MA362 — 复分析

Assignment 6

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 四 (一)/9

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 又是 $g(z)$ 的 n 阶零点, 试问下列函数在 z_0 处具有何种性质?

(1) $f(z)+g(z)$;

(2) $f(z)\cdot g(z)$;

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

设

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n\psi(z),$$

其中 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 且 $\varphi(z_0),\psi(z_0)\neq 0$.

(1)

设 $p=\min\{m,n\}$

$$f(z)+g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)+(z-z_0)^n\psi(z)=(z-z_0)^p\chi(z),$$

$$\chi(z)=(z-z_0)^{m-p}\varphi(z)+(z-z_0)^{n-p}\psi(z).$$

由 $m-p=0$ 或 $n-p=0$ 至少有一个成立, 可得 $\chi(z_0)=\varphi(z_0)$ 或 $\psi(z_0)\neq 0$, 且 $\chi(z)$ 在点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 故 z_0 是函数的 $\min\{m,n\}$ 阶零点.

(2)

$$f(z)\cdot g(z)=(z-z_0)^{m+n}\varphi(z)\psi(z).$$

$\varphi(z_0)\psi(z_0)\neq 0$, 且 $\varphi(z)\psi(z)$ 在点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 故 z_0 是函数的 $m+n$ 阶零点.

(3)

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

当 $m>n$ 时, $\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}\neq 0$, 且 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 在点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 故 z_0 是函数的 $m-n$ 阶零点.

当 $m=n$ 时, $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, 故 z_0 没有特别性质.

当 $m<n$ 时, 函数在 z_0 处无定义, z_0 为间断点.

习题　四 (一)/10

设 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的至少 n 阶零点, 又为解析函数 $\varphi(z)$ 的 n 阶零点, 则 (试证)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}\quad(\varphi^{(n)}(z_0)\neq 0).$$

设

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\quad \varphi(z)=(z-z_0)^n\psi(z),\quad m\geqslant n,$$

$$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!},\quad \psi(z_0)=\frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!},$$

其中 $g(z),\psi(z)$ 在点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 内解析, 且 $g(z_0),\psi(z_0)\neq 0$.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{g(z)}{\psi(z)}=\frac{g(z_0)}{\psi(z_0)}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}.$$

当 $m>n$ 时

$$f^{(n)}(z_0)=0,\quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}=0.$$

当 $m=n$ 时

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}=\frac{g(z_0)}{\psi(z_0)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{\varphi^{(n)}(z_0)}.$$

习题　四 (一)/11

在原点解析, 而在 $z=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 处取下列各组值的函数是否存在:

(2) $0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{6},\cdots;$

(4) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},\cdots.$

(2)

若存在函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析且满足 $f\left(\dfrac{1}{2k-1}\right)=0(k=1,2,\cdots)$, 因零点列 $\left\{\dfrac{1}{2k-1}\right\}$ 以 $z=0$ 为极限点, 故由唯一性定理知, 在 $z=0$ 的邻域内 $f(z)\equiv 0$, 这与题设 $f\left(\dfrac{1}{2k}\right)=\dfrac{1}{k}\neq 0$ 矛盾, 故不存在.

(4)

设

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z}{z+1},\quad f(z)=\frac{1/z}{1/z+1}=\frac{1}{z+1}.$$

$f(z)$ 在原点 $z=0$ 解析, 故满足题设条件.

习题　四 (一)/12

设

(1) $f(z)$ 在区域 D 内解析;

(2) 在某一点 $z_0\in D$, 有

$$f^{(n)}(z_0)=0,\quad n=1,2,\cdots$$

试证 $f(z)$ 在 D 内必为常数.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=f(z_0),\quad z\in B(z_0,R)\subset D.$$

设 $g(z)=f(z_0)$, 则 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在 D 内解析, 且在 D 内的子区域 $B(z_0,R)$ 相等. 根据唯一性定理和其推论可知 $f(z)=g(z)=f(z_0)$, 故 $f(z)$ 在 D 内必为常数.