MA362 — 复分析

Assignment 4

Instructor: **姚卫红**

Author: **刘逸灏** (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

习题　二 (一)/11

试证

(1) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$;

(3) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$.

(1)

设 $z = x + yi$

$$\overline{e^z} = \overline{e^{x+yi}} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x \overline{\cos y + i \sin y} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}.$$

(3)

$$\overline{\cos z} = \overline{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{2}\overline{e^{iz}} + \frac{1}{2}\overline{e^{-iz}} = \frac{1}{2}e^{i\bar{z}} + \frac{1}{2}e^{-i\bar{z}} = \cos \bar{z}.$$

习题　二 (一)/13

试求下面各式之值

(1) e^{3+i};

(2) $\cos(1 - i)$.

(1)

$$e^{3+i} = e^3(cos 1 + i \sin 1) = e^3 \cos 1 + ie^3 \sin 1.$$

(2)

$$\cos(1-i) = \frac{1}{2}e^{i(1-i)} + \frac{1}{2}e^{-i(1-i)} = \frac{1}{2}[e(\cos 1 + i \sin 1) + e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)] = (e + e^{-1}) \cos 1 + i(e - e^{-1}) \sin 1.$$

习题　二 (一)/20

试解方程:

(1) $e^z = 1+\sqrt{3}i$;
(2) $\ln z = \dfrac{\pi i}{2}$;
(3) $1+e^z=0$.

(1)

$$z=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)=\ln|1+\sqrt{3}|+i\arg(1+\sqrt{3})+2k\pi i=\ln 2+\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi i,\quad k\in Z.$$

(2)

$$z=e^{\frac{\pi i}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

(3)

$$e^z=-1,$$

$$z=\ln(-1)=\ln|1|+i\arg(-1)+2k\pi i=(2k+1)\pi i,\quad k\in Z.$$

习题　二 (一)/21

设 $z=re^{i\theta}$, 试证

$$\mathrm{Re}[\ln(z-1)]=\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2-2r\cos\theta\right).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\ln(z-1)]&=\ln|z-1|=\ln|re^{i\theta}-1|\\&=\ln|r\cos\theta+ir\sin\theta-1|\\&=\ln\sqrt{r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+1+r^2\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2-2r\cos\theta\right).\end{aligned}$$

习题　二 (一)/22

设 $w=\sqrt[3]{z}$ 确定在从原点 $z=0$ 起沿正实轴割破了的 z 平面上, 并且 $w(i)=-i$, 试求 $w(-i)$ 之值.

设

$$w(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

代入得

$$w(i) = \sqrt[3]{|i|} e^{i\frac{\arg i + 2k\pi}{3}} = e^{i\frac{(2k+1/2)\pi}{3}} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i,$$

$$\frac{2k+1/2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow k = 2.$$

故

$$w(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 4\pi}{3}},$$

$$w(-i) = \sqrt[3]{|-i|} e^{i\frac{\arg(-i) + 4\pi}{3}} = e^{i\frac{(4+3/2)\pi}{3}} = e^{i\frac{11}{6}\pi} = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

习题　二 (一)/23

设 $w = \sqrt[3]{z}$ 确定在从原点 $z = 0$ 起沿负实轴割破了的 z 平面上，并且 $w(-2) = -\sqrt[3]{2}$(这是边界上岸点对应的函数值)，试求 $w(i)$ 之值.

设

$$w(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

代入得

$$w(-2) = \sqrt[3]{|-2|} e^{i\frac{\arg(-2) + 2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2},$$

$$\frac{2k+1}{3}\pi = \pi \Longrightarrow k = 1.$$

故

$$w(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2\pi}{3}},$$

$$w(i) = \sqrt[3]{|i|} e^{i\frac{\arg i + 2\pi}{3}} = e^{i\frac{(2+1/2)\pi}{3}} = e^{i\frac{5}{6}\pi} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

习题　二 (一)/24

试求 $(1+i)^i$ 和 3^i 之值.

$$(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i]} = e^{-(2k+1/4)\pi} e^{i\ln\sqrt{2}}, \quad k \in Z.$$

$$3^i = e^{i\mathrm{Ln}3} = e^{i(\ln|3| + i\arg 3 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi} e^{i\ln 3}, \quad k \in Z.$$

习题 三 (一)/8

由积分 $\int_C \frac{dz}{z+2}$ 之值证明

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0,$$

其中 C 取单位圆周 $|z|=1$.

设 $f(z)=\frac{1}{z+2}$, D 为 C 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西定理得

$$\int_C \frac{dz}{z+2} = 0.$$

设 $z=e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z+2} &= \int_C \frac{de^{i\theta}}{e^{i\theta}+2} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{i\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + 2 + i\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(i\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + 2 - i\sin\theta)}{(\cos\theta + 2 + i\sin\theta)(\cos\theta + 2 - i\sin\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{i(1+2\cos\theta) - 2\sin\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-2\sin\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

由于 $\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 是周期为 2π 的周期函数

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

由于 $\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 是偶函数

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

习题 三 (一)/9

计算 $(C:|z|=2)$:

(1) $\int_C \frac{2z^2-z+1}{z-1} dz$;

(2) $\int_C \frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2} dz$;

(1)

设 $f(z)=2z^2-z+1$, D 为 C 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分定理得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$\int_C\frac{2z^2-z+1}{z-1}dz=\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-1}d\xi=2\pi i\cdot f(1)=4\pi i.$$

(1)

设 $f(z)=2z^2-z+1$, D 为 C 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分定理得

$$f'(z)=4z-1=\frac{1!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi,$$

$$\int_C\frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2}dz=\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-1)^2}d\xi=2\pi i\cdot f'(1)=6\pi i.$$

习题　三 (一)/10

计算积分:

$$\int_{C_j}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz\quad (j=1,2,3),$$

(1) $C_1:|z+1|=\dfrac{1}{2}$;
(2) $C_2:|z-1|=\dfrac{1}{2}$;
(3) $C_3:|z|=2$.

设 $f(z)=\sin\frac{\pi}{4}z$, D_j 为 C_j 围成的域, 则 $f\in H(D_j)\cap C(\overline{D_j})$, 根据柯西积分定理得

$$\int_{C_j}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz=\int_{C_j}\sin\frac{\pi}{4}z\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz=\frac{1}{2}\int_{C_j}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_j}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}dz.$$

(1)

1 在 C_1 内, -1 在 C_1 外, 根据柯西定理得

$$\int_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}dz=0.$$

根据柯西积分定理得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$\int_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\xi}{\xi-1}d\xi=\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-1}d\xi=2\pi i\cdot f(1)=\sqrt{2}\pi i,$$

$$\int_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}dz=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(2)

-1 在 C_2 内, 1 在 C_2 外, 根据柯西定理得

$$\int_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}dz=0.$$

根据柯西积分定理得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$\int_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\xi}{\xi+1}d\xi=\int_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi+1}d\xi=2\pi i\cdot f(-1)=-\sqrt{2}\pi i,$$

$$\int_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}dz=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

(3)

$-1, 1$ 在 C_3 内, 同 (1), (2) 可得

$$\int_{C_3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\xi}{\xi-1}d\xi=\sqrt{2}\pi i,$$

$$\int_{C_3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\xi}{\xi+1}d\xi=-\sqrt{2}\pi i,$$

$$\int_{C_3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\int_{C_3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\int_{C_3}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}dz=\sqrt{2}\pi i.$$

习题　三 (一)/11

求积分

$$\int_C\frac{e^z}{z}dz(C:|z|=1),$$

从而证明

$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.$$

设 $f(z)=e^z$, D 为 C 围成的域, 则 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分公式得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-0}d\xi=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i.$$

设 $z=e^{i\theta}$

$$2\pi i=\int_C\frac{e^z}{z}dz=\int_C\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{e^{i\theta}}d\theta,$$

$$2\pi=\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi,\quad \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta=0.$$

由于 $e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$ 是周期为 2π 的周期函数

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi.$$

由于 $e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$ 是偶函数

$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.$$

习题　三 (一)/12

> 设 C 表圆周 $x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$, 求 $f'(1+i)$.

设 $g(z)=3z^2+7z+1$, D 为 C 围成的域, $1+i\in D$, 则 $g\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 根据柯西积分公式得

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=3}\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

$$f(z)=2\pi i\cdot g(z)=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

$$f'(1+i)=2\pi i(6+6i+7)=-12\pi+26\pi i.$$

习题　三 (一)/13

> 设 $C:z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 为区域 D 内的光滑曲线, $f(z)$ 于区域 D 内单叶解析且 $f'(z)\neq 0$, $\omega=f(z)$ 将 C 映射成曲线 Γ, 求证 Γ 亦为光滑曲线.

$z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 为光滑曲线的充要条件为 $\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1\neq t_2$ 时, $z(t_1)\neq z(t_2)$, 且 $z'(t)\neq 0$ 并连续于 $[\alpha,\beta]$.

现要证明 $\Gamma:\omega=\omega(t)=f(z(t))(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 为光滑曲线.
首先, $\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $t_1\neq t_2$ 时, $z(t_1)\neq z(t_2)$, 由于 $f(z)$ 于区域 D 内单叶, $f(z(t_1))\neq f(z(t_2))$.
其次, $w'(t)=[f(z(t))]'=f'(z)z'(t)\neq 0$, 且由 $f(z)$ 于区域 D 内解析得 $f'(z)$ 连续于 $[\alpha,\beta]$, 故 $w'(t)$ 连续于 $[\alpha,\beta]$.
综上可得 Γ 为光滑曲线.