MA362 — 复分析

Assignment 8

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　五 (一)/4

求出下列函数的奇点，并确定它们的类别 (对于极点，要指出它们的阶)，对无穷远点也要加以讨论.

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$;

(2) $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$;

(7) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

(8) $\dfrac{1}{e^z-1}$.

(1)

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}=0.$$

故 1 是一阶极点，$\pm 2i$ 是二阶极点，∞ 是可去奇点.

(2)

$$\sin z+\cos z=\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$(\sin z+\cos z)'=\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right),$$

故 $k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in Z)$ 是 $\sin z+\cos z$ 的一阶零点，即 $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$ 的一阶极点.

$$\frac{1}{\sin z+\cos z}=\frac{1}{\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)},$$

故可找到一列 z_n 使得 $\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，故 ∞ 是非孤立奇点.

(7)

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{z\to 0} z^2\left(1-\cos\frac{1}{z}\right)=0,$$

故 0 是可去奇点, ∞ 是可去奇点.

(8)

当 $z=2k\pi i$ 时, $e^z-1=e^{2k\pi i}-1=0$, $(e^z-1)'=e^z=e^{2k\pi i}=1$, 故 $2k\pi i(k\in Z)$ 是一阶极点.
可找到一列 $\{z_n\}$, 使得 $e^{z_n}-1=0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$, 故 ∞ 是非孤立奇点.

习题　五 (一)/5

下列函数在指定点的去心邻域内能否展为洛朗级数.

(1) $\cos\frac{1}{z}$, $z=0$;

(3) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, $z=0$.

(1)

$$\left(\cos\frac{1}{z}\right)'=\frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2},$$

在 $z=0$ 的邻域都有定义, 故 0 是孤立奇点, 可展为洛朗级数.

(3)

可找到一列 $\{z_n\}$, 使得 $\sin\frac{1}{z_n}=0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, 故 0 是非孤立奇点, 不可展为洛朗级数.

习题　五 (一)/8

判定下列函数的奇点及其类别 (包括无穷远点).

(1) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$;

(3) $\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$;

(5) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

(1)

根据 4(8) 可知, $2k\pi i(k \in Z)$ 是 $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的一阶极点, ∞ 是 $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的非孤立奇点. 同时 0 是 $\dfrac{1}{z}$ 的一阶极点, ∞ 是 $\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点. 故只需讨论 $z=0$ 的情况.

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z}{(z+2)e^z}=\lim_{z\to 0}\frac{-1}{z+2}=-\frac{1}{2},$$

故 0 是可去奇点, $2k\pi i(k\in Z, k\neq 0)$ 是一阶极点, ∞ 是非孤立奇点.

(3)

0 是 $\sin\dfrac{1}{z}$ 的本质奇点, 是 $\dfrac{1}{z^2}$ 的二阶极点, 综上可得 0 是本质奇点.

$$\lim_{z\to\infty}\left(\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)=0,$$

故 ∞ 是可去奇点.

(5)

根据 4(8) 可知, $2k\pi i(k \in Z)$ 是 $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的一阶极点, ∞ 是 $\dfrac{1}{e^z-1}$ 的非孤立奇点. 同时 1 是 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的本质奇点, ∞ 是 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的可去奇点. 综上可得 $2k\pi i(k\in Z)$ 是一阶极点, 1 是本质奇点, ∞ 是非孤立奇点.

习题　五 (一)/9

试证: 在扩充 z 平面上解析的函数 $f(z)$ 必为常数.

假设非常数整函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上解析, 则无穷远点必为可去奇点, 即 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a$ 成立. 根据极限的定义可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $|z|\geqslant N$ 时, $|f(z)-a|<\varepsilon$, 即 $|f(z)|<\varepsilon+|a|$. 又因为 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant N$ 内解析, 根据最大模定理可知 $\max\limits_{|z|<N}|f(z)|<\max\limits_{|z|=N}|f(z)|<\varepsilon+|a|$. 由 ε 取值的任意性可知 $|f(z)|$ 在整个 z 平面上有界, 和刘维尔定理矛盾, 故得证.

习题　五 (一)/10

刘维尔定理的几何意义是 “非常数整函数的值不能全含于一圆之内”, 试证明: 非常数整函数的值不能全含于一圆之外.

假设非常数整函数的值 $f(z)$ 能全含于圆 $|z-a|=R$ 外, 即 $|f(z)-a|>R$, 设 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-a}$, 显然 $g(z)$ 也是非常数整函数, 且 $|g(z)|<\dfrac{1}{R}$. 根据刘维尔定理可知有界整函数必为常数, 产生矛盾, 故得证.

习题 五 (二)/12

设解析函数 $f(z)$ 在扩充 z 平面上只有孤立奇点, 则奇点的个数必为有限个. 试证之.

不需要考虑无穷远点, 只需证明 z 平面上奇点的个数为有限个即可. 假设有限区域 D 内包括了 z 平面上所有奇点, 且它们都是孤立的. 任取其中一个奇点, 它的半径 R 的去心邻域内一定没有其它奇点, 此时易知区域 D 内最多容纳 $S_D/\pi R^2$ 个符合条件的奇点. 任取 $R \to 0$ 的值, 孤立奇点的上限总是有限个, 否则一定会产生聚点, 与题设矛盾, 故得证.