MA362 — 复分析

Assignment 5

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　三 (一)/15

设函数 $f(z)$ 在 z 平面上解析, 且 $|f(z)|$ 恒大于一个正的常数, 试证 $f(z)$ 必为常数.

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{f'(z)}{f(z)^2}.$$

由 $|f(z)|$ 恒大于一个正的常数可知 $f(z) \neq 0$, 故 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 z 平面上解析, 为整函数, 且 $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|$ 恒小于一个正的常数, 即 $\dfrac{1}{f(z)}$ 有界. 故根据刘维尔定理可知 $\dfrac{1}{f(z)}$ 为常数, 即 $f(z)$ 为常数.

习题　三 (一)/16

分别由下列条件求解析函数 $f(z) = u + iv$.

(1) $u = x^2 + xy - y^2, \quad f(i) = -1 + i;$

(2) $u = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0.$

(1)

$$u_x = 2x + y, \quad u_{xx} = 2, \quad u_y = x - 2y, \quad u_{yy} = -2.$$

故 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,y)$ 为调和函数. 根据柯西黎曼方程得

$$v_y = u_x = 2x + y,$$

$$dv(x,y) = v_x dx + v_y dy = -u_x dx + u_x dy \Longrightarrow v = \int u_x dy + \varphi(x) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x),$$

$$v_x = 2y + \varphi'(x) = -u_y = -x + 2y,$$

$$\varphi'(x) = -x \Longrightarrow \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C,$$

代入初值条件 $f(i) = -1 + i$,

$$v(0,1) = \frac{1}{2} + C = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{2},$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2},$$

$$f(z)=x^2+xy-y^2+i\left(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{i}{2}\right)z^2+\frac{i}{2}.$$

(2)

$$u_x=e^x[(1+x)\cos y-y\sin y],\quad u_{xx}=e^x[(2+x)\cos y-y\sin y],$$

$$u_y=-e^x[y\cos y+(1+x)\sin y],\quad u_{yy}=e^x[-(2+x)y\cos y+y\sin y].$$

故 $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u(x,y)$ 为调和函数. 根据柯西黎曼方程得

$$v_y=u_x=e^x[(1+x)\cos y-y\sin y],$$

$$dv(x,y)=v_xdx+v_ydy=-u_xdx+u_xdy\Longrightarrow v=\int u_xdy+\varphi(x)=e^x(y\cos y+x\sin y)+\varphi(x),$$

$$v_x=e^x[y\cos y+(1+x)\sin y]+\varphi'(x)=-u_y=e^x[y\cos y+(1+x)\sin y],$$

$$\varphi'(x)=0\Longrightarrow\varphi(x)=C,$$

$$v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+C,$$

代入初值条件 $f(0)=0$,

$$v(0,0)=\frac{1}{2}+C=0\Longrightarrow C=0,$$

$$v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y),$$

$$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)=e^x(x+yi)(\cos y+i\sin y)=ze^z.$$

习题 三 (一)/17

设函数 $f(x)$ 在区域 D 内解析, 试证

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

由 $f\in H(D)$ 可知

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z),\quad\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0.$$

由 $\overline{f(\bar z)}\in H(D)$ 由此可知

$$\overline{f(\overline{z_0+\Delta z})}-\overline{f(\overline{z_0})}=\frac{\partial\bar f}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|).$$

$$\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}=\overline{f'(z)},\quad\frac{\partial\bar f}{\partial z}=0.$$

故

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2\\
&=\Delta|f(z)\overline{f(z)}|\\
&=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}|f(z)\overline{f(z)}|\\
&=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}|f(z)\overline{f(z)}|\\
&=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}|f'(z)||\overline{f(z)}|\\
&=4|f'(z)||\overline{f'(z)}|\\
&=4|f'(x)\overline{f'(x)}|\\
&=|f'(x)|^2.
\end{aligned}
$$

习题　三 (一)/18

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $f'(z)\neq 0$, 试证 $\ln|f'(z)|$ 为区域 D 内的调和函数.

由 $f(z)\in H(D)$ 可知 $f'(z)\in H(D)$, $f''(z)\in H(D)$, 且

$$(\ln f'(z))'=\frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

由 $f'(z)\neq 0$ 可知 $\ln f'(z)\in D$, 又因为

$$\ln f'(z)=\ln|f'(z)|+i\arg f'(z)+2k\pi i,$$

故 $u=\ln|f'(z)|$ 为 $\ln f'(z)$ 的实部, 为调和函数.

习题　三 (二)/1

设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析, 且沿任何圆周 $C:|z|=r, 0<r<1$ 的积分值为零. 问 $f(z)$ 是否必须在 $z=0$ 处解析? 试举例证明之.

设 $g(z)=\sin z$, D 为 C 围成的区域, 则 $g\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分定理得

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$g(0)=0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi.$$

故只需取 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, 显然 $f(z)$ 在 $x=0$ 不解析也满足条件.

习题　三 (二)/14

设 $f(z)$ 为非常数的整函数, 又设 R, M 为任意正数, 试证: 满足 $|z| > R$ 且 $|f(z)| > M$ 的 z 必存在.

假设存在 R, M 使得当 $|z| > R$ 时, $|f(z)| \leqslant M$. 由 $f(z)$ 是整函数可知在 $|z| \in [0, R]$ 时, $\sup\limits_{|z|\in[0,R]} |f(z)| = M'$ 存在. 故在整个 z 平面上, $f(z) \leqslant \max\{M, M'\}$, 即有界. 根据刘维尔定理可知 $f(z)$ 为常数, 与题设矛盾, 故得证.

习题　三 (二)/15

已知 $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) - 2(x + y)$, 试确定解析函数 $f(z) = u + iv$.

由 $f(z)$ 解析可知 u, v 都为调和函数

$$\begin{cases} u_x + v_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - 2, \\ u_y + v_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2 - 2. \end{cases}$$

根据柯西黎曼方程得

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

$$\begin{cases} u_x - u_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - 2, \\ u_x + u_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2 - 2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 - 2, \\ u_y = -6xy. \end{cases}$$

$$u = \int u_y dy + \varphi(x) = \int -6xydy + \varphi(x) = -3xy^2 + \varphi(x),$$

$$u_x = -3y^2 + \varphi'(x) = 3x^2 - 3y^2 - 2,$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2 \Longrightarrow \varphi(x) = x^3 - 2x + C, \quad C \in R.$$

故

$$u(x, y) = x^3 - 2x - 3xy^2 + C,$$

$$v(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) - 2(x + y) - u(x, y) = -y^3 - 2y + 3x^2y - C,$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 2x - 3xy^2 + C + i(-y^3 - 2y + 3x^2y - C) = z^3 - 2z + (1 - i)C.$$