

练习 4 功和能量

一、选择题：将符合题意的答案前的字母填入下表中相应题号的空格内，并在题后空白处写出解题过程。

- B** 1. 质量为 $m = 0.5 \text{ kg}$ 的质点，在 Oxy 坐标平面内运动，其运动方程为 $x = 5t$, $y = 0.5t^2$

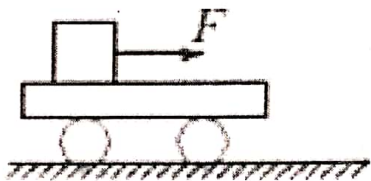
(SI)，从 $t = 2\text{s}$ 到 $t = 4\text{s}$ 这段时间内，外力对质点作的功为 [B]

- (A) 1.5 J; $\begin{cases} x=5t \\ y=0.5t^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} v_x=5 \\ v_y=t \end{matrix}$
 (B) 3 J; $t=2\text{s}$ 时, $v_x=5\text{ m/s}, v_y=2\text{ m/s} \quad E_{k1} = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (5^2 + 2^2) = 7.25 \text{ (J)}$
 (C) 4.5 J; $t=4\text{s}$ 时, $v_x=5\text{ m/s}, v_y=4\text{ m/s} \quad E_{k2} = 10.25 \text{ (J)}$
 (D) -1.5 J. $A = E_{k2} - E_{k1} = 10.25 - 7.25 = 3 \text{ (J)}$

- D** 2. 如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力 \vec{F}

拉箱子，使它由小车的左端达到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没有固定。

试以水平地面为参照系，判断下列结论中正确的是 [D]



两种情况，箱子相对地面移动的距离不同， \vec{F} 做的功不等，摩擦力对箱子做的功不等，获得的动能也不等。由摩擦而产生的热

- (A) 在两种情况下， \vec{F} 做的功相等；
 (B) 在两种情况下，摩擦力对箱子做的功相等；
 (C) 在两种情况下，箱子获得的动能相等；
 (D) 在两种情况下，由于摩擦而产生的热相等。

等于摩擦力乘以相对位移，
 两种情况，相对位移都是小车的长度，所以产生的热相等。

- A** 3. 下列叙述中正确的是 [A]

- (A) 物体的动量不变，动能也不变；
 (B) 物体的动能不变，动量也不变；
 (C) 物体的动量 变化，动能也一定变化；
 (D) 物体的动能变化，动量却不一定变化。

动量是矢量，动能是标量。



D 4. 在下列说法中, 选出正确的结论[**D**]

- (A) 一个力的功、一对力(作用与反作用)的功、动能均与参考系的选择无关;
- (B) 一个力的功、一对力的功、与参考系选择有关, 而动能与参考系无关;
- (C) 动能、一对力的功与参考系有关, 而一个力的功与参考系无关;
- (D) 一个力的功、动能与参考系有关, 而一对力的功与参考系无关。

D 5. 将一重物匀速地推上一个斜坡, 因其动能不变, 所以[**D**]

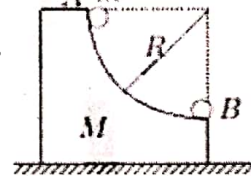
- (A) 推力不做功;
- (B) 推力功与摩擦力的功等值反号;
- (C) 推力功与重力功等值反号;
- (D) 此重物所受的外力的功之和为零。

动能定理

A 6. 光滑平面上有一半径为 $R = 0.500\text{m}$ 的 $1/4$ 圆弧形物块(如图), 其质量为 $M = 2.00\text{ kg}$, 圆弧表面光滑, 若另有一质量为 $m = 2.00\text{ kg}$ 的滑块从其顶端 A 沿圆弧自由滑到底端 B, 此时圆弧形物块 M 的速度 $v =$ [**A**]。(重力加速度 $g = 9.80\text{ m/s}^2$)

- (A) 2.2 m/s ;
- (B) 3.8 m/s ;
- (C) 4.4 m/s ;
- (D) 5.2 m/s ;
- (E) 5.4 m/s 。

以圆弧形物块和滑块为系统, 合外力为零, 动量守恒。
 $0 = Mv + mv'$ $M = m$
 v 与 v' 大小相等, 反向。
 机械能守恒
 $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = mgr$ $v = \sqrt{gr} \approx 2.2\text{ m/s}$



B 7. 质量分别为 $m = 1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}$ 和 $M = 19.93 \times 10^{-27}\text{ kg}$ 的两个粒子, 最初处在静止状态, 并且彼此相距无穷远。以后, 由于万有引力的作用, 它们彼此接近。当它们之间的距离为 $d = 3.00 \times 10^{-9}\text{ m}$ 时, 它们的相对速度 $v =$ [**B**]。(万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)

- (A) $3.8 \times 10^{-14}\text{ m/s}$;
- (B) $3.1 \times 10^{-14}\text{ m/s}$;
- (C) $2.7 \times 10^{-14}\text{ m/s}$;
- (D) $2.4 \times 10^{-14}\text{ m/s}$;
- (E) $2.2 \times 10^{-14}\text{ m/s}$ 。

机械能守恒

$$0 = E_p + \frac{1}{2}Mv''^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

$$= -G\frac{Mm}{d} + \frac{1}{2}Mv''^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

系统合外力为零, 动量守恒, $0 = Mv'' + mv'$
 相对速度 $v = v'' - v' \approx 3.1 \times 10^{-14}\text{ (m/s)}$

练习 4



- C 8. 一个质点在指向中心的平方反比力 $F = k/r^2$ ($k = 7.00 \text{ N/m}^2$) 的作用下, 作半径为 $r = 0.25 \text{ m}$ 的圆周运动, 则质点运动的总机械能 $W = [C]$ 。(选取距离力心无穷远处的势能为零) 参数:

(A) -10 J ;

(B) -12 J ;

(C) -14 J ;

(D) -16 J ;

(E) -18 J 。

$$F = \frac{k}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{r} = \frac{7}{2 \times 0.25} = 14 \text{ (J)}$$

$$E_p = \int_{r=0.25}^{\infty} -\frac{k}{r^2} dr = -28 \text{ J}$$

$$W = E_p + E_k = -14 \text{ J}$$

- A 9. 质量为 $m = 2.00 \text{ kg}$ 的质点开始时静止, 在如图所示合力 F 的作用下沿直线运动, 已知 $F = F_0 \sin(2\pi t/T)$, 方向与直线平行, 若 $F_0 = 3.00 \text{ N}$, 周期为 $T = 3.10 \text{ s}$, 则在 0 到时间 $T/2$ 内, 力 F 所作的总功 $W = [A]$ 。

(A) 2.2 J ;

(B) 4.2 J ;

(C) 5.7 J ;

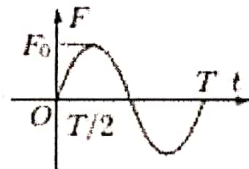
(D) 8.2 J ;

(E) 11 J 。

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \int_0^{T/2} F dt = \frac{F_0 T}{\pi}$$

$$W = \frac{F_0^2 T^2}{2m\pi^2} \approx 2.2 \text{ (J)}$$



- D 10. 一质子轰击 α 粒子时因未对准而发生轨迹偏转。假设附近没有其它带电粒子, 则在这一过程中, 由此质子和 α 粒子组成的系统, $[D]$

(A) 动量守恒, 能量不守恒;

(B) 能量守恒, 动量不守恒;

(C) 动量和能量都不守恒;

(D) 动量和能量都守恒。

选质子和 α 粒子系统, 不受合外力

动量守恒, 只有内力做功, 机械能守恒。

- A 11. 如图所示, 质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B, 置光滑桌面上, A 和 B 之间连有一轻弹簧。

另有质量为 m_1 和 m_2 的物体 C 和 D 分别置于物体 A 与 B 之上, 且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦系数均不为零。首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B, 使弹簧被压缩。然后撤掉外力, 则在 A 和 B 弹开的过程中, 对 A、B、C、D 弹簧组成的系统 $[A]$



- (A) 系统的动量守恒, 机械能不守恒;
 (B) 系统的动量守恒, 机械能守恒;
 (C) 系统的动量不守恒, 机械能守恒;
 (D) 系统的动量与机械能都不守恒。

系统合外力为零, 动量守恒。

摩擦力做功, 机械能不守恒。

- C 12. 两个质量为 m_1 和 m_2 的小球, 在一直线上作完全弹性碰撞, 碰撞前两小球的速度分别为 v_1

和 v_2 (同向), 在碰撞过程中两球的最大形变是 [C] $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v$$

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$$

$$(A) \frac{1}{2}\sqrt{m_1m_2}(v_1 - v_2)^2;$$

$$(B) \frac{1}{2}\sqrt{m_1m_2}(v_1 + v_2)^2;$$

$$(C) \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1+m_2)};$$

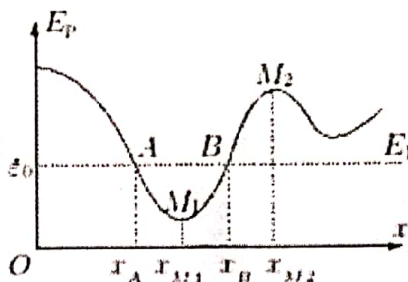
$$(D) \frac{m_1m_2v_1v_2}{2(m_1+m_2)};$$

碰撞前, 两球速度不一样, 碰撞过程中有一瞬间两球速度相等 (两球有一瞬间是结合在一起), 动能转变成小球的形变势能, 然后形变势能转换成动能, 两球分开。整个过程动量守恒, 机械能守恒。

最大形变势能则为碰撞前总动能减两球结合在一起时的动能。

- C 13. 由图中所示势能曲线分析物体的运动情况如下, 请指出哪个说法正确: [C]

- (A) 在曲线 M_1 至 M_2 段物体受力 $f(x) > 0$;
 (B) 曲线上的一点 M_1 是非稳定平衡点;
 (C) 开始在 x_A 与 x_B 之间的、总能量为 E_1 的物体的运动范围是 x_A 与 x_B 之间;
 (D) 总能量为 E_1 的物体的运动范围是 $0 \rightarrow \infty$ 之间。



$F_{保} = -\frac{dE_p}{dx}$
 保守力的方向指向势能减少的方向, 大于曲线斜率的绝对值。

- C 14. A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B , 其质量均忽略不计。今将二弹簧连接起来并竖直悬挂, 如图所示。当系统静止时, 二弹簧的弹性势能 E_{pA} 与 E_{pB} 之比为 [C]

$$(A) \frac{E_{pA}}{E_{pB}} = \frac{k_A}{k_B};$$

$$(B) \frac{E_{pA}}{E_{pB}} = \frac{k_A^2}{k_B^2};$$

$$(C) \frac{E_{pA}}{E_{pB}} = \frac{k_B}{k_A};$$

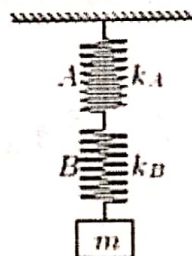
$$(D) \frac{E_{pA}}{E_{pB}} = \frac{k_B^2}{k_A^2};$$

$$E_{KA} = \frac{1}{2}k_A x_A^2$$

$$E_{KB} = \frac{1}{2}k_B x_B^2$$

$$mg = k_A x_A = k_B x_B$$

$$\frac{E_{KA}}{E_{KB}} = \frac{k_B}{k_A} \frac{\frac{1}{2}k_A x_A^2}{\frac{1}{2}k_B x_B^2} = \frac{k_B}{k_A}$$



15. 把一质量为 $m = 0.400 \text{ kg}$ 的物体，以初速度 $v_0 = 20.0 \text{ m/s}$ 竖直向上抛出，测得上升的最大高度为 $H = 18.0 \text{ m}$ ，则空气对它的阻力（假设阻力是恒力）为 $f = \text{D}$ （重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ）

(A) 1.4 N;

(B) 1.1 N;

(C) 1.8 N;

(D) 0.52 N;

(E) 0.29 N.

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = fH + mgH$$

$$f = \frac{mv_0^2}{2H} - mg$$

$$= \frac{0.4 \times 20^2}{2 \times 18} - 0.4 \times 9.8 = 0.52(\text{N})$$

二、填空题：将正确答案填入空格处，并在题后空白处写出计算过程。

1. 质量为 $m = 0.200 \text{ kg}$ 的物体，从高出弹簧上端 $h = 0.300 \text{ m}$ 处由静止自由下落到竖直放置在地面上的轻弹簧上，弹簧的劲度系数为 $k = 48.0 \text{ N/m}$ ，则弹簧被压缩的最大距离 $x = 0.20 \text{ m}$ 。（保留两位有效数字，重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ ）

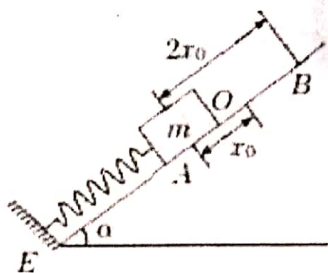
机械能守恒 $mg(h+x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0$$

$$24x^2 - 1.96x - 0.588 = 0$$

$$x_1 = 0.20(\text{m}) \quad x_2 = -0.12(\text{舍去})$$

2. 如图所示，轻弹簧的一端固定在倾角为 α 的光滑斜面的底端，另一端与质量为 m 的物体 C 相连， O 点为弹簧原长处， A 点为物体 C 的平衡位置， x_0 为弹簧被压缩的长度。如果在一外力作用下，物体由 A 点沿斜面向上缓慢移动了 $2x_0$ 距离而到达 B 点，则该外力所作功为 $2mgx_0 \sin \alpha$ 。



功能原理：一切外力和所有非保守内力所作的功的代数和等于系统机械能的增量。

$$2fx_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 + mg2x_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}kx_0^2$$

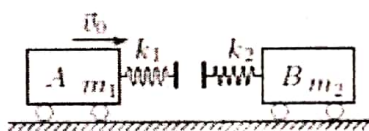


3. 有一劲度系数为 $k = 400 \text{ N/m}$ 的轻弹簧, 竖直放置, 下端悬一质量为 $m = 0.500 \text{ kg}$ 的小球。先使弹簧为原长, 而小球恰好与地接触。再将弹簧上端缓慢地提起, 直到小球刚能脱离地面为止。在此过程中外力所作的功 $W = \frac{m^2 g^2}{2k}$ (保留两位有效数字, 重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$)

刚能脱离地面 $kx = mg$ $x = \frac{mg}{k}$

$$W_{\text{外}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{m^2 g^2}{2k}$$

4. 如图, 两个带理想弹簧缓冲器的小车 A 和 B, 质量分别为 $m_1 = 1.50 \text{ kg}$, $m_2 = 1.80 \text{ kg}$ 。B 不动, A 以速度 $v_0 = 1.80 \text{ m/s}$ 与 B 碰撞, 如已知两车的缓冲弹簧的劲度系数分别为 $k_1 = 490 \text{ N/m}$, $k_2 = 460 \text{ N/m}$, 不计摩擦, 求两车相对静止时, 其间的作用力 $F = 25 \text{ N}$ 。



系统动量守恒, 机械能守恒

两车相对静止时 $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v$

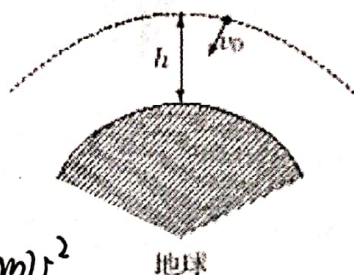
$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2} k_1 x_A^2 + \frac{1}{2} k_2 x_B^2$$

$F = k_1 x_A = k_2 x_B$ 方向相反

$x_A \approx 0.051 \text{ (m)}$

$F = k_1 x_A = 25 \text{ (N)}$

5. 如图所示, 已知地球质量 $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, 半径 $R = 6400 \text{ km}$, 陨石距地面高度为 R 的 $k = 0.400$ 倍时, 其速度为 $v_0 = 1500 \text{ m/s}$ 。忽略空气阻力, 则陨石落地的速率 $v = 6.1 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。(保留两位有效数字, 万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)



系统机械能守恒

$$-\frac{GMm}{R+kR} + \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2GMk}{R(1+k)} + v_0^2} \approx 6.1 \times 10^3 \text{ (m/s)}$$

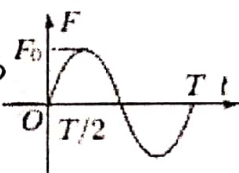


四、计算题：要规范答题，写出必要的文字说明，方程和演算步骤。

1. 质量为 m 的质点开始时静止，在如图所示合力 F 的作用下沿直线运动，已知 $F_0 \sin(2\pi t/T)$ ，方向与直线平行，求：(1) 在 0 到 T 时间内，力 \vec{F} 的冲量大小；(2) 在 0 到 $T/2$ 时间内，力 \vec{F} 的冲量大小；(3) 在 0 到 $T/2$ 时间内，力 \vec{F} 所作的总功。

解：(1) $I_1 = \int_0^T F_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt = -\frac{T F_0}{2\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \right)_0^T = 0$

(2) $I_2 = \int_0^{T/2} F_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt = -\frac{T F_0}{2\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \right)_0^{T/2} = \frac{T F_0}{\pi}$



(3) $a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \sin \frac{2\pi}{T} t$

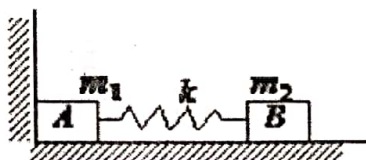
$v = \int_0^{T/2} a \, dt = \int_0^{T/2} \frac{F_0}{m} \sin \frac{2\pi}{T} t \, dt = -\frac{T F_0}{2\pi m} \left(\cos \frac{2\pi}{T} t \right)_0^{T/2} = \frac{T F_0}{\pi m}$

$A = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{F_0^2 T^2}{2 m \pi^2}$

2. 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B，用一个质量忽略不计、劲度系数为 k 的弹簧联接起来，放置在光滑水平面上，使 A 紧靠墙壁，如图所示。用力推木块 B 使弹簧压缩 x_0 ，然后释放。已知 $m_1 = m$ ， $m_2 = 3m$ ，求：

- (1) 释放后，A、B 两木块速度相等时的瞬时速度的大小；

- (2) 释放后，弹簧的最大伸长量。



解：(1) 释放后，弹簧恢复到原长时，A 将离开墙壁。此时 B 的速度为 v_{B0}

机械能守恒 $\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{B0}^2$ $v_{B0} = x_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}$

A 离开墙壁后，水平方向合外力为零，动量守恒，系统机械能守恒。

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_2 v_{B0}$

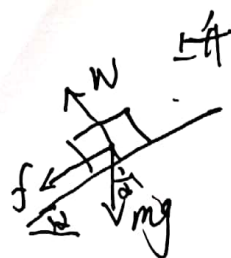
$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{B0}^2$

当 $v_1 = v_2$ 时，得 $v_1 = v_2 = \frac{3 v_{B0}}{4} = \frac{3}{4} x_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}$

- (2) 弹簧有最大伸长时， $v_1 = v_2 = \frac{3 v_{B0}}{4}$

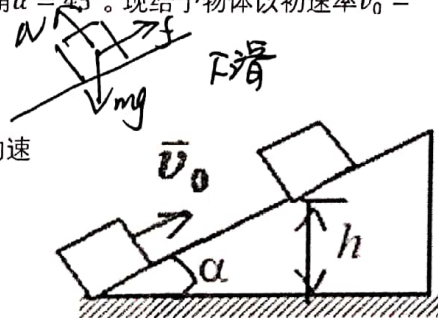
$x_{\max} = \frac{1}{2} x_0$





3. 一物体与斜面间的摩擦系数 $\mu = 0.20$, 斜面固定, 倾角 $\alpha = 45^\circ$. 现给予物体以初速率 $v_0 = 10 \text{ m/s}$, 使它沿斜面向上滑, 如图所示. 求:

- (1) 物体能够上升的最大高度 h ;
- (2) 该物体达到最高点后, 沿斜面返回到出发点时的速率 v .



$$(1) \quad N = mg \cos \alpha \quad f = \mu mg \cos \alpha$$

$$-(f + mg \sin \alpha) s = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$(\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha) \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$(2) \quad (mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) s = \frac{1}{2} m v^2$$

$$(mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu \cot \alpha)} = 8.16 \text{ (m/s)}$$

$$h = \frac{v^2}{2g(1 + \mu \cot \alpha)} = 4.25 \text{ (m)}$$

4. 某弹簧不遵守胡克定律, 若施力 F , 则相应伸长为 x , 力与伸长的关系为:

$$F = 52.8x + 38.4x^2 \text{ (SI)}$$

求: (1) 将弹簧从 $x_1 = 0.50 \text{ m}$ 拉伸到 $x_2 = 1.00 \text{ m}$ 时, 外力所做的功;

(2) 将弹簧横放在水平光滑桌面上, 一端固定, 另一端系一个质量为 2.17 kg 的物体, 然后将弹簧拉伸到 $x_2 = 1.00 \text{ m}$, 再将物体由静止释放, 求当弹簧回到 $x_1 = 0.50 \text{ m}$ 时, 物体的速率;

(3) 此弹簧的弹力是保守力吗?

$$\text{解: (1)} \quad A = \int_{0.5}^1 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{0.5}^1 (52.8x + 38.4x^2) dx = \left[26.4x^2 + 12.8x^3 \right]_{0.5}^1 = 31 \text{ J}$$

$$(2) \quad A' = \int_{0.5}^1 \vec{F}' \cdot d\vec{x} = \int_{0.5}^1 F' dx = \int_{0.5}^1 -F dx = 31 \text{ J}$$

$$A' = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \quad v = \sqrt{\frac{2A'}{m}} = 5.345 \text{ m/s}$$

(3) 弹力做功只与 x_1, x_2 有关, 与过程无关, 是保守力。

5. 质量为 $m = 2 \text{ kg}$ 的物体沿 x 轴作直线运动, 所受合外力 $F = 10 + 6x^2 \text{ (SI)}$. 如果在 $x = 0$ 处时速度 $v_0 = 0$; 试求该物体运动到 $x = 4 \text{ m}$ 处时动能、速度与加速度的大小。

$$\text{解: } A = \int_0^4 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^4 F dx = \int_0^4 (10 + 6x^2) dx = [10x + 2x^3]_0^4 = 168 \text{ (J)}$$

$$A = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 168 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = 168 \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 168}{2}} = 12.96 \text{ (m/s)}$$

练习 4

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10 + 6 \times 4^2}{2} = 53 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

