MA362 — 复分析

Assignment 7

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题 四 (一)/14

设 D 是周线 C 的内部, 函数 $f(x)$ 在区域 D 内解析, 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上连续, 其模 $|f(z)|$ 在 C 上为常数, 试证: 若 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

当 $f(z)$ 恒等于一个常数时, 显然成立. 假设 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 且 $f(z)$ 在 D 内没有零点, 则对于 D 内的点 z_0 有 $f(z_0)\neq 0$. 由于 $f(z)$ 在闭域 $\overline{D}$ 上连续, 可知存在 m, M 使得 $m\leqslant |f(z)|\leqslant M$ 在 $\overline{D}$ 上成立. 由最小模和最大模原理可知, 对于 D 内的点 z_0, $m<|f(z_0)|<M$, 故 m 和 M 都在周线 C 上. 又由于 $|f(z)|$ 在 C 上为常数, 易知 $m=M$, 此时与 $m<|f(z_0)|<M$ 产生矛盾, 故若 $f(z)$ 不恒等于一个常数, 则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

习题 四 (二)/3

试证

(1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n=\delta$ 绝对收敛, 则

$$|\delta|\leqslant |v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|+\cdots;$$

(2) 对任一复数 z,

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|};$$

(3) 当 $0<|z|<1$ 时,

$$\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|.$$

(1)

$$|\delta_n|=\left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right|=|v_1+v_2+\cdots+v_k|,$$

$$|\xi_n|=\sum_{k=1}^{n}|v_k|=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_k|.$$

由三角不等式得

$$|\delta_n| < |\xi_n|, \quad |\delta| = \lim_{n\to\infty} |\delta_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} |\xi_n| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| + \cdots .$$

(2)

$$e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$e^{|z|} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!},$$

$$|z|e^{|z|} = |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n-1)!}.$$

当 $n \in N$ 时, $\dfrac{|z|^n}{n!} \leqslant \dfrac{|z|^n}{(n-1)!}$, 故

$$e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}.$$

设 $v_n = \dfrac{z^n}{n!}$, $\delta = e^z - 1$, 根据 (1) 易知

$$|\delta| = |e^z - 1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}.$$

(3)

由 $0 < |z| < 1$, 可知 $0 < |z|^n < 1$, $n \in N$, 故

$$|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} < |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |z| \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right],$$

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| = |z| \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}\right| = |z| \left|1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}\right| \geqslant |z| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z^{n-1}|}{n!}\right] > |z| \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right],$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

综上可得

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|.$$

习题　四 (二)/4

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n(a_0\neq 0)$ 的收敛半径 $R>0$, 且

$$M=\max_{|z|\leqslant\rho}|f(z)|\quad(\rho<R).$$

试证: 在圆

$$|z|<\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho$$

内 $f(z)$ 无零点.

由柯西不等式得

$$|a_n|=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\leqslant\frac{M}{\rho^n},$$

$$|f(z)-a_0|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_nz^n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M|z|^n}{\rho^n}=M\frac{|z|/\rho}{1-|z|/\rho}=M\frac{|z|}{\rho-|z|},$$

在圆 $|z|<\dfrac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho$ 内

$$|f(z)-a_0|\leqslant M\frac{|z|}{\rho-|z|}<M\frac{\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho}{\rho-\frac{|a_0|}{|a_0|+M}\rho}=|a_0|,$$

$$|a_0|-|f(z)|<|a_0|\Longrightarrow|f(z)|>0.$$

故 $f(z)$ 无零点.

习题　四 (二)/5

设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

试证: 当 $0\leqslant r<R$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

$$|f(re^{i\theta})|^2=f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(re^{i\theta})^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m(re^{i\theta})^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_n\overline{a_m}r^{n+m}(e^{i\theta})^{n-m}.$$

当 $n=m$ 时

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a_n\overline{a_m}r^{n+m}(e^{i\theta})^{n-m}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_n|^2r^{2n}d\theta=|a_n|^2r^{2n}.$$

当 $n \neq m$ 时

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_n\overline{a_m}r^{n+m}(e^{i\theta})^{n-m}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_n\overline{a_m}r^{n+m}\left[\cos((n-m)\theta)+i\sin((n-m)\theta)\right]d\theta = 0.$$

故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_n\overline{a_m}r^{n+m}(e^{i\theta})^{n-m}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

习题　四 (二)/9

设

(1) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $f(z) \neq$ 常数;
(2) C 为 D 内任一条周线, 只要 $\overline{I(C)}$ 全含于 D;
(3) A 为任一复数.

试证: $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 只有有限个根.

假设 $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 有无限个根, 令 $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) - A$, 则可找到一列 $\{z_n\} \to z_0$, 使得 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在其上等值, 根据唯一性定理可知 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 D 内恒等于 A, 与条件矛盾, 故 $f(z) = A$ 在 C 的内部 $I(C)$ 只有有限个根.

习题　四 (二)/10

问 $|e^z|$ 在闭圆 $z - z_0 \leqslant 1$ 上的何处达到最大? 并求出最大值.

由于 $f(z) = e^z$ 在区域 $z - z_0 \leqslant 1$ 内解析, 根据最大模原理, $|f(z)|$ 的最大值只能取在圆周 $z - z_0 = 1$ 上, 且 $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, 故

$$\max_{z-z_0\leqslant 1}|e^z| = e^{\max\limits_{z-z_0=1}\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re} z_0+1}.$$

习题　五 (一)/1

将下列各函数在指定圆环内展为洛朗级数.

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}, 0<|z|<1, 1<|z|<+\infty;$
(3) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}, 0<|z|<1$, 只要含 $\dfrac{1}{z}$ 到 z^2 各项.

(1)

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}.$$

在 $0<|z|<1$ 内, $|z|<1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \frac{2}{1-z} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} 2z^n.$$

在 $1<|z|<+\infty$ 内, $\left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{z^n}.$$

(3)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n,$$

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n \approx \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{6}.$$

习题　五 (一)/2

将下列各函数在指定点的去心邻域内展成洛朗级数, 并指出其收敛范围.

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z=i$;

(3) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $z=1$ 及 $z=\infty$.

(1)

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n,$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n\right]^2 = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n-1}.$$

收敛范围为 $0<|z-i|<2$.

(3)

以 $z=1$ 为中心时

$$e^{\frac{1}{1-z}} = e^{-\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{z-1}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}.$$

收敛范围为 $0<|z-1|<+\infty$.

以 $z=+\infty$ 为中心时

$$\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} = (-z)^{-n}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-n} = (-z)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{k}z^{-k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{k}z^{-n-k},$$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{k}z^{-n-k}.$$

收敛范围为 $1<|z|<+\infty$.