MA362 — 复分析

Assignment 3

Instructor: 姚卫红

Author: 刘逸灏 (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　三/3

设函数 $f(z)$ 当 $|z-z_0|>r_0(0<r_0<r)$ 时是连续的. 令 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 在 $|z-z_0|=r>r_0$ 上的最大值, 并且假定

$$\lim_{r\to+\infty} rM(r)=0.$$

试证明

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{K_r} f(z)dz=0.$$

在这里 K_r 是圆 $|z-z_0|=r$.

$$0\leqslant\left|\int_{K_r} f(z)dz\right|\leqslant\int_{K_r}|f(z)|dz\leqslant 2\pi rM(r),$$

$$0\leqslant\lim_{r\to+\infty}\left|\int_{K_r} f(z)dz\right|\leqslant\lim_{r\to+\infty}2\pi rM(r)=0.$$

故

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{K_r} f(z)dz=0.$$

习题　三/4

如果满足上题中条件的函数 $f(z)$ 还在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析, 那么对任何 $r_1>r_0$,

$$\int_{K_{r_1}} f(z)dz=0.$$

设 $D=\{z\mid r_1<|z-z_0|<r\}$, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 且 K_{r_1} 和 K_r 是可求长闭曲线并围成了 D, 根据柯西积分定理和推论可知

$$\int_{K_{r_1}} f(z)dz=\lim_{r\to+\infty}\int_{K_r} f(z)dz=0.$$

习题　三/8

如果积分路径不经过点 $\pm i$, 那么

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right), \quad f'(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \quad (z \neq \pm i).$$

设 $D = \{z \mid z \neq \pm i\}$, 则 $f \in H(D)$. 若积分路径不围绕 $\pm i$, 则积分值可以按照延实轴积分计算:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

若积分路径围绕 i 点 k_1 圈 (γ_1), 围绕 $-i$ 点 k_2 圈 (γ_2), 其中 $k_1, k_2 \in Z$, 则积分值为:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2i}(2k_1\pi i - 2k_2\pi i) = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

习题　三/9

证明:

(1) $\left|\int_C (x^2 + iy^2) dz\right| \leqslant 2$, C 为联 $-i$ 到 i 的线段;

(2) $\left|\int_C (x^2 + iy^2) dz\right| \leqslant \pi$, C 为右半单位圆 $|z| = 1, \operatorname{Re} z \geqslant 0$;

(3) $\left|\int_C \frac{1}{z^2} dz\right| \leqslant 2$, C 为联 i 到 $i+1$ 的线段;

(1)

$$x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \Longrightarrow |x^2 + iy^2| \leqslant 1.$$

$$L = 2, \quad M = \sup_{z \in C} |f(z)| = \sup_{z \in C} |x^2 + iy^2| = 1.$$

故根据长大不等式得

$$\left|\int_C (x^2 + iy^2) dz\right| \leqslant ML = 2.$$

(2)

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \Longrightarrow |x^2 + iy^2| \leqslant \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

$$L = \pi, \quad M = \sup_{z \in C} |f(z)| = \sup_{z \in C} |x^2 + iy^2| = 1.$$

故根据长大不等式得

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \leqslant ML = \pi.$$

(3)

$$1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2} \Longrightarrow \left|\frac{1}{z^2}\right| \leqslant 1.$$

$$L = 1, \quad M = \sup_{z\in C}|f(z)| = \sup_{z\in C}\left|\frac{1}{z^2}\right| = 1.$$

故根据长大不等式得

$$\left|\int_C \frac{1}{z^2}dz\right| \leqslant ML = 1 \leqslant 2.$$

习题　三/11

计算积分

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$;

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$;

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2}$;

(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$;

(1)

设 $f(z) = e^z$, γ 为 $|z| = 1$, D 为 γ 围成的域, 则 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分公式得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - 0}d\xi = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i.$$

(3)

设 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2}$, γ 为 $|z| = 2$, 则 γ 内有两个奇点 $\sqrt{2}i$ 和 $-\sqrt{2}i$, 则

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-\sqrt{2}i} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z+\sqrt{2}i}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(2\pi i - 2\pi i) = 0.$$

(3)

设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2}$, γ 为 $|z|=1$, D 为 γ 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西定理得

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2}=0.$$

(4)

设 $f(z)=\dfrac{z}{(2z+1)(z-2)}$, γ 为 $|z|=2$, 则 γ 内有一个奇点 $-1/2$, 则

$$\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}=\frac{1}{5}\left(\int_{|z|=1}\frac{dz}{2z+1}+\int_{|z|=1}\frac{2dz}{z-2}\right)=\frac{1}{10}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z+1/2}=\frac{1}{10}\cdot 2\pi i=\frac{1}{5}\pi i.$$

习题　三/13

设

$$f(z)=\int_{|\xi|=3}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi,$$

求 $f'(1+i)$.

设 $g(z)=3z^2+7z+1$, γ 为 $|z|=3$, D 为 γ 围成的域, $1+i\in D$, 则 $g\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分公式得

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=3}\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$f(z)=2\pi i\cdot g(z)=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

$$f'(1+i)=2\pi i(6+6i+7)=-12\pi+26\pi i.$$

习题　三/16

如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析, 并且 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$, 那么对任何正数 $r>r_0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(z)dz=A,$$

在这里 K_r 是圆 $|z-z_0|=r$, 积分是按反时针方向取的.

设 $R>r>r_0$, D 为 K_r 和 K_R 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}f(z)dz=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}f(z)dz.$$

根据柯西积分定理得

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{A}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{A}{z}dz.$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)dz - A\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\lim_{r\to\infty}\left(f(z)-\frac{A}{z}\right)dz\right| = 0.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)dz = A.$$

习题　三/17

如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的外区域 D 内及 C 上每一点解析, 并且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} -f(z)+a & (\text{当}z\in D\text{时}), \\ a & (\text{当}z\in C\text{的内区域时}), \end{cases}$$

这里沿 C 的积分是按反时针方向取的.

根据柯西积分定理得

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{a}{\xi - z}d\xi,$$

其中 K_r 是圆 $|\xi - z| = r$.

设 $K_R \in D$, D' 为 D 和 K_R 围成的域, 则 $f \in H(D')\cap C(\overline{D'})$, γ 为 K_R 和 C 组成,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - a\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}\lim_{R\to\infty}\frac{f(\xi)-a}{\xi - z}d\xi\right| = 0.$$

当 $z \in D$ 时, 根据柯西积分定理得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{K_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi + \int_{C^-}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - f(z) = -f(z) + a.$$

当 $z \in C$ 的内区域时, 根据柯西积分定理得

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{K_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi + \int_{C^-}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = a.$$

故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} -f(z)+a & (\text{当}z\in D\text{时}), \\ a & (\text{当}z\in C\text{的内区域时}). \end{cases}$$