VE311 Homework 1

Liu Yihao 515370910207

Problem 1.

This problem is written in C++, with CMake and the GNU Multiple Precision Arithmetic (GMP) Library in order to simplify the calculation.

For the calculation of π, Bailey-Borwein-Plouffe Formula is used

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

For the calculation of e, Taylor series is used

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Note that the last digit is fixed in the program. The code and results are attached at the end of the report.

Problem 2.

According to the Peano axioms, we know these definitions of natural numbers:

1. 0 is a natural number.
2. For every natural number x, $x = x$. That is, equality is reflexive.
3. For all natural numbers x and y, if $x = y$, then $y = x$. That is, equality is symmetric.
4. For all natural numbers x, y and z, if $x = y$ and $y = z$, then $x = z$. That is, equality is transitive.
5. For all a and b, if b is a natural number and $a = b$, then a is also a natural number. That is, the natural numbers are closed under equality.

The remaining axioms define the arithmetical properties of the natural numbers. The naturals are assumed to be closed under a single-valued "successor" function S, such that $S(n) = n + 1$.

1. For every natural number n, $S(n)$ is a natural number.
2. For all natural numbers m and n, $m = n$ if and only if $S(m) = S(n)$. That is, S is an injection.
3. For every natural number n, $S(n) = 0$ is false. That is, there is no natural number whose successor is 0.

Addition is a function that maps two natural numbers (two elements of N) to another one. It is defined recursively as:

$$a + 0 = a$$
$$a + S(b) = S(a + b)$$

Then we can demonstrate $1 + 1$ algebraically

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1 + S(0) \\ &= S(1 + 0) \\ &= S(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Problem 3.

1. Since the voltage source is steady, we can treat the capacitor as open circuit and the inductor as short circuit.

$$V_L = 0$$

2. First, suppose V_2 doesn't exists.

$$V_0 = 123\angle 90^\circ\,\mathrm{V}, \omega = 377\,\mathrm{rad/s}$$

$$i_1 = \frac{V_0}{3 + \frac{2j\omega(4+2/j\omega)}{2j\omega+4+2/j\omega}}$$

$$i_L = i_1 \cdot \frac{4 + 2/j\omega}{2j\omega + 4 + 2/j\omega} = \frac{(4 + 2/j\omega)V_0}{3(2j\omega + 4 + 2/j\omega) + 2j\omega(4 + 2/j\omega)} = \frac{(4 + 2/j\omega)V_0}{14j\omega + 16 + 6/j\omega}$$

$$i_L = 0.096\angle 0.098^\circ\,\mathrm{A}$$

Second, suppose V_0 doesn't exists. Since the voltage source is steady, we can treat the capacitor as open circuit and the inductor as short circuit.

$$i'_L = 0$$

So

$$i_L = 0.096\angle 0.098^\circ\,\mathrm{A}$$

Attachments

$\pi = 3.$

14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
84102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
27120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817
48815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
33057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
89122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277
05392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091
73637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
86403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083
81420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
17122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796
82303019520353018529689957736225994138912497217752834791315155748572424541506959
50829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012
85836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464
62080466842590694912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824300
35587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030
28618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596
02364806654991198818347977535663698074265425278625518184175746728909777727938000
81647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468
43852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179
04946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642
25125205117392984896084128488626945604241965285022210661186306744278622039194945
04712371378696095636437191728746776465757396241389086583264599581339047802759009
94657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401
36394437455305068203496252451749399651431429809190659250937221696461515709858387
41059788595977297549893016175392846813826868386894277415599185592524595395943104
99725246808459872736446958486538367362226260991246080512438843904512441365497627
80797715691435997700129616089441694868555848406353422072225828488648158456028506
01684273945226746767889525213852254995466672782398645659611635488623057745649803
55936345681743241125150760694794510965960940252288797108931456691368672287489405
60101503308617928680920874760917824938589009714909675985261365549781893129784821
68299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782
10511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344
03742007310578539062198387447808478489683321445713868751943506430218453191048481

00537061468067491927819119793995206141966342875444064374512371819217999839101591
95618146751426912397489409071864942319615679452080951465502252316038819301420937
62137855956638937787083039069792077346722182562599661501421503068038447734549202
60541466592520149744285073251866600213243408819071048633173464965145390579626856
10055081066587969981635747363840525714591028970641401109712062804390397595156771
57700420337869936007230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198
41484882916447060957527069572209175671167229109816909152801735067127485832228718
35209353965725121083579151369882091444210067510334671103141267111369908658516398
31501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535
89322618548963213293308985706420467525907091548141654985946163718027098199430992
44889575712828905923233260972997120844335732654893823911932597463667305836041428
13883032038249037589852437441702913276561809377344403070746921120191302033038019
76211011004492932151608424448596376698389522868478312355265821314495768572624334
41893039686426243410773226978028073189154411010446823252716201052652272111660396
66557309254711055785376346682065310989652691862056476931257058635662018558100729
36065987648611791045334885034611365768675324944166803962657978771855608455296541
26654085306143444318586769751456614068007002378776591344017127494704205622305389
94561314071127000407854733269939081454664645880797270826683063432858785698305235
80893306575740679545716377525420211495576158140025012622859413021647155097925923
09907965473761255176567513575175829666454779174501129961489030463994713296210734 0
43751895735961458901938971311179042978285647503203198691514028708085990480109412
14722131794764777262241425485454033215718530614228813758504306332175182979866223
71721591607716692547487389866549494501146540628433663937900397692656721463853067
36096571209180763832716641627488880078692560290228472104031721186082041900042296
61711963779213375751149595015660496318629472654736425230817703675159067350235072
83540567040386743513622224771589150495309844489333096340878076932599397805419341
44737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735381
29741677294786724229246543668009806769282382806899640048243540370141631496589794
09243237896907069779422362508221688957383798623001593776471651228935786015881617
55782973523344604281512627203734314653197777416031990665541876397929334419521541
34189948544473456738316249934191318148092777710386387734317720754565453220777092
12019051660962804909263601975988281613323166636528619326686336062735676303544776
28035045077723554710585954870279081435624014517180624643626794561275318134078330
33625423278394497538243720583531147711992606381334677687969597030983391307710987
04085913374641442822772634659470474587847787201927715280731767907707157213444730
60570073349243693113835049316312840425121925651798069411352801314701304781643788
51852909285452011658393419656213491434159562586586557055269049652098580338507224
26482939728584783163057777560688876446248246857926039535277348030480290058760758
25104747091643961362676044925627420420832085661190625454337213153595845068772460
29016187667952406163425225771954291629919306455377991403734043287526288896399587

94757291746426357455254079091451357111369410911939325191076020825202618798531887
70584297259167781314969900901921169717372784768472686084900337702424291651300500
51683233643503895170298939223345172201381280696501178440874519601212285993716231
30171144484640903890644954440061986907548516026327505298349187407866808818338510
22833450850486082503930213321971551843063545500766828294930413776552793975175461
39539846833936383047461199665385815384205685338621867252334028308711232827892125
07712629463229563989898935821167456270102183564622013496715188190973038119800497
34072396103685406643193950979019069963955245300545058068550195673022921913933918
56803449039820595510022635353619204199474553859381023439554495977837790237421617
27111723643435439478221818528624085140066604433258885698670543154706965747458550
33232334210730154594051655379068662733379958511562578432298827372319898757141595
78111963583300594087306812160287649628674460477464915995054973742562690104903778
19868359381465741268049256487985561453723478673303904688383436346553794986419270
56387293174872332083760112302991136793862708943879936201629515413371424892830722
01269014754668476535761647737946752004907571555278196536213239264061601363581559
07422020203187277605277219005561484255518792530343513984425322341576233610642506
39049750086562710953591946589751413103482276930624743536325691607815478181152843
66795706110861533150445212747392454494542368288606134084148637767009612071512491
40430272538607648236341433462351897576645216413767969031495019108575984423919862
91642193994907236234646844117394032659184044378051333894525742399508296591228508
55582157250310712570126683024029295252201187267675622041542051618416348475651699
98116141010029960783869092916030288400269104140792886215078424516709087000699282
12066041837180653556725253256753286129104248776182582976515795984703562226293486
00341587229805349896502262917487882027342092222453398562647669149055628425039127
57710284027998066365825488926488025456610172967026640765590429099456815065265305
37182941270336931378517860904070866711496558343434769338578171138645587367812301
45876871266034891390956200993936103102916161528813843790990423174733639480457593
14931405297634757481193567091101377517210080315590248530906692037671922033229094
33467685142214477379393751703443661991040337511173547191855046449026365512816228
824462575916333303910722538374218214088350865739177150968288747826569959957449066
17583441375223970968340800535598491754173818839994469748676265516582765848358845
31427756879002909517028352971634456212964043523117600665101241200659755851276178
58382920419748442360800719304576189323492292796501987518721272675079812554709589
04556357921221033346697499235630254947802490114195212382815309114079073860251522
74299581807247162591668545133312394804947079119153267343028244186041426363954800
04480026704962482017928964766975831832713142517029692348896276684403232609275249
60357996469256504936818360900323809293459588970695365349406034021665443755890045
63288225054525564056448246515187547119621844396582533754388569094113031509526179
37800297412076651479394259029896959469955657612186561967337862362561252163208628
69222103274889218654364802296780705765615144632046927906821207388377814233562823

60896320806822246801224826117718589638140918390367367222088832151375560037279839
40041529700287830766709444745601345564172543709069793961225714298946715435784687
88614445812314593571984922528471605049221242470141214780573455105008019086996033
02763478708108175450119307141223390866393833952942578690507643100638351983438934
15961318543475464955697810382930971646514384070070736041123735998434522516105070
27056235266012764848308407611830130527932054274628654036036745328651057065874882
25698157936789766974220575059683440869735020141020672358502007245225632651341055
92401902742162484391403599895353945909440704691209140938700126456001623742880210
92764579310657922955249887275846101264836999892256959688159205600101655256375678

$$e = 2.$$

71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
45713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381
32328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244
76146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133
13845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416
92836819025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987
93163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849
64651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823
76464804295311802328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690351
59888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496
84875602336248270419786232090021609902353043699418491463140934317381436405462531
52096183690888707016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704
17189861068739696552126715468895703503540212340784981933432106817012100562788023
51930332247450158539047304199577770935036604169973297250886876966403555707162268
44716256079882651787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096409
75459185695638023637016211204774272283648961342251644507818244235294863637214174
02388934412479635743702637552944483379980161254922785092577825620926226483262779
33386566481627725164019105900491644998289315056604725802778631864155195653244258
69829469593080191529872117255634754639644791014590409058629849679128740687050489
58586717479854667757573205681288459205413340539220001137863009455606881667400169
84205580403363795376452030402432256613527836951177883863874439662532249850654995
88623428189970773327617178392803494650143455889707194258639877275471096295374152
11151368350627526023264847287039207643100595841166120545297030236472549296669381
15137322753645098889031360205724817658511806303644281231496550704751025446501172
72115551948668508003685322818315219600373562527944951582841882947876108526398139
55990067376482922443752871846245780361929819713991475644882626039033814418232625
15097482798777996437308997038886778227138360577297882412561190717663946507063304
52795466185509666618566470971134447401607046262156807174818778443714369882185596

709591025968620023537185887485696522000503117343920732113908032936344797273559552773490717837934216370120500545132638354400018632399149070547977805669785335804896690629511943247309958765523681285904138324116072260299833053537087613893963917795745401613722361878936526053815584158718692553860616477983402543512843961294603529133259427949043372990857315802909586313826832914771163963370924003168945863606064584592512699465572483918656420975268508230754425459937691704197778008536273094171016343490769642372229435236612557250881477922315197477806056967253801718077636034624592787784658506560507808442115296975218908740196609066518035165017925046195013665854366327125496399085491442000145747608193022120660243300964127048943903971771951806990869986066365832322787093765022601492910115171776359446020232493002804018677239102880978666056511832600436885088171572386698422422010249505518816948032210025154264946398128736776589276881635983124778865201411741109136011649950766290779436460058519419985601626479076153210387275571269925182756879893027617611461625493564959037980458381823233686120162437365698467037858533052758333379399075216606923805336988795651372855938834998947074161815501253970646481719467083481972144888987906765037959036696724949925452790337296361626589760394985767413973594410237443297093554779826296145914429364514286171585873397467918975712119561873857836447584484235555810500256114923915188930994634284139360803830916628188115037152849670597416256282360921680751501777253874025642534708790891372917228286115159156837252416307722544063378759310598267609442032619242853170187817729602354130606721360460003896610936470951414171857770141806064436368154644400533160877831431744408119494229755993140118886833148328027065538330046932901157441475631399972217038046170928945790962716622607407187499753592127560844147378233032703301682371936480021732857349359475643341299430248502357322145978432826414216848787216733670106150942434569844018733128101079451272237378861260581656680537143961278887325273738903928905068653241380627960259303877276977837928684093253658807339884572187460210053114833513238500478271693762180049047955979592905916554705057775143081751126989851884087185640260353055837378324229241856256442550226721559802740126179719280471396006891638286652770097527670697770364392602243728418408832518487704726384403795301669054659374616193238403638931313643271376888410268112198912752230562567562547017250863497653672886059667527408686274079128565769963137897530346606166698042182677245605306607738996242183408598820718646826232150802828635974683965435885668550377313129658797581050121491620765676995065971534476347032085321560367482860837865680307306265763346977429563464371670939719306087696349532884683361303882943104080029687386911706666614680001512114344225602387447432525076938707777519329994213727721125884360871583483562696166198057252661220679754062106208064988291845439530152998209250300549825704339055357016865312052649561485724925738620691740369521353373253166634546658859728665945113644137033139367211856955395210845840724432383558606310680696492485123263269951460359603729725319836842336390463213671011619282171115028280160448805880238203198149309636959673583274202498824532136710116192821711150282801604488058802382031981493096369596735832742024988245

68494127386056649135252670604623445054922758115170931492187959271800194096886698
68370373022004753143381810927080300172059355305207007060722339994639905713115870
99635777359027196285061146514837526209565346713290025994397663114545902685898979
11583709341937044115512192011716488056694593813118384376562062784631049034629395
00294583411648241149697583260118007316994373935069662957124102732391387417549230
71862454543222039552735295240245903805744502892246886285336542213815722131163288
11205214648980518009202471939171055539011394331668151582884368760696110250517100
73927623855533862725535388309606716446623709226468096712540618695021431762116681
40097595281493907222601112681153108387317617323235263605838173151034595736538223
53499293582283685100781088463434998351840445170427018938199424341009057537625776
75711180900881641833192019626234162881665213747173254777277834887743665188287521
56685719506371936565390389449366421764003121527870222366463635755503565576948886
54950027085392361710550213114741374410613444554419210133617299628569489919336918
47294785807291560885103967819594298331864807560836795514966364489655929481878517
84038773326247051945050419847742014183947731202815886845707290544057510601285258
05659470304683634459265255213700806875200959345360731622611872817392807462309468
53678231060979215993600199462379934342106878134973469592464697525062469586169091
78573976595199392993995567542714654910456860702099012606818704984178079173924071
94599632306025470790177452751318680998228473086076653686685551646770291133682756
31072233467261137054907953658345386371962358563126183871567741187385277229225947
43373785695538456246801013905727871016512966636764451872465653730402443684140814
48873295784734849000301947788802046032466084287535184836495919508288832320652212
81041904480472479492913422849519700226013104300624107179715027934332634079959605
31446053230488528972917659876016667811937932372453857209607582277178483361613582
61289622611812945592746276713779448758675365754486140761193112595851265575973457
30153336426307679854433857617153334623252705720053039882894990342595662329757824
88735029259166825894456894655992658454762694528780516501720674785417887982276806
53665064191097343452887833862172615626958265447820567298775642632532159429441803
99432170000905426507630955884658951717091476074371368933194690909819045012903070
99566226620303182649365733698419555776963787624918852865686607600566025605445711
33728684020557441603083705231224258722343885412317948138855007568938112493538631
86352870837998456926199817945233640874295911807474534195514203517261842008455091
70845682368200897739455842679214273477560879644279202708312150156406341341617166
44806981548376449157390012121704154787259199894382536495051477137939914720521952
90793961376211072384942906163576045962312535060685376514231153496656837151166042
20796394466621163255157729070978473156278277598788136491951257483328793771571459
09106484164267830994972367442017586226940215940792448054125536043131799269673915
75424192966073123937635421392306178767539587114361040894099660894714183406983629
93675362621545247298464213752891079884381306095552622720837518629837066787224430
19579379378607210725427728907173285487437435578196651171661833088112912024520404

86822000723440350254482028342541878846536025915064452716577000445210977355858976
22655484941621714989532383421600114062950718490427789258552743035221396835679018
07640604213830730877446017084268827226117718084266433365178000217190344923426426
62922614560043373838683355553434530042648184739892156270860956506293404052649432
44261445665921291225648893569655009154306426134252668472594914314239398845432486
32746184284665598533231221046625989014171210344608427161661900125719587079321756
96985440133976220967494541854071184464339469901626983516078489245140589409463952
67807354579700307051163682519487701189764002827648414160587206184185297189154019
68825328930914966534575357142731848201638464483249903788606900807270932767312758
19665639411489617168329804551397295066876047409154204284299935410258291135022416
90769431668574242522509026939034814856451303069925199590436384028429267412573422
44776558417788617173726546208549829449894678735092958165263207225899236876845701
78230380965678831122893058091405726108658848458731016581511675333276748870148291
67419701512559782572707406431808601428149024146780472327597684269633935773542930
18673943971638861176420900406866339885684168100387238921448317607011668450388721
23643670433140911557332801829779887365909166596124020217785588548761761619893707
94380056663364884365089144805571039765214696027662583599051987042300179465536788

CMakeLists.txt

```
cmake_minimum_required(VERSION 3.5)
project(homework1.ex1)

set(CMAKE_CXX_STANDARD 14)

find_library(libgmp rt /usr/lib)
find_library(libgmpxx rt /usr/lib)

set(SOURCE_FILES main)

add_executable(homework1.ex1 ${SOURCE_FILES})
target_link_libraries(homework1.ex1 libgmp.so libgmpxx.so)
```

main.cpp

```
//
// Created by liu on 17-5-24.
//

#include <gmpxx.h>
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
```

```
#include <sstream>

using namespace std;

void output(const mpq_class &sum, const string &filename, const int
    width = 80, const int precision = 10000)
{
    mpf_class num(sum.get_num(), precision * 5);
    mpf_class den(sum.get_den(), precision * 5);
    mpf_class ans(num / den);
    stringstream ss;
    ss << setprecision(precision + 2) << ans << endl;
    ofstream out(filename);
    while (!ss.eof())
    {
        char c;
        ss >> c;
        out << c;
        if (c == '.')break;
    }
    out << " \\\\" << endl;
    while (!ss.eof())
    {
        string str;
        ss >> setw(width) >> str;
        if (str.length() <= 1)break;
        out << str << " \\\\" << endl;
    }
    out.close();
}

mpq_class generate_ep(int precision = 10000)
{
    mpq_class ep(1, 10), temp(1, 10);
    while (precision > 0)
    {
        if (precision % 2)ep *= temp;
        temp *= temp;
        precision /= 2;
    }
    return ep;
}

mpq_class calculate_pi(const mpq_class &ep)
{
    mpz_class k = 0;
    mpq_class a = 1, b = 0, sum = 0;
    mpq_class temp;
    do
```

```
57      {
58          temp = a * (4. / (b + 1.) - 2. / (b + 4.) - 1. / (b + 5.) -
                1. / (b + 6.));
59          sum += temp;
60          b += 8;
61          a /= 16;
62      } while (temp > ep);
63      return sum;
64  }
65
66  mpq_class calculate_e(const mpq_class &ep)
67  {
68      mpq_class k = 1, sum = 1, temp = 1;
69      do
70      {
71          temp /= k++;
72          sum += temp;
73      } while (temp > ep);
74      return sum;
75  }
76
77  int main()
78  {
79      mpq_class ep = generate_ep(10000);
80      output(calculate_pi(ep), "pi.txt");
81      output(calculate_e(ep), "e.txt");
82  }
```