MA326 复分析 作业一

刘逸灏 515370910207

2019 年 9 月 22 日

习题　2.1/1

(i)

对于任意 $z \in \mathbf{C}$ 有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{|z+h|-|z|}{h} = \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h(|z+h|+|z|)} = \frac{z\bar{h}+\bar{z}h+|h|^2}{h(|z+h|+|z|)}.$$

当 $z \neq 0$ 时

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z\bar{h}+\bar{z}h}{2|z|h} = \lim_{h\to 0}\frac{z\bar{h}/h+\bar{z}}{2|z|}.$$

如果让 h 取实数, 则上述极限为 $\dfrac{z+\bar{z}}{2|z|}$; 如果让 h 取纯虚数, 则上述极限为 $\dfrac{-z+\bar{z}}{2|z|}$.

当 $z = 0$ 时

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2}{h|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

如果让 h 取实数, 则上述极限为 1; 如果让 h 取纯虚数, 则上述极限为 -1.

因此, 当 $h \to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbf{C}$ 中处处不可微.

(ii)

对于任意 $z \in \mathbf{C}$ 有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \frac{z\bar{h}+\bar{z}h+|h|^2}{h}.$$

当 $z \neq 0$ 时

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z\bar{h}+\bar{z}h}{h} = \lim_{h\to 0}(z\bar{h}/h+\bar{z}).$$

如果让 h 取实数, 则上述极限为 $z+\bar{z}$; 如果让 h 取纯虚数, 则上述极限为 $-z+\bar{z}$.

当 $z = 0$ 时

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2}{h} = 0.$$

因此, 当 $z \neq 0$,$h \to 0$ 时上述极限不存在, 因而仅在 $z = 0$ 处可微.

(iii)

对于任意 $z \in \mathbf{C}$ 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z+h)-\mathrm{Re}(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}(h)}{h}.$$

如果让 h 取实数, 则上述极限为 1; 如果让 h 取纯虚数, 则上述极限为 0.
因此, 当 $h\to 0$ 时上述极限不存在, 因而在 $\mathbf{C}$ 中处处不可微.

(v)

设 $f(z)=z_0$, 对于任意 $z\in\mathbf{C}$ 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{z_0-z_0}{h}=0.$$

因此, 当 $h\to 0$ 时上述极限存在, 因而在 $\mathbf{C}$ 中处处可微.

习题　2.1/2

由 f 和 g 都在 z_0 处可微有

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

$$g'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

由 $f(z_0)=g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$ 可得

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}.$$

习题　2.1/4

对于任意 $z\in\mathbf{G}$ 有 $\bar{z}\in\mathbf{D}$, 设 $z+h\in\mathbf{G}$, 则 $\overline{z+h}\in\mathbf{D}$. 由 f 是 $\mathbf{D}$ 上的全纯函数可得

$$f'(\bar{z})=\lim_{\bar{h}\to 0}\frac{f(\overline{z+h})-f(\bar{z})}{\bar{h}},$$

$$\overline{f'(\bar{z})}=\overline{\lim_{\bar{h}\to 0}\frac{f(\overline{z+h})-f(\bar{z})}{\bar{h}}}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{f(\overline{z+h})-f(\bar{z})}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{f(\overline{z+h})}-\overline{f(\bar{z})}}{h}.$$

因此 $\overline{f(\bar{z})}$ 是 $\mathbf{G}$ 上的全纯函数.

习题　2.2/1

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 由 $f\in H(D)$ 可知

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

因此 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都为常数, 因而 f 是一常数.

习题　2.2/2

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 由 $f\in H(D)$ 可知

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(i)

由 $\operatorname{Re} f(z)$ 是常数可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

因此 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都为常数, 因而 f 是一常数.

(ii)

由 $\operatorname{Im} f(z)$ 是常数可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

因此 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都为常数, 因而 f 是一常数.

(iii)

由 $|f(z)|$ 是常数 $k \in \mathbf{R}$ 可得

$$u^2(x,y) + v^2(x,y) = k^2.$$

若 $k = 0$ 易知 $u(x,y) = v(x,y) = 0, f(z) = 0$.
若 $k = 0$ 且存在, 分别对 x, y 求偏导可得

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} = u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} = u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

解方程组可得

$$\left[u^2(x,y) + v^2(x,y)\right]\frac{\partial u}{\partial x} = \left[u^2(x,y) + v^2(x,y)\right]\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

易知 $u(x,y)$ 是常数, 由 (i) 可得 f 为常数. 因而 f 是一常数.

(iv)

由 $\arg f(z)$ 是常数 $k \in \mathbf{R}$ 可得

$$\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = \arctan k.$$

若 $\arctan k = 0$ 或无穷易知 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$ 是常数, 由 (i)(ii) 可得 f 为常数.
若 $\arctan k \neq 0$ 且存在, 分别对 x, y 求偏导可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \arctan k\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \arctan k\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

解方程组可得

$$(1 + \arctan^2 k)\frac{\partial u}{\partial x} = (1 + \arctan^2 k)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

易知 $u(x,y)$ 是常数, 由 (i) 可得 f 为常数. 因而 f 是一常数.

习题 2.2/3

习题 2.2/4

习题 2.2/5

习题 2.2/8