MA362 — 复分析

Assignment 11

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　六 (一)/6

仿照例 6.15 的方法计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx \quad (a>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2} dx$.

(1)

被积函数是偶函数, 故

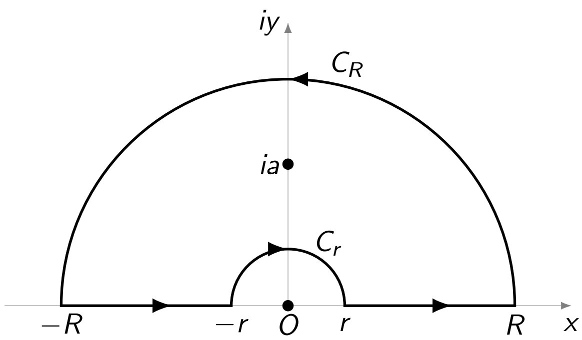
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{1}{2}\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)} dx,$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)} = \frac{e^{iz}}{z(z-ia)(z+ia)}.$$

0 为一阶极点, ia 为一阶极点, $-ia$ 为一阶极点, 只有 ia 在上半平面内.

$$\operatorname*{Res}_{z=ia} = \left.\frac{e^{iz}}{z(z+ia)}\right|_{z=ia} = -\frac{e^{-a}}{2a^2}.$$

考虑 $f(z)$ 在上半平面内沿下图所示之闭曲线路径 C 的积分.



由留数定理得

$$\int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx - \int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} = 2\pi i \cdot -\frac{e^{-a}}{2a^2} = -i\pi\frac{e^{-a}}{a^2}.$$

由引理 6.2 知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}dz = 0.$$

由引理 6.3 知

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}dz = i\pi\lim_{r\to 0}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = i\pi\frac{1}{a^2}.$$

另 $r\to 0$, $R\to+\infty$ 可得

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}dx = i\pi\frac{1-e^{-a}}{a^2}.$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+a^2)}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx.$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = \frac{\pi(1-e^{-a})}{2a^2}.$$

(2)

被积函数是偶函数, 故

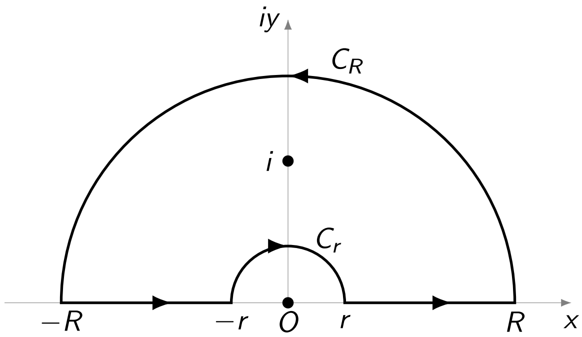
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx,$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2}.$$

0 为一阶极点, i 为二阶极点, $-i$ 为二阶极点, 只有 i 在上半平面内.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} = \left[\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{ie^{iz}(z^2+4iz-1)}{z^2(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = -\frac{3}{4e}.$$

考虑 $f(z)$ 在上半平面内沿下图所示之闭曲线路径 C 的积分.



由留数定理得

$$\int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx - \int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ia} = 2\pi i\cdot -\frac{3}{4e} = -i\pi\frac{3}{2e}.$$

由引理 6.2 知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz = 0.$$

由引理 6.3 知

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz=\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}dz=i\pi\lim_{r\to 0}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}=i\pi.$$

另 $r\to 0$, $R\to+\infty$ 可得

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx=i\pi\left(1-\frac{3}{2e}\right).$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+1)^2}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx.$$

故

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4e}\right).$$

习题　六 (一)/10

证明方程

$$e^{z-\lambda}=z\quad(\lambda>1)$$

在单位圆 $|z|<1$ 内恰有一个根, 且为实根.

设 $f(z)=z$, $\varphi(z)=-e^{z-\lambda}$, C 是单位圆 $|z|=1$, 则 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在 C 内部均解析, 且在 C 上

$$|f(z)|=|z|=1>|e^{z-\lambda}|=|\varphi(z)|.$$

根据儒歇定理可知 $f(z)$ 和 $f(z)+\varphi(z)=z-e^{z-\lambda}$ 在 C 内有同样多的零点. 显然 $f(z)$ 在 C 内只有一个零点 $z=0$, 故方程 $e^{z-\lambda}=z$ 在 C 内也只有一个零点. 作实连续函数

$$g(z)=z-e^{z-\lambda},$$

$$g(-1)=-1-e^{-1-\lambda}<0,\quad g(1)=1-e^{1-\lambda}>0.$$

根据零点定理可得 $g(z)$ 在 $(-1,1)$ 有一个实零点, 故得证.

习题　六 (一)/11

证明方程

$$e^z-e^\lambda z^n=0\quad(\lambda>1)$$

在单位圆 $|z|<1$ 内有 n 个根.

设 $f(z)=e^\lambda z^n$, $\varphi(z)=-e^z$, C 是单位圆 $|z|=1$, 则 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在 C 内部均解析, 且在 C 上

$$|f(z)|=\left|e^{\lambda+n(\ln z+2k\pi i)}\right|=|e^{\lambda+n\ln z}|=|e^\lambda|>|e^z|=|\varphi(z)|.$$

根据儒歇定理可知 $f(z)$ 和 $f(z)+\varphi(z)=e^\lambda z^n-e^z$ 在 C 内有同样多的零点. 根据代数学基本定理可知 n 维多项式 $f(z)$ 有 n 个零点, 故方程有 n 个根.

习题　六 (一)/12

若 $f(z)$ 在周线 C 内部除有一个一阶极点外解析, 且连续到 C, 在 C 上 $|f(z)|=1$. 证明

$$f(z)=a \quad (|a|>1)$$

在 C 内部恰好有一个根.

$$P(f(z)-a,C)=P(f(z),C)=1.$$

要证明 $N(f(z)-a,C)=1$, 只需证明

$$N(f(z)-a,C)-P(f(z)-a,C)=\frac{\Delta_C \arg(f(z)-a)}{2\pi}=0,$$

作 $\eta=f(z)-a$, 将 z 平面上的周线 C 变换为 η 平面上的闭曲线 Γ. 由于 $|f(z)|=1$, Γ 全在圆周 $|\eta+a|=1$ 的内部. 又因为 $|a|>1$ 可知原点 $\eta=0$ 不在该圆周内部, 点 η 不会围着 $\eta=0$ 绕行, 故

$$\Delta_C \arg(f(z)-a)=0.$$

即 $f(z)=a$ 在 C 内部恰好有一个根.

习题　六 (一)/13

若 $f(z)$ 在周线 C 内部亚纯且连续到 C, 试证

(1) 若 $z\in C$ 时, $|f(z)|<1$, 则方程 $f(z)=1$ 在 C 内部根的个数, 等于 $f(z)$ 在 C 内部的极点个数.
(2) 若 $z\in C$ 时, $|f(z)|>1$, 则方程 $f(z)=1$ 在 C 内部根的个数, 等于 $f(z)$ 在 C 内部的零点个数.

(1)

$$P(f(z)-1,C)=P(f(z),C).$$

要证明 $N(f(z)-1,C)=P(f(z),C)$, 只需证明

$$N(f(z)-1,C)-P(f(z)-1,C)=\frac{\Delta_C \arg(f(z)-1)}{2\pi}=0,$$

作 $\eta=f(z)-1$, 将 z 平面上的周线 C 变换为 η 平面上的闭曲线 Γ. 由于 $|f(z)|<1$, Γ 全在圆周 $|\eta+1|=1$ 的内部. 原点 $\eta=0$ 不在该圆周内部, 点 η 不会围着 $\eta=0$ 绕行, 故

$$\Delta_C \arg(f(z)-1)=0.$$

即方程 $f(z)=1$ 在 C 内部根的个数, 等于 $f(z)$ 在 C 内部的极点个数.

(2)

作 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, 则 $|g(z)|<1$. 根据 (1) 可得方程 $g(z)=1$ 在 C 内部根的个数, 等于 $g(z)$ 在 C 内部的极点个数. 由于 $g(z)=1$ 时, $f(z)=1$, 且 $g(z)$ 的极点就是 $f(z)$ 的零点, 故方程 $f(z)=1$ 在 C 内部根的个数, 等于 $f(z)$ 在 C 内部的零点个数.

习题　六 (一)/14

设 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 内部解析, 且连续到 C, 在 C 上 $|\varphi(z)|<1$. 试证: 在 C 内部只有一个点 z_0, 使 $\varphi(z_0)=z_0$.

设 $f(z)=z$, 则 $f(z)$ 在 C 内部均解析, 且在 C 上

$$|f(z)|=|z|=1>|-\varphi(z)|.$$

根据儒歇定理可知 $f(z)$ 和 $f(z)-\varphi(z)=z-\varphi(z)$ 在 C 内有同样多的零点. 显然 $f(z)$ 在 C 内只有一个零点 $z=0$, 故方程 $\varphi(z)=z$ 在 C 内也只有一个零点. 即在 C 内部只有一个点 z_0, 使 $\varphi(z_0)=z_0$.