**MA426 — 微分几何**

*Assignment 1*

Instructor: **陈优民**

Author: **刘逸灏** (515370910207)

— SJTU (Fall 2019)

## 习题 2.1/4

求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \quad z \geqslant 0, \\ x^2+y^2=x \end{cases}$$

的参数方程

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

设 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$, 并代入第一个方程

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2+z^2=1, \quad z \geqslant 0,$$

$$z^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}(\cos^2 t+\sin^2 t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t=\sin^2\frac{t}{2}, \quad z=\sin\frac{t}{2}.$$

故曲线的参数方程为

$$\mathbf{r}(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \sin\frac{t}{2}\right).$$

## 习题 2.1/6

设空间 $E^3$ 中一条正则参数曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的切向量 $\mathbf{r}'(t)$ 与一个固定的方向向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直. 证明: 该曲线落在一个平面内.

假设该曲线不落在一个法向量为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平面上, 即存在点 $t_0$ 使得 $\mathbf{r}'(t_0)$ 不与该平面平行, 显然这与题设条件矛盾, 故该曲线落在该平面内.

## 习题　2.2/1

求下列曲线在指定范围内的弧长:

(4) 曳物线 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \log(\sec t + \tan t) - \sin t), \quad [0, t_0]$;

(5) 曲线 $y = x^2/2a, z = x^3/6a^2$ 在原点 $O(0,0,0)$ 和点 $p(x_0, y_0, z_0)$ 之间.

**(4)**

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \log(\sec t + \tan t) - \sin t),$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(-\sin t, \frac{\tan t \sec t + \sec^2 t}{\sec t + \tan t} - \cos t\right) = (-\sin t, \sec t - \cos t),$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + (\sec t - \cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \sec^2 t - 2 + \cos^2 t} = |\tan t|,$$

$$\int_0^{t_0} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{t_0} |\tan t| dt = -\ln \cos t_0, \quad t_0 < \frac{\pi}{2}.$$

**(5)**

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2a}, \frac{t^3}{6a^2}\right), \quad t \in [0, x_0].$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(1, \frac{t}{a}, \frac{t^2}{2a^2}\right),$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2} + \frac{t^4}{4a^4}} = \frac{t^2}{2a^2} + 1,$$

$$\int_0^{x_0} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{x_0} \left(\frac{t^2}{2a^2} + 1\right) dt = \frac{x_0^3}{6a^2} + x_0.$$

## 习题　2.2/5

求曲线 $\mathbf{r}(t) = (t^3/3, t^2/2, t)$ 上其切线平行于平面 $x + 3y + 2z = 0$ 的点.

$$\mathbf{r}(t) = (t^3/3, t^2/2, t),$$

$$\mathbf{r}'(t) = (t^2, t, 1).$$

在平面 $x + 3y + 2z = 0$ 上取两不平行向量 $(0, 2, -3)$, $(2, 0, -1)$ 可得到平面的一个法向量

$$\mathbf{n} = (0, 2, -3) \times (2, 0, -1) = (-2, -6, -4) \propto (1, 3, 2).$$

当 $\mathbf{r}'(t)$ 与平面平行时, 与平面法向量垂直

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = t^2 + 3t + 2 = 0,$$

$$t = -1 \quad \text{或} \quad t = -2.$$

故切线平行于平面的点为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -1\right)$ 和 $\left(-\frac{8}{3}, 2, -2\right)$.