MA362 — 复分析

Assignment 12

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　4.4/15

设 f 是域 D 上非常数的全纯函数. 证明: 存在在 D 中无极限的点列 $\{z_n\}$, 使得对每个 $z \in D \setminus \{z_n\}$, 有 $f'(z) \neq 0$.

只需证明所有满足 $z_n \in D$ 且 $f'(z_n) = 0$ 的点 z_n 都在无极限的点列 $\{z_n\}$ 中. 这样的 z_n 是 $f(z) - f(z_n)$ 的 m_n 阶零点, $m_n \geqslant 2$. 假设 z_0 为 $\{z_n\}$ 的一个极限点, 对于充分小的 $\rho > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $a \in B(z_0, \delta)$, $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m_0 个零点. 同时, 也存在 $z_1 \in \{z_n\}$ 且 $z_1 \in B(z_0, \min\{\delta, \rho\})$, 并取 $a = z_1$. 由于解析函数 $f(z) - a$ 零点的孤立性, 可取 $\rho_1 \in B(0, \rho)$ 且 $f(z) - a$ 在 $B(z_1, \rho_1)$ 中没有零点, 此时必存在 $\delta_1 > 0$, 使得对于任意 $a_1 \in B(z_1, \delta_1)$, $f(z) - a_1$ 在 $B(z_1, \rho_1)$ 中恰有 m_1 个零点. 由 a_1 的任意性可知取 $a_1 = a$ 产生矛盾, 故得证.

习题　4.4/16

设 D 是由可求长简单闭曲线围成的单连通域, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$. 证明: 若 f 在 ∂D 上取实值, 则 f 为常值函数. 举例说明对于一般的单连通域 D, 结论不再成立.

$\operatorname{Im}\{f(z)\}$ 在 D 内是调和函数, 且在 ∂D 上为 0. 根据调和函数的最大和最小模原理得 $\operatorname{Im}\{f(z)\} = 0$. 又由全纯函数的性质可知, 虚部为 0 的全纯函数为常值函数.

对于一般单连通区域, 设 D 为上半平面, 令 $f(z) = z$, 在 ∂D 上有 $f(z) \in R$, 但 f 显然不是常值函数.

习题　4.5/4

设 $f \in H(B(0, R))$. 证明: $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ 是 $[0, R)$ 上的增函数.

只需证明在任取 $0 \leqslant r_1 < r_2 < R$, 有 $M(r_1) \leqslant M(r_2)$. 若 $f(z)$ 为常值函数, 显然有 $M(r_1) = M(r_2) = k$; 若不是, 取区域 $D = B(0, r_2)$, 则 $|z| = r_1$ 在 D 的内部. 根据最大模原理可知

$$M(r_1) = \max_{|z|=r_1} |f(z)| < \max_{|z|=r_2} |f(z)| = M(r_2).$$

故 $M(r)$ 是 $[0, R)$ 上的增函数.

习题 4.5/5

利用最大模原理证明代数学基本定理.

设

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

为任意复系数多项式. 现要证明 $P(z)$ 至少有一个零点.

假设 $P(z)$ 没有零点, 则 $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ 是一个整函数. 由于 $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$, 故能找到 R, 使得 $|z| \geqslant R$ 时, $|f(z)| \leqslant |f(0)|$. 由 $f(z)$ 的连续性可知, $\max\limits_{|z|<R} |f(z)| \geqslant |f(0)|$, 故在 $|z| \leqslant R$ 中 $f(z)$ 的最大值可以不在边界取到. 根据最大模原理可知 $f(z)$ 为常值函数, 与假设矛盾, 故得证 $P(z)$ 一定有零点.

习题 4.5/7

设 f 是域 D 上非常数的全纯函数. 证明: 若 f 在 D 中没有零点, 则 $f(z)$ 在 D 内不能取得最小值.

由于 f 是域 D 上非常数的全纯函数, 且在 D 中没有零点, 则 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 也是域 D 上非常数的全纯函数. 假设 $f(z)$ 在 $z_0 \in D$ 中能取得最小值, 则 $g(z)$ 也可在 z_0 取得最大值, 这与最大模原理矛盾, 故假设不成立, 得证.