

$$|a_0| - |f(z)| < |a_0| \implies |f(z)| > 0.$$

故 $f(z)$ 无零点.

习题 四 (二)/5

设在 $|z| < R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

试证: 当 $0 \leq r < R$ 时,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

$$|f(re^{i\theta})|^2 = f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m (re^{i\theta})^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} (e^{i\theta})^{n-m}.$$

当 $n = m$ 时

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n \overline{a_m} r^{n+m} (e^{i\theta})^{n-m} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_n|^2 r^{2n} d\theta = |a_n|^2 r^{2n}.$$

当 $n \neq m$ 时

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n \bar{a}_m r^{n+m} (e^{i\theta})^{n-m} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n \bar{a}_m r^{n+m} [\cos((n-m)\theta) + i \sin((n-m)\theta)] d\theta = 0.$$

故

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n \bar{a}_m r^{n+m} (e^{i\theta})^{n-m} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

习题 四 (二)/9

设

- (1) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $f(z) \neq$ 常数;
- (2) C 为 D 内任一条周线, 只要 $\overline{I(C)}$ 全含于 D ;
- (3) A 为任一复数.

试证: $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 只有有限个根.

假设 $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 有无限个根, 令 $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = A$, 则可找到一列 $\{z_n\} \rightarrow z_0$, 使得 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在其上等值, 根据唯一性定理可知 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 D 内恒等于 A , 与条件矛盾, 故 $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 只有有限个根.

习题 四 (二)/10

问 $|e^z|$ 在闭圆 $z - z_0 \leq 1$ 上的何处达到最大? 并求出最大值.

由于 $f(z) = e^z$ 在区域 $z - z_0 \leq 1$ 内解析, 根据最大模原理, $|f(z)|$ 的最大值只能取在圆周 $z - z_0 = 1$ 上, 且 $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, 故

$$\max_{z-z_0 \leq 1} |e^z| = e^{\max_{z-z_0=1} \operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re} z_0 + 1}.$$

习题 五 (一)/1

将下列各函数在指定圆环内展为洛朗级数.

- (1) $\frac{z+1}{z^2(z-1)}, 0 < |z| < 1, 1 < |z| < +\infty;$
- (3) $\frac{e^z}{z(z^2+1)}, 0 < |z| < 1$, 只要含 $\frac{1}{z}$ 到 z^2 各项.

(1)

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}.$$

在 $0 < |z| < 1$ 内, $|z| < 1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \frac{2}{1-z} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} 2z^n.$$

在 $1 < |z| < +\infty$ 内, $|\frac{1}{z}| < 1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{z^n}.$$

(3)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n,$$

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \approx \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{6}.$$

习题 五 (一)/2

将下列各函数在指定点的去心邻域内展成洛朗级数, 并指出其收敛范围.

(1) $\frac{1}{(z^2+1)^2}, z=i;$

(3) $e^{\frac{1}{1-z}}, z=1$ 及 $z=\infty$.

(1)

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n,$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \right]^2 = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n-1}.$$

收敛范围为 $0 < |z-i| < 2$.

(3)