

MA362 — 复分析

Assignment 3

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 三/3

设函数 $f(z)$ 当 $|z - z_0| > r_0$ ($0 < r_0 < r$) 时是连续的. 令 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 在 $|z - z_0| = r > r_0$ 上的最大值, 并且假定

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} rM(r) = 0.$$

试证明

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{K_r} f(z) dz = 0.$$

在这里 K_r 是圆 $|z - z_0| = r$.

$$0 \leq \left| \int_{K_r} f(z) dz \right| \leq \int_{K_r} |f(z)| dz \leq 2\pi r M(r),$$

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_{K_r} f(z) dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} 2\pi r M(r) = 0.$$

故

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{K_r} f(z) dz = 0.$$

习题 三/4

如果满足上题中条件的函数 $f(z)$ 还在 $|z - z_0| > r_0$ 内解析, 那么对任何 $r_1 > r_0$,

$$\int_{K_{r_1}} f(z) dz = 0.$$

设 $D = \{z \mid r_1 < |z - z_0| < r\}$, 则 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 且 K_{r_1} 和 K_r 是可求长闭曲线并围成了 D , 根据柯西积分定理和推论可知

$$\int_{K_{r_1}} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{K_r} f(z) dz = 0.$$

习题 三/8

如果积分路径不经过点 $\pm i$, 那么

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad f'(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \quad (z \neq \pm i).$$

设 $D = \{z \mid z \neq \pm i\}$, 则 $f \in H(D)$.